



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

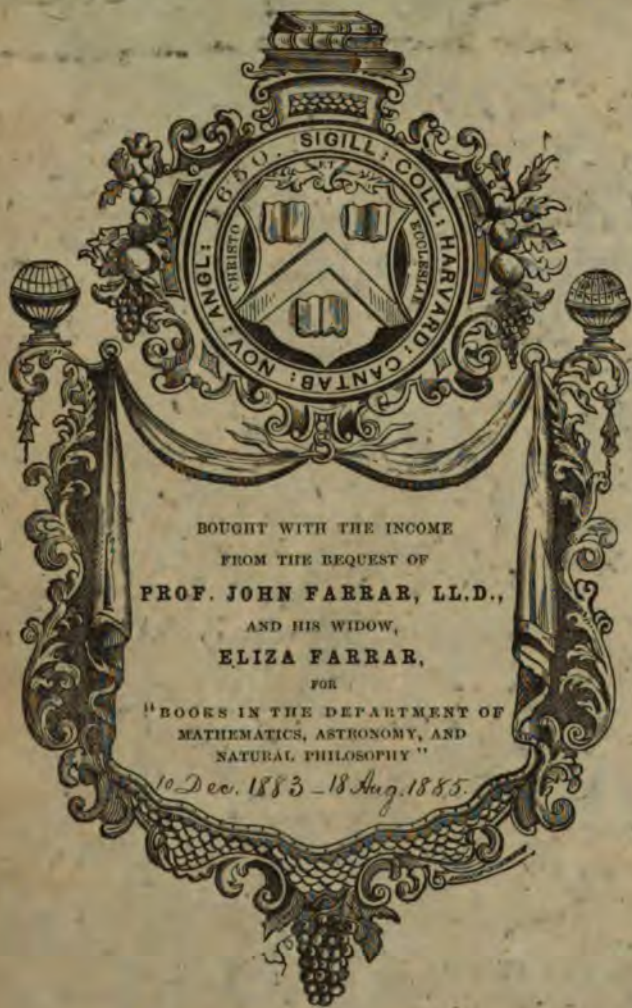
About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

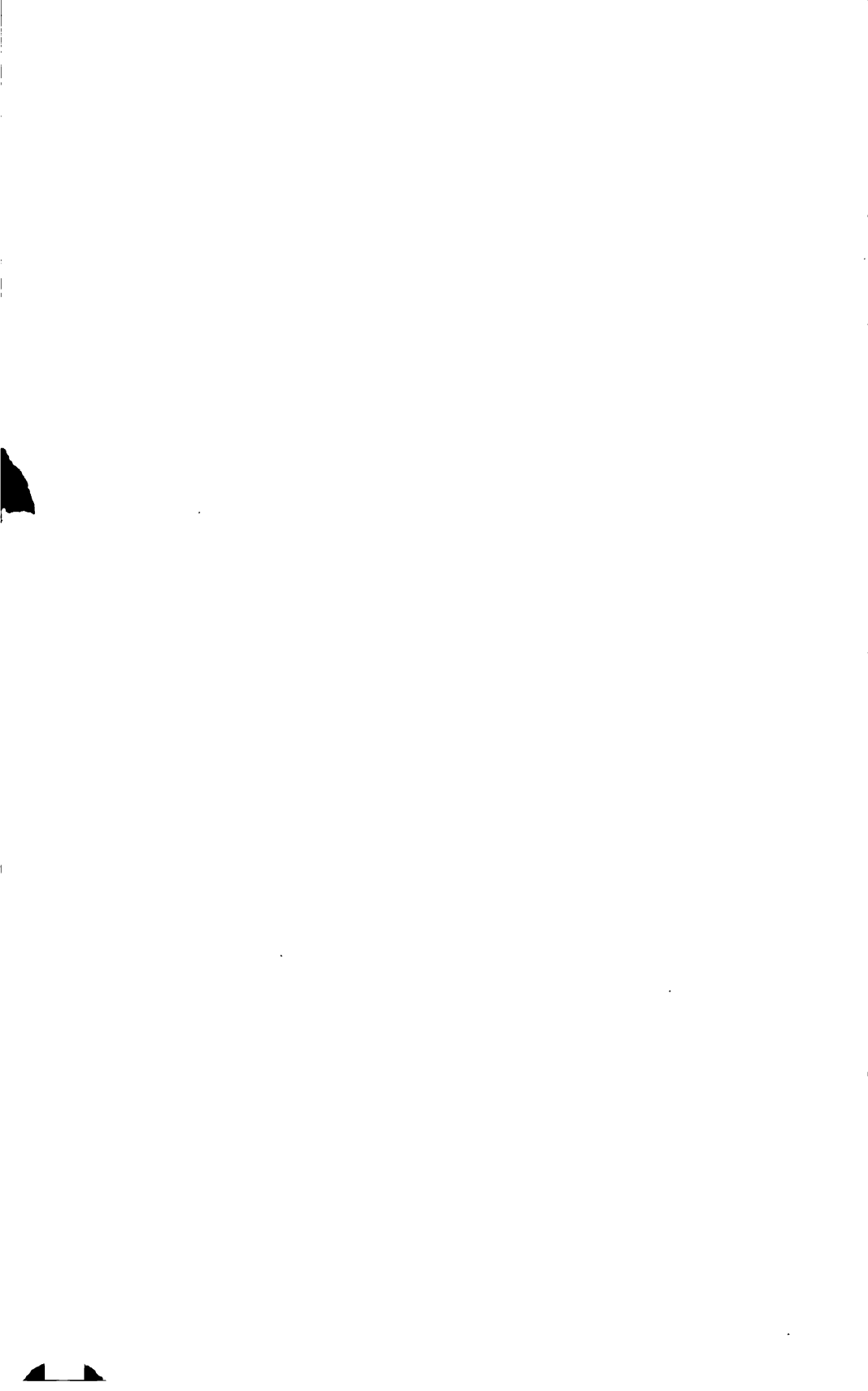


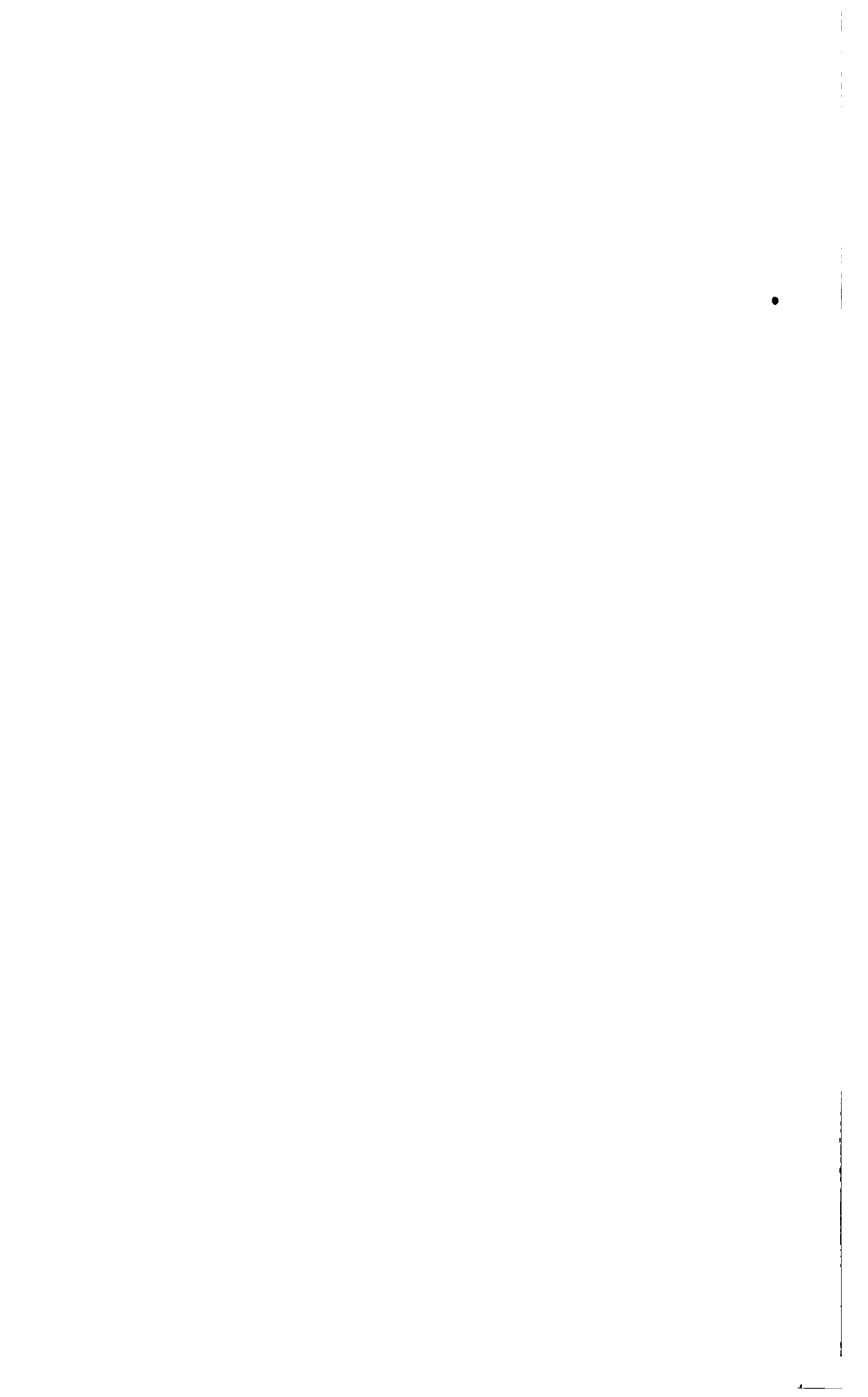
LSoc 386.4

Bd. April, 1886.











38-1-19

388

SITZUNGSBERICHTE

DEIT

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH - NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

ACHTUNDACHTZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHANDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1884.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXXXVIII. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1883. — HEFT I BIS V.

(Mit 10 Tafeln und 7 Holzschnitten.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1884.

~~143.9~~

LSoc386.4 1883, Dec. 10 - 1885, August 18.

Farrar Lund.

I N H A L T.

	Seite
XIV. Sitzung vom 7. Juni 1888: Übersicht	3
<i>Wisniewski</i> , Über eine neue Methode zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. [Preis: 50 kr. = 1 RMk.]	7
<i>Kachler</i> u. <i>Spitzer</i> , Über die Einwirkung von Natrium auf Campher. Vorläufige Mittheilung	74
<i>Dafert</i> , Studien über Perjodide	76
XV. Sitzung vom 14. Juni 1888: Übersicht	92
<i>Hann</i> , Über die klimatischen Verhältnisse von Bosnien und der Herzegovina. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	96
<i>v. Niessl</i> , Bahnbestimmung des grossen Meteoroiden vom 13. März 1883. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	117
<i>Etti</i> , Zur Geschichte der Eichenrindengerbsäuren	139
<i>Schram</i> , Darlegung der in den „Hilfstafeln für Chronologie“ zur Tabulirung der jüdischen Zeitrechnung angewandten Methode. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.]	158
XVI. Sitzung vom 21. Juni 1888: Übersicht	201
<i>Lieben</i> u. <i>Zeisel</i> , Über Condensationsproducte der Aldehyde und ihre Derivate. III. Abhandlung	205
<i>Natterer</i> , Über α -Dichlorcrotonaldehyd, ein Condensations- product des Monochloraldehyds	213
<i>Kachler</i> u. <i>Spitzer</i> , Verhalten der isomeren Dibromcampher ge- gen Salpetersäure	228
<i>Skraup</i> u. <i>Vortmann</i> , Über Derivate des Dipyridyls. II. Mit- theilung	243
<i>Hammerl</i> , Studie über das Kupfervoltmeter. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	278
XVII. Sitzung vom 5. Juli 1888: Übersicht	297
<i>Skraup</i> , Zur Constitution des Chinins und Chinidins	301
<i>Benedikt</i> u. <i>v. Schmidt</i> , Notizen über Halogenderivate	306
<i>Hassner</i> , Über Nitroresorcinsulfosäure	312
<i>Dafert</i> , Derivate des Amylbenzols	318
<i>Auer</i> v. <i>Welsbach</i> , Über die Erden des Gadolinits von Ytterby .	332
<i>Kachler</i> u. <i>Spitzer</i> , Über Oxycampher aus β -Dibromcampher . .	345

	Seite
XVIII. Sitzung vom 12. Juli 1882: Übersicht	354
<i>Janovsky</i> , Über Amidoazobenzolparasulfosäure. (Mit 5 Holz- schnitten.)	358
<i>Fossek</i> , Über ein dem Hydrobenzoin analoges Derivat des Iso- butyraldehyds	366
— Darstellung acetonfreien Isobutyraldehyds	382
<i>Jahn</i> , Elektrolytische Studien. (Vorläufige Mittheilung.) (Mit 1 Holzschnitt.)	385
<i>Kotányi</i> , Zur Reduction hyperelliptischer Integrale. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	401
<i>Waelch</i> , Geometrische Darstellung der Theorie der Polar- gruppen. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	418
<i>Kohn</i> , Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	424
XIX. Sitzung vom 19. Juli 1883: Übersicht	432
<i>Weyr</i> , Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.]	436
<i>Barth</i> u. <i>Weidel</i> , Über die Oxydation des Morphins. (Vorläu- fige Mittheilung.)	483
<i>Goldschmidt</i> , Über Papaverin. (Vorläufige Mittheilung.)	487
<i>Waage</i> , Einwirkung von Ammoniak auf Propionaldehyd. (Syn- thetische Darstellung des Parvolins	491
<i>Hänig</i> u. <i>Zatsek</i> , Mittheilungen aus dem Laboratorium für all- gemeine Chemie an der technischen Hochschule zu Brünn. Zur directen Bestimmung der Kohlensäure bei Gegenwart von Sulfiden, Sulfiten und Thiosulfaten der Alkalien.	516
— Über die Einwirkung von Kaliumpermanganat auf einige Schwefelverbindungen	521
<i>Habermann</i> , Über einige basische Sulfate. (Vorläufige Mitthei- lung	536
— Über das Arbutin	537
<i>Puchta</i> , Über gewisse mechanisch erzeugbare Curven und Flä- chen höherer Ordnung. (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.]	571
<i>Mildner</i> , Beitrag zur Auswerthung unendlicher Producte und Reihen. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	591
<i>Ginzel</i> , Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. — II. Abhandlung. (Mit 4 Karten.) [Preis: 2 fl. = 4 RMk.]	629
<i>Lippmann</i> u. <i>Fleissner</i> , Zur Kenntniss der Azyline. III. Mitthei- lung. (Mit 1 Holzschnitt.)	756
<i>Hausmaninger</i> , Versuche über den Stoss von Kautschukoylin- dern. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	768

XX. Sitzung vom 11. October 1883: Übersicht	785
<i>Vogel</i> , Einige spectralanalytische Untersuchungen an Sternen, ausgeführt mit dem grossen Refractor der Wiener Stern- warte. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.]	791
XXI. Sitzung vom 18. October 1883: Übersicht	816
<i>Winckler</i> , Reduction der Bedingungen des Euler'schen Cri- teriums der Integrabilität auf eine einzige Gleichung. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.]	820
<i>Boltzmann</i> , Zur Theorie der Gasdiffusion, II. Theil. Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	835
— Über das Arbeitsquantum, welches bei chemischen Ver- bindungen gewonnen werden kann. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	861
<i>Jarolimck</i> , Über die Gravitation. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	897
<i>Smolka</i> , Über Isobutylbiguanid und seine Verbindungen	912
XXII. Sitzung vom 25. October 1883: Übersicht	930
XXIII. Sitzung vom 8. November 1883: Übersicht	935
<i>Simony</i> , Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. Schluss. (Mit 6 Tafeln.) [Preis: 1 fl. = 2 Rmk.]	939
<i>Gegenbauer</i> , Über die Bessel'schen Functionen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	975
<i>Kortweg</i> , Über die von Prof. Wolf vermuthete Doppelperiode der Sonnenfleckenhäufigkeit. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.]	1004
<i>Palisa</i> , Bericht über die während der totalen Sonnenfinsterniss vom 6. Mai 1883 erhaltenen Beobachtungen. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	1018
XXIV. Sitzung vom 16. November 1883: Übersicht	1032
XXV. Sitzung vom 22. November 1883: Übersicht	1036
<i>Waelsch</i> , Über die Bestimmung von Punktgruppen aus ihren Polaren. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	1039
XXVI. Sitzung vom 6. December 1883: Übersicht	1049
<i>v. Heppenger</i> , Über die Schweifaxe des Kometen 1874 III (Coggia). (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.]	1053
<i>Holetschek</i> , Über die Bahn eines Kometen, der während seiner günstigen Helligkeit nicht aus den Sonnenstrahlen heraus- treten kann. (Mit 5 Holzschnitten.) [Preis: 60 kr. = 1 Rmk. 20 Pfg.]	1099
XXVII. Sitzung vom 13. December 1883: Übersicht	1163
<i>Herz</i> , Bahnbestimmung des Planeten $\textcircled{232}$ Russia. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	1166

	Seite
XXVIII. Sitzung vom 20. December 1883: Übersicht	1197
<i>Stefan</i> , Über die Berechnung der Inductionscoefficienten von Drahtrollen. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.]	1201
<i>Odstrčil</i> , Über den Mechanismus der Fernwirkung elektrischer Kräfte. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] . .	1212
<i>Arche</i> , Über den Cerit und dessen Aufarbeitung auf Cer, Lanthan und Didymverbindungen	1224
<i>Auer v. Welsbach</i> , Über die Erden des Gadolinit von Ytterby. II. Abhandlung. (Mit 2 Tafeln.)	1237
<i>Schoute</i> , Notiz über die Lemniscate	1252

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVIII. BAND. I. HEFT.

Jahrgang 1883. — Juni.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie,
Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
1883.

I N H A L T

des 1. Heftes Juni 1883 des LXXXVIII. Bandes, II. Abtheilung der
Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

	Seite
XIV. Sitzung vom 7. Juni 1883: Übersicht	3
<i>Winckler</i> , Über eine neue Methode zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. [Preis: 50 kr. = 1 RMk.]	7
<i>Kachler</i> u. <i>Spitzer</i> , Über die Einwirkung von Natrium auf Cam- pher. Vorläufige Mittheilung	74
<i>Dafert</i> , Studien über Perjodide	76
XV. Sitzung vom 14. Juni 1883: Übersicht	92
<i>Hann</i> , Über die klimatischen Verhältnisse von Bosnien und der Herzegowina. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	96
<i>v. Niessl</i> , Bahnbestimmung des grossen Meteores vom 13. März 1883. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	117
<i>Etti</i> , Zur Geschichte der Eichenrindegerbsäuren	139
<i>Schram</i> , Darlegung der in den „Hilfstafeln für Chronologie“ zur Tabulirung der jüdischen Zeitrechnung angewandten Methode. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.]	158
XVI. Sitzung vom 21. Juni 1883: Übersicht	201
<i>Lieben</i> u. <i>Zeisel</i> , Über Condensationsproducte der Aldehyde und ihre Derivate. III. Abhandlung	205
<i>Natterer</i> , Über α -Dichlorcrotonaldehyd, ein Condensations- product des Monochloraldehyds	213
<i>Kachler</i> u. <i>Spitzer</i> , Verhalten der isomeren Bibromcampher ge- gen Salpetersäure	228
<i>Skraup</i> u. <i>Vortmann</i> , Über Derivate des Dipyridyls. II. Mit- theilung	243
<i>Hammerl</i> , Studie über das Kupfervoltameter. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	278

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 80 kr. = 3 RMk. 60 Pfg.

1871. 82

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVIII. Band. I. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie,
Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XIV. SITZUNG VOM 7. JUNI 1883.

Die Direction des k. k. militär-geographischen Institutes übermittelt 22 Blätter Fortsetzungen (23. Lief.) der neuen Specialkarte der österr.-ungar. Monarchie (1:75000).

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. Constantin Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Zur Tertiärfloora von Borneo.“

Das c. M. Herr Prof. F. E. Schulze übersendet eine Arbeit aus dem zoologischen Institute der Universität Graz von Herrn Dr. Zoltán v. Roboz, betitelt: „*Calcutuba polymorpha* nov. gen. nov. spec.“

Herr Emil Waelsch, Hörer an der deutschen technischen Hochschule in Prag, übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Geometrische Darstellung der Theorie der Polargruppen“.

Der Secretär legt eine eingesendete Abhandlung von Herrn Ludwig Kotányi, cand. phil. an der Wiener Universität, betitelt: „Zur Reduction hyperelliptischer Integrale“ vor.

Herr Prof. Jos. Schlesinger an der Hochschule für Bodencultur in Wien zieht die von ihm in den Sitzungen dieser Classe vom 8. November 1866, 4. Jänner und 4. Juli 1872 und 6. October 1881 behufs Wahrung seiner Priorität hinterlegten versiegelten Schreiben uneröffnet zurück.

Das w. M. Herr Hofrath A. Winckler überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: „Über eine neue Methode zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.“

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak übergibt eine Abhandlung: „Beitrag zur Classification der Meteoriten“.

Das w. M. Herr Hofrath Franz Ritter v. Hauer übergibt eine Arbeit des Assistenten an der k. k. geologischen Reichsanstalt Herrn Heinrich Baron v. Foullon: „Über die mineralogische und chemische Zusammensetzung des am 16. Februar 1883 bei Alfianello gefallenen Meteorsteines“.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit der Herren J. Kachler und F. V. Spitzer: „Über die Einwirkung von Natrium auf Campher.“ (Vorläufige Mittheilung.)

Herr Josef Schlesinger, Professor an der k. k. Hochschule für Bodencultur, liest eine Abhandlung: „Über die Ursachen der Massenträgheit und Massenbewegung.“

Herr Robert Schram, Observator der k. k. österreichischen Gradmessung, überreicht eine Abhandlung: „Darlegung der in den Hilfstafeln für Chronologie zur Tabellirung der jüdischen Zeitrechnung angewandten Methode“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia Real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Entrega 225 et 226. Tomo XIX. Habana, 1883; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. 47^e année, 2^e série, tome XII. Nos. 18—21. Paris, 1883; 8°.

— des Sciences et Lettres de Montpellier: Mémoires de la Section des lettres. Tome VII. — 1^{er} Fascicule. Année 1882. Montpellier; 1882; 4°.

— des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon: Mémoires. 3^e série, tome VII. Années 1881—1882. Dijon, 1882; 8°.

— des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon: Mémoires. Classe des sciences. Vol. XXV. Paris, Lyon, 1881—82; 8°.

— Table des matières contenues dans les Mémoires publiés de 1845 à 1881. Lyon, 1882; 8°.

— Impériale des sciences de St.-Petersbourg: Bulletin. Tome XXVIII. Nr. 3. St. Pétersbourg, 1883; gr. 4°.

Accademia, R. delle Scienze di Torino: Atti. Vol. XVIII. Disp. 4^a (Marzo 1883) Torino; 8°.

Akademie der Wissenschaften, königl. schwedische: Öfversigt af Förhandlingar. 39. Årg. Nro. 9 o. 10. Stockholm, 1883; 8°.

- Apotheker-Verein, allg. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXI. Jahrgang, Nr. 14 u. 15. Wien, 1883; 8°.
- Archiv der Mathematik und Physik: LXIX Teil. 3. Heft. Leipzig, 1883; 8°.
- Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3^e période. Tome IX. No. 4. — 15 Avril 1883. Genève, Lausanne, Paris, 1883; 8°.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCVI. Nos. 20 et 21. Paris, 1883; 4°. — Tables des Comptes rendus. 2^e semestre 1882. Paris; 4°.
- Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. IV. Jahrgang, 1883, Heft V: Mai. Berlin, 1883; 4°.
- Faber, G. L.: The Fisheries of the Adriatic and the Fish thereof. London, 1883; 8°.
- Freiburg i. B., Universität: Akademische Schriften pro 1881 bis 1882. 56 Stücke 4° & 8°.
- Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVI. Jahrgang. Nr. 8. Berlin, 1883; 8°.
- naturforschende in Danzig: Schriften. N. F. V. Band, 4. Heft. Danzig, 1883; 8°.
- k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band. XXVI. Nr. 4 et 5. Wien, 1883; 8°.
- Instituut; koninklijk nederlandsch meteorologisch: Jaarboek voor 1882. Utrecht, 1883; Quer 4°.
- Johns Hopkins University: Circulars. Vol. II. Nro. 22. Baltimore, April, 1883: 4°.
- Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXVII., 8. & 9. Heft. Leipzig, 1883; 8°.
- of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland. Vol. XII. No. IV. May, 1883. London; 8°.
- Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1883. 2. et 3. Heft. Wien. 1883: 8°.
- Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXIX. Band, 1883. VI. Gotha; 4°.
- Musée Teyler: Archives. Série II. 3^e Partie. Haarlem, Paris, Leipsic, 1882: 4°.

- Nature.** Vol. XXVIII. Nr. 708 et 709. London, 1883; 8°.
- Observatory, The: A monthly review of Astronomy.** No. 74; 1883, June 1. London; 8°.
- the **Adelaide: Meteorological Observations during the year 1880.** Adelaide, 1882; Folio.
- Osservatorio centrale del real Collegio Carlo Alberto in Moncalieri.** Bollettino mensuale. Serie II. Vol. II., Nos. XI & XII. Torino, 1882; 4°.
- Reichsforstverein, österreichischer: Oesterreichische Vierteljahresschrift für Forstwesen.** N. F. I. Band. Jahrgang 1883. II. Quartal. Wien 1883; 8°.
- Société d'Agriculture, Histoire naturelle et Arts utiles de Lyon: Annales.** 5^e série, Tomes III & IV. Lyon, Paris, 1881, 1882; 4°.
- **Linnéenne de Lyon: Annales.** Année 1881. (Nouvelle série). Tome XXVIII. Lyon, Paris, 1882; 8°.
- **Hollandaise des sciences à Harlem: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles.** Tome XVII. 3^e—5^e livraisons. Harlem, Paris, Leipzig 1882; 8°. Tome XVIII. 1^{re} livraison. Harlem, Paris, Leipzig, 1883; 8°.
- **des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux.** 36^e année, 4^e série, 2^e cahier. Paris, 1883; 8°.
- **géologique de France: Bulletin.** 3^e série. Tome VIII. Nr. 7. Paris, 1879 a 1880; 8°. — Tome X. Nos. 3 & 4: Paris, 1881 a 1882. Tome XI. No. 2. Paris. 1882 a 1883; 8°.
- Vereeniging, koninklijke natuurkundige in Nederlandsch Indie: Natuurkundig Tijdschrift.** Deel XLI. Batavia, s'Gravenhage, 1882; 8°.
- Verein für Naturkunde zu Cassel: XXIX. und XXX. Bericht über die Vereinsjahre vom 18. April 1881 bis dahin 1883.** Kassel, 1883; 8°.
- **militär-wissenschaftlicher, in Wien: Organ.** XXVI. Band. 3. & 4. Heft Wien, 1883; 8°.
- Weyr, Ed. und V. Řehořovský: Základové vyšší Algebrý.** V Praze, 1883; 8°.
- Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter.** IV. Jahrgang, Nr. 8. Wien, 1883; 4°.

Über eine neue Methode zur Integration der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

Von dem w. M. A. Winckler.

Ogleich die von Monge zur Integration der hier in Rede stehenden Differentialgleichung

$$R \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + S \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + U = 0 \quad \dots(1)$$

erdachte Methode schon vor ihrer 1787 erfolgten Veröffentlichung¹ und seither oft wiederholt als in vielen Fällen erfolglos erkannt wurde, so ist sie doch, meines Wissens, bis jetzt durch keine andere ersetzt worden, welche in jenen Fällen mehr geleistet und in zahlreichen anderen Fällen wenigstens mit derselben Leichtigkeit zum Ziel geführt hätte, wie die Monge'sche Methode.

Alle Versuche, diese Methode durch Umformungen,² Unterscheidung gewisser Fälle u. dgl. zu verbessern, blieben bekanntlich ohne praktischen Erfolg, weil durch sie an der häufig nicht zutreffenden Hypothese Monge's, der Gleichung (1) könne durch partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, wovon jede eine willkürliche Function enthält, Genüge geschehen, nichts geändert wurde.

Hievon wesentlich verschieden, ist die Classification der Integrale, welche Ampère in seiner grossen Abhandlung³ zum

¹ Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles. (Histoire de l'Académie royale des sciences. Année 1784.) p. 126.

² Siehe z. B. Boole: Treatise on differential equations Supplementary Volume. p. 119—174.

³ Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles. Journal de l'école polytechnique. T. X et XI.

Ausgangspunkt für die Lösung eines die Gleichung (1) an Allgemeinheit weit übertreffenden Problems genommen hat. Aber abgesehen davon, dass die Theorie Ampère's, wie aus dem zweiten, einer beträchtlichen Anzahl von Beispielen gewidmeten Theil jener Abhandlung hervorgeht, bis jetzt in den meisten Fällen nur zu einer Reduction gegebener Differentialgleichungen auf andere, einfachere geführt hat, die entweder gar nicht oder nur durch besondere Methoden (z. B. durch bestimmte Integrale) integrirt werden können, tritt der bekannte und wohl zu beachtende Umstand ein, dass diese Theorie, auf die Gleichung (1) angewendet, wieder mit jener Monge's zusammenfällt, wie dies namentlich die Herren Graindorge¹ und Imschenetsky² näher gezeigt haben.

Die nach Euler benannte Methode hat, so wichtig auch ihre speciellen, sehr zahlreichen Ergebnisse sind, nicht sowohl die Integration der Gleichung (1) im Allgemeinen, als die Zurückführung der letztern auf eine andere, in welcher von den drei partiellen Differentialquotienten von z nur noch der mittlere erscheint, und weiterhin die besonderen Fälle zum Gegenstand, in welchen das Integral der reducirten Gleichung gefunden werden kann.

Hiermit sind, wenn ich nicht irre, alle Methoden allgemeineren Charakters, welche sich auf die im Nachstehenden ausschliesslich in Betracht kommende Gleichung (1) beziehen, in Kürze bezeichnet.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass unter denselben die Theorie von Monge, auf welche ich jetzt zurückkomme, die vollste Aufmerksamkeit verdient.

So richtig nun auch die allenthalben hervorgehobene Thatsache ist, dass jene Theorie auf einer, rücksichtlich der ersten Integrale in zahlreichen Fällen nicht stattfindenden Hypothese beruhe, so habe ich doch nirgends eine Andeutung dartüber finden können, welche Bewandniss es in diesen Fällen mit der zu integrierenden Gleichung habe, insbesondere, was an die

¹ Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. Bruxelles. 1872. p. 173.

² Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre... Paris. p. 125.

Stelle jener ersten Integrale trete und an welchen anderen Gleichungen, wenn nicht an den Monge'schen, die doch immerhin unerlässlichen Integrationen auszuführen seien, durch welche allein die zur Bildung des gesuchten allgemeinen Integrals erforderlichen willkürlichen Functionen in die Rechnung kommen können.

Diese sehr nahe liegenden Fragen scheinen hauptsächlich in Folge des vorwaltenden Bestrebens, die Gleichung (1), von der zweiten Ordnung, auf eine gewöhnliche Gleichung erster Ordnung und damit das Problem in üblicher Weise auf ein einfacheres zurückzuführen, bisher unerörtert geblieben zu sein.

Aber ein vielberufenes, schon Monge in der französischen Akademie entgegengehaltenes Beispiel, nämlich die von Euler mittelst Reihenentwicklung integrierte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad \dots(2)$$

reicht hin, um der Antwort auf jene Fragen sehr leicht um Vieles näher zu kommen, zumal in fast allen Lehrbüchern (Siehe z. B. Lacroix, II. art. 790) nicht nur das Integral

$$z = \varphi(y+x) + \psi(y-x) - x[\varphi'(y+x) - \psi'(y-x)]$$

angeführt, sondern, daraus abgeleitet, auch die Gleichungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -x[\varphi''(y+x) + \psi''(y-x)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x[\varphi''(y+x) - \psi''(y-x)] + \varphi'(y+x) + \psi'(y-x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -[\varphi''(y+x) + \psi''(y-x)] - x[\varphi'''(y+x) - \psi'''(y-x)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -x[\varphi'''(y+x) + \psi'''(y-x)]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x[\varphi'''(y+x) - \psi'''(y-x)] + \varphi''(y+x) + \psi''(y-x)$$

und noch mehrere andere (ohne zu dem Euler'schen Integral zu gelangen) entwickelt werden. Es blieb aber unbemerkt, dass aus den soeben angeführten Gleichungen auch die beiden folgenden:

$$\frac{1}{x} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = -\varphi'''(y+x)$$

$$\frac{1}{x} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] = +\psi'''(y-x)$$

abgeleitet werden können, welche, da in jeder nur eine willkürliche Function erscheint, aus anderen durch je eine und zwar eine erste Integration hervorgehen müssen, und daher als erste Integrale der gegebenen Gleichung zu betrachten sind.

Diese Integrale sind wieder partielle Differentialgleichungen, aber nicht, wie Monge sie suchte, von der ersten, sondern von der zweiten Ordnung. Es tritt also schon bei der so einfachen Gleichung (2) die merkwürdige Anomalie ein, dass die Ordnung derselben nach Ausführung der beiden ersten Integrationen nicht erniedrigt ist, und an einer grösseren Anzahl ebenso einfacher Gleichungen von der Form (1) wird sich später zeigen, dass die ersten Integrale nicht bloss von der zweiten, sondern von viel höherer Ordnung sind und dass darin der Grund liegt, aus welchem die Methode von Monge, die ihrer Anlage nach nur Integrale erster Ordnung gibt, in vielen Fällen nicht zum Ziel führen kann. Da indessen die ersten Integrale nicht immer von gleicher Ordnung sind, so liegt der Schluss nahe, dass eine Methode, welche erste Integrale bloss von der zweiten, oder bloss von der dritten etc. Ordnung zu liefern vermag, ebensowenig wie jene von Monge in allen Fällen zum Ziele führen kann und dass die letztere nur als der Anfang oder das erste und einfachste Glied einer unbegrenzten Reihe methodischer Vorgänge zu betrachten ist, wovon jeder, je nach Beschaffenheit der Coëfficienten R, S, T, U , als der entsprechende zur Anwendung kommen kann.

Von einer allgemeinen, auf der Voraussetzung des Bestehens erster Integrale beruhenden Methode zur Integration der Gleichung (1) kann also nur dann die Rede sein, wenn bei ihr die Ordnung dieser Integrale keine bestimmte, sondern eine beliebige ganze Zahl n ist.

Dies vorausgeschickt, werde ich, in der vorliegenden Arbeit immer auf Grund der soeben bezeichneten Voraussetzung, zunächst die Relationen, welche zur Bestimmung der

ersten Integrale dienen, mit der Ordnung $n=1$ (Monge'sche Methode) beginnend, nach einander für $n=2, 3$ und 4 entwickeln, was der unmittelbar sich anschliessenden Anwendungen wegen und weil die Aufstellung der einer beliebigen Ordnungszahl n entsprechenden Gleichungen dann ohne weitere Rechnung geschehen kann, als zweckmässig erscheint.

Als Beispiele zur Anwendung jener Relationen habe ich (mit einigen Ausnahmen) nur Differentialgleichungen, welche in den Art. 322 bis 378 der Instit. calc. integr. Vol. III von Euler vorkommen, aus dem, wie ich glaube, sehr triftigen Grund gewählt, weil gerade an diesen sehr zahlreichen, von Euler auf besonderen Wegen integrierten Gleichungen, bis jetzt jede allgemeine Methode erfolglos geblieben ist. Alle diese „Beispiele“, mit welchen Euler der Entwicklung der Theorie weit vorausgeeilt ist, können mittelst der weiter unten folgenden allgemeinen Formeln vollständig zu Ende geführt werden.

Der Umstand, dass diese Formeln oft viel weitläufigere Rechnungen als die von Euler angewandten, dem betreffenden Fall angepassten Hilfsmittel erfordern, konnte, da es sich hier vor Allem um die Methode handelt, kein Grund sein, die zu längeren Rechnungen führenden Fälle zu unterdrücken.

Literarische Angaben werde ich jedesmal denjenigen Stellen des Textes beifügen, an welchen von bereits bekannten Resultaten die Rede ist.

1.

Monge stellt seine Methode in der ursprünglichen, mit geometrischen Gesichtspunkten scheinbar nicht zusammenhängenden Fassung wie folgt dar:

„Es sei die allgemeine lineare Gleichung¹

$$Rz'' + Sz'_1 + Tz_2 + U = 0 \quad \dots(1)$$

gegeben, in welcher R, S, T, U in irgend einer Weise durch $x, y,$

¹ Im Nachstehenden wird, wenn es sich um partielle Differentialquotienten handelt, durchgehend die Lagrange'sche Bezeichnung:

$$z''_s = \frac{\partial^{n+s} z}{\partial x^n \partial y^s}$$

angewendet.

z, z', z_1 ausgedrückt sind. Diese Gleichung stellt eine einfache Relation zwischen den drei Grössen $z^{(2)}, z_1', z_2$ dar und kann zur Bestimmung jeder einzelnen derselben durch x, y, z, z', z_1 nicht genügen. Wenn man daher mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} dz' &= z'^{(2)} dx + z_1' dy \\ dz_1 &= z_1' dx + z_2 dy \end{aligned} \quad \dots(2)$$

welche nichts Neues besagen, zwei dieser drei Grössen eliminiert, so sollen die drei sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{aligned} (Sdy - Tdx) dz' + Tdydz_1 + Udy^2 &= -z^{(2)} [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2], \\ Rdydz' + Tdx dz_1 + Udydx &= +z_1' [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2], \\ (Sdx - Rdy) dz_1 + Rdx dz' + Udx^2 &= -z_2 [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2] \end{aligned}$$

die Werthe von $z^{(2)}, z_1', z_2$ nicht bestimmen, und weil diese stattfinden, so ist erforderlich, dass dies unabhängig von diesen Werthen geschehe, d. h. dass jedes Glied dieser Gleichungen für sich Null sei, oder dass man gleichzeitig habe:

$$Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2 = 0, \quad \dots(3)$$

$$Rdydz' + Tdx dz_1 + Udydx = 0,$$

$$(Sdy - Tdx) dz' + Tdydz_1 + Udy^2 = 0, \quad \dots(4)$$

$$(Sdx - Rdy) dz_1 + Rdx dz' + Udx^2 = 0$$

Von diesen vier Gleichungen sind nur zwei nothwendig, denn aus irgend zwei derselben folgen die beiden anderen.

Die gegebene Gleichung aufstellen, heisst also aussprechen, dass irgend zwei dieser Gleichungen gleichzeitig stattfinden, unabhängig von dem Werth von $\frac{dy}{dx}$, welcher ihnen gemeinschaftlich ist und welchen man in die gegebene einführt, um daraus diese beiden Gleichungen zu erhalten.⁴

Weiterhin zeigt nun Monge, ohne Rechnung, wie man die beiden ersten Integrale von (1) finden könne. Allgemein ausgedrückt, besteht das Verfahren, wie bekannt, darin, dass man in einer der Gleichungen (4), z. B. in der ersten

$$Rdydz' + Tdx dz_1 + Udydx = 0 \quad \dots(5)$$

sowie in der Gleichung

$$dz - [z'dx + z_1 dy] = 0 \quad \dots(6)$$

für dy einen der beiden aus (3) folgenden Werthe, nämlich $dy = kdx$ setzt, wodurch die erste Gleichung rücksichtlich der Differentiale linear gemacht werden kann, dass man dann noch die Gleichung

$$dy - kdx = 0 \quad \dots(7)$$

hinzunehmen und aus diesen drei Gleichungen, oder auch nur aus je einer oder zwei derselben, zwei andere bilde, die sich integrieren lassen. Angenommen die Integrale seien $p = \alpha$, $P = a$, wobei α , a willkürliche Constanten bezeichnen, so ist:

$$P = \varphi(p)$$

ein erstes Integral der Gleichung (1), unter φ die Charakteristik einer willkürlichen Function verstanden.

Auf gleiche Art erhält man mittelst der zweiten Auflösung $dy = ldx$ der Gleichung (3) ein zweites erstes Integral, wenn es existirt, nämlich die Gleichung:

$$Q = \psi(q)$$

mit einer willkürlichen Function ψ .

Die Art, wie dieser Satz durch Rechnung verificirt werden kann, ist aus den Lehrbüchern, z. B. dem *Traité* von Lacroix bekannt.

In manchen Fällen, wenn R , S , T , U bloss von x , y , z abhängen, kann es zur Ermittlung der ersten Integrale hinreichen, wenn man die Gleichungen (5), (6), (7) mit noch unbestimmten Multiplicatoren versieht, dann zusammenaddirt und die Multiplicatoren so bestimmt, dass die aus der Addition hervorgegangene Gleichung integrel wird.

Mittelst der beiden ersten Integrale, durch welche z' und z_1 als Functionen von x , y , z bestimmt sind, und der Gleichung $dz = z'dx + z_1 dy$ lässt sich das gesuchte allgemeine Integral finden. Dies kann übrigens, wie bekannte Beispiele lehren, nicht selten auch aus bloss einem ersten Integral abgeleitet werden.

In den wohl zu berücksichtigenden besonderen Fällen, wenn R oder T , oder R und $T=0$, sind statt der ersten die zweite oder dritte der Gleichungen (4) anzuwenden.¹

Ist $R=0$, also $Sz'_1 + Tz_2 + U=0$ die vorgelegte Gleichung, so ergeben sich aus (3), (4) und (8) die beiden folgenden, getrennt zu betrachtenden Systeme von Gleichungen:

1. $dx=0, \quad Sdz_1 + Tdz_2 + Udy=0, \quad dz - z_1 dy=0,$
2. $Sdy - Tdx=0, \quad Tdz_1 + Udy=0, \quad dz - (z'dx + z_1 dy)=0.$

Ist $T=0$, also $Rz^{(2)} + Sz'_1 + U=0$ die gegebene Gleichung, so findet man ebenso die entsprechenden Systeme:

1. $dy=0, \quad Sdz_1 + Rdz' + Udx=0, \quad dz - z'dx=0,$
2. $Sdx - Rdy=0, \quad Rdz' + Udx=0, \quad dz - (z'dx + z_1 dy)=0.$

Ist $R=0$ und $T=0$, also $Sz'_1 + U=0$ die gegebene Gleichung, so folgt:

1. $dx=0, \quad Sdz' + Udy=0, \quad dz - z_1 dy=0$
2. $dy=0, \quad Sdz_1 + Udx=0, \quad dz - z'dx=0.$

Jedes dieser Systeme tritt im betreffenden Fall an die Stelle der Gleichungen (5) und (6), welche dem früher betrachteten allgemeinen Fall entsprechen.

2.

Den bekanntlich sehr zahlreichen, mehr oder weniger speciellen Fällen, in welchen die beschriebene Methode zum Ziel führt, mögen die folgenden sich anschliessen.

Es sei die Gleichung gegeben:

$$z'' + 2mz'_1 + (m^2 - n^2)z_2 + pz' + qz_1 = 0 \quad \dots(1)$$

worin m, n, p, q blosse Functionen von x und y bezeichnen.

Da die Integration derselben in dieser Allgemeinheit nicht geschehen kann, so entsteht die Frage nach der nöthigen Einschränkung.

Hier ist:

$$R = 1, \quad S = 2m, \quad T = m^2 - n^2, \quad U = pz' + qz_1$$

¹ Der Fall $R=0$ und $T=0$ wurde zuerst von Lacroix (II. art. 766) betrachtet. Die Gleichungen, welche den Fällen $R=0$ oder $T=0$ entsprechen, hat Graindorge in der obenerwähnten Abhandlung angegeben.

Aus den Gleichungen (3) und (4) des vorigen Artikels folgt daher:

$$dy^2 - 2m dy dx + (m^2 - n^2) dx^2 = 0,$$

$$dy dz' + (m^2 - n^2) dx dz_1 + (pz' + qz_1) dy dx = 0$$

und hieraus:

$$dy = (m \pm n) dx \quad \dots(2)$$

$$dz' + (m \mp n) dz_1 + (pz' + qz_1) dx = 0. \quad \dots(3)$$

Legt man der weitern Betrachtung das untere Zeichen zu Grund, setzt also

$$dy = (m - n) dx$$

soist zunächst zu ermitteln, unter welcher Bedingung die Gleichung

$$dz' + (m + n) dz_1 + (pz' + qz_1) dx = 0$$

integrabel sei. Nun sieht man aber leicht, dass diese in der Form

$$d[z' + (m + n)z_1] + p[z' + (m + n)z_1] dx + [q - (m + n)p]z_1 dx - \left[\frac{\partial(m + n)}{\partial x} dx + \frac{\partial(m + n)}{\partial y} dy \right] \cdot z_1 = 0$$

geschrieben werden kann und dass, wenn man die Summe der letzteren, insgesamt den Factor z_1 enthaltenden Glieder gleich Null setzt, die beiden Gleichungen:

$$d[z' + (m + n)z_1] + p[z' + (m + n)z_1] dx = 0 \quad \dots(4)$$

$$q = (m + n)p + \frac{\partial(m + n)}{\partial x} + (m - n) \frac{\partial(m + n)}{\partial y} \quad \dots(5)$$

entstehen, wovon die letztere die gesuchte Bedingung für (1) ist. Dies vorausgesetzt, sei

$$\pi(x, y) = \alpha$$

das Integral der Differentialgleichung $dy = (m - n) dx$, wobei α eine willkürliche Constante bezeichnet. Mittelst desselben kann man p , welches als eine Function von x, y gedacht wird, durch x und α allein ausdrücken, wodurch die Gleichung (4), auf die Form:

$$\frac{d[z' + (m + n)z_1]}{z' + (m + n)z_1} = - p dx$$

gebracht, integrabel, und die Gleichung:

$$z' + (m+n)z_1 = \beta e^{-\int p dx}$$

als das Integral mit der willkürlichen Constante β erhalten wird. Hieraus nun lässt sich ein erstes Integral der gegebenen Gleichung ableiten. Setzt man nämlich:

$$e^{-\int p dx} = f(x, \alpha)$$

und der Monge'schen Methode gemäss: $\beta = \varphi(\alpha)$, wo φ eine willkürliche Function bezeichnet, so besteht jenes erste Integral in der partiellen Differentialgleichung:

$$z' + (m+n)z_1 = \varphi(\pi)f(x, \pi).$$

Um hieraus z zu finden, ist noch das Integral der Gleichung $dy = (m+n)dx$ erforderlich; angenommen dasselbe sei $\rho(x, y) = \gamma$ und man könne hieraus y folglich auch π als Function von x und γ darstellen, so folgt auf bekannte Art:

$$z = \int \varphi(\pi)f(x, \pi) dx + \psi(\gamma)$$

worin ψ eine willkürliche Function bezeichnet und nach vollzogener Integration γ durch $\rho(x, y)$ zu ersetzen ist. Hiermit ist das allgemeine Integral der Gleichung (1) unter der Voraussetzung gefunden, dass m, n, p, q der Bedingung (5) genügen.

Wie man sieht, bedarf es zur Herstellung desselben nur der Integration der Gleichung (2) für die beiden Zeichen von n .

Das hier erhaltene Resultat fällt mit demjenigen, welches Euler (Institut. calc. integr. III. art. 312) mittelst seiner Methode der Transformation durch zwei neue Veränderliche abgeleitet hat, zusammen, wenn man $m = 0$ setzt, also das z'_1 enthaltende Glied in (1) weglässt.

Es bedarf keiner weitern Rechnung, um zu finden, dass, wenn man in den Gleichungen (2) und (3) das obere Zeichen von n zu Grunde legt, also

$$dy = (m+n) dx$$

setzt und die Gleichung

$$dz' + (m-n) dz_1 + (pz' + qz_1) dx = 0$$

auf gleiche Art wie oben betrachtet, die Bedingungsgleichung

$$q = (m-n)p + \frac{\partial(m-n)}{\partial x} + (m+n) \frac{\partial(m-n)}{\partial y} \quad \dots(6)$$

und dieser entsprechend, wieder ein erstes Integral der Gleichung (1) erhalten wird. Man hat nun allerdings zwei erste Integrale, welche aber, da die durch (5) und (6) bestimmten Werthe von q von einander verschieden sind, nicht ein und derselben Gleichung (1) angehören. Dieser Gleichung kann, von ganz speciellen Fällen abgesehen, überhaupt nicht durch zwei erste Integrale, wovon jedes wieder eine andere partielle Differentialgleichung erster Ordnung darstellt, genügt werden. Selbst der besondere Fall $n=0$ macht hiervon keine Ausnahme, denn für $n=0$ fallen nicht nur die Gleichungen (5) und (6), sondern auch die erwähnten ersten Integrale mit einander zusammen.

Die Gleichung (1) gehört also unter die, bekanntlich nicht sehr seltenen Fälle, in welchen die Methode von Monge zwar noch zu dem allgemeinen Integral, aber nur zu einem ersten Integral führt. Da in dem oben für z erhaltenen Ausdruck eine der beiden willkürlichen Functionen unter dem Integralzeichen steht, so kann jene Methode, in besonderen Fällen, das allgemeine Integral auch in einer die auf einander folgenden Differentialquotienten einer willkürlichen Function enthaltenden Form darstellen, wie dies beispielsweise bei der Gleichung

$$z'^2 + \frac{3}{2} z'_1 + \frac{1}{2} z_2 - \frac{2}{x} (z' + z_1) = 0$$

der Fall ist. Hier ist nämlich

$$m = \frac{3}{4}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad p = q = -\frac{2}{x}.$$

Die Bedingung (5) findet statt und aus (4) erhält man:

$$z' + z_1 = \beta x^2.$$

Aus
$$dy = (m-n) dx = \frac{1}{2} dx$$

folgt

$$2y - x = \alpha.$$

Es ist daher:

$$z' + z_1 = x^2 \varphi'''(2y - x)$$

ein erstes Integral der gegebenen Gleichung, worin φ''' die willkürliche Function bezeichnet. Man findet hieraus weiter:

$$z = \int x^2 \varphi'''(x + 2\gamma) dx + \psi(\gamma), \quad \gamma = y - x$$

oder:

$$z = x^2 \varphi''(x + 2\gamma) - 2x \varphi'(x + 2\gamma) + 2\varphi(x + 2\gamma) + \psi(\gamma)$$

und wenn nun $y - x$ für γ gesetzt wird, die Gleichung:

$$z = x^2 \varphi''(2y - x) - 2x \varphi'(2y - x) + 2\varphi(2y - x) + \psi(y - x),$$

welche das gesuchte Integral ist.

3.

Die Anwendung der in Rede stehenden Methode unterliegt, wenn sie nur ein erstes Integral zu geben vermag, und dieses in Bezug auf z nicht linear ist, der von Ampère hervorgehobenen Schwierigkeit, dass die zweite Integration, der in jenem Integral vorkommenden willkürlichen Function wegen, nicht mehr möglich ist. In manchen Fällen ist es aber gerade die Willkürlichkeit dieser Function, welche jene Integration wesentlich erleichtert. Ich will dies an einem sehr bekannten Beispiel zeigen. Es sei dies die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{oder also} \quad z'_1 - z z' = 0 \quad \dots(1)$$

Sie wurde von Liouville¹ in einer andern Form betrachtet und integrirt, die sich aus (1) ergibt, wenn man:

$$z' = \pm \frac{\lambda}{2a^2} \quad \text{also} \quad \frac{z'_1}{z'} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = z$$

setzt, woraus

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} = z'$$

¹ Siehe: Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie. 5^e Edit. Paris, 1850, p. 597.

oder:

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} = \pm \frac{\lambda}{2a^2}$$

folgt, welches die gedachte Form ist.

Um nun die Gleichung (1) zu integrieren, hat man, weil $R=0$ und $T=0$, sodann $S=1$ ist, die am Schlusse des Art. 1 angeführten Gleichungen anzuwenden, welche hier:

$$1. \quad dx=0, \quad dz' - z' dy = 0, \quad dz - z_1 dy = 0$$

$$2. \quad dy=0, \quad dz_1 - z' dx = 0, \quad dz - z' dx = 0$$

sind. Aus dem ersten System lässt sich keine integrable Gleichung ableiten; aus dem zweiten aber findet man:

$$dy=0, \quad dz_1 - z dx = 0$$

daher durch Integration:

$$y = \alpha, \quad z_1 - \frac{1}{2} z^2 = a$$

Es ist somit

$$z_1 - \frac{1}{2} z^2 = \frac{1}{2} \theta(y) \quad \dots(2)$$

ein erstes Integral von (1); ein zweites aber, worin bloss z' , z_1 vorkämen, existirt nicht. Übrigens hätte man die Gleichung (2) auch unmittelbar aus der gegebenen (1), welche eine Integration nach x zulässt, finden können. Von der Gleichung (2), welche in der Form

$$2 \frac{\partial z}{\partial y} - z^2 = \theta(y)$$

geschrieben, als eine gewöhnliche Differentialgleichung erscheint und worin $\theta(y)$ eine unbestimmte Function bedeutet, wird in mehreren Schriften behauptet, sie könne wegen des Gliedes z^2 nicht integriert werden, was aber keineswegs der Fall ist. Denn setzt man:

$$\theta(y) = 2Y' - Y^2$$

unter Y eine willkürliche Function von y verstanden, so folgt:

$$2 \frac{\partial z}{\partial y} - z^2 = 2Y' - Y^2$$

und dieser Gleichung leistet $z = Y$ als particuläres Integral Genüge.

Zur Bestimmung des allgemeinen Integrals:

$$z = Y + u$$

erhält man daher die Gleichung:

$$2 \frac{\partial u}{\partial y} - 2uY - u^2 = 0,$$

aus welcher sich

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2} e^{-\int Y dy} [X - \int e^{\int Y dy} dy]$$

ergibt, unter X eine willkürliche Function von x verstanden. Man hat also

$$z = Y + \frac{2e^{\int Y dy}}{X - \int e^{\int Y dy} dy}$$

womit das allgemeine Integral der Gleichung (1) gefunden ist.

Um dasselbe in die gebräuchliche Form zu bringen, sei

$$X = e^{-\varphi(x)}, \quad \int e^{\int Y dy} dy = e^{\psi(y)}$$

also:

$$e^{\int Y dy} = e^{\psi(y)} \cdot \psi'(y), \quad Y = \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} + \psi'(y)$$

Dann folgt:

$$z = \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} + \psi'(y) + 2 \cdot \frac{e^{\varphi(x) + \psi(y)} \cdot \psi'(y)}{1 - e^{\varphi(x) + \psi(y)}}$$

worin nun $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ zwei willkürliche Functionen bezeichnen.

Liouville bemerkt a. a. O., dass er das Detail der Betrachtungen, durch welche er zu diesem Integral gelangt sei, unterdrücke und sich auf den Nachweis beschränke, dass letzteres der gegebenen Gleichung in der That Genüge leistet, und dasselbe geschieht in allen mir bekannten Schriften, in welchen von der Gleichung (1) die Rede ist. Da aber die blosse Verification umständlicher ist, als die vorstehende directe Herleitung, so scheint es, dass Liouville nicht auf dem oben eingeschlagenen Wege zu seinem Resultat gelangt sei.

Übrigens ist leicht zu bemerken, dass dieser Weg auch noch in Fällen allgemeinerer Art zum Ziele führt. Als Beispiel kann die Gleichung

$$p \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (mz + n) \frac{\partial z}{\partial x} \quad \dots(3)$$

dienen, in welcher p, m, n gegebene Functionen bloss von y sein sollen und welche in die vorhin betrachtete übergeht, wenn $p=0, m=1, n=0$ gesetzt wird. Man kann diese Gleichung sofort nach x integrieren und erhält

$$p \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} mz^2 + nz + \theta(y) \quad \dots(4)$$

wobei $\theta(y)$ eine unbestimmte Function von y ist. Auch bei dieser Gleichung würde das gewöhnliche Verfahren der Integration resultatlos bleiben. Nimmt man aber an, es sei z_0 eine Function bloss von y , welche für z gesetzt, der Gleichung (4) genüge, so ergibt sich die Bedingung

$$\frac{\partial z_0}{\partial y} = \frac{1}{2} mz_0^2 + nz_0 + \theta(y) \quad \dots(5)$$

woraus hervorgeht, dass, weil für $\theta(y)$ jede beliebige Function von y gesetzt werden kann, z_0 ganz unbestimmt bleibt, und umgekehrt auch $\theta(y)$.

Es sei nun

$$z = z_0 + u$$

das allgemeine Integral von (4), man habe also:

$$p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dz_0}{dy} = \frac{1}{2} mu^2 + (mz_0 + n)u + \frac{1}{2} mz_0^2 + nz_0 + \theta(y)$$

oder mit Rücksicht auf (5):

$$p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} mu^2 + (mz_0 + n)u$$

auch sei

$$mz_0 + n = Y, \quad z_0 = \frac{1}{m} (Y - n)$$

wo nunmehr Y an die Stelle der früheren willkürlichen Functionen $\theta(y)$ resp. z_0 tritt: dann hat man es nur noch mit der Gleichung

$$p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} mu^2 + Yu \quad \dots(5)$$

zu thun, aus welcher u zu bestimmen ist. Dies kann aber geschehen, weil sie, bei sonst ganz gleicher Form, von (4) sich wesentlich durch das letzte Glied $\theta(y)$ der rechten Seite unterscheidet. Aus (5) ergibt sich nun auf bekannte Art:

$$u = \frac{2e^{\int Y dy}}{\varphi(x - \int p dy) - \int m e^{\int Y dy} dy}$$

und also auch

$$z = \frac{1}{m} (Y - n) + u$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Man kann das Resultat aber in anderer Form darstellen. Es sei zur Abkürzung:

$$\int m e^{\int Y dy} dy = e^{\psi(y)}$$

also:

$$e^{\int Y dy} = \frac{1}{m} e^{\psi(y)} \cdot \psi'(y), \quad Y = \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} + \psi'(y) - \frac{m'}{m}.$$

Das Integral der Gleichung (3) lässt sich dann wie folgt ausdrücken:

$$z = \frac{1}{m} \left[\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} + \psi'(y) - \frac{m'}{m} - n \right] + \frac{2}{m} \cdot \frac{e^{\psi(y)} \cdot \psi'(y)}{\varphi(x - \int p dy) - e^{\psi(y)}}$$

worin φ und ψ die Charakteristiken willkürlicher Functionen sind.

Auf gleiche Weise lässt sich das Integral der Gleichung:

$$p \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (mz + n) \frac{\partial z}{\partial y}$$

finden, wenn p, m, n gegebene Functionen von x sind.

4.

Nach diesen Vorbemerkungen wende ich mich zu dem in der Einleitung bezeichneten Gegenstand dieser Abhandlung,

der die Fälle betrifft, in welchen die Methode von Monge gar kein erstes Integral, nämlich keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer willkürlichen Function zulässt, obgleich die gegebene Gleichung ein allgemeines Integral, mit zwei solchen Functionen, besitzt. Ich lasse mich hierbei von dem früher angegebenen Gesichtspunkt leiten und gehe vorerst von der Voraussetzung aus, die im Art. 1 definirte Differentialgleichung

$$Rz'^2 + Sz'_1 + Tz_2 + U = 0 \quad \dots(1)$$

habe zwei erste Integrale, wovon jedes in einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit je einer willkürlichen Function besteht. Es ist eine nothwendige Folge dieser Voraussetzung, dass man auch die beiden durch partielle Differentiation aus (1) sich ergebenden Gleichungen:

$$\frac{dR}{dx} \cdot z'^2 + \frac{dS}{dx} \cdot z'_1 + \frac{dT}{dx} \cdot z_2 + \frac{dU}{dx} + Rz'^3 + Sz'_1{}^2 + Tz_2' = 0 \quad \dots(2)$$

$$\frac{dR}{dy} \cdot z'^2 + \frac{dS}{dy} \cdot z'_1 + \frac{dT}{dy} \cdot z_2 + \frac{dU}{dy} + Rz_1{}^2 + Sz_2' + Tz_3 = 0 \quad \dots(3)$$

in Betracht ziehe, worin unter $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dR}{dy}$, \dots die vollständigen, auf alle in $R, \dots U$ vorkommenden, von x , resp. y abhängigen Grössen x, y, z, z', z_1 sich beziehenden, partiellen Differentialquotienten von $R, \dots U$ zu verstehen sind, so dass

$$\frac{dR}{dx} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot z' + \frac{\partial R}{\partial z'} \cdot z'^2 + \frac{\partial R}{\partial z_1} \cdot z'_1$$

u. s. w. ist.

Mittelst der weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned} dz'^2 &= z'^3 dx + z_1{}^2 dy \\ dz'_1 &= z_1{}^2 dx + z_2' dy \\ dz_2 &= z_2' dx + z_3 dy \end{aligned} \quad \dots(4)$$

kann man drei der Grössen $z'^3, z_1{}^2, z_2', z_3$ durch die vierte, gleichgiltig welche dies sei, ausdrücken. Wählt man hierzu z'^3 , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_1^{(2)} dy &= dz^{(2)} - z^{(3)} dx \\ z_2' dy^2 &= dz_1' dy - dz^{(2)} dx + z^{(3)} dx^2 \\ z_3 dy^3 &= dz_2' dy^2 - dz_1' dy dx + dz^{(2)} dx^2 - z^{(3)} dx^3. \end{aligned}$$

Die hierdurch bestimmten Werthe von $z_1^{(2)}$, z_2' , z_3 setze man in die Gleichungen (2) und (3) ein und fasse die gleichartigen Glieder zusammen, setze auch der Abkürzung wegen:

$$V_{(1,0)} = \frac{dR}{dx} z^{(2)} + \frac{dS}{dx} z_1' + \frac{dT}{dx} z_2 + \frac{dU}{dx}$$

$$V_{(0,1)} = \frac{dR}{dy} z^{(2)} + \frac{dS}{dy} z_1' + \frac{dT}{dy} z_2 + \frac{dU}{dy}$$

Dann findet man:

$$\begin{aligned} V_{(1,0)} dy^2 + [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2] \cdot z^{(3)} \\ + (Sdy - Tdx) dz^{(2)} + Tdz_1' dy = 0 \end{aligned} \quad \dots(5)$$

$$\begin{aligned} V_{(0,1)} dy^3 - [Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2] [z^{(3)} dx - dz^{(2)}] \\ + (Sdy - Tdx) dz_1' dy + Tdz_2' dy^2 = 0. \end{aligned} \quad \dots(6)$$

Da diese Gleichungen stattfinden müssen, welche Werthe auch der Grösse $z^{(3)}$ beiegelegt werden, diese aber ebensowenig als $z_1^{(2)}$, z_2' , z_3 durch (2) und (3) bestimmt ist, so können jene Gleichungen, abgesehen davon, dass sie in der vorstehenden Form und weil in ihnen $dz^{(3)}$ nicht vorkommt, keiner Integration fähig sind, zu den gesuchten Relationen zwischen $z^{(2)}$, z_1' , z_2' nur dann dienen, wenn $z^{(3)}$ aus der Rechnung verschwindet, oder also, wenn das Raisonement Monge's¹ (Art. 1) bezüglich des Coëfficienten von $z^{(2)}$, hier auf den Coëfficienten von $z^{(3)}$ angewendet und wie früher

$$Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2 = 0 \quad \dots(7)$$

gesetzt wird.

In Folge dieser Gleichung verschwinden in (6) auch die Glieder, welche $dz^{(2)}$ enthalten und ergibt sich:

$$V_{(1,0)} dy^2 + [Sdy - Tdx] dz_1' = 0 \quad \dots(8)$$

$$V_{(0,1)} dy^2 + [Sdy - Tdx] dz_2' + Tdydz_2 = 0. \quad \dots(9)$$

Eine analoge Form erhalten diese Gleichungen, wenn man T mittelst der Gleichung (7) daraus eliminirt:

¹ Dasselbe wird, seiner Kürze und heuristischen Bedeutung wegen, hier und auch späterhin dessen bekannten Modificationen vorgezogen.

$$V_{(1,0)} dx^2 + [Sdx - Rdy] dz_1 + Rdx dz_2 = 0 \quad \dots(10)$$

$$V_{(0,1)} dx^2 + [Sdx - Rdy] dz_2 + Rdx dz_1 = 0 \quad \dots(11)$$

und eine dritte, einfachere Form, die alsbald folgen wird, ergibt sich durch die Elimination von S .

Es liegt schon in der linearen Form der Gleichungen (2), (3) und (4), ist aber wohl zu beachten, dass die Gleichungen (7), (8) und (9) sich unabhängig davon ergeben, ob man der vorigen Betrachtung statt $z^{(2)}$ irgend eine andere der Grössen $z_1^{(2)}$, z_1' , z_2 zu Grunde legt, und dass man immer wieder dieselbe Gleichung (7) erhält, auf welche auch die Methode von Monge führt.

Das im Allgemeinen zu befolgende Verfahren, durch welches die als bestehend vorausgesetzten ersten Integrale der Gleichung (1) abzuleiten sind, lässt sich nun wie folgt bezeichnen.

In den durch Elimination von S sich ergebenden Gleichungen:

$$\left[\frac{dR}{dx} z^{(2)} + \frac{dS}{dx} z_1' + \frac{dT}{dx} z_2 + \frac{dU}{dx} \right] dx dy + R dy dz_2 + T dx dz_1 = 0 \dots(12)$$

$$\left[\frac{dR}{dy} z^{(2)} + \frac{dS}{dy} z_1' + \frac{dT}{dy} z_2 + \frac{dU}{dy} \right] dx dy + R dy dz_1 + T dx dz_2 = 0 \dots(13)$$

sowie in den Gleichungen:

$$dz - [z' dx + z_1 dy] = 0$$

$$dz' - [z^{(2)} dx + z_1' dy] = 0 \quad \dots(14)$$

$$dz_1 - [z_1' dx + z_2 dy] = 0$$

setze man für dy einen der beiden aus (7) folgenden Werthe, nämlich $dy = kdx$, mache die Gleichungen (12) und (13) in Hinsicht der Differentiale linear, und nehme die Gleichung

$$dy - kdx = 0$$

sowie die gegebene

$$Rz^{(2)} + Sz_1' + Tz_2 + U = 0$$

und, wenn erforderlich, deren vollständiges Differential hinzu. Lassen sich aus diesen Gleichungen, oder einigen derselben, zwei andere ableiten, die integrirt werden können und deren Integrale $p = \alpha$, $P = a$ sind, so ist

$$P = \varphi(p)$$

ein erstes Integral der vorgelegten Differentialgleichung, wobei φ die Charakteristik einer willkürlichen Function bezeichnet.

Angenommen, es ergeben sich auf dieselbe Art für die zweite Auflösung $dy = ldx$ der Gleichung (7) zwei weitere Integrale $q = \beta$, $Q = b$, so stellt die Gleichung:

$$Q = \psi(q)$$

ebenfalls ein erstes Integral der gegebenen Gleichung mit einer willkürlichen Function ψ dar.¹

In einfacheren Fällen, namentlich wenn R, S, T, U bloss von x, y, z abhängen, lassen sich diese Integrale dadurch erhalten, dass man jede der oben angeführten Gleichungen oder bloss einige derselben, mit einem noch unbestimmten Multiplicator versieht, sie dann insgesamt addirt und die Multiplicatoren, wenn möglich so bestimmt, dass die durch Addition entstandene Gleichung integrabel wird.

Sind zwei erste Integrale gefunden, so stellen diese mit der gegebenen Gleichung drei gleichzeitig für dieselbe Function z bestehende partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar, durch welche die Auffindung des gesuchten allgemeinen Integrals erleichtert ist. Die hierzu noch erforderlichen Integrationen können, da das allgemeine Integral nicht mehr als zwei willkürliche Functionen enthalten kann, die Zahl der letzteren nicht vermehren. Gleichwohl sind die entsprechenden unbestimmten Constanten nicht ausser Acht zu lassen und, namentlich wenn jene Functionen nur von je einer der Veränderlichen abhängen, so zu bestimmen, dass entweder die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung unter sich verträglich sind, oder dass das mit den Integrationsconstanten noch behaftete allgemeine Integral der gegebenen Gleichung Genüge leiste.

Der bisher vorausgesetzte Fall, dass diese Gleichung zwei erste Integrale, jedes von der zweiten Ordnung, zulasse, tritt nicht immer ein, da es geschehen kann, dass nur eines dieser Integrale von der zweiten, das andere dagegen von der ersten

¹ Da weiterhin mehrere ganz analoge, aber allmählig verallgemeinerte Sätze in Rede kommen, deren einfachster jener von Monge (Art. 1) ist, so werde ich, um Wiederholungen zu vermeiden, einen dieselben umfassenden Beweis bei einer andern Gelegenheit folgen lassen.

Ordnung ist und mittelst der Monge'schen Methode gefunden werden kann, oder dass auch letzteres nicht besteht.

Wenn die hier zu Grunde liegenden Voraussetzungen zutreffen und es also keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gibt, welche (1) genügt und nur eine einzige willkürliche Function enthält, so können die zwei ersten Integrale mit je einer willkürlichen Function nach vollzogener Elimination der letzteren im Allgemeinen nicht die Gleichung (1), sondern nur die Gleichungen (2) und (3), welchen jene zunächst genügen, wieder geben.

Findet dagegen gar kein erstes Integral von der vorausgesetzten Beschaffenheit statt, so zeigt sich dies entweder darin, dass man keine integrable Gleichung finden kann, oder dass das oben bezeichnete Verfahren auf eine Gleichung zweiter Ordnung mit einer willkürlichen Function führt, welche vermöge der gegebenen Gleichung nur bestehen, wenn man diese Function gleich Null setzt.

In den besonderen Fällen, wenn R oder T , oder R und T gleich Null sind, werden die Gleichungen (12) und (13) unbrauchbar, weil dann vermöge der Gleichung (7) zugleich auch entweder dx oder dy , oder dx und dy gleich Null zu setzen sind. In diesen Fällen müssen die Gleichungen (8) und (9) oder (10) und (11) zu Hilfe genommen werden.

Ist $R=0$, also $Sz'_1 + Tz_2 + U=0$ die gegebene Gleichung, so erhält man aus (7), (8) und (9) die beiden folgenden, einzeln zu betrachtenden Systeme von Gleichungen:

$$1. \quad dx=0, \quad \left[\frac{dS}{dx} z'_1 + \frac{dT}{dx} z_2 + \frac{dU}{dx} \right] dy + Sdz^{(2)} + Tdz'_1 = 0,$$

$$\left[\frac{dS}{dy} z'_1 + \frac{dT}{dy} z_2 + \frac{dU}{dy} \right] dy + Sdz_1 + Tdz_2 = 0,$$

$$2. \quad Sdy - Tdx = 0, \quad \left[\frac{dS}{dx} z'_1 + \frac{dT}{dx} z_2 + \frac{dU}{dx} \right] dy + Tdz'_1 = 0,$$

$$\left[\frac{dS}{dy} z'_1 + \frac{dT}{dy} z_2 + \frac{dU}{dy} \right] dy + Tdz_2 = 0.$$

Ist $T=0$, also $Rz^{(2)} + Sz'_1 + U=0$ die gegebene Gleichung, so findet man aus (7), (10) und (11) die beiden Systeme:

$$1. \quad dy = 0, \quad \left[\frac{dR}{dx} z^{(2)} + \frac{dS}{dx} z'_1 + \frac{dU}{dx} \right] dx + Sdz'_1 + Rdz^{(2)} = 0,$$

$$\left[\frac{dR}{dy} z^{(2)} + \frac{dS}{dy} z'_1 + \frac{dU}{dy} \right] dx + Sdz_2 + Rdz'_1 = 0$$

$$2. \quad Sdx - Rdy = 0, \quad \left[\frac{dR}{dx} z^{(2)} + \frac{dS}{dx} z'_1 + \frac{dU}{dx} \right] dx + Rdz^{(2)} = 0,$$

$$\left[\frac{dR}{dy} z^{(2)} + \frac{dS}{dy} z'_1 + \frac{dU}{dy} \right] dx + Rdz'_1 = 0$$

Ist $R = 0$ und $T = 0$, also $Sz'_1 + U = 0$ die vorgelegte Gleichung, so hat man:

$$1. \quad dx = 0, \quad \left[\frac{dS}{dx} z'_1 + \frac{dU}{dx} \right] dy + Sdz^{(2)} = 0,$$

$$\left[\frac{dS}{dy} z'_1 + \frac{dU}{dy} \right] dy + Sdz'_1 = 0$$

$$2. \quad dy = 0, \quad \left[\frac{dS}{dx} z'_1 + \frac{dU}{dx} \right] dx + Sdz'_1 = 0,$$

$$\left[\frac{dS}{dy} z'_1 + \frac{dU}{dy} \right] dx + Sdz_2 = 0.$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass jedem dieser Systeme noch die Gleichungen (14) mit den entsprechenden Werthen von dx , resp. dy beizufügen sind.

Um die Anwendung des vorhin beschriebenen Verfahrens zu zeigen, mag eine grössere Anzahl von Beispielen dienen, wozu u. a. einige der von Euler herrührenden Fälle am geeignetsten erscheinen, in welchen die Methode von Monge nicht zum Ziele führt, und die bisher nach einer allgemeinen Methode nicht erledigt worden sind.

5.

Als erstes Beispiel diene die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x} \frac{\partial z}{\partial x}$$

oder also:

$$xz^{(2)} - xz_2 - 2z' = 0 \quad \dots(1)$$

welche, wie bereits erwähnt, Monge als Beweis der Unzulänglichkeit seiner Methode einst vorgelegt wurde und deren allgemeines Integral er vergeblich abzuleiten suchte.

Da hier

$$R = x, S = 0, T = -x, U = -2x'$$

also:

$$\frac{dU}{dx} = -2z'^{(2)}, \quad \frac{dU}{dy} = -2z'_1$$

so folgt aus den Gleichungen (12) und (13) des vorigen Artikels

$$-[z^{(2)} + z_2] dx dy + x dy dz^{(2)} - x dx dz'_1 = 0 \quad \dots(2)$$

$$-2z'_1 dx dy + x dy dz'_1 - x dx dz_2 = 0 \quad \dots(3)$$

und aus der Gleichung (7):

$$dy^2 - dx^2 = 0 \quad \dots(4)$$

Die erste Auflösung von (4):

$$dy = -dx \quad \dots(5)$$

in (2) und (3) eingesetzt, gibt:

$$[z^{(2)} + z_2] dx = x [dx^{(2)} + dz'_1]$$

$$2z'_1 dx = x [dz'_1 + dz_2]$$

Hieraus durch Addition

$$[z^{(2)} + 2z'_1 + z_2] dx = x d[z^{(2)} + 2z'_1 + z_2] \quad \dots(6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) lassen sich sofort integrieren, ihre Integrale sind:

$$y + x = a, \quad \frac{1}{x} [z^{(2)} + 2z'_1 + z_2] = a$$

folglich ist:

$$z^{(2)} + 2z'_1 + z_2 = -4x\varphi'''(y+x) \quad \dots(7)$$

ein erstes Integral der Gleichung (1), wenn man die willkürliche Function mit $-4\varphi'''$ statt früher mit φ bezeichnet, was offenbar geschehen kann.

Die zweite Auflösung von (4):

$$dy = +dx \quad \dots(8)$$

gibt, in (2) und (3) eingeführt:

$$\begin{aligned} [z^{(2)} + z_2] dx &= x [dz^{(2)} - dz_1'] \\ 2z_1' dx &= x [dz_1' - dz_2] \end{aligned}$$

Hieraus durch Subtraction:

$$[z^{(2)} - 2z_1' + z_2] dx = x d[z^{(2)} - 2z_1' + z_2] \quad \dots(9)$$

Die Integrale der Gleichungen (8) und (9) sind:

$$y - x = \beta, \quad \frac{1}{x} [z^{(2)} - 2z_1' + z_2] = b$$

Es ist daher:

$$z^{(2)} - 2z_1' + z_2 = 4x\psi'''(y-x) \quad \dots(10)$$

ebenfalls ein erstes Integral von (1).

Durch Subtraction der Gleichungen (7) und (10) ergibt sich nun weiter:

$$z_1' = -x[\varphi'''(y+x) + \psi'''(y-x)]$$

und hieraus durch Integration nach y :

$$z' = -x[\varphi''(y+x) + \psi''(y-x)]$$

Wird nun auch diese Gleichung und zwar nach x integrirt, so folgt:

$$z = \varphi(y+x) + \psi(y-x) - x[\varphi'(y+x) - \psi'(y-x)]$$

wobei auf die Constanten der beiden Integrationen keine Rücksicht zu nehmen ist, da der Ausdruck für z zwei willkürliche Functionen enthält und der Gleichung (1) genügt, folglich das allgemeine Integral dieser Gleichung sein muss. Man weiss, dass dieses Integral, welches auch der Form nach mit dem von Euler gefundenen übereinstimmt, sowohl durch Reihenentwicklung als auch durch Transformation der Gleichung (1) mittelst zweier neuer Veränderlichen ¹, zumeist nach längeren Rechnungen, niemals aber mittelst einer allgemeinen und directen Methode erhalten wurde. (S. Einleitung.)

¹ Siehe Nathani: Die höhere Analysis. S. 363—65. Die Anwendung der Methode von Ampère auf diese Differentialgleichung wurde, meines Wissens, noch nirgends versucht.

6.

Die vorhin betrachtete Differentialgleichung lässt, wie ersichtlich, kein erstes Integral zu, welches bloß eine willkürliche Function und ausser x, y, z nur z' und z_1 enthielte. Im Vorhergehenden war nun wiederholt von der bekannten Thatsache die Rede, dass es lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit bloß einem ersten Integral erster Ordnung¹ gebe, welches auch die Methode von Monge liefert. Obgleich ein solches Integral zur Herleitung des allgemeinen in manchen Fällen hinreicht, so ist doch die Frage, wie es sich in solchen Fällen mit dem andern ersten Integral verhalte, meines Wissens unerörtert geblieben. Für die beiden folgenden, sehr einfachen Beispiele, die ich wieder dem Werke Euler's entnehme, lässt sich die Antwort leicht finden.

Es sei gegeben:

$$c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{c^2 \partial z}{x \partial x} - \frac{c \partial z}{x \partial y}$$

oder also:

$$c^2 x z'' - x z_2 - c^2 z' + c z_1 = 0. \quad \dots(1)$$

Hier ist

$$R = c^2 x, \quad S = 0, \quad T = -x, \quad U = -c^2 z' + c z_1$$

also:

$$\frac{dU}{dx} = -c^2 z^{(2)} + c z_1', \quad \frac{dU}{dy} = -c^2 z_1' + c z_2$$

und gehen die Gleichungen (12), (13) und (7) des Art. 4 über in die folgenden:

$$(c z_1' - z_2) dx dy + c^2 x dy dz^{(2)} - x dx dz_1' = 0 \quad \dots(2)$$

$$(c^2 z_1' - c z_2) dx dy - c^2 x dy dz_1' + x dx dz_2 = 0 \quad \dots(3)$$

$$c^2 dy^2 - dx^2 = 0. \quad \dots(4)$$

Die erste Auflösung von (4):

$$c dy = dx \quad \dots(5)$$

¹ Weiterhin werde ich diese Integrale nach der Ordnung des höchsten darin vorkommenden partiellen Differentialquotienten von z benennen.

in (2) und (3) eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} (cz'_1 - z_2) dx + c^2 x dz^{(2)} - c x dz'_1 &= 0 \\ (cz'_1 - z_2) dx - c x dz'_1 + x dz_2 &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus durch Subtraction

$$c^2 dz^{(2)} - dz_2 = 0 \quad \dots(6)$$

und wenn man (5) und (6) integrirt:

$$x - cy = \alpha, \quad c^2 z^{(2)} - z_2 = a$$

Es ist daher:

$$c^2 z^{(2)} - z_2 = -4c^2 \varphi''(x - cy) \quad \dots(7)$$

ein erstes Integral, wofür jedoch mit Rücksicht auf (1) auch

$$cz' - z_1 = -4cx\varphi''(x - cy) \quad \dots(8)$$

geschrieben werden kann. Die letztere Gleichung hätte man auch mittelst des Verfahrens von Monge erhalten können.

Die zweite Auflösung von (4):

$$cdy = -dx \quad \dots(9)$$

verwandelt die Gleichungen (2) und (3) in die folgenden:

$$\begin{aligned} (cz'_1 - z_2) dx + c^2 x dz^{(2)} + c x dz'_1 &= 0 \\ (cz'_1 - z_2) dx - c x dz'_1 - x dz_2 &= 0 \end{aligned}$$

aus welchen sich:

$$c^2 dz^{(2)} + 2cdz'_1 + dz_2 = 0 \quad \dots(10)$$

ergibt. Aus (9) und (10) folgt

$$x + cy = \beta, \quad c^2 z^{(2)} + 2cz'_1 + z_2 = b,$$

es ist daher:

$$c^2 z^{(2)} + 2cz'_1 + z_2 = 4c^2 \psi''(x + cy) \quad \dots(11)$$

ebenfalls ein erstes Integral von (1).

Durch Addition der Gleichungen (7) und (11) erhält man

$$cz^2 + z'_1 = 2c\psi''(x + cy) - 2c\varphi''(x - cy)$$

und hieraus:

$$cz' + z_1 = 2c\psi'(x + cy) - 2c\varphi'(x - cy). \quad \dots(12)$$

Weiter folgt aus (8) und (12)

$$z' = \psi'(x+cy) - \varphi'(x-cy) - 2x\varphi''(x-cy)$$

und wenn man nach x integrirt:

$$z = \varphi(x-cy) + \psi(x+cy) - 2x\varphi'(x-cy)$$

das allgemeine Integral von (1), wie Euler es angibt. Da dasselbe der gegebenen Gleichung genügt und zwei willkürliche Functionen enthält, so kommen auch hier die Constanten der zuletzt ausgeführten Integrationen nicht in Betracht.

Ich habe dieses Beispiel, welches schon mittelst der Gleichung (8) leicht erledigt werden kann, als eines derjenigen angeführt, welchen ein erstes Integral erster, und ein solches zweiter Ordnung (Gleichung (11)) entspricht.

7.

Die Gleichung

$$n^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ oder } n^2 z^{(2)} - z_2 = 0 \quad \dots(1)$$

worin n eine näher zu bestimmende Function von x und y bedeutet, ist ebenfalls von der soeben besprochenen Art. Ihr allgemeines Integral, von Euler durch Anwendung der nach ihm benannten Methode gefunden, lässt sich in vollständig entwickelter Form darstellen, was bei der Gleichung (1) des Art. 2, wovon die obenstehende ein specieller Fall ist, nicht geschehen konnte.

Ihr entspricht ein erstes Integral erster Ordnung, wofür das Verfahren von Monge die Gleichungen

$$n^2 dy^2 - dx^2 = 0, \quad n^2 dydz' - dx dz_1 = 0$$

oder, was dasselbe ist, die beiden folgenden:

$$ndy = \pm dx, \quad ndz' \mp dz_1 = 0 \quad \dots(2)$$

gibt, aus welchen sich aber nicht leicht ersehen lässt, wie die Function n allgemein zu bestimmen sei, damit diese Gleichungen integrirt werden können.

Wendet man sich dagegen zu den Gleichungen (12), (13) und (7) des Art. 4 und setzt darin $R = n^2$, $S = 0$, $T = -1$, $U = 0$,

so findet man:

$$2n \frac{\partial n}{\partial x} \cdot z^{(2)} dxay + n^2 dydz^{(2)} - dx dz_1' = 0 \quad \dots(3)$$

$$2n \frac{\partial n}{\partial y} \cdot z^{(2)} dx dy + n^2 dy dz_1' - dx dz_2 = 0 \quad \dots(4)$$

$$n^2 dy^2 - dx^2 = 0 \quad \dots(5)$$

Die zwei ersten Integrale von (1) ergeben sich hieraus wie folgt:

1. Für $ndy = dx$ findet man aus (3) und (4)

$$2 \frac{\partial n}{\partial x} z^{(2)} dx + n dz^{(2)} - dz_1' = 0$$

$$2 \frac{\partial n}{\partial y} z^{(2)} dx + n dz_1' - dz_2 = 0$$

und hieraus

$$2 \left(n \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} \right) z^{(2)} dx + n^2 dz^{(2)} - 2n dz_1' + dz_2 = 0 \quad \dots(6)$$

Wenn man nun mit Euler die Function n durch die Gleichung

$$n \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} = 0$$

definiert und diese integrirt, so erhält man

$$ny + x = f(n) \quad \dots(7)$$

wo f die Charakteristik einer als gegeben zu betrachtenden, aber beliebig zu wählenden Function von n bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung geht (6) über in die folgende:

$$n^2 dz^{(2)} - 2n dz_1' + dz_2 = 0,$$

welche zu der aus (1) durch vollständige Differentiation hervorgehenden

$$n^2 dz^{(2)} + 2nz^{(2)} dn - dz_2 = 0$$

addirt, zu der Gleichung

$$n dz^{(2)} + z^{(2)} dn - dz_1' = 0$$

führt, deren Integral

$$nz^{(2)} - z'_1 = a \quad \dots(8)$$

ist. Um nun auch die Gleichung $ndy = dx$ zu integrieren, bemerke man, dass aus (7)

$$ndy + ydn + dx = f'(n)dn$$

oder also:

$$2ndy + ydn = f'(n)dn$$

folgt. Das Integral der letztern, in Bezug auf y linearen Gleichung ist:

$$\int \frac{f'(n)}{\sqrt{n}} dn - 2y\sqrt{n} = \alpha \quad \dots(9)$$

daher:

$$nz^{(2)} - z'_1 = 2\varphi'' \left[\int \frac{f'(n)}{\sqrt{n}} dn - 2y\sqrt{n} \right] \quad \dots(10)$$

ein erstes Integral von (1).

2. Um das zweite, der Auflösung

$$ndy = -dx \quad \dots(11)$$

entsprechende zu finden reicht es hin, die Gleichungen (14) des Art. 4, nämlich:

$$dz' = z^{(2)}dx + z'_1dy, \quad dz_1 = z'_1dx + z_2dy$$

zu benutzen, welche hier

$$dz' = \left[z^{(2)} - \frac{1}{n} z'_1 \right] dx, \quad dz_1 = \left[z'_1 - \frac{1}{n} z_2 \right] dx$$

sind, und durch deren Addition man:

$$ndz' + dz_1 = \frac{1}{n} [n^2 z^{(2)} - z_2] dx$$

oder also, mit Rücksicht auf (1)

$$ndz' + dz_1 = 0 \quad \dots(12)$$

erhält. Dies ist die Gleichung (2), welche auch das Verfahren von Monge gibt, die aber erst jetzt, nachdem n durch (7) bereits bestimmt ist, integriert werden kann. Denn aus (11) und

$$ny + x = f(n)$$

folgt:

$$[y - f'(n)] dn = 0, \quad dn = 0$$

also $n = \beta$, und aus (12):

$$\beta x' + z_1 = b$$

Es sind daher:

$$nx' + z_1 = 2\chi(n) \quad \dots(13)$$

und (10):

$$nx^{(2)} - z_1' = 2\varphi''(u) \quad \dots(14)$$

die beiden ersten Integrale von (1), wobei zur Abkürzung:

$$u = \int \frac{f'(n)}{\sqrt{n}} dn - 2y \sqrt{n} \quad \dots(15)$$

gesetzt wurde. Das eine dieser Integrale ist, wie man sieht, zweiter Ordnung und kann durch die Methode von Monge nicht erlangt werden. Um nun auch die Gleichung (14) auf die erste Ordnung zu bringen, bemerke man, dass aus (15):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{n}} [f'(n) - y] \cdot \frac{\partial n}{\partial x}$$

und aus (7):

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{f'(n) - y}$$

folgt, also:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ist, daher die Gleichung (14) in der Form:

$$\sqrt{n} \cdot z^{(2)} - \frac{1}{\sqrt{n}} z_1' = 2\varphi''(u) \frac{\partial u}{\partial x}$$

geschrieben werden kann. Man erhält hieraus durch partielle Integration nach x :

$$\sqrt{n} \cdot x' - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot z_1 - \int \frac{1}{2n\sqrt{n}} (nx' + z_1) \cdot \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \partial x = 2\varphi'(u)$$

oder mit Rücksicht auf (13):

$$\sqrt{n} \cdot x' - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot z_1 = 2\varphi'(u) + \int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn$$

Mittelst dieser Gleichung und jener (13) findet man nun:

$$z' = \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi'(u) + \frac{\chi(n)}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn$$

$$z_1 = -\sqrt{n} \cdot \varphi'(u) + \chi(n) - \frac{\sqrt{n}}{2} \int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn$$

und hat also zwei Gleichungen, wovon jede zur Bestimmung von z dient. Obgleich hiermit die Aufgabe als gelöst betrachtet werden kann, so glaube ich doch, auch die bemerkenswerthe Form, welche Euler dem Endresultate gegeben hat, und in welcher keine der willkürlichen Functionen unter einem Integralzeichen erscheint, aus einer der beiden Gleichungen, z. B. aus jener für z' ableiten zu sollen. Da

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad [f'(n) - y] \frac{\partial n}{\partial x} = 1$$

so kann man jene Gleichung wie folgt darstellen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + [f'(n) - y] \left[\frac{\chi(n)}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn \right] \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Es sei nun

$$\int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn = w$$

also w wie $\chi(n)$ eine willkürliche Function von n . Man hat dann

$$\frac{\chi(n)}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \frac{\chi(n)}{n\sqrt{n}} dn = \sqrt{n} \cdot \frac{dw}{dn} + \frac{1}{2\sqrt{n}} w = \frac{d \cdot w \sqrt{n}}{dn}$$

und kann setzen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + [f'(n) - y] \cdot \frac{d \cdot w \sqrt{n}}{dn} \cdot \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$z = \varphi(u) + [f'(n) - y] w \sqrt{n} - \int w \sqrt{n} \cdot f''(n) dn$$

und wenn

$$\int w \sqrt{n} \cdot f''(n) dn = \psi(n) \quad \text{also} \quad w \sqrt{n} = \frac{\psi'(n)}{f''(n)}$$

gesetzt wird, wobei nun $\psi(n)$ eine willkürliche Function bezeichnet, so findet man endlich:

$$z = \varphi \left[\int \frac{f'(n)}{\sqrt{n}} dn - 2y\sqrt{n} \right] - \psi(n) + \frac{f'(n) - y}{f''(n)} \cdot \psi'(n)$$

als das allgemeine Integral von (1) unter der Voraussetzung, dass n der Gleichung $ny + x = f(n)$ genüge.

Hierin ist eines der allgemeinsten Resultate enthalten, zu welchen Euler mittelst seiner Methode gelangt ist. Mag auch die vorstehende Rechnung der Euler'schen an Umfang nicht beträchtlich nachstehen, so wollte ich dieselbe doch in Rücksicht auf die Verschiedenheit der Methoden hier anführen.

8.

Die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{4}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

oder also:

$$xz^{(2)} - xz_2 + 4z' = 0 \quad \dots(1)$$

deren Integral Euler aus einer Reihenentwicklung hergeleitet hat, später aber, soviel mir bekannt, auf einem andern Wege nicht gefunden wurde, erfordert, obschon sie von der Gleichung (1) des Art. 5 nur durch den Coefficienten 4 von z' sich unterscheidet, eine ausgedehntere Anwendung der im Art. 4 angegebenen Gleichungen (12), (13), (7) und (14).

Dieselben gehen, da $R = x$, $S = 0$, $T = -x$, $U = 4z'$ ist, über in:

$$[5z^{(2)} - z_2] dx dy + x dy dz^{(2)} - x dx dz'_1 = 0 \quad \dots(2)$$

$$4z'_1 dx dy + x dy dz'_1 - x dx dz_2 = 0 \quad \dots(3)$$

$$dy^2 - dx^2 = 0 \quad \dots(4)$$

$$dz = z' dx + z_1 dy, \quad dz_1 = z'_1 dx + z_2 dy \quad \dots(5)$$

Hier nun tritt der Fall ein, dass für keine der beiden Auflösungen von (4) sich aus (2) und (3) eine integrable Combination ohne Beziehung der Gleichungen (5) finden lässt.

1. Für $dy = dx$ erhält man:

$$\begin{aligned} [5z^{(2)} - z_2] dx + x dz^{(2)} - x dz_1 &= 0, \\ 4z_1' dx + x dz_1' - x dz_2 &= 0, \\ [xz^{(2)} - xz_2 - 4z_1] dx + 4dz &= 0, \\ dz_1 - (z_1' + z_2) dx &= 0 \end{aligned}$$

wobei zugleich z' mittelst der Gleichung (1) eliminirt wurde. Man kann nun die Multiplicatoren bestimmen, mit welchen diese Gleichungen zu versehen sind, damit sich nach deren Addition eine integrable Relation ergebe. Diese Multiplicatoren sind, wie leicht zu finden ist, der Ordnung nach:

$$x, \quad 5x, \quad -3, \quad 12x,$$

daher die gedachte Relation:

$$\begin{aligned} 4[3z_1 dx + 3x dz_1 + 2xz_1' dx + x^2 dz_1'] + 2xz^{(2)} dx + x^2 dz^{(2)} \\ - 10xz_2 dx - 5x^2 dz_2 - 12dz = 0 \end{aligned}$$

woraus durch Integration die Gleichung:

$$4[3xz_1 + x^2 z_1'] + x^2 z^{(2)} - 5x^2 z_2 - 12z = a$$

sich ergibt. Da ferner aus $dx - dy = 0$ folgt: $x - y = \alpha$ so ist:

$$4[3xz_1 + x^2 z_1'] + x^2 z^{(2)} - 5x^2 z_2 - 12z = 8\psi'''(x - y) \quad \dots(6)$$

ein erstes Integral der Gleichung (1), wobei wieder der Factor 8 der Vereinfachung des Endresultats wegen hinzugenommen wurde.

2. Für $dy = -dx$ findet man aus (2), (3) und (5):

$$\begin{aligned} [5z^{(2)} - z_2] dx + x dz^{(2)} + x dz_1 &= 0, \\ 4z_1' dx + x dz_1' + x dz_2 &= 0, \\ [xz^{(2)} - xz_2 + 4z_1] dx + 4dz &= 0, \\ dz_1 - (z_1' - z_2) dx &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Ordnung nach mit:

$$-x, \quad 5x, \quad +3, \quad 12x$$

und addirt sie dann, so ergibt sich auf gleiche Weise wie vorhin:

$$4[3xz_1 + x^2 z_1'] - x^2 z^{(2)} + 5x^2 z_2 + 12z = -8\psi'''(x + y) \quad \dots(7)$$

Die Gleichungen (6) und (7) stellen die beiden ersten Integrale von (1) dar; beide sind von der zweiten Ordnung. Es ist nun sehr leicht, hieraus das allgemeine Integral abzuleiten.

Durch Addition jener Gleichungen ergibt sich nämlich die folgende:

$$3xz_1 + x^2 z_1' = \psi'''(x-y) - \varphi'''(x+y),$$

welche sowohl nach x als nach y integrirt werden kann.

Bringt man sie behufs der Integration nach x in die Form:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{3}{x} \cdot z_1 = \frac{1}{x^2} [\psi'''(x-y) - \varphi'''(x+y)]$$

und integrirt nun, so erfolgt

$$z_1 = \frac{1}{x^3} \int x [\psi'''(x-y) - \varphi'''(x+y)] dx$$

oder also:

$$z_1 = \frac{1}{x^3} [\varphi'(x+y) - \psi'(x-y)] + \frac{1}{x^2} [-\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)].$$

Hieraus endlich erhält man:

$$z = \frac{1}{x^3} [\varphi(x+y) + \psi(x-y)] - \frac{1}{x^2} [\varphi'(x+y) + \psi'(x-y)]$$

das allgemeine Integral, wie es Euler fand.

9.

Es sei die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + pz = 0$$

gegeben und p als Function von x so zu bestimmen, dass die beiden ersten Integrale dieser Gleichung von der zweiten Ordnung sind.

Da hierbei

$$z^{(2)} - z_2 + pz = 0 \quad \dots(1)$$

also

$$R = 1, \quad S = 0, \quad T = -1, \quad U = pz$$

und

$$\frac{dU}{dx} = pz' + p'z, \quad \frac{dU}{dy} = pz_1$$

so gehen die Gleichungen (12) und (13) des Art. 4 über in:

$$(pz' + p'z) dx dy + dy dz^{(2)} - dx dz'_1 = 0 \quad \dots(2)$$

$$pz_1 dx dy + dy dz'_1 - dx dz_2 = 0 \quad \dots(3)$$

womit die folgenden:

$$dy^2 = dx^2 \quad \dots(4)$$

$$dz - [z' dx + z_1 dy] = 0$$

$$dz' - [z'^{(2)} dx - z'_1 dy] = 0 \quad \dots(5)$$

$$dz_1 - [z'_1 dx + (z^{(2)} + pz) dy] = 0$$

zu verbinden sind. Da in der letzten dieser Gleichungen z_2 mittelst der gegebenen eliminirt ist, so kann (3) weiterhin unberücksichtigt bleiben. Dies vorausgesetzt betrachte man nun einzeln die zwei Auflösungen von (4).

1. Für $dy = -dx$ folgt aus (2) und (5):

$$(pz' + p'z) dx + dz^{(2)} + dz'_1 = 0,$$

$$dz + [z_1 - z'] dx = 0,$$

$$dz' + [z'_1 - z'^{(2)}] dx = 0,$$

$$dz_1 + [z^{(2)} + pz - z'_1] dx = 0$$

und wenn man die drei letzten Gleichungen der Ordnung nach mit den Factoren W, X, X versieht, dann sämmtlich zur ersten addirt und die sich entsprechenden Glieder vereinigt, so ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} & dz^{(2)} + dz'_1 \\ & + X dz' + (p - W) z' dx \\ & + X dz_1 + W z_1 dx \\ & + W dz + (p' + pX) z dx = 0 \end{aligned} \quad \dots(6)$$

Die Bedingungen der Integrabilität dieser Gleichung sind

$$\frac{dX}{dx} = p - W = W \quad \text{und} \quad \frac{dW}{dx} = p' + pX.$$

Man erhält hieraus

$$W = \frac{1}{2} p, \quad X = \frac{1}{2} \int p dx$$

und die Bedingung

$$p' + p \int p dx = 0 \quad \dots(7)$$

Durch Integration von (6) und der Gleichung $dx + dy = 0$ erhält man:

$$z^{(2)} + z'_1 + X(z' + z_1) + Wz = 2\varphi'''(x+y) \quad \dots(8)$$

als erstes Integral von (1).

2. Für $dy = dx$ ergibt sich aus (2) und (5)

$$(pz' + p'z)dx + dz^{(2)} - dz'_1 = 0$$

$$dz - [z' + z_1]dx = 0$$

$$dz' - [z^{(2)} + z'_1]dx = 0$$

$$dz_1 - [z'_1 + z^{(2)} + pz]dx = 0$$

woraus man, wenn die drei letzten Gleichungen mit den Multiplikatoren $W_0, X_0, -X_0$ versehen werden, wie vorhin die Gleichung findet:

$$\begin{aligned} & dz^{(2)} - dz'_1 \\ & + X_0 dz' + (p - W_0)z' dx \\ & - X_0 dz_1 - W_0 z_1 dx \\ & + W_0 dz + (p' + pX_0)z dx = 0 \end{aligned}$$

welche integrabel ist, wenn:

$$\frac{dX_0}{dx} = p - W_0 = W_0 \quad \text{und} \quad \frac{dW_0}{dx} = p' + pX_0$$

gesetzt wird. Man findet hieraus

$$W_0 = W, \quad X_0 = X$$

und wieder die Bedingung (7), folglich durch Integration:

$$z^{(2)} - z'_1 + X(z' - z_1) + Wz = 2\psi'''(x-y) \quad \dots(9)$$

Dies ist ebenfalls ein erstes Integral von (1) und wie (8) von der zweiten Ordnung. Durch Subtraction von (8) und (9) folgt:

$$z'_1 + Xz_1 = \varphi'''(x+y) - \psi'''(x-y)$$

und wenn man nach y integrirt:

$$z' + Xz = \varphi''(x+y) + \psi''(x-y) \quad \dots(10)$$

woraus z gefunden werden kann.

Die Gleichung (7) ist die gesuchte Bedingung für p . Setzt man der Abkürzung wegen:

$$\int p dx = 2q, \quad p = 2q'$$

so folgt:

$$q'' + 2qq' = 0, \quad q' + q^2 = C.$$

Für den besonderen Fall $C=0$ erhält man

$$q = \frac{1}{x+c}, \quad p = -\frac{2}{(x+c)^2}, \quad X=q$$

also aus (10)

$$z = -\frac{1}{x+c} [\varphi(x+y) + \psi(x-y)] + \varphi'(x+y) + \psi'(x-y)$$

als das allgemeine Integral der Gleichung:

$$z^{(2)} - z_2 - \frac{2}{(x+c)^2} \cdot z = 0,$$

wie Euler mittelst Reihenentwicklung fand.

Wird $C = -c^2$ gesetzt, so folgt aus der Gleichung $q' + q^2 = -c^2$

$$q = -c \operatorname{tang}(cx+k), \quad p = -\frac{2c^2}{\cos^2(cx+k)}, \quad X=q$$

daher aus (10)

$$z' - c \operatorname{tang}(cx+k) \cdot z = \varphi''(x+y) + \psi''(x-y)$$

und wenn man diese Gleichung integrirt:

$$z = \frac{1}{\cos(cx+k)} \int \partial x [\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)] \cos(cx+k)$$

Dieser Ausdruck hat den Nachtheil, dass die willkürlichen Functionen unter dem Integralzeichen stehen. Bemerkt man aber, dass

$$c^2 \varphi(x+y) + \varphi''(x+y) \quad \text{für} \quad \varphi''(x+y)$$

und

$$c^2\psi(x-y) + \psi''(x-y) \quad \text{für} \quad \psi''(x-y)$$

geschrieben werden kann, so erscheint z in der Form

$$z = \frac{1}{\cos(cx+k)} \int \partial x [c^2(\varphi(x+y) + \psi(x-y)) + \varphi''(x+y) + \psi''(x-y)] \cos(cx+k)$$

und wenn man auf die beiden letzten Glieder in der Klammer die theilweise Integration wiederholt anwendet:

$$z = c \operatorname{tang}(cx+k) [\varphi(x+y) + \psi(x-y)] + \varphi'(x+y) + \psi'(x-y).$$

Diese von Euler auf anderem Wege abgeleitete Formel stellt das allgemeine Integral der Gleichung:

$$z^{(2)} - z_2 - \frac{2c^2}{\cos^2(cx+k)} \cdot z = 0$$

dar.

Ein dritter Fall ergibt sich für $C = +c^2$; ihm entspricht die Gleichung $q^1 + q^2 = c^2$, aus welcher man

$$q = c \cdot \frac{e^{cx+k} - e^{-(cx+k)}}{e^{cx+k} + e^{-(cx+k)}}$$

erhält.

Die weitere Ausführung ist jener des vorigen Falles ganz analog.

10.

Die hier noch folgenden Differentialgleichungen entsprechen dem am Schluss des Art. 4 betrachteten Fall, dass $R = 0$ und $T = 0$ seien.

Zunächst sei die Gleichung

$$(x+y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

oder also:

$$(x+y)z'_1 - (z' + z_1) = 0$$

gegeben, wofür $S = x+y$, $U = -(z' + z_1)$ ist.

Derselben sind, wie a. a. O. gezeigt ist, die beiden Systeme zugehörig:

$$\begin{aligned} 1. \quad dx = 0, \quad z^{(2)} dy - (x+y) dz^{(2)} &= 0 \\ z_2 dy - (x+y) dz'_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$2. \quad dy = 0, \quad z^{(2)} dx - (x+y) dz_1' = 0 \\ z_2 dx - (x+y) dz_2 = 0$$

aus welchen man sofort:

$$x = \alpha, \quad \frac{z^{(2)}}{\alpha + y} = a, \\ y = \beta, \quad \frac{z_2}{x + \beta} = b$$

folglich die beiden ersten Integrale:

$$z^{(2)} = -\frac{1}{2} (x+y) \varphi'''(x), \quad z_2 = -\frac{1}{2} (x+y) \psi'''(y)$$

erhält, die wieder von der zweiten Ordnung sind. Um aus ihnen durch partielle Integration nach x , resp. y die richtigen Ausdrücke für z' und z_1 zu finden, muss man, da die willkürlichen Functionen hier nur von je einer der Veränderlichen abhängen, auf die Integrationsconstanten Rücksicht nehmen, was in den vorhergehenden Fällen nicht nöthig war.

Zunächst folgt:

$$z' = -\frac{1}{2} (x+y) \varphi''(x) + \frac{1}{2} \varphi'(x) + Y, \\ z_1 = -\frac{1}{2} (x+y) \varphi''(y) + \frac{1}{2} \psi'(y) + X$$

und hieraus:

$$z_1' = -\frac{1}{2} \varphi''(x) + Y', \quad z_1 = -\frac{1}{2} \psi''(y) + X'$$

Es muss daher:

$$X = -\frac{1}{2} \varphi'(x), \quad Y = -\frac{1}{2} \psi'(y)$$

und

$$z' = \frac{1}{2} [\varphi'(x) - \psi'(y)] - \frac{1}{2} (x+y) \varphi''(x) \\ z_1 = \frac{1}{2} [\psi'(y) - \varphi'(x)] - \frac{1}{2} (x+y) \psi''(y)$$

gesetzt werden. Nun findet man weiter:

$$z = \varphi(x) - \frac{1}{2}(x+y)\varphi'(x) - \frac{1}{2}x\psi'(y) + Y$$

$$z = \psi(y) - \frac{1}{2}(x+y)\psi'(y) - \frac{1}{2}y\varphi'(x) + X$$

wobei Y und X zwei neue Integrationsconstante, nämlich unbestimmte Functionen von y , resp. x sind. Damit diese beiden Gleichungen mit einander zusammenfallen, muss

$$X = \varphi(x) - \frac{1}{2}x\varphi'(x), \quad Y = \psi(y) - \frac{1}{2}y\psi'(y)$$

gesetzt werden, wodurch sich

$$z = \varphi(x) + \psi(y) - \frac{1}{2}(x+y)[\varphi'(x) + \psi'(y)]$$

als das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung ergibt, wie es Euler fand.

Als weiteres Beispiel kann die von Euler (III. Art. 324) betrachtete Differentialgleichung

$$(x+y)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x+y) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + (c+1)(c-2)u = 0$$

dienen, worin R und T ebenfalls Null sind. Sie ist einer der ersten Fälle, in welchen sich zeigte, dass das allgemeine Integral auch Differentialquotienten der willkürlichen Functionen enthalten könne. (Siehe Darboux, Comptes rendus T. XCIV.)

Um die Rechnung abzukürzen, setze man:

$$u = \frac{z}{(x+y)^{c+1}}.$$

Die gegebene Gleichung geht dann über in die frühere:

$$(x+y)z'_1 - (z' + z_1) = 0.$$

womit nun auch

$$u = \frac{\varphi(x) + \psi(y)}{(x+y)^{c+1}} - \frac{\varphi'(x) + \psi'(y)}{2(x+y)^c}$$

gefunden ist, übereinstimmend mit dem von Euler durch Reihenentwicklung hergeleiteten Resultat.

Hierzu die Bemerkung, dass auch das Integral der Gleichung

$$(x+y) \cdot z'_1 = z' + z_1 + p$$

worin p eine beliebige Function von x und y bezeichnet, auf dem oben befolgten Weg gefunden werden kann. Ihre beiden ersten Integrale sind

$$z^1 = (x+y) \left[\int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{x+y} + \varphi(x) \right], \quad z_2 = (x+y) \left[\int \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{x+y} + \psi(y) \right].$$

Schliesslich will ich beispielsweise noch anführen, dass die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{x+a}{x+b} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{b-a}{(x+b)^2} \cdot z = 0$$

einer der im Art. 4 erwähnten besonderen Fälle ist, in welcher nur ein erstes Integral zweiter, und kein solches erster Ordnung besteht, das allgemeine Integral aber gleichwohl gefunden werden kann.

Das eine der entsprechenden Systeme von Gleichungen ist hier:

$$\begin{aligned} dx &= 0, & dz &= z_1 dy \\ \left[\frac{x+a}{x+b} \cdot z^{(2)} + \frac{2(b-a)}{(x+b)^2} \cdot z \right] \cdot dy - dz^{(2)} &= 0, \\ \left[\frac{x+a}{x+b} \cdot z'_1 - \frac{b-a}{(x+b)^2} \cdot z_1 \right] \cdot dy - dz'_1 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die beiden letzteren Gleichungen der Ordnung nach mit P, Q und addirt sie dann, so wird die hiedurch sich ergebende Gleichung integrabel, wenn

$$P = \frac{1}{2} (x+a) e^{-\frac{x+a}{x+b} \cdot y}, \quad Q = e^{-\frac{x+a}{x+b} \cdot y}$$

gesetzt wird.

Durch Integration jener Gleichung erhält man als erstes Integral der gegebenen die folgende:

$$P z^{(2)} + Q z'_1 + \frac{b-a}{(x+b)^2} \cdot Q z = \varphi(x)$$

oder, da:

$$z_1' - \frac{x+a}{x+b} \cdot z_1' + \frac{b-a}{(x+b)^2} \cdot z_1 = 0$$

ist, in einfacherer Form:

$$Pz^{(2)} + \frac{x+a}{x+b} \cdot Qz' = \varphi(x)$$

woraus das gesuchte allgemeine Integral gefunden werden kann.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass es viele und sehr einfache Differentialgleichungen der in Rede stehenden Art gibt, welchen erste Integrale der zweiten Ordnung angehören und dass die im Art. 4 vorgeschlagene Methode mit Leichtigkeit zum allgemeinen Integral dieser Gleichungen führt. Dieser Zweck hätte sich wohl auch durch die weniger ausführliche Betrachtung einer geringern Anzahl von Beispielen erreichen lassen, aber die Beispiele an sich schienen mir, wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, von einem um so grösseren, wenn auch nur historischen Interesse zu sein, als mehrere derselben, seit Euler bekannt und selten mehr erwähnt, wie die übrigen bis jetzt einer allgemeinen Methode der Integration sich nicht unterwerfen liessen.

11.

Die weitere Ausführung des im Art. 4 eingeschlagenen Verfahrens, womit sich das zunächst Folgende beschäftigt, betrifft die Fälle, in welchen die beiden ersten Integrale, oder wenigstens eines derselben, von der dritten Ordnung sind.

Es sei wieder die Gleichung

$$Rz^{(2)} + Sz_1' + Tz_2 + U = 0 \quad \dots(1)$$

gegeben.

Man setze der Kürze wegen, wie früher:

$$V_{(1,0)} = \frac{dR}{dx} z^{(2)} + \frac{dS}{dx} z_1' + \frac{dT}{dx} z_2 + \frac{dU}{dx},$$

$$V_{(0,1)} = \frac{dR}{dy} z^{(2)} + \frac{dS}{dy} z_1' + \frac{dT}{dy} z_2 + \frac{dU}{dy} \quad \dots(2)$$

und weiter:

$$\begin{aligned}
 V_{(2,0)} &= \frac{d^2 R}{dx^2} z^{(2)} + \frac{d^2 S}{dx^2} z'_1 + \frac{d^2 T}{dx^2} z_2 + \frac{d^2 U}{dx^2} \\
 &\quad + 2 \left[\frac{dR}{dx} z^{(3)} + \frac{dS}{dx} z_1^{(2)} + \frac{dT}{dx} z'_2 \right], \\
 V_{(1,1)} &= \frac{d^2 R}{dx dy} z^{(2)} + \frac{d^2 S}{dx dy} z'_1 + \frac{d^2 T}{dx dy} z_2 + \frac{d^2 U}{dx dy} \\
 &\quad + \frac{dR}{dx} z_1^{(2)} + \frac{dS}{dx} z'_2 + \frac{dT}{dx} z_3 \\
 &\quad + \frac{dR}{dy} z^{(3)} + \frac{dS}{dy} z_1^{(2)} + \frac{dT}{dy} z'_2, \\
 V_{(0,2)} &= \frac{d^2 R}{dy^2} z^{(2)} + \frac{d^2 S}{dy^2} z'_1 + \frac{d^2 T}{dy^2} z_2 + \frac{d^2 U}{dy^2} \\
 &\quad + 2 \left[\frac{dR}{dy} z_1^{(2)} + \frac{dS}{dy} z'_2 + \frac{dT}{dy} z_3 \right]
 \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\frac{dR}{dx}, \frac{d^2 R}{dx^2}, \dots$ die vollständigen partiellen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung von R, \dots nach x und y bezeichnen.

Die aus (1) durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen sind dann die folgenden:

$$\begin{aligned}
 V_{(1,0)} + Rz^{(3)} + Sz_1^{(2)} + Tz'_2 &= 0 \\
 V_{(0,1)} + Rz_1^{(2)} + Sz'_2 + Tz_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

und:

$$\begin{aligned}
 V_{(2,0)} + Rz^{(4)} + Sz_1^{(3)} + Tz_2^{(2)} &= 0 \\
 V_{(1,1)} + Rz_1^{(3)} + Sz_2^{(2)} + Tz'_3 &= 0 \\
 V_{(0,2)} + Rz_2^{(2)} + Sz'_3 + Tz_4 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Da nun

$$\begin{aligned}
 dz^{(3)} &= z^{(4)} dx + z_1^{(3)} dy \\
 dz_1^{(2)} &= z_1^{(3)} dx + z_2^{(2)} dy \\
 dz'_2 &= z_2^{(2)} dx + z'_3 dy \\
 dz_3 &= z'_3 dx + z_4 dy,
 \end{aligned} \tag{6}$$

so kann man vier der Grössen $z^{(4)}$, $z_1^{(3)}$, $z_2^{(2)}$, z_3' , z_4 durch die fünfte, z. B. durch $z^{(4)}$ ausdrücken, und erhält:

$$z_1^{(3)} dy = dz^{(3)} - z^{(4)} dx$$

$$z_2^{(2)} dy^2 = dz_1^{(2)} dy - dz^{(3)} dx + z^{(4)} dx^2$$

$$z_3' dy^3 = dz_2' dy^2 - dz_1^{(2)} dy dx + dz^{(3)} dx^2 - z^{(4)} dx^3$$

$$z_4 dy^4 = dz_3 dy^3 - dz_2' dy^2 dx + dz_1^{(2)} dy dx^2 - dz^{(3)} dx^3 + z^{(4)} dx^4.$$

Werden die hieraus für $z_1^{(3)}$, . . . z_4 sich ergebenden Ausdrücke in die Gleichungen (5) eingesetzt und die analogen Glieder zusammengefasst, so lassen sich diese Gleichungen wie folgt schreiben:

$$V_{(2,0)} dy^2 + [Rdy^2 - Sdy dx + Tdx^2] \cdot z^{(4)} \\ + (Sdy - Tdx) dz^{(3)} + Tdz_1^{(2)} dy = 0,$$

$$V_{(1,1)} dy^3 - [Rdy^2 - Sdy dx + Tdx^2] [z^{(4)} dx - dz^{(3)}] \\ + (Sdy - Tdx) dz_1^{(2)} dy + Tdz_2' dy^2 = 0,$$

$$V_{(0,2)} dy^4 + [Rdy^2 - Sdy dx + Tdx^2] [z^{(4)} dx^2 - dz^{(3)} dx + dz_2' dy] \\ + (Sdy - Tdx) dz_2' dy^2 + Tdz_3 dy^3 = 0.$$

Da hierin $z^{(4)}$ eine wesentlich unbestimmte Grösse ist und $dz^{(4)}$ nicht vorkommt, so gelten alle Gründe, welche früher für das Verschwinden von $z^{(3)}$ aus den Gleichungen (5) und (6) des Art. 4 angeführt wurden, nun auch in Bezug auf $z^{(4)}$; diese Grösse aber verschwindet aus den vorstehenden drei Gleichungen, wenn wieder:

$$Rdy^2 - Sdy dx + Tdx^2 = 0 \quad \dots(7)$$

gesetzt wird, wodurch jene Gleichungen in die folgenden

$$V_{(2,0)} dy^2 + (Sdy - Tdx) dz^{(3)} + Tdy dz_1^{(2)} = 0$$

$$V_{(1,1)} dy^3 + (Sdy - Tdx) dz_1^{(2)} + Tdy dz_2' = 0 \quad \dots(8)$$

$$V_{(0,2)} dy^4 + (Sdy - Tdx) dz_2' + Tdy dz_3 = 0$$

übergehen. Man kann hieraus T mittelst (7) eliminiren und erhält

$$V_{(2,0)} dx^2 + (Sdx - Rdy) dz_1^{(2)} + Rdx dz^{(3)} = 0$$

$$V_{(1,1)} dx^2 + (Sdx - Rdy) dz_2' + Rdx dz_1^{(2)} = 0 \quad \dots(9)$$

$$V_{(0,2)} dx^2 + (Sdx - Rdy) dz_3 + Rdx dz_2' = 0$$

Eine dritte, einfachere Form erhalten diese Gleichungen, wenn man, was alsbald geschehen wird, S aus ihnen eliminiert.

Es braucht nicht näher gezeigt zu werden, dass man zu den drei Gleichungen, in der einen oder anderen Form, auch gelangt wäre, wenn man der vorigen Betrachtung irgend eine der Grössen $z_1^{(3)}, z_2^{(2)}, z_3^{(1)}, z_4$ statt $z^{(4)}$ zu Grund gelegt hätte.

Die Gleichung (7) der Monge'schen „Charakteristiken“ hatsich auch hier wieder eingestellt.

Wenn die gegebene Gleichung (1) ein erstes Integral dritter Ordnung zulässt, so besteht im Allgemeinen der Weg, dasselbe zu finden, zunächst darin, dass man in den durch Elimination von S entstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} V_{(2,0)} dx dy + R dy dz^{(3)} + T dx dz_1^{(2)} &= 0 \\ V_{(1,1)} dx dy + R dy dz_1^{(2)} + T dx dz_2' &= 0 \\ V_{(0,2)} dx dy + R dy dz_2' + T dx dz_3 &= 0, \end{aligned} \quad \dots(10)$$

sowie in den Gleichungen:

$$\begin{aligned} dz &= [z' dx + z_1 dy] = 0 \\ dz' &= [z^{(2)} dx + z_1' dy] = 0 \\ dz_1 &= [z_1' dx + z_2 dy] = 0 \\ dz_2 &= [z^{(3)} dx + z_1^{(2)} dy] = 0 \\ dz_1' &= [z_1^{(2)} dx + z_2' dy] = 0 \\ dz_2' &= [z_2' dx + z_3 dy] = 0 \end{aligned} \quad \dots(11)$$

dy mittelst einer der beiden aus (7) folgenden Auflösungen $dy = k dx$ durch dx ausdrückt, die Gleichungen (10) hinsichtlich der Differentiale linear macht und die weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned} dy - k dx &= 0, \\ Rz^{(2)} + Sz_1' + Tx_2 + U &= 0 \\ Rz^{(3)} + Sz_1^{(2)} + Tx_1' + V_{1,0} &= 0 \\ Rz_1^{(2)} + Sz_2' + Tx_3 + V_{(0,1)} &= 0 \end{aligned} \quad \dots(12)$$

und, wenn erforderlich, das vollständige Differential der drei letzteren hinzu nimmt. Lassen sich nun aus diesen Gleichungen, oder einigen derselben, zwei andere ableiten, die integriert werden können und deren Integrale $p = \alpha$, $P = a$ sind, so ist

$$P = \varphi(p)$$

ein erstes Integral der Gleichung (1).

Können auf dieselbe Weise auch für die zweite Auflösung $dy = ldx$ der Gleichung (7) zwei Integrale $q = \beta$, $Q = b$ gefunden werden, so ist auch

$$Q = \psi(q)$$

ein erstes Integral von (1). Dabei sind φ und ψ , wie durchgehend, die Charakteristiken willkürlicher Functionen.

Das hiernach als sehr umständlich oder schwierig erscheinende Verfahren gestaltet sich in vielen Fällen beträchtlich einfacher. Enthalten R, S, T, U bloss x, y, z , so reicht es nicht selten hin, bloss einige der angeführten Gleichungen zu Hilfe zu nehmen, dieselben mit Multiplicatoren zu versehen und in der, Art. 4, angegebenen Weise weiter zu verfahren.

Rücksichtlich der Art, wie aus den beiden ersten Integralen, die hier in der Regel von der dritten Ordnung sind, das allgemeine Integral gefunden werden kann, mögen die Bemerkungen des gedachten Artikels, und die früheren Beispiele, soweit es die Analogie zulässt, genügen.

Wenn R oder T , oder R und $T=0$ sind, können die, in anderen Fällen bequemsten Gleichungen (10) nicht mehr angewendet werden, und müssen (8) und (9) an deren Stelle treten. Die Gleichungen (11) und (12) erleiden nur insofern eine Änderung, als in ihnen, dem Fall entsprechend, dx oder dy , dann R oder T , oder beide, in $V_{(1,0)}$, $V_{(0,1)}$, ebenso wie in $V_{(2,0)}$, $V_{(1,1)}$, $V_{(0,2)}$ gleich Null zu setzen sind.

Ist $R=0$, also $Sz'_1 + Tx'_2 + U=0$ die gegebene Gleichung, so sind die folgenden zwei Systeme getrennt zu betrachten:

$$\begin{aligned} 1. \quad dx &= 0, & V_{(2,0)} dy + Sdx^{(3)} + Tdx_1^{(2)} &= 0, \\ & & V_{(1,1)} dy + Sdx_1^{(2)} + Tdx'_2 &= 0, \\ & & V_{(0,2)} dy + Sdx'_2 + Tdx_3 &= 0. \\ 2. \quad Sdy - Tdx &= 0, & V_{(2,0)} dy + Tdx_1^{(2)} &= 0 \\ & & V_{(1,1)} dy + Tdx'_2 &= 0 \\ & & V_{(0,2)} dy + Tdx_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ist $T=0$, also die Gleichung $Rz^{(2)} + Sz'_1 + U=0$ gegeben, so hat man:

1. $dy = 0,$ $V_{(2, 0)} dx + Sdz_1^{(2)} + Rdz^{(3)} = 0,$
 $V_{(1, 1)} dx + Sdz_2' + Rdz_1^{(2)} = 0,$
 $V_{(0, 2)} dx + Sdz_2 + Rdz_2' = 0.$
2. $Sdx - Rdy = 0,$ $V_{(2, 0)} dx + Rdz^{(3)} = 0,$
 $V_{(1, 1)} dx + Rdz_1^{(2)} = 0,$
 $V_{(0, 2)} dx + Rdz_2' = 0.$

Ist $R = 0$ und $T = 0$, also $Sz_1' + U = 0$ die gegebene Gleichung, so finden die folgenden zwei Systeme statt:

1. $dx = 0,$ $V_{(2, 0)} dy + Sdz^{(3)} = 0,$
 $V_{(1, 1)} dy + Sdz_1^{(2)} = 0,$
 $V_{(0, 2)} dy + Sdz_2' = 0.$
2. $dy = 0,$ $V_{(2, 0)} dx + Sdz_1^{(2)} = 0,$
 $V_{(1, 1)} dx + Sdz_2' = 0,$
 $V_{(0, 2)} dx + Sdz_2 = 0.$

Zunächst mögen wieder einige, den Voraussetzungen dieses Artikels entsprechende Beispiele folgen.⁵

12.

Es sei die Gleichung

$$c^2 x^{\frac{4}{3}} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ oder also } c^2 x^{\frac{4}{3}} z^{(2)} - z_2 = 0 \quad \dots(1)$$

gegeben, deren Integral Euler im Art. 345 seines Werkes mittelst Reihenentwicklung gefunden hat.

Da hierbei

$$V_{(1, 1)} = \frac{4}{3} c^2 x^{\frac{1}{3}} z_1^2,$$

so folgt aus (10) die Gleichung

$$\frac{4}{3} c^2 x^{\frac{1}{3}} z_1^{(2)} dx dy + c^2 x^{\frac{4}{3}} dy dz_1^{(2)} - dx dz_2 = 0,$$

welcher noch:

$$dz_1' - [z_1^{(2)} dx + z_2' dy] = 0$$

und

$$c^2 x^{\frac{1}{3}} dy^2 = dx^2$$

hinzuzufügen sind. Es ist nun jede der beiden Auflösungen der letzteren Gleichung einzeln zu betrachten.

1. Für $dy = x^{-\frac{2}{3}} \frac{dx}{c}$ erhält man:

$$\frac{4}{3} cz_1^{(2)} dx + cxdz_1^{(2)} - x^{\frac{1}{3}} dz_2' = 0,$$

$$\frac{1}{3} cdz_1' - \frac{1}{3} cz_1^{(2)} dx - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} z_2' dx = 0$$

und hieraus durch Addition:

$$cz_1^{(2)} dx + cxdz_1^{(2)} + \frac{1}{3} cdz_1' - [x^{\frac{1}{3}} dz_2' + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} z_2' dx] = 0,$$

wozu

$$-cdy + x^{-\frac{2}{3}} dx = 0$$

gehört. Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$cxz_1^{(2)} + \frac{1}{3} cz_1' - x^{\frac{1}{3}} z_2' = 6c^2 \psi^{IV} (3x^{\frac{1}{3}} - cy) \quad \dots(2)$$

als erstes Integral von (1).

2. Für $dy = -x^{-\frac{2}{3}} \frac{dx}{c}$ ergibt sich:

$$\frac{4}{3} cz_1^{(2)} dx + cxdz_1^{(2)} + x^{\frac{1}{3}} dz_2' = 0,$$

$$\frac{1}{3} cdz_1' - \frac{1}{3} cz_1^{(2)} dx + \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} z_2' dx = 0,$$

daher auf dieselbe Weise, wie vorhin:

$$cxz_1^{(2)} + \frac{1}{3} cz_1' + x^{\frac{1}{3}} z_2' = -6c^2 \varphi^{IV} (3x^{\frac{1}{3}} + cy) \quad \dots(3)$$

noch ein erstes Integral der gegebenen Gleichung. Die beiden Integrale (2) und (3) sind von der dritten Ordnung. Man findet aus ihnen:

$$x^{\frac{1}{3}} z_2' = -3c^2 [\varphi^{IV} (3x^{\frac{1}{3}} + cy) + \psi^{VI} (3x^{\frac{1}{3}} - cy)]$$

und wenn man zweimal nach y integrirt:

$$x' = -3x^{-\frac{1}{3}}[\varphi''(3x^{\frac{1}{3}} + cy) + \psi''(3x^{\frac{1}{3}} - cy)].$$

Durch theilweise Integration nach x ergibt sich weiter:

$$z = -3x^{\frac{1}{3}}[\varphi'(3x^{\frac{1}{3}} + cy) + \psi'(3x^{\frac{1}{3}} - cy)] \\ + \int x^{-\frac{2}{3}}[\varphi'(3x^{\frac{1}{3}} + cy) + \psi'(3x^{\frac{1}{3}} - cy)] dx$$

oder endlich:

$$z = \varphi(3x^{\frac{1}{3}} + cy) + \psi(3x^{\frac{1}{3}} - cy) - 3x^{\frac{1}{3}}[\varphi'(3x^{\frac{1}{3}} + cy) + \psi'(3x^{\frac{1}{3}} - cy)],$$

was im Wesentlichen mit dem Resultate Euler's übereinstimmt. Der hier betrachtete Fall ist von einigem Interesse, weil, obgleich die beiden ersten Integrale von der dritten Ordnung sind, im allgemeinen Integral nicht auch die zweiten oder dritten, sondern nur die ersten Differentialquotienten der willkürlichen Functionen vorkommen. Übrigens findet ein nothwendiger Zusammenhang zwischen der Ordnung dieser Differentialquotienten und jener der ersten Integrale im Allgemeinen nicht statt.

13.

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (px + q) \frac{\partial z}{\partial x} - 2pz + rf(x) = 0 \quad \dots(1)$$

worin p, q, r beliebige Functionen von y bezeichnen, hat ein erstes Integral dritter Ordnung. Da hierbei:

$$R = 0, \quad T = 0 \quad \text{und} \quad U = (px + q)z' - 2pz + rf(x)$$

also:

$$V_{(2,0)} = \frac{d^2 U}{dx^2} = (px + q)z'' + rf''(x),$$

so erhält man aus der ersten der am Schluss des Art. 11 angegebenen Gleichungen:

$$dx = 0, \quad [(px + q)z'' + rf''(x)] dy + dz^3 = 0$$

Es ist daher $x = \alpha$ und

$$\frac{dz^{(3)}}{dy} + (p\alpha + q)z^{(3)} + rf''(\alpha) = 0.$$

Bestimmt man aus dieser linearen Gleichung $z^{(3)}$, so ergibt sich als erstes Integral von (1) die Gleichung:

$$z^{(3)} = e^{-\int (px+q) dy} [\varphi(x) - f''(x) \int r e^{\int (px+q) dy} dy]$$

und weiter, wenn man nach x integrirt, das zweite:

$$z^{(2)} = \int \partial x . e^{-\int (px+q) dy} [\varphi(x) - f''(x) \int r e^{\int (px+q) dy} dy] + \psi(y),$$

worin nun $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ zwei willkürliche Functionen bedeuten.

Die Constanten der zwei noch erforderlichen Integrationen sind hier zu berücksichtigen und auf ähnliche Art, wie in den Beispielen des Art. 10 zu ermitteln. Da jedoch die Ausführung zu weitläufige Formeln liefern würde, mag dieselbe auf den besonderen Fall $f''(x) = 0$ beschränkt bleiben, in welchem man es, wenn k und l Constante bezeichnen, mit der Gleichung

$$z_1' + (px + q)z' - 2pz + (kx + l)r = 0 \quad \dots(2)$$

zu thun hat, deren zweites Integral

$$z^{(2)} = \int e^{-\int (px+q) dy} \varphi(x) \partial x + \psi(y) \quad \dots(3)$$

ist. Man findet daraus

$$z' = x\psi(y) + x \int e^{-\int (px+q) dy} \varphi(x) \partial x - \int e^{-\int (px+q) dy} . x\varphi(x) \partial x + Y \dots(4)$$

und kann Y auf folgende Art ermitteln. Da aus (2):

$$z_1^{(2)} + (px + q)z^{(2)} - pz' + kr = 0 \quad \dots(5)$$

und aus (3)

$$z_1^{(2)} = \psi'(y) - \int (px + q) e^{-\int (px+q) dy} . \varphi(x) \partial x \quad \dots(6)$$

folgt, so ergibt sich durch Substitution der Werthe von $z^{(2)}$, z' , $z_1^{(2)}$ aus (3), (4) und (6) in (5) eine Gleichung, aus der man:

$$pY = \psi'(y) + q\psi(y) + kr \quad \dots(7)$$

findet, so dass Y als bekannt betrachtet werden kann.

Man integriere nun (4) nach x und wende dabei wieder das Verfahren der theilweisen Integration an; man erhält dann, wie leicht zu sehen, die Gleichung:

$$z = \frac{1}{2} x^2 \psi(y) + xY + Y_0 \quad \dots(8)$$

$$+ \frac{1}{2} x^2 \int e^{-\int (px+q)dy} \cdot \varphi(x) dx - x \int e^{-\int (px+q)dy} \cdot x\varphi(x) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int e^{-\int (px+q)dy} \cdot x^2 \varphi(x) dx$$

wobei Y_0 noch zu bestimmen ist, und erhalten wird, wenn man die aus (4) und (8) sich ergebenden Ausdrücke für z'_1 , z' , z in die Gleichung (2) einsetzt. Wie voranzusehen war, heben sich die Integrale gegenseitig auf und besteht das Resultat dieser Substitution in der Gleichung:

$$x[\psi'(y) + q\psi(y) + kr - pY] + Y' + qY + lr - 2pY_0 = 0 \quad \dots(9)$$

Da hierin der Coëfficient von x verschwinden muss, so erhält man wieder die Gleichung (7), deren frühere Herleitung also zur Prüfung der Rechnung dient. Zugleich aber folgt aus (9)

$$2pY_0 = Y' + qY + lr$$

und wenn man Y substituirt, für Y_0 die Gleichung

$$2p^3 Y_0 = p\psi''(y) + (2pq - p')\psi'(y) + (pq^2 - p'q + pq')\psi(y)$$

$$+ k(pqr - p'r + pr') + lp^2 r. \quad \dots(10)$$

Die Gleichung (8) stellt das nun in allen Theilen durch (7) und (10) bestimmte allgemeine Integral der Gleichung (2) dar.

Herr Imschenetsky¹ hat das allgemeine Integral der Gleichung

$$z'_1 + xyz' - 2yz = 0$$

durch Verallgemeinerung der „Laplace'schen Methode“ gefunden; aus den vorstehenden Resultaten ergibt sich dasselbe, wenn man $p = y$, $q = 0$ und $r = 0$ setzt.

¹ Siehe die oben erwähnte Abhandlung p. 58.

14.

Die Gleichung

$$(x+y)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x+y) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + (c+2)(c-3) \cdot u = 0 \dots(1)$$

deren Integral man in dem Werke Euler's (III. Art. 325) findet, lässt sich in einfachere Form bringen, wenn man

$$u = \frac{z}{(x+y)^{c+2}}$$

setzt; es ergibt sich nämlich die Gleichung:

$$(x+y) z_1' - 2(z' + z_1) = 0 \dots(2)$$

von welcher hier, um unnöthige Weitläufigkeiten zu vermeiden, ausgegangen werden wird.

Da

$$R = 0, \quad S = x+y, \quad T = 0, \quad U = -2(z' + z_1)$$

folglich:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = -2[z_1^{(3)} + z_1'^2], \quad \frac{d^2 U}{dy^2} = -2[z_2' + z_3]$$

so ist:

$$V_{(2,0)} = -2z_1^{(3)}, \quad V_{(0,2)} = -2z_3$$

und findet man aus den am Schluss des Art. 11 angeführten Formeln die beiden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx &= 0, & -2z_1^{(3)} dy + (x+y) dz_1^{(3)} &= 0, \\ dy &= 0, & -2z_3 dy + (x+y) dz_3 &= 0, \end{aligned}$$

durch deren Integration man zu den beiden folgenden

$$z_1^{(3)} = (x+y)^2 \varphi^V(x)$$

$$z_3 = (x+y)^2 \psi^V(y)$$

gelangt. Dies sind die ersten Integrale der gegebenen Gleichung (2); man kann beide zugleich benutzen, um die aus den noch erforderlichen Integrationen hervorgehenden Constanten zu bestimmen. Zunächst findet man:

$$z^{(2)} = (x+y)^2 \varphi^{IV}(x) - 2(x+y) \varphi'''(x) + 2\varphi''(x) + Y$$

$$z_2 = (x+y)^2 \psi^{IV}(y) - 2(x+y) \psi'''(y) + 2\psi''(y) + X$$

und hieraus:

$$z' = (x+y)^2 \varphi'''(x) - 4(x+y) \varphi''(x) + 6\varphi'(x) + xY + Y_0$$

$$z'_1 = (x+y)^2 \psi'''(y) - 4(x+y) \psi''(y) + 6\psi'(y) + yX + X_0$$

Da aber aus diesen beiden Gleichungen

$$z'_1 = 2(x+y) \varphi'''(x) - 4\varphi''(x) + xY' + Y'_0$$

$$z'_1 = 2(x+y) \psi'''(y) - 4\psi''(y) + yX' + X'_0$$

folgt, so erhält man, wie leicht zu sehen:

$$X = 2\varphi''(x), \quad Y = 2\psi''(y)$$

$$X_0 = 2x\varphi''(x) - 6\varphi'(x), \quad Y_0 = 2y\psi''(y) - 6\psi'(y)$$

somit:

$$z' = (x+y)^2 \varphi'''(x) - 4(x+y) \varphi''(x) + 2(x+y) \psi''(y) + 6\varphi'(x) - 6\psi'(y)$$

$$z'_1 = (x+y)^2 \psi'''(y) - 4(x+y) \psi''(y) + 2(x+y) \varphi''(x) + 6\psi'(y) - 6\varphi'(x)$$

und hieraus endlich:

$$z = (x+y)^2 [\varphi''(x) + \psi''(y)] - 6(x+y) [\varphi'(x) + \psi'(y)] + 12 [\varphi(x) + \psi(y)]$$

als das allgemeine Integral von (2), womit auch jenes von (1) gefunden ist, wie es Euler a. a. O. angibt.

15.

Es sei noch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + pz = 0$$

oder in der einfacheren Schreibweise:

$$z^{(2)} - z_2 + pz = 0 \quad \dots(1)$$

gegeben, in welcher p als Function von x so bestimmt werden soll, dass die beiden ersten Integrale dieser Gleichung von der dritten Ordnung sind.

Da

$$R = 1, \quad S = 0, \quad T = -1, \quad U = pz$$

so ist

$$V_{(2,0)} = \frac{d^2 U}{dx^2} = pz^{(2)} + 2p'z' + p''z$$

folglich nach der ersten der Gleichungen (10) des Art. 11

$$[pz^{(2)} + 2p'z' + p''z] dx dy + dy dz^{(3)} - dx dz_1^{(2)} = 0 \quad \dots(2)$$

und

$$dy^2 = d.r^2 \quad \dots(3)$$

Mit diesen sind noch die fünf ersten der Gleichungen (11) zu verbinden, aus welchen zugleich, um die Rechnung abzukürzen, z_2 und $z^{(3)}$ mittelst der aus (1) folgenden Gleichungen:

$$z_2 = z^{(2)} + pz, \quad z^{(3)} = z_2' - (pz' + p'z)$$

eliminiert werden können, so dass jene fünf Gleichungen in folgender Form erscheinen:

$$\begin{aligned} dz - [z' dx + z_1 dy] &= 0 \\ dz' - [z^{(2)} dx + z_1' dy] &= 0 \\ dx_1 - [z_1' dx + (z^{(2)} + pz) dy] &= 0 \quad \dots(4) \\ dz^{(2)} + [pz' + p'z - z_2'] dx - z_1^{(2)} dy &= 0 \\ dz_1' - [z_1^{(2)} dx + z_2' dy] &= 0. \end{aligned}$$

Es sind nun die beiden Auflösungen der Gleichung (3) einzeln in Betracht zu ziehen.

1. Für $dy = -dx$ folgt

$$[pz^{(2)} + 2p'z' + p''z] dx + dz^{(3)} + dz_1^{(2)} = 0$$

und wenn man die Gleichungen (4) der Ordnung nach mit den Multiplikatoren X, Y, Z, W, W versieht und dann insgesamt zur letzteren addirt, ergibt sich eine Gleichung, die ich, der leichteren Übersicht wegen, in die Form bringe:

$$\begin{aligned} & dz^{(3)} + dz_1^{(2)} \\ & + X dz + (p'' + p'W + pZ) \cdot z dx \\ & + Y dz' + (2p' + pW - X) \cdot z' dx \\ & + Z dx_1 + X z_1 dx \quad \dots(5) \\ & + W dz^{(2)} + (p - Y + Z) z^{(2)} dx \\ & + W dz_1' + (Y - Z) z_1' dx = 0. \end{aligned}$$

Hierin sind nun die vier Multiplicatoren als Functionen von x so zu bestimmen, dass die in je einer Linie stehenden Ausdrücke ein vollständiges Differential ausmachen, dass also:

$$\frac{dX}{dx} = p'' + p'W + pZ$$

$$\frac{dY}{dx} = 2p' + pW - X$$

$$\frac{dZ}{dx} = X$$

und

$$\frac{dW}{dx} = p - Y + Z = Y - Z$$

ist. Man findet hieraus:

$$W = \frac{1}{2} \int p dx$$

$$Z = \frac{3}{4} p + \frac{1}{8} \left[\int p dx \right]^2$$

$$Y = \frac{5}{4} p + \frac{1}{4} \left[\int p dx \right]^2$$

$$X = \frac{3}{4} p + \frac{1}{4} p \int p dx$$

und für p die Bedingungsgleichung:

$$2p'' + 2p' \int p dx + 4p^2 + p \left[\int p dx \right]^2 = 0. \quad \dots(6)$$

Durch Integration von (5) und der Gleichung $dx + dy = 0$ ergibt sich:

$$z^{(3)} + z_1^{(3)} + W[z^{(2)} + z_1'] + Yz' + Zz_1 + Xz = 2\varphi^v(x+y) \quad \dots(7)$$

als erstes Integral von (1).

2. Für $dy = dx$ findet man aus (2) und (4), wenn die Multiplicatoren mit $X_0, Y_0, Z_0, W_0, -W_0$ bezeichnet werden, auf dieselbe Weise wie vorhin die Gleichung:

$$\begin{aligned}
& dz^{(3)} - dz_1^{(2)} \\
& + X_0 dz + (p'' + p' W_0 - p Z_0) z dx \\
& + Y_0 dz' + (2p' + p W_0 - X_0) z' dx \\
& + Z_0 dz_1 - X_0 z_1 dx \\
& + W_0 dz^{(2)} + (p - Y_0 - Z_0) z^{(2)} dx \\
& - W_0 dz_1' - (Y_0 + Z_0) z_1' dx = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

welche integrabel ist, wenn

$$\frac{dX_0}{dx} = p'' + p' W_0 - p Z_0$$

$$\frac{dY_0}{dx} = 2p' + p W_0 - X_0$$

$$\frac{dZ_0}{dx} = -X_0$$

und

$$\frac{dW_0}{dx} = p - Y_0 - Z_0 = Y_0 + Z_0$$

gesetzt wird. Hieraus folgt:

$$W_0 = W, \quad Z_0 = -Z, \quad Y_0 = Y, \quad X_0 = X$$

und als Bedingung wieder die Gleichung (6).

Aus (8) und der Gleichung $dx - dy = 0$ folgt weiter:

$$z^{(3)} - z_1^{(2)} + W[z^{(2)} - z_1'] + Yz' - Zz_1 + Xz = 2\psi^V(x-y) \tag{9}$$

Die Gleichungen (7) und (9) sind die beiden ersten Integrale der gegebenen (1) unter der Voraussetzung, dass p der Bedingung (6) Genüge leiste.

Durch Addition und Subtraction jener Gleichungen entstehen die beiden folgenden:

$$\begin{aligned}
z^{(3)} + Wz^{(2)} + Yz' + Xz &= \varphi^V(x+y) + \psi^V(x-y) \\
z_1^{(2)} + Wz_1' + Zz_1 &= \varphi^V(x+y) - \psi^V(x-y).
\end{aligned} \tag{10}$$

Die erste genügt der Integrabilitätsbedingung $W'' - Y' + X = 0$; das Integral des Ausdrucks linker Hand ist

$$z^{(2)} + Wz' + (Y - W)z$$

da aber $Y - W' = Z$, so folgt aus jener Gleichung:

$$z^{(2)} + Wz' + Zz = \varphi^{IV}(x+y) + \psi^{IV}(x-y) \quad \dots(11)$$

wobei keine Integrationsconstante beizufügen ist, weil sich alle Glieder der Gleichung (11) wieder ergeben, wenn man die zweite der Gleichungen (10) nach y integrirt.

Die Möglichkeit, das allgemeine Integral von (1) zu finden, hängt von der Integration der linearen Gleichung (11) ab, in welcher W und Z durch p , und p durch die Gleichung (6) bestimmt ist.

Setzt man der Kürze wegen

$$p = 2q',$$

so lässt sich (6) in den drei Formen

$$\begin{aligned} q''' + 2qq'' + 4q'^2 + 2q^2q' &= 0, \\ D_x^{(2)}(q' + q^2) + 2q'(q' + q^2) &= 0, \\ D_x^{(2)}[(q' + q^2)x - 2q] + 2q'[(q' + q^2)x - 2q] &= 0 \end{aligned} \quad \dots(12)$$

schreiben.

Die erste dieser Gleichungen wird durch den Factor q integrabel, ihr erstes Integral ist

$$2qq'' - q'^2 + 4q^2q' + q^4 = C,$$

welches, wenigstens für $C=0$, noch eine Integration mittelst eines Multipliers von der Form $Q_0q' + Q$ zulässt. Indessen kann (11) nur für die folgenden Formen von q integrirt werden, welche sich aus der zweiten und dritten der Gleichungen (12) unmittelbar ergeben.

Der zweiten Gleichung in (12) genügt die Annahme $q' + q^2 = 0$, welche im Art. 9 näher betrachtet wurde.

Der dritten Gleichung entspricht die particuläre Lösung

$$(q' + q^2)x - 2q = 0, \quad \dots(13)$$

wofür auch die Gleichung (11), nämlich:

$$z^{(2)} + qz' + \frac{1}{2}(3q' + q^2) \cdot z = \varphi^{IV}(x+y) + \psi^{IV}(x-y)$$

oder also:

$$xz^{(2)} + qxz' + (q'x + q)z = x[\varphi^{IV}(x+y) + \psi^{IV}(x-y)] \dots(14)$$

integriert werden kann. Als erstes Integral erhält man:

$$xz' + (qx - 1)z = x[\varphi'''(x+y) + \psi'''(x-y)] - [\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)]$$

wofür jedoch, weil nach (13)

$$q - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{q'}{q}$$

ist, auch

$$z' + \left[\frac{1}{x} - \frac{q'}{q}\right] \cdot z = \varphi'''(x+y) + \psi'''(x-y) - \frac{1}{x}[\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)]$$

gesetzt werden kann. Hieraus folgt nun

$$z = \frac{q}{x} \int \frac{x}{q} \left[\varphi'''(x+y) + \psi'''(x-y) - \frac{1}{x}[\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)] \right] dx$$

und wenn man bemerkt, dass aus (13)

$$q = \frac{3x^2}{x^3 + c^3}, \quad \text{also } p = \frac{6x(2c^3 - x^3)}{(x^3 + c^3)^2}$$

erhalten wird, wenn c die Integrationsconstante bezeichnet, so findet man nach einer leichten Rechnung:

$$z = \frac{3x}{x^3 + c^3} \left[\varphi(x+y) + \psi(x-y) - x[\varphi'(x+y) + \psi'(x-y)] + \varphi''(x+y) + \psi''(x-y) \right]$$

Dies ist somit das allgemeine Integral der Gleichung:

$$z^{(2)} - z_2 + \frac{6x(2c^3 - x^3)}{(x^3 + c^3)^2} \cdot z = 0,$$

welche sich aus (1) ergibt, wenn man darin für p den angegebenen Ausdruck setzt. Dieses Resultat wurde von Euler (III. Art. 370) durch ein besonderes Verfahren gefunden.

16.

In dem nicht selten eintretenden Fall, dass einige oder alle erste Integrale der gegebenen Gleichung

$$Rz^{(2)} + Sz_1 + Tz_2 + U = 0 \quad \dots(1)$$

von der vierten Ordnung sind, bedarf auch das im Art. 11 auseinander gesetzte Verfahren einer weiteren Entwicklung.

Es sei der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
 V_{(3,0)} &= \frac{d^3 R}{dx^3} z^{(3)} + \frac{d^3 S}{dx^3} z_1' + \frac{d^3 T}{dx^3} z_2 + \frac{d^3 U}{dx^3} \\
 &\quad + 3 \left[\frac{d^2 R}{dx^2} z^{(3)} + \frac{d^2 S}{dx^2} z_1^{(2)} + \frac{d^2 T}{dx^2} z_2' \right] \\
 &\quad + 3 \left[\frac{dR}{dx} z^{(4)} + \frac{dS}{dx} z_1^{(3)} + \frac{dT}{dx} z_2^{(2)} \right], \\
 V_{(2,1)} &= \frac{d^3 R}{dx^2 dy} z^{(3)} + \frac{d^3 S}{dx^2 dy} z_1' + \frac{d^3 T}{dx^2 dy} z_2 + \frac{d^3 U}{dx^2 dy} \\
 &\quad + \frac{d^2 R}{dx^2} z_1^{(2)} + \frac{d^2 S}{dx^2} z_2' + \frac{d^2 T}{dx^2} z_3 \\
 &\quad + 2 \left[\frac{d^2 R}{dx dy} z^{(3)} + \frac{d^2 S}{dx dy} z_1^{(2)} + \frac{d^2 T}{dx dy} z_2' \right] \\
 &\quad + 2 \left[\frac{dR}{dx} z_1^{(3)} + \frac{dS}{dx} z_2^{(2)} + \frac{dT}{dx} z_3' \right] \\
 &\quad + \frac{dR}{dy} z^{(4)} + \frac{dS}{dy} z_1^{(3)} + \frac{dT}{dy} z_2^{(2)}, \\
 V_{(1,2)} &= \frac{d^3 R}{dx dy^2} z^{(3)} + \frac{d^3 S}{dx dy^2} z_1' + \frac{d^3 T}{dx dy^2} z_2 + \frac{d^3 U}{dx dy^2} \\
 &\quad + \frac{d^2 R}{dy^2} z^{(3)} + \frac{d^2 S}{dy^2} z_1^{(2)} + \frac{d^2 T}{dy^2} z_2' \\
 &\quad + 2 \left[\frac{d^2 R}{dx dy} z_1^{(2)} + \frac{d^2 S}{dx dy} z_2' + \frac{d^2 T}{dx dy} z_3 \right] \\
 &\quad + 2 \left[\frac{dR}{dy} z_1^{(3)} + \frac{dS}{dy} z_2^{(2)} + \frac{dT}{dy} z_3' \right] \\
 &\quad + \frac{dR}{dx} z_2^{(2)} + \frac{dS}{dx} z_3' + \frac{dT}{dx} z_4 \\
 V_{(0,3)} &= \frac{d^3 R}{dy^3} z^{(3)} + \frac{d^3 S}{dy^3} z_2' + \frac{d^3 T}{dy^3} z_3 + \frac{d^3 U}{dy^3} \\
 &\quad + 3 \left[\frac{d^2 R}{dy^2} z_1^{(2)} + \frac{d^2 S}{dy^2} z_2' + \frac{d^2 T}{dy^2} z_3 \right] \\
 &\quad + 3 \left[\frac{dR}{dy} z_2^{(2)} + \frac{dS}{dy} z_3' + \frac{dT}{dy} z_4 \right].
 \end{aligned}$$

Die durch Differentiation von (1) entstehenden Gleichungen sind dann die folgenden:

$$\begin{aligned}
 V_{(3, 0)} + Rz^{(5)} + Sz_1^{(4)} + Tz_2^{(3)} &= 0 \\
 V_{(2, 1)} + Rz_1^{(4)} + Sz_2^{(3)} + Tz_3^{(2)} &= 0 \\
 V_{(1, 2)} + Rz_2^{(3)} + Sz_3^{(2)} + Tz_4' &= 0 \\
 V_{(0, 3)} + Rz_3^{(2)} + Sz_4^{(1)} + Tz_5 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Da nun zwischen den sechs hierin vorkommenden partiellen Differentialquotienten fünfter Ordnung von z die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 dz^{(4)} &= z^{(5)} dx + z_1^{(4)} dy \\
 dz_1^{(3)} &= z_1^{(4)} dx + z_2^{(3)} dy \\
 dz_2^{(2)} &= z_2^{(3)} dx + z_3^{(2)} dy \\
 dz_3' &= z_3^{(2)} dx + z_4' dy \\
 dz_4 &= z_4' dx + z_5 dy
 \end{aligned}$$

bestehen, so kann man irgend welche fünf dieser Differentialquotienten durch den sechsten, z. B. durch $z^{(5)}$ ausdrücken, wie solches in den folgenden Gleichungen geschieht:

$$\begin{aligned}
 z_1^{(4)} dy &= dz^{(4)} - z^{(5)} dx, \\
 z_2^{(3)} dy^2 &= dz_1^{(3)} dy - dz^{(4)} dx + z^{(5)} dx^2, \\
 z_3^{(2)} dy^3 &= dz_2^{(2)} dy^2 - dz_1^{(3)} dy dx + dz^{(4)} dx^2 - z^{(5)} dx^3, \\
 z_4' dy^4 &= dz_3' dy^3 - dz_2^{(2)} dy^2 dx + dz_1^{(3)} dy dx^2 - dz^{(4)} dx^3 + z^{(5)} dx^4, \\
 z_5 dy^5 &= dz_4' dy^4 - dz_3' dy^3 dx + dz_2^{(2)} dy^2 dx^2 - dz_1^{(3)} dy dx^3 + dz^{(4)} dx^4 \\
 &\quad - z^{(5)} dx^5.
 \end{aligned}$$

Setzt man die hieraus für $z_1^{(4)}, z_2^{(3)}, \dots, z_5$ sich ergebenden Ausdrücke in die Gleichungen (2) ein, so wird jede derselben nur noch $z^{(5)}$ enthalten, dessen Coefficient aus den früher (Art. 4 und 11) bezüglich $z^{(3)}$ und $z^{(4)}$ angegebenen Gründen gleich Null zu setzen ist. Da aber $z^{(5)}$ aus allen jenen Gleichungen verschwindet, wenn wieder

$$Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2 = 0 \tag{3}$$

gesetzt wird, so reduciren sich dieselben nach einigen sich von selbst ergebenden Reductionen auf die folgenden:

$$\begin{aligned} V_{(3,0)} dy^2 + (Sdy - Tdx) dz_1^{(4)} + T dz_1^{(3)} dy &= 0 \\ V_{(2,1)} dy^2 + (Sdy - Tdx) dz_1^{(3)} + T dz_1^{(2)} dy &= 0 \\ V_{(1,2)} dy^2 + (Sdy - Tdx) dz_1^{(2)} + T dz_1' dy &= 0 \\ V_{(0,3)} dy^2 + (Sdy - Tdx) dz_1' + T dz_1 dy &= 0, \end{aligned} \quad \dots(4)$$

welche, wenn T mittelst (3) eliminirt wird, auch in der Form:

$$\begin{aligned} V_{(3,0)} dx^2 + (Sdx - Rdy) dz_1^{(3)} + R dz_1^{(4)} dx &= 0 \\ V_{(2,1)} dx^2 + (Sdx - Rdy) dz_1^{(2)} + R dz_1^{(3)} dx &= 0 \\ V_{(1,2)} dx^2 + (Sdx - Rdy) dz_1' + R dz_1^{(2)} dx &= 0 \\ V_{(0,3)} dx^2 + (Sdx - Rdy) dz_1' + R dz_1 dx &= 0 \end{aligned} \quad \dots(5)$$

geschrieben werden können. Es ist übrigens leicht zu sehen, dass durch Elimination von S die noch einfachere Form:

$$\begin{aligned} V_{(3,0)} dx dy + R dy dz_1^{(4)} + T dx dz_1^{(3)} &= 0 \\ V_{(2,1)} dx dy + R dy dz_1^{(3)} + T dx dz_1^{(2)} &= 0 \\ V_{(1,2)} dx dy + R dy dz_1^{(2)} + T dx dz_1' &= 0 \\ V_{(0,3)} dx dy + R dy dz_1' + T dx dz_1 &= 0 \end{aligned} \quad \dots(6)$$

erhalten wird.

Die Systeme von Gleichungen, welche den besonderen Fällen $R=0$, oder $T=0$, oder $R=0$ und $T=0$ entsprechen, ergeben sich analog wie dies in den Art. 4 und 11 gezeigt wurde, aus (4) und (5).

Die beiden ersten Integrale vierter Ordnung von (1) sind, auf Grund je einer Auflösung von (3), durch Integration eines der drei Systeme (4), (5), (6), abzuleiten, wobei im Allgemeinen wieder die gegebene Gleichung und deren partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, ferner die Differentialformeln (11) des Art. 11, und die folgenden:

$$\begin{aligned} dz^{(3)} - [z^{(4)} dx + z_1^{(3)} dy] &= 0 \\ dz_1^{(2)} - [z_1^{(3)} dx + z_2^{(2)} dy] &= 0 \\ dz_2' - [z_2^{(2)} dx + z_3' dy] &= 0 \\ dz_3 - [z_3' dx + z_4 dy] &= 0 \end{aligned}$$

zu Hilfe genommen werden müssen.

17.

Die in der Natur des vorhin betrachteten Falles liegende Complication tritt schon bei der so einfachen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6}{x} \frac{\partial z}{\partial x}$$

scharf hervor. Auch an dieser zuerst von Euler (III. Art. 343) ebenfalls mittelst Reihenentwicklung, integrierten Gleichung scheiderte bis jetzt jede allgemeine Methode der Integration.

Bringt man sie in die Form

$$xz^{(2)} - xz_2 - 6z' = 0 \quad \dots(1)$$

so ist $R = x$, $S = 0$, $T = -x$, $U = -6z'$, daher:

$$\begin{aligned} V_{(3,0)} &= -3[z^{(4)} + z_2^{(2)}], & V_{(2,1)} &= -[4z_1^{(3)} + 2z_3'] \\ V_{(1,2)} &= -[5z_2^{(2)} + z_4], & V_{(0,3)} &= -6z_3' \end{aligned}$$

wofür die Gleichungen (6) des vorigen Artikels in:

$$\begin{aligned} -[3z^{(4)} + 3z_2^{(2)}]dxdy + xdydz^{(4)} - xdx dz_1^{(3)} &= 0 \\ -[4z_1^{(3)} + 2z_3']dxdy + xdydz_1^{(3)} - xdx dz_2^{(2)} &= 0 \\ -[5z_2^{(2)} + z_4]dxdy + xdydz_2^{(2)} - xdx dz_3' &= 0 \\ -6z_3'dxdy + xdydz_3' - xdx dz_4 &= 0 \end{aligned} \quad \dots(2)$$

übergehen. Man nehme hierzu noch die aus (1) durch zweimalige Differentiation nach x und y sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{aligned} 4z^{(3)} + 2z_2' + xz_2^{(2)} - xz^{(4)} &= 0 \\ 6z_2' - xz_2^{(2)} + xz_4 &= 0 \end{aligned} \quad \dots(3)$$

und die Differentialformeln:

$$\begin{aligned} dz^{(3)} - [z^{(4)}dx + z_1^{(3)}dy] &= 0 \\ dz_2' - [z_2^{(2)}dx + z_3'dy] &= 0. \end{aligned} \quad \dots(4)$$

Sonstige Hilfsgleichungen sind wegzulassen, weil ihre Multiplikatoren Null werden.

Betrachtet man nun die beiden Auflösungen der Gleichung

$$dy^2 = dx^2$$

so ergibt sich:

1. Für $dy = dx$, wenn man die Gleichungen (2), nach Weglassung des gemeinsamen Factors dx , der Ordnung nach mit

$$5x, 3x, 3x, x,$$

ferner die Gleichungen (3) mit $18 dx$, $6 dx$ und endlich die Gleichungen (4) und zwar jede mit $-18 x$ multiplicirt, sodann sämtliche Gleichungen addirt:

$$x^2[5dz^{(4)} - 2dx_1^{(3)} - 2dz_3' - dz_4] - 3x[5z^{(4)} - 2z_1^{(3)} - 2z_3' - z_4]dx - 18x[dx^{(3)} + dz_2'] + 72[z^{(3)} + z_2']dx = 0$$

Diese Gleichung wird offenbar integrabel, wenn man sie mit x^5 dividirt; ihr Integral ist:

$$\frac{1}{x^3}[5z^{(4)} - 2z_1^{(3)} - 2z_3' - z_4] - \frac{18}{x^4}[z^{(3)} + z_2'] = a.$$

und jenes der Gleichung $dx - dy = 0$ ist $x - y = a$, folglich:

$$x[5z^{(4)} - z_4] - 2x[z_1^{(3)} + z_3'] - 18[z^{(3)} + z_2'] = -8x^4 \psi^{VII}(x - y) \dots (5)$$

ein erstes Integral der Gleichung (1).

2. Für $dy = -dx$ ergibt sich, wenn man die Gleichungen (2) wieder von dem gemeinsamen Factor dx befreit, dann der Ordnung nach mit

$$-5x, 3x, -3x, x,$$

ferner wie vorhin die Gleichungen (3) mit $18 dx$, $6 dx$, und die Gleichungen (4) mit $-18 x$ multiplicirt, hierauf diese Gleichungen insgesamt addirt:

$$x^2[5dz^{(4)} + 2dx_1^{(3)} + 2dz_3' - dz_4] - 3x[5z^{(4)} + 2z_1^{(3)} + 2z_3' - z_4]dx - 18x[dx^{(3)} + dz_2'] + 72[z^{(3)} + z_2']dx = 0$$

Auch diese Gleichung wird integrabel, wenn man mit x^5 dividirt; ihr Integral ist:

$$\frac{1}{x^3}[5z^{(4)} + 2z_1^{(3)} + 2z_3' - z_4] - \frac{18}{x^4}[z^{(3)} + z_2'] = b$$

und da $dx + dy = 0$ also $x + y = \beta$, so folgt:

$$5z^{(4)} - z_4] + 2x[z_1^{(3)} + z_3'] - 18[z^{(3)} + z_2'] = -8x^4 \varphi^{VII}(x + y) \dots (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) stellen nun die beiden ersten Integrale der Gleichung (1) dar und sind von der vierten Ordnung. Der Factor 8 auf der rechten Seite wurde zur Vermeidung von Brüchen hinzugenommen.

Das allgemeine Integral lässt sich auf verschiedene Weise, z. B. wie folgt finden. Aus (5) und (6) findet man zunächst:

$$x[5z^{(4)} - z_4] - 18[z^{(3)} + z'_2] = -4x^4[\varphi^{\text{VII}}(x+y) + \psi^{\text{VII}}(x-y)] \dots(7)$$

$$z^{(3)} + z'_2 = -2x^3[\varphi^{\text{VII}}(x+y) - \psi^{\text{VII}}(x-y)] \dots(8)$$

und aus (8)

$$z^{(3)} + z'_2 = -2x^3[\varphi^{\text{VI}}(x+y) + \psi^{\text{VI}}(x-y)] \dots(9)$$

daher aus (7)

$$5z^{(4)} - z_4 = -4x^3[\varphi^{\text{VII}}(x+y) + \psi^{\text{VII}}(x-y)] - 36x^2[\varphi^{\text{VI}}(x+y) + \psi^{\text{VI}}(x-y)] \dots(10)$$

Verbindet man die aus (9) sich ergebende Gleichung

$$z^{(4)} + z_2^{(2)} = -2x^3[\varphi^{\text{VII}}(x+y) + \psi^{\text{VII}}(x-y)] - 6x^2[\varphi^{\text{VI}}(x+y) + \psi^{\text{VI}}(x-y)]$$

mit (10) durch Elimination von $z^{(4)}$, so erhält man:

$$5z_2^{(2)} + z_4 = -6x^3[\varphi^{\text{VII}}(x+y) + \psi^{\text{VII}}(x-y)] + 6x^2[\varphi^{\text{VI}}(x+y) + \psi^{\text{VI}}(x-y)]$$

und hieraus:

$$5z^{(2)} + z_2 = -6x^3[\varphi^{\text{V}}(x+y) + \psi^{\text{V}}(x-y)] + 6x^2[\varphi^{\text{IV}}(x+y) + \psi^{\text{IV}}(x-y)] \dots(11)$$

Da ferner aus (9):

$$z^{(2)} + z_2 = -2x^3[\varphi^{\text{V}}(x+y) + \psi^{\text{V}}(x-y)] + 6x^2[\varphi^{\text{IV}}(x+y) + \psi^{\text{IV}}(x-y)] \\ - 12x[\varphi'''(x+y) + \psi'''(x-y)] + 12[\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)] \dots(12)$$

folgt, so kann man aus (11) und (12) sowohl für $z^{(2)}$ als z_2 eine Gleichung finden und daher z auf doppelte Art berechnen, um sich zu überzeugen, dass die Constanten der verschiedenen Integrationen nicht zu berücksichtigen sind.

Man findet:

$$z_2 = -x^3[\varphi^{\text{V}}(x+y) + \psi^{\text{V}}(x-y)] + 6x^2[\varphi^{\text{IV}}(x+y) + \psi^{\text{IV}}(x-y)] \\ - 15x[\varphi'''(x+y) + \psi'''(x-y)] + 15[\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)]$$

also

$$z = -x^3[\varphi'''(x+y) + \psi'''(x-y)] + 6x^2[\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)] \\ - 15x[\varphi'(x+y) + \psi'(x-y)] + 15[\varphi(x+y) + \psi(x-y)]$$

wofür man offenbar auch:

$$z = \varphi(x+y) + \psi(x-y) - [\varphi'(x+y) + \psi'(x-y)] \\ + \frac{2}{5} x^2 [\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)] - \frac{1}{15} x^3 [\varphi'''(x+y) + \psi'''(x-y)]$$

setzen kann. Dies ist das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung, welches, in etwas anderer Form geschrieben, mit dem von Euler gefundenen übereinstimmt.

18.

Wenn die gegebene Differentialgleichung

$$Rz^{(2)} + Sz'_1 + Tz_2 + U = 0 \quad \dots(1)$$

der bisherigen Voraussetzung entsprechend, zwei erste Integrale von der ersten oder zweiten, dritten, vierten Ordnung zulässt, so können diese Integrale, wie gezeigt wurde, mittelst der in den Art. 1, resp. 4, 11, 16 entwickelten Systeme von Gleichungen gefunden werden. Hierdurch aber sind gewissermassen nur die ersten Glieder des allgemeinen Falles gegeben, wenn die ersten Integrale von der n -Ordnung sind, unter n eine positive ganze Zahl verstanden. Die Bedingungen, unter welchen solche Integrale überhaupt bestehen, sind nun allerdings nicht bekannt; finden sie aber statt, oder geht man von der Hypothese aus, dass sie stattfinden, so ist die Möglichkeit, ihre Ordnungszahl zu bestimmen, durch die jenem allgemeinen Fall entsprechenden Gleichungen gegeben, deren Aufstellung der hauptsächlichste Gegenstand dieser Arbeit ist.

Um diese Gleichungen zu erhalten, bedarf es indessen keiner weiteren Rechnung, da der durchaus gleichmässige Fortgang derselben für $n = 1, 2, 3, 4$ jene des allgemeinen Falles unmittelbar erkennen lässt.

Es sei zur Abkürzung:

$$f = Rz^2 + Sz'_1 + Tz_2 + U \quad \dots(2)$$

und

$$V_{r,s} = \frac{d^{r+s} f}{dx^r dy^s} - [Rz^{(r+2)} + Sz_{s+1}^{(r+1)} + Tz_{s+2}^{(r)}] \quad \dots(3)$$

wobei die in dem ersten Glied rechter Hand angedeuteten Differentiationen sich auf alle in f vorkommenden von x und y abhängigen Grössen erstrecken.

Die beiden ersten Integrale n -Ordnung sind dann mit Hilfe der für alle Ordnungen unverändert fortbestehenden Gleichung:

$$Rdy^2 - Sdydx + Tdx^2 = 0 \quad \dots(4)$$

resp. einer ihrer Auflösungen

$$dy = kdx, \quad dy = ldx \quad \dots(5)$$

und, im Allgemeinen, unter Beziehung der Gleichungen:

$$f_i^{(r)} = 0, \quad r + s \cong n - 2 \quad \dots(6)$$

$$dz_i^{(r)} = z_i^{(r+1)} dx + z_{i+1}^{(r)} dy, \quad r + s \cong n - 1 \quad \dots(7)$$

entweder aus dem System:

$$\begin{aligned} V_{(n-1, 0)} dy^2 + (Sdy - Tdx) dz_1^{(n)} + Tdydz_1^{(n-1)} &= 0 \\ V_{(n-2, 1)} dy^2 + (Sdy - Tdx) dz_1^{(n-1)} + Tdydz_2^{(n-2)} &= 0 \\ \dots & \\ V_{(0, n-1)} dy^2 + (Sdy - Tdx) dz'_{n-1} + Tdydz_n &= 0 \end{aligned} \quad \dots(8)$$

oder aus:

$$\begin{aligned} V_{(n-1, 0)} dx^2 + (Sdx - Rdy) dz_1^{(n-1)} + Rdx dz^{(n)} &= 0 \\ V_{(n-2, 1)} dx^2 + (Sdx - Rdy) dz_2^{(n-2)} + Rdx dz_1^{(n-1)} &= 0 \\ \dots & \\ V_{(0, n-1)} dx^2 + (Sdx - Rdy) dz_n + Rdx dz'_{n-1} &= 0 \end{aligned} \quad \dots(9)$$

oder endlich aus:

$$\begin{aligned} V_{(n-1, 0)} dx dy + Rdy dz^{(n)} + Tdx dz_1^{(n-1)} &= 0 \\ V_{(n-2, 1)} dx dy + Rdy dz_1^{(n-1)} + Tdx dz_2^{(n-2)} &= 0 \\ \dots & \\ V_{(0, n-1)} dx dy + Rdy dz'_{n-1} + Tdx dz_n &= 0 \end{aligned} \quad \dots(10)$$

in der Weise abzuleiten, dass man, je eine der Gleichungen (5) zu Grunde legend, aus (6) und (7) und einem der drei angegebenen Systeme eine integrable Gleichung bildet.

Ist $P = a$ für $dy = kdx$
 und $Q = b$ für $dy = ldx$

das Integral dieser Gleichung und sind $p = \alpha$, $q = \beta$ die Integrale der Gleichungen $dy - kdx = 0$, resp. $dy - ldx = 0$

so sind:

$$P = \varphi(p), \quad Q = \psi(q)$$

die gesuchten ersten Integrale der gegebenen Gleichung (1).

In den besonderen Fällen: $R=0$, oder $T=0$, oder $R=0$ und $T=0$ sind statt (10) die aus (8) oder (9) hierfür sich ergebenden Systeme von Gleichungen, und statt (5) die Auflösungen:

$$dx = 0, \quad Sdy - Tdx = 0 \quad \text{wenn } R = 0;$$

$$dy = 0, \quad Sdx - Rdy = 0 \quad \text{wenn } T = 0;$$

$$dx = 0, \quad dy = 0 \quad \text{wenn } R = 0, T = 0$$

anzuwenden.

Das allgemeine Integral der gegebenen Gleichung ist aus den beiden ersten Integralen, auch wenn diese von verschiedener Ordnung sind, unter Zuziehung der Gleichungen (6) und (7) abzuleiten.

Hierin besteht die Methode, deren Auseinandersetzung ich mir zur Aufgabe gemacht habe.



Über die Einwirkung von Natrium auf Campher.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von J. Kachler und F. V. Spitzer.

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. A. Lieben.)

Die Producte der Einwirkung von Natrium auf Campher sind schon wiederholt untersucht worden; nach Baubigny entsteht hiebei ein Gemenge von Borneolnatrium und Campher-natrium:



Über die Natriumverbindung des Camphers selbst, liegen jedoch keine näheren Angaben vor.

Wir haben bereits in einer früheren Abhandlung darauf hingewiesen, dass nach der Menge des bei dieser Reaction entstehenden Borneols geschlossen werden muss, dass im Campher mehr als ein Atom Wasserstoff durch Natrium substituirt wird.

Um nun zunächst die Zusammensetzung der bei der Einwirkung von Natrium auf Campher gebildeten Natriumverbindungen kennen zu lernen, haben wir Natrium auf Campher in verschiedenen Lösungsmitteln und bei verschiedenen Temperaturen einwirken lassen. Es hat sich dabei herausgestellt, dass auf eine Lösung des Camphers in absolutem Äther oder entsprechend gereinigten, niedrig siedenden Petroleumäther das Natrium schon bei gewöhnlicher Temperatur einwirkt. Wir erhielten aber stets Natriumverbindungen, die bei der Analyse einen auffallend hohen Gehalt an Natrium und Sauerstoff zeigten. In Folge dessen haben wir bei den weiteren Versuchen nur ein sauerstofffreies Lösungsmittel angewandt und bei der Reaction den Zutritt der Luft möglichst ausgeschlossen. Es wurde Campher in Petroleumäther, der vorher über Natrium abdestillirt war, auf

gelöst, durch den Apparat fortwährend ein trockener Wasserstoffstrom geleitet, Natrium zugefügt und dann zur möglichst vollständigen Beendigung der Reaction auf dem Wasserbade durch mehrere Tage unter Rückflusskühlung erhitzt.

Das ausgeschiedene, etwas gefärbte Natriumsalz wurde abfiltrirt, mit Petroleumäther gewaschen und erst unter eine Glocke über Paraffin, zuletzt im Vacuum über Schwefelsäure gestellt und so getrocknet. Die Analyse desselben ergab wieder einen bedeutenden Gehalt an Sauerstoff.

Wird die Salzmasse mit Wasser behandelt, so löst sich dieselbe leicht auf, wobei etwas Campher (Borneol?) abgeschieden wird. Die davon abfiltrirte, stark alkalisch reagirende Lösung gibt beim Versetzen mit einer Säure einen reichlichen, wenig gefärbten, flockigen Niederschlag, der sich schliesslich zu einer gelblichen klebrigen Masse zusammenballt.

Aus diesem Producte konnten nun durch trockene Destillation oder fractionirte Krystallisation zwei verschiedene Substanzen isolirt werden:

- a) Weisse stark glänzende Blätter, die bei 141°C . (uncorr.) schmelzen, in Wasser unlöslich sind, in Alkohol und Äther sich jedoch leicht auflösen und nach den bisherigen Analysen die Zusammensetzung $\text{C}_{20}\text{H}_{30}\text{O}_3$ besitzen.
- b) Campfersäureanhydrid $\text{C}_{10}\text{H}_{16}\text{O}_2$.

Wir beabsichtigen durch weitere Versuche die unter den angeführten Bedingungen eigenthümliche Bildungsweise dieser sauerstoffreichen Körper aufzuklären und möchten uns nur durch diese vorläufige Mittheilung die Bearbeitung dieses Gegenstandes vorbehalten.

Studien über Perjodide.

Von F. W. Dafert.

(Mittheilung aus dem chem. Universitäts-Laboratorium im Convictgebäude.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1883.)

Die ersten eingehenden Untersuchungen dieser Körpergruppe haben Weltzien¹ und R. Müller² von den Ammoniumbasen, Jörgensen³ von den Alkaloiden (nebst anderen nicht stickstoffhaltigen Verbindungen) geliefert. Ausserdem sind Beschreibungen einzelner solcher Perjodide in erheblicher Zahl gefolgt; z. B. haben Claus und Istel⁴ einen Körper $C_9H_7N.J_2$, ein Bijodid des Chinolins, Grimaux⁵ ein Bibromid derselben Base dargestellt etc. Ich habe nun in der Absicht vielleicht eine Gesetzmässigkeit in der Bildung solcher Perhalogenide bei den Stickstoffverbindungen zu finden, zahlreiche solche, verschiedenen Reihen angehörige Substanzen auf ihre Fähigkeit mit Jod Additionsproducte zu bilden, geprüft und gebe im Folgenden sowohl die positiven, als auch die negativen Resultate meiner Studien.

I. Perjodide der Trialkylphenyliumjodide.

Dieselben verhalten sich im Allgemeinen in den von mir untersuchten Beispielen, wie vorauszusehen war, analog den von Weltzien und R. Müller beschriebenen Körpern dieser Art den Tetralkyliumperjodiden.

¹ Weltzien. A. Ch. Ph. 91, p. 33—99, p. 1.

² R. Müller. A. Ch. Ph. 108. p. 1.

³ Jörgensen. J. f. p. Ch. 2, 3, 14, 15. N. F.

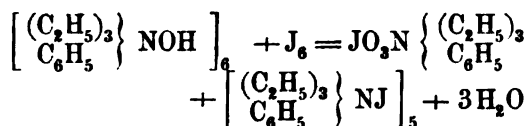
⁴ Claus und Istel. B. 15, p. 824.

⁵ Grimaux. Bl. 37, p. 433.

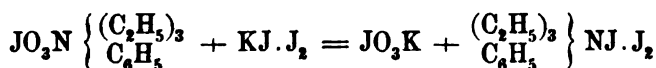
Bildung und Darstellung.

Man erhält sie aus den in Alkohol oder Wasser gelösten Jodiden durch Fällung mit alkoholischer oder Jodjodkaliumlösung als scheinbar mikrokristallinische oder amorphe, bei geringer Variation des Jodgehaltes der Jodlösung in ihrer Farbe veränderliche, leicht zersetzbare Niederschläge, die sich aus Weingeist, wengleich bei oftmaliger Wiederholung nicht ohne partielle Zersetzung, umkristallisiren lassen und dann gut charakterisirte, an der Luft ziemlich beständige Präparate vorstellen.

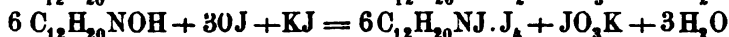
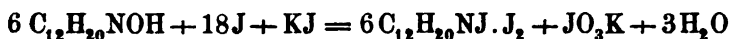
Auch die Hydroxide geben unter denselben Umständen die den Jodiden entsprechenden Perjodide und verhält sich hiebei das angewandte Hydroxyd als starke Base, welche die Hydroxylgruppe unter Bildung von Jodsäure gegen Jod austauscht.



Das so entstandene Jodid bildet mit dem vorhandenen überschüssigen Jod Perjodid, während sich bei Anwendung von Jodjodkaliumlösung wahrscheinlich das Jodat der Base mit dem als $\text{KJ} \cdot \text{J}_2$ in Lösung befindlichem Jod und Jodkalium¹ umsetzt:



Wodurch an Stelle des leichtlöslichen Perjodids des Kaliums das unlösliche der Base treten würde, oder der Process verläuft:



Daraus ist zu ersehen, dass es für das Verhältniss zwischen angewandtem Hydroxyd und gebildetem JO_3K irrelevant ist, wie reich an Jod das gebildete Perjodid ist, dass vielmehr immer für ein Gewichtstheil des Triäthylphenyliumhydroxydes 0.1692 Theile JO_3K gebildet werden müssen, die Vollständigkeit der Reaction vorausgesetzt.

¹ Jörgensen. J. f. p. Ch. 2. N. F.

0.4125 Grm. des nach Hoffmann¹ bereiteten Triäthylphenyliumhydroxydes² wurden mit gewogenen Mengen Jod gefällt, so dass neben dem entstandenen Tetraerjodid des Jodids der Base nur ein minimaler Überschuss zugegen war, filtrirt und dann am Wasserbad zur Trockene eingedampft. Mit heissem Wasser aufgenommen, neuerlich filtrirt und nach dem Abkühlen mit Salzsäure versetzt, brauchte ich 19.1 Ctm. $\frac{1}{10}$ Normalnatriumhyposulfitlösung um das aus der Jodsäure ausgeschiedene Jod zu titriren oder in Bezug auf das angewandte Hydroxyd

<u>Gefunden</u>	<u>Berechnet</u>
J. . . . 9.79 $\frac{0}{10}$	10.04 $\frac{0}{10}$

was der oben angeführten Gleichung entspricht.

Interessant ist die Bildung dieser Perjodide aus den Ammoniumjodiden in salzsaurer Lösung auf Zusatz von Ferridcyankalium, wobei wahrscheinlich eine Reduction des Ferridcyankaliums zu Ferrocyankalium und Jodabscheidung eintritt. In dem Filtrat des gebildeten Perjodids konnte reichlich Ferrocyanwasserstoffsäure nachgewiesen werden.

Eigenschaften.

Die Perjodide dieser Gruppe sind, wenigstens in den von uns untersuchten Beispielen, dichroitische, unter dem Mikroskope durchsichtige und undeutliche Krystalle vorstellende Körper, welche aus ihren Lösungen bei längerem Stehen nach ein oder zwei Dimensionen entwickelt anschliessen. Die Pentajodide sind dunkler gefärbt, als die Trijodide.

Sie schmelzen nicht ganz ohne Zersetzung und verlieren auch an der Luft einen kleinen Theil ihres Jods. Ein Vergleich der Schmelzpunkte der Perjodide dieser Reihe mit denjenigen der Tetraalkylperjodide ergibt, dass in diesem Punkte eine Abweichung von dem sonst so ähnlichen Verhalten stattfindet.

¹ Hoffmann. A. Ch. Ph. 79, 11.

² Das daraus dargestellte Platindoppelsalz gab Platin in 100 Theilen:

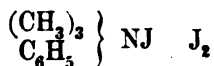
<u>Gefunden</u>	<u>Berechnet für</u>
Pt. . . . 25.36 $\frac{0}{10}$	$\underbrace{[C_6H_5N(C_2H_5)_3HCl]_2PtCl_4}_{25.49\frac{0}{10}}$

Tetraalkyliumperj. Sch. P.		Trialkylphenyliumperj. Sch. P.	
$(\text{CH}_3)_3$ C_2H_5	NJ.J ₂	64°C.	$(\text{CH}_3)_3$ C_6H_5 NJ.J ₂ 116°C.
$(\text{CH}_3)_2$ C_2H_5	NJ.J ₄	68°C.	$(\text{CH}_3)_2$ C_6H_5 NJ.J ₄ 87°C.
Tetraalkyliumperj. Sch. P.		Trialkylphenyliumperj. Sch. P.	
$(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ C_2H_5	NJ.J ₂	142°C.	$(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ C_6H_5 NJ.J ₂ 81°C.
$(\text{C}_2\text{H}_5)_2$ (C_2H_5)	NJ.J ₄	—	$(\text{C}_2\text{H}_5)_2$ C_6H_5 NJ.J ₄ 68°C.

Verhalten gegen Reagentien.

Das Jod in den Perjodiden der Trialkylphenyliumbasen, wird dem allgemeinen Charakter der Perjodide entsprechend leicht abgespalten, wenn Wasser, Ätzkali, Quecksilber, Natriumamalgam u. s. w. einwirken. Gewöhnlich finden noch mehr oder weniger complizirte secundäre Processse statt, der primäre Vorgang ist jedoch eine einfache Spaltung in Jod und das Jodid der Base.

Erhitzt man z. B. Trimethylphenyliumtrijodid mit Wasser, so wird Jod abgegeben und bildet sich unter anderen Producten auch reichlich Jodoform, das durch seinen Geruch, sein Aussehen (schöne, gelbe Kryställchen) und seinen Schmelzpunkt 119°C. identificirt wurde. Da aber das Jodid der Base ganz ohne Jodzugabe ebenfalls Jodoform gibt, wenn man es mit Wasser kocht, so ist dies wohl bloss als secundärer Process zu betrachten und zerfällt das angewandte Perjodid zuerst in seine Componenten:



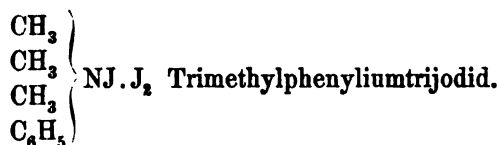
Beim Kochen mit natriumreichem Amalgam entfärbte sich die alkoholische Lösung des Trimethylphenyliumtrijodids und fiel beim Erkalten regenerirtes Jodid heraus, neben Jodnatrium und Jodoform. Ersteres wurde auf seinen Jodgehalt geprüft:

0·2101 Grm. Jodid gaben 0·1872 Grm. JAg.

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für $\text{NJ}\text{C}_9\text{H}_{14}$
J 48·14 ⁰ / ₁₀₀	48·28 ⁰ / ₁₀₀

Ähnlich wirken andere Reagentien und zeigten sämtliche von mir dargestellten Glieder dieser Reihe ein gleiches Verhalten.



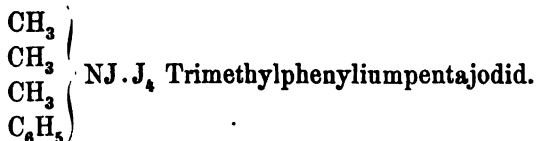
Wenn man der weingeistigen oder wässerigen Lösung des Jodids abgewogene Mengen Jod in alkoholischer Lösung zusetzt, aufkocht und rasch abkühlt, fällt diese Verbindung in Gestalt lichtrother, kupferglänzender Blättchen, die durch Waschen mit Äther und Umkrystallisiren gereinigt werden. Sie schmelzen bei 116° C. (uncorr.) und sind in Alkohol und Weingeist leicht, in Äther schwer löslich.

0·2387 Grm. gaben 0·3243 Grm. JAg.

0·2516 Grm. gaben im Luftstrom verbrannt 0·1918 Grm. CO₂ und 0·0621 Grm. H₂O.

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für $\text{C}_9\text{H}_{14}\text{NJ}_3$
J 73·42 ⁰ / ₁₀₀	73·69 ⁰ / ₁₀₀
C 20·78 ⁰ / ₁₀₀	20·89 ⁰ / ₁₀₀
H 2·74 ⁰ / ₁₀₀	2·70 ⁰ / ₁₀₀



Durch Behandeln des Jodids mit überschüssigem Jod in Alkohol gelöst, Waschen des Niederschlags mit Äther und Um-

krystallisiren, erhielt ich moosgrüne, glitzernde Nadeln, welche den Schmelzpunkt 87°C . (uncorr.) zeigten und in Alkohol leicht, in Äther schwer löslich waren. Aus der Mutterlauge krystallisirten wirr gelagerte, bis über 10 Mm. lange Spiesse, die intensiven Glanz und Dichroismus besitzen.

0.2365 Grm. gaben 0.2598 Grm. JA_g.

0.2583 Grm. gaben im Sauerstoffstrom (nach Kupfer) verbrannt 0.1689 Grm. CO₂ und 0.0451 Grm. H₂O.

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für C ₉ H ₁₄ NJ ₅
J . . . 82.27%	82.36%
C . . . 14.00%	14.00%
H . . . 1.95%	1.82%

Herr Franz Schorschmidt vom mineralogischen Museum der hiesigen Universität (Vorstand Herr Prof. Dr. Schrauf) theilt mir über diesen Körper Folgendes mit:

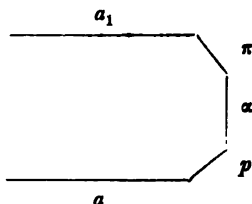
„Die Substanz erscheint in Form von kleinen, dunkelbraunen, wirr aufeinander gelagerten Krystallplättchen, die einen monosymmetrischen Typus zeigen, bei verschieden gearteter Flächenentwicklung. Solange die Substanz frisch ist, zeigt dieselbe einen starken Dichroismus, welcher parallel der längeren Kante dunkel, senkrecht darauf hellgelb ist. Beim Liegen an der Luft verliert die Substanz Jod, wird trübe und fast undurchsichtbar; der Dichroismus verschwindet. Der Flächenschiller ist käfergrün. An einem relativ gut contourirten Plättchen fand ich im Mittel folgende Kantenwinkel:

$$a : p = 59^{\circ}$$

$$a_1 : \pi = 64^{\circ}$$

$$a : \alpha = 89^{\circ}$$

$$a_1 : \alpha = 91^{\circ}$$



Axenaustritt nicht beobachtet.“



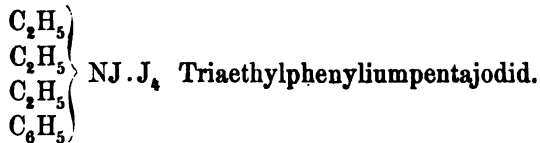
fällt immer aus einer Lösung des Jodids auf Zusatz von alkoholischer Jodlösung, auch wenn Jod im Überschuss vorhanden. Kupferrothe, glitzernde Blättchen, die bei 81° C. (uncorr.) schmelzen und in Alkohol leicht, in Äther schwerer als die vorhergehenden Perjodide löslich sind.

0·2465 Grm. gaben 0·3120 Grm. JAg.

0·2561 Grm. gaben im Sauerstoffstrome (nach Kupfer) verbrannt 0·2401 Grm. CO₂ und 0·0875 Grm. H₂O.

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für <u>C₁₂H₂₀NJ₃</u>
J . . . 68·23%	68·15%
C . . . 25·62%	25·76%
H . . . 3·80%	3·57%



Dieses Perjodid krystallisirt aus der Mutterlauge des vorigen in Gestalt grosser, schwarzer, stark dichroitischer Blätter, die bei 68° C. (uncorr.) schmelzen und leicht in Alkohol, schwer in Äther löslich sind.

0·1807 Grm. gaben 0·2603 Grm. JAg.

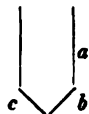
0·2649 Grm. gaben im Sauerstoffstrome verbrannt 0·1709 Grm. CO₂ und 0·0594 Grm. H₂O.

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für <u>C₁₂H₂₀NJ₅</u>
J . . . 77·85%	78·10%
C . . . 17·60%	17·71%
H . . . 2·51%	2·46%

Herr Schorschmidt, der die Güte hatte, diese Substanz in mineralogischer Beziehung zu untersuchen, theilt mir Folgendes mit:

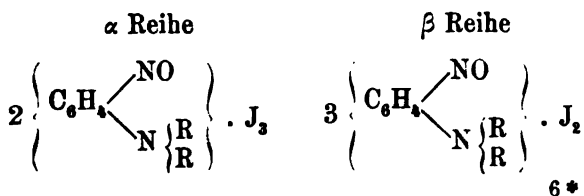
„Die Substanz erscheint schon dem freien Auge in Form von dunkelbraunen, aus tafelförmigen Kryställchen bestehenden Conglomeraten, welche, um einer mikroskopischen Untersuchung zugänglich zu werden, vorerst zerbröckelt werden müssen, daher man denn auch unter dem Mikroskope nur selten ein, mit natürlichen Contouren begrenztes Täfelchen zu sehen bekommt. An einem solchen mass ich von Ka/b den Winkel von 56° , Kb/c den Winkel von 70° . (Siehe Fig.) Der Dichroismus ist sehr intensiv; die Schwingungen gehen senkrecht und parallel der längeren Kante. Jene geben rothbraunes, diese hellgelbes Licht. An einzelnen Plättchen konnte ich unter dem Polarisationsmikroskope den Austritt einer Axe wahrnehmen, welche knapp am Rande des Gesichtsfeldes erschien und von zahlreichen schönfarbigen Ringen umschlossen war. Die Doppelbrechung ist daher relativ stark. Die zweite Axe war nicht ins Gesichtsfeld zu bringen, auch war der Charakter der Dispersion nicht festzustellen. Für die austretende Axe ist die Doppelbrechung negativ.“



Auch die höheren Glieder der Reihe geben mit Jod Fällungen, doch wurden selbe nicht näher untersucht. Brom bewirkt in den Jodidlösungen Niederschläge von beständigen, Jod und Brom enthaltenden Perhalogeniden, in den Hydroxidlösungen Fällungen unbeständiger, Brom abgebender Verbindungen, die vielleicht entsprechende Perbromide vorstellen.

II. Perjodide der Nitrosodialkylaniline.

Die Nitrosoverbindungen der tertiären Alkoholanalide, z. B. Nitrosodiaethylanilin etc., geben mit Jod zwei Reihen von Verbindungen:



Die Formeln der α Reihe müssen wohl dem Gesetze der paaren Atomzahl entsprechend verdoppelt werden oder $4(\text{C}_6\text{H}_4\text{NONR}_2) \cdot 6\text{J}$ lauten, wobei R irgend einen Alkoholrest bezeichnet.

Nach den Ergebnissen der Analyse war in diesen Perjodiden kein Jodwasserstoff vorhanden und wäre dessen Entstehen in Anbetracht der Bildungsweise der Superjodide aus Jod in Schwefelkohlenstoff oder Chloroform noch schwieriger zu erklären gewesen, als das Auftreten von Jodwasserstoffsäure aus Jod in alkoholischer Lösung, wie es Jørgensen beobachtet hat.¹

Man muss daher im Stande sein, das lose gebundene Jod (in diesem Falle das Gesamtjod) als solches nachweisen zu können.

Die Titirmethode mit Stärke oder ohne Indicatorzusatz (bei der bis zur Entfärbung der durch Jod gefärbten Flüssigkeit titirt wird) war wegen der intensiven Farben der Nitrosodialkylaniline nicht anwendbar; ebenso musste ich darauf verzichten, das lose gebundene Jod durch das beim Behandeln mit Kalilauge entstehende jodsäure Salz zu messen, da ich bald die vollständige Fehlerhaftigkeit dieses Verfahrens in Folge secundärer Prozesse einsah.

Doch gelang die Titirung mit unterschwefeligsaurem Natrium, wenn die alkoholische Lösung des Perjodids mit schwacher Salzsäure bis zum geringen Überschuss versetzt wurde und man Schwefelkohlenstoff als Indicator anwandte.

0.3453 Grm. des α Perjodids des Nitrosodiaethylanilins brauchten 14.2 Ctm $\frac{1}{10}$ Normalnatriumhyposulfitlösung oder in 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für $\text{C}_{20}\text{H}_{58}\text{N}_4\text{O}_2\text{J}_8$
J. 52.20%	51.69%

0.2437 Grm. des β Perjodids des Nitrosodiaethylanilins brauchten 6.4 Ctm. $\frac{1}{10}$ Normalnatriumhyposulfitlösung oder in 100 Theilen:

¹ Jørgensen, J. f. p. Ch. 15. N. F.

Gefunden	Berechnet für
J. 33·06%,	$\frac{C_{30}H_{42}N_6O_3J_2}{32 \cdot 23\%}$

Somit wurde das gesammte vorhandene Jod als loses, leicht abspaltbares agnoscirt.

Bildung und Darstellung.

Die Perjodide der Nitrosoverbindungen tertiärer Alkohol-anilide entstehen durch Behandlung der Nitrosodialkylaniline mit J in abgewogener Menge und in Alkohol, Jodkaliumlösung, Schwefelkohlenstoff oder Chloroform gelöst und werden durch Waschen mit Äther und Umkrystallisiren gereinigt. Bei Wiederholung der letzteren Operation findet theilweise Zersetzung statt.

Eigenschaften.

Sie stellen aus Weingeist umkrystallisirt gut charakterisirte Präparate vor, die lebhaften Dichroismus zeigen und an der Luft eine sehr geringe Menge ihres Jods abgeben. Die Schmelzpunkte steigen mit abnehmendem Jodgehalt:

	Schmelzpunkt	Jodgehalt
$\left[C_6H_4 \begin{array}{c} NO \\ N(CH_3)_2 \end{array} \right]_2 \cdot J_3$	115·5° C.	55·9%
$\left[C_6H_4 \begin{array}{c} NO \\ N(C_2H_5)_2 \end{array} \right]_2 \cdot J_3$	118·0° C.	51·7%
$\left[C_6H_4 \begin{array}{c} NO \\ N(CH_3)_2 \end{array} \right]_3 \cdot J_2$	123·5° C.	36·1%
$\left[C_6H_4 \begin{array}{c} NO \\ N(C_2H_5)_2 \end{array} \right]_3 \cdot J_2$	127·0° C.	32·2%

Verhalten gegen Reagentien.

Mit Wasser, Kalilauge, Quecksilber, Natriumamalgam und anderen Reagentien wird bei allen Perjodiden dieser Nitrosokörper Jod abgespalten, nicht ohne tief eingreifende, secundäre Zersetzungen, da die Grundkörper hier bedeutend leichter verändert werden, als bei den Trialkylphenyliumperjodiden.

2·534 Grm. des α Perjodids des Nitrosodiaethylanilins wurden mit schwacher Kalilauge in der Kälte behandelt und das

regenerirte Nitrosodiaethylanilin rasch mit Chloroform extrahirt.
Ich erhielt 1·2544 Grm. In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für $(C_{10}H_{14}N_2O)_2J_3$
$49 \cdot 5^0/0$	$48 \cdot 3^0/0$

$[C_6H_4 \overset{NO}{N(CH_3)_2}]_2 \cdot J_3$ α Perjodid des Nitrosodimethylanilins.

Bläulich flimmernde, schwarze Krystalschuppen, die bei $115 \cdot 5^\circ$ C. (uncorr.) schmelzen und in Alkohol, Chloroform leicht, in Äther schwerer löslich sind.

0·3102 Grm. gaben 0·3191 Grm. JAg.

0·2517 Grm. gaben im Sauerstoffstrome verbrannt 0·3322 Grm. CO_2 und 0·0676 Grm. H_2O .

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_{20}N_4O_2J_3$
J . . . $55 \cdot 61^0/0$	$55 \cdot 95^0/0$
C . . . $28 \cdot 09^0/0$	$28 \cdot 19^0/0$
H . . . $3 \cdot 01^0/0$	$2 \cdot 93^0/0$

$[C_6H_4 \overset{NO}{N(CH_3)_2}]_3 \cdot J_2$ β Perjodid des Nitrosodimethylanilins.

Braunrothe, violett glitzernde Blättchen, die bei $123 \cdot 5^\circ$ C. (uncorr.) schmelzen und in Alkohol leicht, in Äther schwer löslich sind.

0·2242 Grm. gaben 0·1490 Grm. JAg.

0·2501 Grm. gaben im Luftstrome verbrannt 0·3744 Grm. CO_2 und 0·0972 Grm. H_2O .

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für $C_{24}H_{30}N_6O_3J_2$
J . . . $35 \cdot 89^0/0$	$36 \cdot 08^0/0$
C . . . $40 \cdot 79^0/0$	$40 \cdot 91^0/0$
H . . . $4 \cdot 30^0/0$	$4 \cdot 26^0/0$

$[C_6H_4 \overset{NO}{N(C_2H_5)_2}]_2 \cdot J_3$ α Perjodid des Nitrosodiaethylanilins.

Schwarze, bläulich flimmernde Blättchen und Nadeln, die bei 118·5° C. (uncorr.) schmelzen, in Alkohol leicht, in Äther schwer löslich sind und aus concentrirten Lösungen in Büscheln und besser ausgebildet krystallisiren.

0·3343 Grm. gaben 0·3185 Grm. JAg.

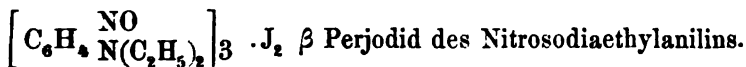
0·3107 Grm. gaben im Luftstrome verbrannt 0·3705 Grm. CO₂ und 0·1137 Grm. H₂O.

In 100 Theilen:

<u>Gefunden</u>	<u>Berechnet für</u> <u>C₂₀H₂₈N₄O₂J₃</u>
J . . . 51·47%	51·69%
C . . . 32·52%	32·56%
H . . . 4·06%	3·79%

Herr Schorschmidt macht mir darüber folgende Mittheilung:

„Unter dem Mikroskope gesehen, stellt sich diese organische Verbindung als kleine, in dickeren Schichten braune, in dünneren gelbe, rhomboidische Krystalltafeln dar, die gewöhnlich in Gruppen aufeinander geschichtet erscheinen. Relativ gut ausgebildete Kanten gaben häufig den Winkel von 82°. Die Hauptschwingungsrichtung der Blättchen ist nicht parallel mit den Kanten, sondern 20° gegen die längere Kante geneigt. Für Schwingungen in dieser Richtung erscheint der Krystall hellgelb, senkrecht darauf hingegen dunkelbraun. Im Polarisationsmikroskope zeigt jedes Blättchen den Austritt einer Axe, welche um 5° gegen die Plattennormale geneigt ist; die zweite Axe ist nicht sichtbar. In dieser Axe bemerkt man eine Austheilung der Farben $\rho > \sigma$. Der Charakter der Doppelbrechung scheint für die Plattennormale negativ zu sein. Doppelbrechung sehr schwach.“



Licht kupferrothe, goldglänzende Blättchen, die bei 127° C. (uncorr.) schmelzen.

0·2750 Grm. gaben 0·1634 Grm. JAg.

0·3002 Grm. gaben im Luftstrome verbrannt 0·5032 Grm. CO₂ und 0·1512 Grm. H₂O.

In 100 Theilen:

<u>Gefunden</u>	Berechnet für <u>$C_{30}H_{42}N_6O_8J_2$</u>
J . . . 32·10 ⁰ / ₀	32·23 ⁰ / ₀
C . . . 45·69 ⁰ / ₀	45·68 ⁰ / ₀
H . . . 5·60 ⁰ / ₀	5·33 ⁰ / ₀

III. Perjodid des Pyridins.

Wird der schwefelsauren Lösung des Pyridins Jod in Jodkalium gelöst zugesetzt, so fallen prachtvoll smaragdgrüne, glitzernde Nadeln aus, die jedoch keine Schwefelsäure enthalten, sondern lediglich ein Perjodid des jodwasserstoffsäuren Salzes des Pyridins sind. Sie wurden durch Waschen mit Wasser und Äther gereinigt, abgepresst und getrocknet, wodurch sie in ein mattes, grasgrünes, krystallinisches Pulver übergeführt wurden. Dasselbe ist äusserst leicht in Alkohol, leicht in Benzol, Ligroine und Chloroform, schwer in Äther löslich und schmilzt bei 89° C. (uncorr.).

0·1856 Grm. gaben 0·2999 Grm. JAg.

0·2978 Grm. gaben im Luftstrome verbrannt 0·0890 Grm. CO₂ und 0·0281 Grm. H₂O.

In 100 Theilen :

<u>Gefunden</u>	Berechnet für <u>$C_5H_5N.HJ.J_4$</u>
J . . . 88·78 ⁰ / ₀	88·81 ⁰ / ₀
C . . . 8·16 ⁰ / ₀	8·41 ⁰ / ₀
H . . . 1·05 ⁰ / ₀	0·84 ⁰ / ₀

0·5940 Grm. Substanz brauchten in Alkohol gelöst und bis zur Entfärbung titirt 33·2 Ctm. $\frac{1}{10}$ Normalnatriumhyposulfitlösung oder lose gebundenes Jod.

In 100 Theilen :

<u>Gefunden</u>	Berechnet für <u>$C_5H_5N.HJ.J_4$</u>
70·98 ⁰ / ₀	71·04 ⁰ / ₀

Mit Natriumamalgam erwärmt, tritt Entfärbung ein und bilden sich in geringer Menge durch Äther extrahierbare, scheinbar undeutliche Kryställchen, die ihrem Schmelzpunkte nach (110° C.) vielleicht Dipyridin sind.

Mit Wasser erhitzt spaltet sich Jod ab.

Möglicherweise¹ kommt diesem Perjodide die Formel $C_5H_5N.HJ.J_2 . C_5H_5N.HJ.J_2$ zu, doch konnte eine Spaltung nicht bewirkt werden.

In alkoholischer und in wässriger Lösung des Pyridins erzeugt Jod in Alkohol, respective in Jodjodkaliumlösung ebenfalls unter gewissen Umständen eine Fällung. Ebenso bei Anwendung von Schwefelkohlenstoff. Das dabei erhaltene Präparat ist roth gefärbt und jedenfalls mit dem obigen Superjodid nicht identisch. Eine weitere Untersuchung wird wohl näheres ergeben.

Brom erzeugt, wie es scheint, in Pyridinlösungen keine beständige Fällung.

IV. Zweites Perjodid des Chinolins.

Ausser dem von Claus und Istel² beschriebenen Körper $C_9H_7N.J_2$, habe ich noch ein zweites Jodadditionsproduct des Chinolins erhalten.

Wird die schwefelsaure Lösung des Chinolins mit Jodjodkaliumlösung versetzt, so entsteht eine, in ihren Eigenschaften mit der oben beschriebenen Verbindung des Pyridins ähnliche krystallinische Fällung.

Grasgrünes, schillerndes, trocken graugrünes mattes, krystallinisches Präparat, das äusserst leicht in Alkohol, leicht in Benzol Ligroine, schwer in Äther löslich ist und bei 67° C. (uncorr.) schmilzt. Von kaltem Wasser wird es nicht zersetzt und kann daher damit gewaschen werden.

0.2465 Grm. gaben 0.3626 Grm. AgJ.

0.2480 Grm. gaben im Sauerstoffstrome verbrannt 0.1528 Grm. CO_2 und 0.0253 Grm. H_2O .

¹ Jørgensen. J. f. p. Ch. 14. N. F.

² Claus, Istel. B. 15, p. 824.

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für $C_9H_7N.HJ.J_3$
J . . . 79·54%	79·62%
C . . . 16·79%	16·93%
H . . . 1·12%	1·25%

Davon brauchten 0·5930 Grm. in Alkohol gelöst und bis zur Entfärbung titirt 27·9 Ctm. $\frac{1}{10}$ Normalnatriumhyposulfitlösung oder lose gebundenes Jod

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für $C_9H_7N.HJ.J_3$
J . . . 59·75%	59·71%

Wenn man die weingeistige Lösung mit natriumreichem Quecksilberamalgam erhitzt, trat auch hier, ohne dass die Bildung eines Quecksilberdoppelsatzes beobachtet werden konnte, Entfärbung ein und extrahirte Äther eine organische, krystallinische, bei 110°—115° schmelzende Substanz, die nicht näher untersucht wurde, da sie in sehr geringer Menge auftritt. (Vielleicht Dichinolin?)

Wasser spaltet beim Erhitzen Jod ab.

Von den primären Basen, wie Anilin, Toluidin etc., von den secundären Basen, wie Diphenylamin etc., von den Nitrosoverbindungen der Letzteren, sowie von den Nitroverbindungen der tertiären Basen, ferner von den Homologen des Acetanilids konnte ich auf den bis jetzt eingeschlagenen Wegen keine Perjodide erhalten. Die Azyline¹ geben jedoch den Nitrosodialkylanilin-perjodiden ähnlich constituirte Additionsproducte.

Nach den bis jetzt bekannten Thatsachen scheint es, dass nur tertiäre und Ammoniumbasen Perjodide bilden.² Ist jedoch

¹ Lippmann, Fleissner. Monatshefte 1883, p. 6, ff.

² Die Acidperjodide wie z. B. die Verbindung $6C_6H_5NH_2, 3SO_4H_2, HJ, J_4$ und ähnliche (vergl. Jörgensen J. f. p. Ch. 14) sind natürlich in diese Regel nicht eingeschlossen.

ein den basischen Charakter stark abschwächender Rest, wie NO_2 oder Acetyl eingetreten, oder erleidet die Base durch freies Jod eine wesentliche Veränderung, wie z. B. Diaethylanilin, so verliert sie die Fähigkeit ein Perjodid zu bilden.

Zum Schlusse sage ich Herrn Prof. Dr. E. Lippmann, sowie Herrn F. Fleissner meinen herzlichsten Dank für die freundliche Unterstützung und Theilnahme, die sie mir bei Ausführung dieser Arbeit zu Theil werden liessen.

XV. SITZUNG VOM 14. JUNI 1883.

Das Bundespräsidium der österreichischen Gesellschaft vom rothen Kreuz übermittelt den vierten Generalbericht dieser Gesellschaft für das Jahr 1882.

Der Vorsitzende übergibt im Namen des Verfassers die Gedenkschrift: „Solemnidade academica em honra do professor Costa Simões. Liber memorialis publicado par Eduardo Abreu. Coimbra 1883.

Das w. M. Herr Director Dr. Steindachner übersendet den zweiten Theil einer von ihm gemeinschaftlich mit Herrn Dr. L. Döderlein verfassten Abhandlung unter dem Titel: „Beiträge zur Kenntniss der Fische Japan's“ (II.)

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur Kenntniss der Kegelschnitte“, von Herrn J. Taubeles Lehramtsandidat in Prag.
2. „Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte“, von Herrn Dr. Gustav Kohn in Wien.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Linienfahrers-Fähnrich W. Szigyárto in Pola vor.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Zur Geschichte der Eichenrindegerbsäure“, von Herrn C. Etti.

Das w. M. Herr Director Dr. J. Hann überreicht eine Abhandlung: „Über die klimatischen Verhältnisse von Bosnien und der Herzegowina“.

Das w. M. Herr Director Dr. E. Weiss überreicht eine Abhandlung: „Bahnbestimmung des grossen Meteoros vom 13. März 1883“, von Herrn Regierungsrath Prof. G. v. Niessl in Brünn.

Das c. M. Herr Professor M. Neumayr in Wien überreicht Aufsatz: „Zur Morphologie des Bivalvenschlosses“.

Herr Prof. Neumayr überreicht ferner einen von Herrn Lesseyre im palaeontologischen Universitätsmuseum ausgetreten Aufsatz: „Ein Beitrag zur Kenntniss der Cephalopoda des Ornamentheues im Gouvernement Rjäsan (Russland)“.

Herr Dr. Zd. H. Skraup, Professor an der Wiener Handelsakademie, überreicht eine Untersuchung: „Über Derivate des Nylons“, II. Mittheilung, die er in Gemeinschaft mit Herrn Skramm ausgeführt hat.

Druckschriften wurden vorgelegt:

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences: Memoirs N. S. Vol. X. — Part II. Cambridge, 1882; 4°.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. N. S. Vol. IX. Whole series. Vol. XVII. June, 1881, to June, 1882. Boston, 1882; 8°.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, the New York: Annals. Vol. II. Nos. 7 and 8. New York, 1881—82; 8°.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Transactions. Vol. I. Nos. 3, 4 et 5. New York, 1881—82; 8°.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences of St. Louis: The Transactions. Vol. IV. Nr. 2. St. Louis, 1882; 8°.

Atti della Accademia dei Lincei: Atti. Anno CCLXXX. 1882—83. Roma, 1883. Fascicoli 9° & 10°. Roma, 1883; 4°.

Mémoires des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 6^e série, 4^e cahier. Paris, 1883, 8°.

Zeitschrift des k. k. geographischen Anzeiger-Blatt. XXI. Jahrgang. Nr. 16 und 17 Wien, 1882; 8°.

Proceedings of the American Academy for the Advancement of Science: Proceedings. 30th Meeting held at Cincinnati, Ohio, August, 1882. Salem, 1882; gr. 8°.

Annuaire des Longitudes: Annuaire pour l'an 1883. Paris, 1883; 12°.

Annales de l'Observatoire de Paris: Mémoires de l'Académie des Sciences et des Lettres, pour l'année 1882. Paris, 1882; 8°.

- Bureau de Longitudes: Observatoires astronomiques de Province. Année 1881. Paris, 1882; 8°.
- — Ephémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour 1883. Par. M. M. Loewy. Paris, 1882; 4°.
- Notice sur un nouvel appareil optique, propre à l'étude de la flexion; par M. M. Loewy et Tresca. Paris, 1882; 4°.
- Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII. Nr. 38 bis 41. Cöthen, 1883; 4°.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. No. 22. Paris, 1883; 4°.
- École polytechnique: Journal. 51^e Cahier. Paris, 1882; gr. 4°.
- Gesellschaft, österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XVII. Band, Juni-Heft 1883. Wien, 1883; 8°.
- Göttingen, Universität: Akademische Druckschriften pro 1882. 87 Stücke 4° u. 8°.
- Hamburg, Stadtbibliothek: Schriften. 73 Stücke 4°.
- Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. XI. Nr. 3 u. 4. Jahrgang 1883. Pola, 1883; 8°.
- Indian meteorological Memoirs. Vol. II. Part I. Calcutta, 1882; folio.
- Instituto y Observatorio de Marina: Almanaque nautico para 1883. Barcelona, 1881; 4°.
- Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1883. Heft 3. Pola, 1883; 8°.
- Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 27^e année, 3^e série, tome XIII. 498^e livraison. Juin 1883. Paris; 4°.
- Nature, Vol. XXVIII. Nr. 710. London, 1883; 8°.
- Observatoire Impérial de Rio de Janeiro; Bulletin astronomique et météorologique. Mars 1883. Nr. 3. Rio de Janeiro, 1883; 4°.
- Repertorium für Physik. XIX. Band, 5. Heft. München und Leipzig, 1883; 8°.
- Società Toscana di Scienze naturali: Atti. Vol. V. Fasc. 2^o. e ultimo. Pisa, 1883; 8°.
- Société entomologique de France: Annales. 6^e série. Tome I. Paris, 1881—82; 8°.

- by the American geographical of New York: Journal. Vol. XIII. New York, 1881; 8°.
- Boston of natural History: Memoirs. Vol. III. Nos. 4 et 5. Boston, 1882; 4°.
- Proceedings. Vol. XXI. Parts II et III. Boston, 1882; 8°.
- Buffalo of natural Sciences. Vol. IV. Nos. 2 et 3. Buffalo, 1882; 8°.
- American philosophical: Proceedings. Vol. XX. Nos. 10 et 11. Philadelphia, 1881—82; 8°.
- royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLIII. Nr. 6. April 1883. London; 8°.
- Carte k. k. zu Prag: Astronomische, magnetische und geologische Beobachtungen. 43. Jahrgang. Prag, 1882; 4°.
- Wien Observatory of the University of Wisconsin: Publications. Vol. I. Madison. 1882; 8°.

Über die klimatischen Verhältnisse von Bosnien und der Herzegowina.

Von J. Hann.

Gleich nach Vollendung der Occupation von Bosnien und der Herzegowina durch die österreichischen Truppen, habe ich mich an das k. k. technische und administrative Militärcomité mit dem Ersuchen gewendet, die Errichtung meteorologischer Stationen an einigen Punkten dieser Länder unterstützen zu wollen. Ich habe dabei auf das hohe Interesse und die praktische Bedeutung solcher Beobachtungen in jenen Ländern hingewiesen, welche in klimatologischer Hinsicht eine vollkommene terra incognita genannt werden konnten. Über Bericht des genannten Comités ist das h. k. k. Reichskriegsministerium auf mein Ansuchen in dankenswerthester Weise eingegangen und hat die Instrumente zur vollständigen Ausrüstung von zwei Stationen zur Verfügung gestellt, wobei natürlich in erster Linie an Sarajewo und Mostar gedacht wurde.

Von besonderer Wichtigkeit war es, dass die k. k. Militärbehörden, namentlich das Sanitätspersonale durch die Unterstützung des k. k. Reichskriegsministeriums als Beobachter gewonnen werden konnten. Eine dritte Station wurde später vom k. k. Reichskriegsministerium in Dolnja - Tuzla eingerichtet, während es der k. k. Centralanstalt für Meteorologie gelang, wenigstens zeitweilig Beobachter in Banjaluka und Travnik zu gewinnen.

Die von diesen Orten vorliegenden Beobachtungsergebnisse sind es, die im Nachfolgenden einer Discussion unterzogen werden sollen. Wenn auch die Zeit, über welche die meteorologischen Aufzeichnungen an den genannten Orten sich erstrecken,

iel zu kurz ist, um definitive Mittelwerthe oder die Grösse hwan-
kungen der wichtigsten klimatischen Elemente ableiten
men, so schien es mir doch geboten, schon jetzt einen
lick über die bisher gewonnenen Resultate zu geben, nach-
chon mehrseitig der Wunsch ausgesprochen worden war,
ber die klimatischen Verhältnisse von Bosnien und der
owina Näheres zu erfahren, nachdem die Resultate der
ischen Aufnahmen schon vor längerer Zeit veröffentlicht
sind.

anz besonders aber lag mir daran, auf diese Weise dem
eichskriegsministerium meinen Dank abzustatten für die
ing meteorologischer Beobachtungsstationen in den occu-
ändern, zu denen in letzter Zeit noch die Stationen in
und Prejepolje sowie in Avtovac hinzugekommen sind,
cobachtungen jedoch in der folgenden klimatischen Skizze
ine Verwendung finden konnten.

hier in Betracht kommenden Stationen sind folgende:

njaluka 44° 46' 2 n. Br., 17° 12' E. v. Gr., Seehöhe
risch aus einzelnen Beobachtungen 175 Meter. Beobachter
gimentsarzt Dr. Unterlugauer, April 1880 bis März 1882.
atur, Feuchtigkeit, Regen und Witterung überhaupt. Luft-
obachtung an einem Aneroid.

Inja Tuzla 44° 32' n. Br., 18° 42' E. v. G., Seehöhe
er aus zweijährigen Barometerbeobachtungen gegen Sara-
rechnet. Luftdruckmittel 1881 und 1882: Dolnja Tuzla
d 738·5 Mm. Sarajewo 713·8 und 714·1; Temperatur
uzla 9·8, Sarajewo 9·2, Höhendifferenz 278·4 Meter.
ungen liegen vor von April bis September 1879: Tem-
6^h, 12^h, 6^h) und Bewölkung, diese Beobachtungen sind
fenbar ungünstiger Aufstellung des Thermometers nicht
nden gewesen; dann von Mai 1880 bis jetzt. Luftdruck,
ur, Regen, Witterung. Beobachtungstermine 8^h, 2^h, 8^h;
en an einem Maximal- und Minimal-Thermometer.
er wechselnd, die Herren Regimentsärzte am Militär-

wnik 44° 13' 4 N. 17° 38' E. v. Gr. Seehöhe barome-
gen Sarajewo 500 Meter. Die Luftdruckbeobachtungen

von April bis November (inclusive) 1882 ergeben eine Differenz gegen Sarajewo von $+3.9$ Mm.; Höhendifferenz gegen Sarajewo -45.5 Meter. Die Beobachtungen beginnen mit December 1880 und enden wegen Erkrankung und späteren Ortswechsel des Beobachters mit November 1882. Dieselben erstreckten sich anfangs bloß auf Temperatur, Regen und Witterung überhaupt, später erhielt der Beobachter von Seite der k. k. Centralanstalt auch ein Barometer. Beobachtungstermine 7^h , 2^h , 9^h , Ablesungen an einem Maximal- und Minimal-Thermometer. Beobachter Herr k. k. Forstmeister F. Pjetchka.

Sarajewo $43^{\circ} 51' 3''$ n. Br. $18^{\circ} 26'$ E. v. Gr. Seehöhe barometrisch gegen Lesina 544 Meter. Nach dreijährigen correspond. Beobachtungen: Sarajewo $B = 713.5$, $t = 9.2$, Lesina (19.0 Meter) $B = 759.5$, $t = 16.6$, Höhendifferenz 525.3 Meter. Die Beobachtungen begannen Mitte December 1878 bei der k. k. Feldtelegraphendirection zu Sarajewo. Es wurde daselbst nur die Temperatur um 7^h , 2^h , 9^h beobachtet. Diese Beobachtungsreihe endet mit April 1881. Mit Jänner 1880 begannen die vollständigeren Beobachtungen beim k. k. Militärspital, geleitet von dem Sanitätspersonale. Aufgezeichnet wurde: Luftdruck, Temperatur, Regen und Witterung. Beobachtungstermine 8^h , 2^h , 8^h und Ablesungen an einem Maximal- und Minimal-Thermometer. In meiner Zusammenstellung der Resultate sind für 1880 noch die Temperaturbeobachtungen der erstgenannten Station verwendet.

Mostar $43^{\circ} 20'$ n. Br., $17^{\circ} 49'$ E. v. Gr. Seehöhe des alten Barackenspitals 69.4 Meter, des neuen 50.5 Meter. Berechnet aus respective fünfmonatlichen und dreijährigen Luftdruckbeobachtungen gegen Lesina. Mittlere Luftdruckdifferenz gegen Lesina $+2.84$ Mm., Höhendifferenz -31.5 Meter. Die Beobachtungen am Militärspital begannen mit Juni 1879 und beschränkten sich anfänglich auf die Ablesungen am Barometer, Ende October beginnen die vollständigen Aufzeichnungen von Temperatur, Regen und Witterung. Beobachtungstermine 8^h , 2^h , 8^h , Ablesungen an einem Maximal- und Minimal-Thermometer. Statt der mittleren Maxima, die zu hoch sind, weil die Beschirmung von 3^h — 5^h von der Sonne beschienen wird, wurden die Beobachtungen

2^h verwendet, zur Bildung der Mittel sowohl wie zur Ableitung Monats- und Jahres-Maxima.

Während der Periode September 1880 bis (inclusive) März 1882 wurden im österreichischen Consulat zu Sofia von Herrn Perotti regelmässige meteorologische Beobachtungen angestellt, deren Resultate hier angeführt werden mögen. Die Luftdruckbeobachtungen des Jahres 1881 ergaben einen mittleren Barometerstand von 715.1 Mm. (mittl. Temp. 9.0), woraus sich (gegen Lesina) eine Seehöhe von 520 Meter ergibt. Die genäherte Position ist 42° 32' n. Br., 23° 23' E. v. Gr. Die Beobachtungstermine waren 7^h, 2^h, 9^h.

Die Instrumente aller dieser Stationen sind direct oder doch durch Vermittlung der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus bezogen und vorher einer Vergleichung unterworfen worden.

Die folgende Tabelle enthält die genäherten Temperaturmittel der Stationen in Bosnien und der Herzegowina sowie einige Nachbarstationen, welche zum Theil zur Ableitung der genäherten Normalmittel gedient haben.

Eine zweite Tabelle enthält die correspondirenden Mittelwerthe der Temperatur dieser Stationen, welche gleichfalls zu einer richtigen Beurtheilung der mittleren Wärmeverhältnisse der occupirten Länder dienlich sein können.

Die genäherten Normalmittel beziehen sich auf folgende Beobachtungsperioden und Beobachtungstermine.

Agram 1863/82, 20 Jahre $\frac{1}{4}$ (7^h, 2^h, 9^h, 9^h).

Gospic 1866/82, 14 Jahre, Beobachtungstermine wechselnd 7^h, 2^h, 9^h; 7^h, 1^h, 9^h; 6^h, 1^h, 9^h; bei der Mittelbildung wurde der Beobachtung um 9^h das doppelte Gewicht beigelegt; 1881 und 1882 Mittel aus 8^h, 8^h.

Knin ¹ 1869/78, 7 $\frac{1}{2}$ Jahre, Mittel 7^h, 2^h, 9^h, 9^h.

Clissa ¹ 1869/78, 8 $\frac{1}{2}$ Jahre, Mittel 7^h, 2^h, 9^h, 9^h.

¹ Diese Stationen sind seinerzeit durch seine Excellenz dem Herrn F. Z. M. v. Kuhn, damals Kriegsminister, ins Leben gerufen worden.

Lesina 1858/82, 23 Jahre, Mittel 7^h, 2^h, 10^h, corrigirt nach den 24stündigen Aufzeichnungen.

Banjaluka und Travnik sind durch Differenzen gegen die correspondirenden Monatmittel der Temperatur von Agram auf dessen 20jährige Normalmittel reducirt worden und da die Differenzen einen guten Gang zeigen, ziemlich verlässlich.

Sarajewo ist theils durch Differenzen gegen Gospić, theils durch Anbringung der Abweichungen der Temperaturmittel der Periode 1879/82 vom 20jährigen Mittel zu Agram auf die mehrjährigen Temperaturmittel der genannten Orte reducirt worden. Das eine wie das andere Verfahren kann in einem Gebirgslande keine sehr verlässlichen Resultate liefern, die Wärmemittel für Sarajewo sind deshalb nur als erste rohe Annäherung an die wahren Mittelwerthe zu betrachten, dasselbe gilt dann auch von den Temperaturmitteln von Dolnja Tuzla, welche durch Differenzen gegen Sarajewo abgeleitet sind.

Die Temperaturmittel von Mostar dagegen konnten wieder mit grösserer Sicherheit durch Differenzen gegen das relativ benachbarte Lesina abgeleitet werden.

An eine Reduction der Mittel aus den Terminbeobachtungen auf 24stündige Mittelwerthe konnte ich nicht denken, da der tägliche Wärmegang in einem Gebirgslande, wie es Bosnien und die Herzegowina sind, nicht etwa mit jenem von Mailand oder gar von Lesina in Beziehung gebracht werden kann. Alles, was hier zu thun war, bestand darin, die Combinationen der Terminbeobachtungen so zu wählen, dass dieselben nach Analogie mit bekannten Verhältnissen die nächste Annäherung an wahre Mittel liefern mögen. Überdies hätte bei so kurzen Beobachtungsreihen jeder Versuch eine grössere Genauigkeit zu erzielen an sich ganz fruchtlos bleiben müssen.

I. Normale Wärmemittel (erste Annäherung).

	Agram	Gospić	Banjaluka	Doluja Tuzla	Travnik	Sarajewo	Mostar	Knin	Clissa	Lesina
Nörtl. Breite ...	45°49'	44°33'	44°46'	44°32'	44°13'	43°51'	43°30'	44° 2'	43°33'	43°11'
E. Länge v. Gr.	15 50	15 22	17 12	18 42	17 38	18 26	17 49	16 11	16 31	16 27
Seehöhe	157	570	170	266	500	544	51	854	340	19
December	0·7	— 0·5	— 0·2	— 0·2	— 1·5	— 1·0	6·7	4·4	6·1	9·9
Jänner	0·3	— 2·4	— 1·3	— 1·4	— 2·0	— 1·8	5·3	3·2	4·8	8·5
Februar	2·2	— 0·2	1·6	2·0	0·3	1·6	7·5	4·4	5·6	9·1
März	6·5	3·3	6·6	5·3	4·6	4·0	9·4	8·5	7·7	10·1
April	11·8	8·9	11·9	10·9	10·3	9·3	14·8	12·0	12·5	14·4
Mai	16·1	12·9	16·0	14·9	14·3	13·7	19·4	16·2	16·7	18·4
Juni	19·8	17·3	19·6	18·9	17·7	17·7	23·6	19·7	21·3	22·4
Juli	22·0	19·5	21·7	20·3	20·2	19·4	27·5	23·7	24·4	25·2
August	21·0	18·6	20·6	19·0	19·7	18·7	26·6	22·6	23·4	24·7
September	17·4	14·4	16·8	15·5	16·4	15·5	22·3	17·8	19·0	21·6
October	11·5	9·1	10·9	10·0	10·2	10·2	16·7	12·7	14·1	17·5
November	5·6	2·6	5·0	2·9	3·5	2·5	10·5	7·8	9·7	13·0
Jahr	11·2	8·6	10·8	9·8	9·5	9·2	15·9	12·9	13·8	1·62

I. Correspondirende Temperatur-Mittel.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
Agram (7h, 2h, 9h, 9h).													
1879.....	0.4	5.2	6.6	10.5	14.0	21.2	20.0	21.9	18.1	10.0	2.0	-7.5	10.2
1880.....	-5.2	-1.8	6.2	13.9	14.7	18.4	23.0	18.5	16.9	12.3	6.2	-5.2	10.7
1881.....	-3.6	-0.1	6.8	9.1	15.1	16.2	22.5	20.9	15.7	7.8	4.7	-1.1	9.9
1882.....	-1.2	-3.2	10.5	11.1	16.2	18.0	20.9	18.6	16.4	12.9	7.3	-2.2	11.5
G o s p i c. (7h, 2h, 9h, 9h und 8h, 8h)													
1879.....	-0.6	4.2	4.3	8.6	10.2	18.9	18.7	20.1	15.6	7.5	-0.8	-7.3	8.3
1880.....	-8.8	-3.4	2.7	10.7	12.4	17.1	21.4	16.8	14.1	(10.3)	6.8	-3.6	8.6
1881.....	-4.2	-1.4	4.4	7.8	12.6	17.1	21.4	20.8	12.8	6.2	3.8	-1.3	8.3
1882.....	-1.0	-2.1	7.3	8.4	14.1	16.7	19.3	18.0	14.6	10.6	5.1	-3.4	9.5
Sarajewo (7h, 2h, 9h, 9h und 8h, 8h, Minimum, 2h).													
1879.....	0.4	6.0	4.7	9.9	11.5	20.2	19.0	21.0	17.9	8.1	1.0	-6.9	9.4
1880.....	-6.1	-1.0	2.7	11.7	13.9	17.8	21.6	17.3	14.1	11.2	6.3	-0.8	9.2
1881.....	-4.8	0.3	1.4	6.4	12.8	15.8	19.5	20.0	14.2	8.7	-0.3	-2.0	7.7
1882.....	-2.1	-2.7	6.1	8.2	13.3	16.2	18.9	16.4	16.1	12.0	4.8	-0.7	9.0
1883.....	-3.7	-1.0	0.0	6.4	13.1	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel.....	-3.3	-0.3	3.0	8.5	12.9	17.5	19.8	18.7	15.6	10.0	3.1	-1.9	8.7
Mostar (8h, 8h, Minimum, 2h).													
1880.....	1.3	7.4	8.8	15.3	17.8	21.8	27.9	22.2	20.2	15.7	11.7	7.9	14.9
1881.....	3.4	6.7	9.6	14.0	17.8	21.2	25.8	25.6	18.8	13.5	7.5	6.8	14.3
1882.....	6.7	5.2	13.0	12.5	17.1	20.3	24.2	23.8	20.5	16.5	9.8	6.5	14.7
1883.....	4.7	(5.5)	6.0	11.3	17.6	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel.....	4.0	6.2	9.4	13.3	17.6	21.1	26.0	23.9	19.8	15.2	9.7	7.1	14.5

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
Dolnja Tuzla (8 ^h , 8 ^h , Maximum, Minimum).													
1880.....	—	—	—	—	13·7	18·8	21·9	17·5	15·0	10·3	5·2	1·8	—
1881.....	— 4·8	— 1·7	4·9	9·1	13·7	17·6	19·7	20·4	15·5	8·6	1·6	— 1·4	8·6
1882.....	— 2·1	— 1·8	7·8	9·5	13·4	—	19·2	16·0	15·8	11·6	4·7	2·2	—
1883.....	— 3·6	— 0·4	0·9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Banjaluka (7 ^h , 2 ^h , 9 ^h , 9 ^h).													
1880.....	—	—	—	13·8	14·3	18·8	22·8	18·1	15·6	11·5	6·7	5·1	—
1881.....	— 4·0	0·0	6·7	9·4	14·5	18·5	21·2	21·2	14·5	8·1	2·9	— 0·4	9·4
1882.....	— 0·8	1·0	9·0	11·1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Travnik (7 ^h , 2 ^h , 9 ^h , 9 ^h).													
1881.....	— 4·1	— 0·1	4·2	9·4	13·0	16·2	20·2	20·5	14·3	8·0	1·1	— 1·1	5·8
1882.....	— 1·3	— 0·6	7·9	10·0	13·7	16·2	19·0	16·8	15·3	12·0	5·0	(2·6) ¹	—
Sofia (7 ^h , 2 ^h , 9 ^h , 9 ^h).													
1880.....	—	—	—	—	—	—	—	—	13·3	11·1	6·2	— 0·7	—
1881.....	— 3·4	— 3·0	3·5	10·4	14·4	17·3	21·0	22·4	16·7	8·9	2·6	— 2·7	9·0
1882.....	— 3·5	— 2·8	8·6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

¹ December 1880.

Die mittlere Temperatur im bosnischen Gebirgslande gleicht in einer Seehöhe von rund 500 Meter jener von Wien; Sofia in gleicher Seehöhe scheint einen kälteren Winter, aber auch einen heisseren Sommer zu haben, die Jahrestemperatur dürfte mit jener von Wien übereinkommen. Folgende Mittel der Jahreszeiten gestatten einen bequemen Vergleich.

	Wien Stadt	Travnik	Sarajewo	Dolnja Tuzla	Sofia
Winter.....	— 0·6	— 1·0	— 0·4	0·1	— 2·7
Frühling.....	9·8	9·7	9·0	10·4	10·3
Sommer.....	19·7	19·2	18·6	19·4	20·2
Herbst.....	9·9	10·0	9·4	9·5	9·8
Jahr.....	9·7	9·5	9·2	9·8	9·4

Mostar dagegen im Narentathale in geringer Seehöhe hat subtropische Wärmeverhältnisse, der Winter ist kühler, der Sommer heisser als jener von Lesina, wie es der Lage im Innern des Landes entspricht. Ähnliche Wärmeverhältnisse, nur modificirt durch die grössere Seehöhe zeigen Clissa und Knin.

	Knin	Clissa	Mostar	Lesina
Winter.....	4·0	5·5	6·5	9·2
Frühling.....	12·9	12·3	14·5	14·3
Sommer.....	22·0	23·0	25·9	24·1
Herbst.....	12·8	14·3	16·5	17·4
Jahr.....	12·9	13·8	15·9	16·2

Im Winter ist Mostar bedeutend kälter, im Sommer aber viel heisser als Lesina. Die mittleren täglichen Minima sind in Mostar das ganze Jahr hindurch niedriger als in Lesina, von November bis Februar um 4·2°, im Sommer nur um 1·5°; die mittlere Temperatur um 2^h Nachmittags dagegen ist im Winter zu Mostar niedriger um 1·2°, im Sommer höher um 5·2°. Die täglichen Wärmeschwankungen sind demnach zu Mostar im Sommer um 6·7°, im Winter etwa um 3° grösser als auf der Insel Lesina.

Überhaupt sind die regelmässigen wie die unregelmässigen Wärmeschwankungen in Bosnien und der Herzegowina bedeutend gross, und die Temperaturverhältnisse im Allgemeinen

ziemlich extrem. Während wir die mittleren Monatstemperaturen im bosnischen Berglande mit jenen von Wien nahe gleichstellen konnten, stellt sich in Bezug auf die Wärmeschwankungen ein bedeutender Unterschied zu Ungunsten der occupirten Länder heraus.

Folgende Vergleichen zeigen dies deutlicher.

Mittlere tägliche Wärmeschwankung.¹

	Wien	Travnik ²	Sarajevo	Mostar
Winter.....	5·2	7·8	8·4	7·7
Frühling...	9·2	13·0	11·7	10·0
Sommer....	9·9	17·0	15·2	12·6
Herbst.....	7·6	10·7	9·9	9·1
Jahr.....	8·0	12·1	11·3	9·9

Sowie die mittleren täglichen Wärmeschwankungen im Innern der Balkan-Halbinsel sehr gross sind, so ist dies auch bei den Monatsschwankungen der Temperatur der Fall. Im Folgenden gebe ich die mittlere Wärmeschwankung innerhalb eines Monats für Sarajewo und Mostar und zum Vergleich jene von Wien und Lesina.

Mittlere Monatsschwankung der Temperatur.

	Wien	Sarajewo	Mostar	Lesina
Winter.....	20·2	24·9	19·8	13·7
Frühling.....	23·5	24·5	25·0	13·9
Sommer.....	20·8	21·9	25·3	12·3
Herbst.....	21·5	21·7	23·5	13·8
Jahr.....	21·5	23·3	23·4	13·4

Die unregelmässigen Wärmeschwankungen sind demnach in Bosnien und der Herzegowina beträchtlich grösser als in Wien, obgleich letzteres fast 5° nördlicher liegt. Besonders bemerkenswerth sind die grossen Wärmeschwankungen des Frühlings und Sommers zu Mostar. Der Unterschied zwischen Mostar und Lesina in Bezug auf Temperaturschwankungen ist ungemein gross.

¹ Differenz der mittleren täglichen Extreme.

² Bloss 1 $\frac{1}{2}$ Jahre.

Die mittlere Jahresschwankung der Temperatur, d. i. die Differenz der mittleren Jahresextreme, zeigt gleichfalls den excessiven Charakter des Klimas im Innern der Balkan-Halbinsel.

	Wien	Sarajewo	Mostar	Lesina
Mittleres Minimum	—14·5	—18·9	— 7·4	— 1·6
„ Maximum	33·5	34·9	41·1	32·9
Differenz.....	48·0	53·8	48·5	34·5

Ich habe schon bei einer anderen Gelegenheit darauf aufmerksam gemacht, welche abnorm tiefe Winter-Minima im Innern der Balkan-Halbinsel, und zwar ganz nahe dem warmen adriatischen Meere auftreten.¹ Die Beobachtungen in Bosnien liefern uns weitere Beispiele dafür. Die folgende kleine Tabelle der correspondirenden Minima (aus den Terminbeobachtungen entnommen) gestattet zu beurtheilen, mit welcher Strenge der Winter im Innern der Balkan-Halbinsel auftreten kann.

Temperatur-Minima.

Jahr	Agram	Gospic	Banja-luka	Dolnja Tuzla	Travnik	Sarajewo	Sofia	Mostar	Lesina
1879	—19·2	—26·6	—	—	—	—18·5	—	—	— 1·6
1880	—21·3	—27·1	—	—	—	—20·2	—	— 9·6	— 5·0
1881	—21·5	—22·9	—21·4	—21·8	—19·8	—21·5	—19·0	— 6·2	— 1·6
1882	— 8·0	— 9·8	—11·0	—17·0	—15·0	—15·2	—15·1	— 4·2	— 0·6
Viel-jähr. Mittel	—14·2	—20·0	—	—	—	—	—	—	— 1·6

Die Beobachtungen am Maximum-Minimum-Thermometer geben noch viel grössere Kältegrade. Zu Sarajewo zeigte am 23. Jänner 1881 das Minimum-Thermometer —25·2 (in Wien war das absolute Minimum seit 1829 —25·5) und am 27. December desselben Jahres wieder —19·0, am 4. December 1882 —18·0; zu Travnik zeigte das Minimum-Thermometer am 24. Jänner

¹ Siehe meine Abhandlung: Über die monatlichen und jährlichen Temperaturschwankungen in Österreich-Ungarn. Sitzungsberichte der k. Akademie, Decemberheft 1881.

1881 —24·8. Die absoluten Minima von Mostar waren —10·0, am 24. Jänner 1880, —8·0 am 25. Jänner 1881, —4·2 am 11. Februar 1882 (die Temperaturmaxima erreichen dagegen öfter 40° C. und darüber); zu Dolnja Tuzla war das Minimum am 18. Jänner 1881 —22·5, am 2. Februar 1882 —17·5. Zu Banjaluka war die Temperatur um 7^h Morgens am 7. Jänner 1881 —21·4 und am 2., 3. und 4. Februar 1882 —11·0. Diese Anführungen mögen eine richtige Vorstellung vermitteln von den grössten Kältegraden, die in Bosnien und der Hezegowina auftreten können.

Schneefälle und Fröste kommen in der Seehöhe von circa 500 Meter noch regelmässig jene bis Mitte Mai, diese bis Mitte April vor. Im Mittel der Jahre 1879 bis Mai 1883 waren folgende die Eintrittszeiten des ersten und letzten Frostes, sowie des ersten und letzten Schneefalls zu Sarajewo.

Jahr	Erster Frost	Letzter Frost	Erster Schneefall	Letzter Schneefall
1879....	18. October	—	17. October	—
1880....	25. „	27. März	30. „	20. Mai
1881....	26. „	13. April	16. „	11. „
1882....	13. November	11. „	19. „	18. „
1883....	—	22. Mai	—	22. „
Mittel...	28. October	18. April	28. October	18. Mai

Es schneit also zu Sarajewo regelmässig noch bis über die Mitte des Mai hinaus, im Mai 1882 schneite es durch fünf Tage, vom 14. bis 18. Durchschnittlich (Mittel von 4 Jahren) hat man in Sarajewo 19·4 Tage mit Schneefall, die sich folgendermassen über die einzelnen Monate vertheilen:

October	November	December	Jänner	Februar	März	April	Mai
1·2	2·5	2·0	4·0	2·3	3·7	1·5	2·2

Sofia in nahe gleicher Seehöhe wie Sarajewo, aber mehr als einen Grad südlicher, hat im Mittel von 2 Jahren 17½ Schneetage; Mostar hat etwa 2—3 Schneetage.

Von Beobachtungen der Luftfeuchtigkeit liegen bis jetzt nur von Banjaluka und Sofia ein vollständiger Jahrgang vor, doch wird nun dieses wichtige klimatische Element auch in Sarajewo

und Mostar beobachtet. Die Feuchtigkeitsmittel der Jahreszeiten in Banjaluka und Sofia waren im Jahre 1881:

Banjaluka.				
	7 ^h	2 ^h	9 ^h	Mittel
Winter	94 ^o / _o	87 ^o / _o	94 ^o / _o	91 ^o / _o
Frühling	84	70	87	80
Sommer	83	57	88	76
Herbst	92	70	95	86
Jahr	88	71	91	83

Sofia.				
	7 ^h	2 ^h	9 ^h	Mittel
Winter	97 ^o / _o	90 ^o / _o	96 ^o / _o	94 ^o / _o
Frühling	83	70	86	80
Sommer	70	55	79	68
Herbst	85	61	80	75
Jahr	84	69	85	79

Soweit also die Beobachtungen eines Jahrganges einen Schluss gestatten, ist die Luftfeuchtigkeit zu Banjaluka wie zu Sofia constant ziemlich hoch. Ähnlich wird es sich wohl zu Sarajewo und Dolnja Tuzla verhalten, dagegen dürfte Mostar, zeitweilig wenigstens bei Borastürmen, die daselbst sehr heftig sein sollen, grössere Lufttrockenheit aufzuweisen haben. Wo aus einem kälteren Hinterland kalte Luftströmungen auf eine wärmere Niederung oder in ein warmes Thalbecken herabfallen, findet man erhebliche Lufttrockenheit, welche ziemlich habituell wird, da durch den Temperaturgegensatz eine Tendenz zu solchen kühlen Fallwinden hervorgerufen wird.

Wenn schon zur Ableitung der durchschnittlichen Wärmeverhältnisse die von unseren Stationen vorliegenden Beobachtungsreihen noch viel zu kurz sind, so gilt dies in noch höherem Grade in Bezug auf die Ermittlung der Niederschlagsverhältnisse. Es wird daher das Beste sein, die vorliegenden Messungen der Niederschlagshöhen in eine Tabelle übersichtlich zusammenzustellen und jene einiger Vergleichsstationen sammt ihren Normalmitteln anzuschliessen.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Septem- ber	October	Novem- ber	Decem- ber	Jahr
T r a v n i k.													
1881.....	142	44	65	79	119	91	25	40	39	227	84	45	1000
1882.....	3	7	54	28	92	65	57	77	109	182	115	2[67]	—
S a r a j e w o.													
1879.....	—	—	—	—	—	—	—	—	—	67	38	14	—
1880.....	35	23	21	24	81	60	29	233	51	55	53	49	714
1881.....	215	42	151	314(?)	136	218(?)	44	31	18	116	54	2	1341(?)
1882.....	5	37	20	24	109	71	79	84	69	66	139	64	767
1883.....	32	18	114	53	69	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel.....	72	30	77	34	132	66	51	116	46	76	71	32	803
D o l n j a T u z l a.													
1880.....	—	—	—	—	71	77	37	180	135	96	24	61	—
1881.....	128	32	84	138	64	84	53	31	31	157	76	26	304
1882.....	16	4	33	33	125	—	105	92	53	47	90	66	—
1883.....	54	18	106	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
M o s t a r.													
1880.....	17	56	38	55	189	54	2	201	55	15	118	82	832
1881.....	154	20	145	78	40	96	3	42	22	321	44	39	1004
1882.....	62	24	71	89	62	63	31	33	300	214	177	169	1295
1883.....	67	25	214	121	90	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel.....	75	31	117	86	95	71	12	92	126	183	113	97	1098

Lesina.													
	182	71	18	186	103	2	7	0	46	108	104	17	794
1879.....	182	71	18	186	103	2	7	0	46	108	104	17	794
1880.....	54	41	26	11	52	13	0	323	85	32	34	17	688
1881.....	171	37	52	47	22	50	0	13	56	352	70	98	968
1882.....	74	12	46	36	8	5	31	28	185	238	70	97	830
1883.....	41	7	171	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Normal ¹	72	69	64	51	35	39	17	51	75	111	121	93	798

Sofia.													
	86	21	37	58	96	56	74	53	52	56	19	22	731
1880.....	86	21	37	58	96	56	74	53	52	56	19	22	731
1881.....	8	2	21	—	—	—	—	—	65	108	25	57	—
1882.....	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

¹ 23 bis 24 Jahre.

² An 2 Tagen gefallen.

Bosnien und die Herzegowina liegen in Bezug auf die jährliche Regenvertheilung in einem Übergangsbiet. Die dalmatinische Küste hat vorwiegend Herbstregen und einen trockenen Sommer, der Regenmangel des Sommers nimmt nach Süden hin zu. Im Innern der Balkan-Halbinsel aber gibt es reichlichere Sommerregen und der Winter ist niederschlagsärmer. Aus den bis jetzt vorliegenden Regenmessungen lässt sich die Änderung der jährlichen Regenperiode noch nicht quantitativ zur Darstellung bringen, man sieht aber in den Differenzen der Regenmengen von Lesina, Mostar und Sarajewo das angeführte Verhältniss hervortreten. Da gerade in Übergangsbieten von einem Regenregime zum andern die normalen Verhältnisse erst aus langen Beobachtungsreihen mit Sicherheit abgeleitet werden können, so wird es erst in einiger Zeit gelingen, dieselben für Bosnien und die Herzegowina mit Bestimmtheit festzustellen.

Die Jahrgänge 1879 bis 1882 waren zudem ziemlich abnorm, namentlich der August 1880, der zu Lesina die sechsfache Regenmenge gegenüber der normalen hatte.

Die mittlere Zahl der Regentage, welche geringeren Schwankungen unterliegt als die Regenmenge, möge für Sarajewo, Mostar und Lesina hier angeführt werden.

Mittlere Zahl der Regentage zwischen 1879 und 1882.

	Sarajewo	Mostar	Lesina		Sarajewo	Mostar	Lesina
Dec...	4·2	10·3	7·0	Juni ..	10·3	9·0	4·0
Jänner	5·5	8·3	9·8	Juli ..	6·3	2·7	1·0
Febr. .	3·5	4·5	5·6	August	9·3	7·7	4·8
März..	8·8	10·0	8·4	Sept. .	7·7	9·0	7·3
April .	9·7	9·7	8·0	Octob.	9·3	14·0	9·2
Mai ..	10·3	8·3	7·8	Nov. .	7·5	8·3	8·8

Nach Jahreszeiten.

	Sarajewo	Mostar	Lesina
Winter..	13·2	23·1	22·4
Frühling	28·8	28·0	24·2
Sommer.	25·9	19·4	9·8
Herbst..	24·5	31·3	25·3
Jahr....	92·4	101·8	81·7

Die grössere Häufigkeit der Winterniederschläge an der Küste, deren Abnahme landeinwärts, sowie umgekehrt die bedeutende Zunahme der Regenwahrscheinlichkeit im Sommer gegen das Innere der Balkan-Halbinsel, kommt in diesen Zahlen sehr deutlich zum Ausdruck. Die Regenwahrscheinlichkeit im Sommer ist zu Lesina kaum 0·11, zu Mostar schon 0·21, zu Sarajewo 0·28.

Die Bewölkung wird im Allgemeinen einen ähnlichen jährlichen Gang zeigen wie die Regentage und die Regenmenge. Nicht allein das Jahresmittel der Bewölkung nimmt landeinwärts zu, es ist dies sogar das ganze Jahr hindurch der Fall.

Um die Bewölkungsverhältnisse zur Darstellung zu bringen, wollen wir zunächst die correspondirenden Monatsmittel für 1881 in eine Tabelle zusammenstellen (die Angaben der Bewölkung zu Sarajewo vor Juni 1881 sind unbrauchbar, sie sind zu niedrig wohl in Folge irgend eines Missverständnisses), und dann die Mittelwerthe für die Jahreszeiten. Die Monatsmittel würden noch keinen gesetzmässigen Gang erkennen lassen.

Mittlere Bewölkung im Jahre 1881 auf der Balkan-Halbinsel.

	Sofia	Dolnja Tuzla	Banjaluka	Mostar	Lesina
Jänner	7·1	8·2	8·5	7·8	7·8
Februar	6·6	7·0	7·9	3·6	3·7
März	6·9	7·8	7·2	6·9	4·6
April	7·0	8·0	8·2	7·0	4·8
Mai	5·6	6·0	5·4	4·1	2·9
Juni	5·3	5·3	5·1	4·9	2·9
Juli	3·9	3·6	3·2	1·6	1·0
August	1·6	2·3	1·6	1·3	0·6
September	4·6	4·9	4·4	4·0	3·2
October	7·6	8·2	9·2	7·4	6·2
November	4·3	4·2	3·6	2·6	2·8
December	7·0	7·0	7·8	5·7	5·1
Jahr	5·6	6·0	5·9	4·7	3·8

Mehrjährige Mittel für die Jahreszeiten.

	Sofia ¹	Dolnja Tuzla	Banja- luka	Sarajewo	Mostar	Lesina
Winter	6·2	6·5	6·1	5·6	4·9	5·2
Frühling	6·1	6·5	5·7	5·9	5·3	4·3
Sommer	3·6	4·4	3·8	4·0	3·1	1·9
Herbst	5·4	5·9	5·8	6·2	5·1	4·2
Jahr	5·3	5·8	5·3	5·4	4·6	3·9

Die synoptische Tabelle der Bewölkung im Jahre 1881 zeigt sehr schön die Zunahme derselben landeinwärts in allen Monaten. Der jährliche Gang aller Stationen zeigt eine so genaue Übereinstimmung, wie man dies bei einem Element, dessen Mittelwerthe aus blossen Schätzungen erhalten werden, nur überhaupt erwarten darf. Das subjective Moment tritt in den Mittelwerthen dieser Schätzungen fast ganz zurück, ² was überraschen mag, wenn man bedenkt, dass den verschiedenen Beobachtern keine mündliche Unterweisung ertheilt werden konnte, sondern ihnen nur die gedruckte Anleitung zur selbstthätigen Auffassung der Instruction vorlag.

Aus den Mitteln der Jahreszeiten geht hervor, dass die Bewölkung im Winter und Frühling ihren höchsten Grad erreicht, an der Küste sowohl wie im Inneren des Landes. Der Sommer ist überall die heiterste Jahreszeit, vor Allem aber an der Küste.

Die Beobachtungen der Windrichtung und Stärke wollen wir hier keiner Discussion unterziehen. Einerseits haben in einem Berglande die Windrichtungen zumeist einen localen Charakter und es würde einer genauen Localkenntniss, ja selbst eigenen längeren Aufenthalts an den betreffenden Stationen bedürfen, um die Beobachtungsergebnisse ganz richtig zu deuten und bemerkenswerthe Beziehungen zum Localclima daraus ableiten zu können.

¹ Bloss 1½ Jahre.

² Nur der Beobachter in Travnik hat eine offenbar zu niedrige Scala der Bewölkung in Anwendung gebracht.

Andererseits lassen sich wahre Mittelwerthe aus den bis jetzt vorliegenden Beobachtungen überhaupt noch nicht berechnen.

Dagegen wollen wir zum Schlusse noch eine detaillirtere Übersicht über die Wärmeverhältnisse der zwei Hauptstationen Mostar und Sarajewo in tabellarischer Form geben. Der normale Luftdruck, abgeleitet aus 3—4jährigen Differenzen gegen Lesina, welche an die 22—24jährigen Mittel dieser letzteren Station angebracht worden sind, ist beigegeben. Die Tabellen gestatten eine Beurtheilung des täglichen Wärmeganges, soweit derselbe in klimatischer Beziehung von Wichtigkeit ist, sowie der durchschnittlichen höchsten und tiefsten Thermometerstände im Laufe eines jeden Monats und des ganzen Jahres. Die absoluten Extreme sind schon früher zur Sprache gekommen.

Sarajewo.

	Luftdruck Mittel red.	Temperatur					Tägl. Wärme- schwankung 3 Jahre	Mittlere Monats- und Jahres- Extreme	
		Mittel. 3 Jahre	7 ¹ / ₂ h a.	2h	8 ¹ / ₂ h pm	Mittel			
Dec.	713·9	— 3·1	— 3·4	1·7	— 2·2	— 1·5	6·1	—16·1	11·3
Jän.	15·6	— 6·8	— 4·9	0·5	— 3·1	— 2·6	8·4	—15·1	9·3
Febr.	14·0	— 4·9	— 1·7	4·7	— 0·2	0·6	10·8	— 9·7	13·1
März	11·1	— 1·5	1·1	8·8	1·9	3·4	11·4	— 8·6	17·2
April	12·4	4·6	7·9	14·1	8·1	9·6	11·1	1·3	21·7
Mai	12·8	8·4	11·1	18·4	11·8	13·3	12·7	2·0	29·4
Juni	13·2	11·2	16·0	23·7	16·3	18·0	14·7	9·4	32·0
Juli	13·1	13·5	17·6	26·3	18·8	20·4	16·3	12·3	34·0
Aug.	13·1	12·7	16·2	25·5	17·7	19·3	14·7	11·6	32·9
Sept	14·7	10·0	13·2	20·8	15·1	16·1	12·1	5·5	27·6
Oct.	14·2	6·8	8·5	14·1	9·4	10·3	9·5	— 0·3	22·5
Nov.	13·4	0·7	1·9	6·9	2·4	3·4	8·2	— 5·6	14·6
Jahr	713·45	4·3	7·0	13·8	8·0	9·2	11·3	—18·9	34·9

Mostar.

	Luftdruck	Temperatur					Tägliche Schwan- kung	Mittlere Monats- und Jahres- Extreme	
		Mittl Min.	8h am.	2h pm.	8h pm.	Mittel			
Dec.	757·3	4·2	5·5	11·0	7·7	7·1	6·8	— 1·2	16·4
Jän.	59·4	1·2	2·5	7·7	4·9	4·1	6·5	— 5·8	15·3
Febr.	58·1	2·3	3·5	12·1	7·7	6·4	9·8	— 3·2	17·5
März	54·8	5·2	7·2	14·2	10·4	9·3	9·0	— 1·2	22·8
April	55·5	9·9	11·6	19·6	14·8	14·0	9·7	4·0	27·1
Mai	55·8	12·8	15·2	24·2	18·2	17·6	11·4	6·0	33·9
Juni	55·9	15·9	18·6	28·4	21·7	21·2	12·5	9·0	36·4
Juli	55·6	20·5	22·9	33·8	26·9	26·0	13·3	15·3	40·9
Aug.	55·7	19·2	20·7	31·3	24·4	23·9	12·1	14·5	37·5
Sept.	57·7	15·5	17·0	26·5	20·5	19·9	11·0	8·0	24·5
Oct.	57·4	12·0	13·5	19·9	15·7	15·3	7·9	4·3	27·5
Nov.	56·9	6·2	7·7	14·7	10·3	9·7	8·5	0·0	20·8
Jahr	757·7	10·4	12·2	20·3	15·3	14·6	9·9	— 7·4	41·1

Bahnbestimmung des grossen Meteoros vom 13. März 1883.

Von Prof. G. v. Nessel in Brünn.

Über das erste glanzvolle Meteor des 13. März d. J., welches vom nördlichen Mähren bis Krain (die äussersten Beobachtungspunkte sind mehr als 440 Km. von einander entfernt), sowie auch im westlichen Theile Ungarns beobachtet wurde, sind so zahlreiche — zunächst allerdings nicht brauchbare — Mittheilungen in den Tagesblättern erschienen, dass man von vorneherein hoffen durfte, durch weitere Nachforschungen gute Beobachtungen zu erlangen. Bei diesen Bemühungen wurde ich in freundlichster Weise von den beiden Herren Directoren der meteorologischen Centralanstalten in Wien und Budapest: Prof. Dr. J. Hann und Dr. Guido Schenzl, welche mir die directen Erkundigungen erleichterten, und nicht minder entgegenkommend von den vielen im Folgenden angeführten Herrn Beobachtern unterstützt. Ich fühle mich diesen Herren umsomehr zum wärmsten Danke verpflichtet, als das Sammeln brauchbaren Materiales zur Bahnbestimmung von Feuerkugeln fast immer mit nicht geringen Schwierigkeiten verbunden ist.

Es scheint mir, dass, bei dem gegenwärtigen Stande der Meteorastronomie, relativ sichere Bestimmungen der wesentlichsten Elemente von Meteorbahnen kaum minder wichtig sind als jene der Kometen. Ausserdem bietet die in Rede stehende Feuerkugel nach manchen Seiten ein besonderes Interesse, so dass eine schärfere Untersuchung hinlänglich motivirt sein dürfte.

Noch wäre hier zu bemerken, dass ungefähr drei Stunden nach diesem, ein zweites glänzenderes Meteor und zwar ebenfalls über weite Strecken, von Mähren bis Sttdsteiermark wahrgenommen wurde. Allein, da es mir bisher nicht gelungen ist

auch nur Eine gute Beobachtung zu erlangen, wird in dieser Abhandlung von demselben nicht weiter die Rede sein. Die beiläufigen Angaben aus Mähren und Niederösterreich lassen vermuthen, dass dessen Hemmungspunkt, wie jener des ersten Meteoros, im Alpengebiete Niederösterreichs oder Steiermarks gelegen sein mochte, und da die nördlicheren Orte beiläufig dieselbe scheinbare Bahnrichtung wie für das erste angeben, während südliche in Steiermark, welchen das erste Meteor aus SE zu kommen und gegen NW zu gehen schien, das zweite nur auf der Westseite von S gegen N sich bewegend angaben, so scheint es, dass auch die wahre Bahn ungefähr die letztere Richtung hatte. Weil aber der (wie wir später sehen werden) etwas über SE hinaus gelegene Radiationspunkt des ersten Meteoros nach drei Stunden fast im Meridian stand, so ist es allerdings nicht unwahrscheinlich, dass beide Meteore demselben Ausgangspunkte angehörten. Über die Grenze der Vermuthung erhebt sich jedoch diese Annahme wenig.

In der folgenden Übersicht des auf das erste Meteor bezüglichen Beobachtungsmateriales ist von jenen Wahrnehmungen, welche schon anderweitig veröffentlicht sind, nur das für unseren Zweck Erhebliche mitgetheilt. Die überwiegende Mehrzahl der angeführten Beobachtungen wurde bisher noch nicht bekannt gemacht.

1. Prossnitz (L.: $34^{\circ} 47'$, Br.: $49^{\circ} 28.4'$.)

Um halb acht Uhr ward ein glänzendes Meteor südöstlich vom Sirius sichtbar, welches sich von Osten nach Westen in horizontaler Richtung bis unter das Sternbild des Orion bewegte. Die Erscheinung liess einen leuchtenden Streifen zurtück, der einige Zeit anhielt, und war das Ganze durch 5—6 Sec. wahrzunehmen. (N. Fr. Presse Nr. 6663.)

2. Brünn (L.: $34^{\circ} 16.4'$, Br.: $48^{\circ} 12'$.)

a) Herr Ferdinand Müller, Landesbeamte, beobachtete hier das Meteor um $7^h 29.7^m$ m. Br. Z., da er sich in der innern Stadt auf dem „Grossen Platz“ befand. Die Aussicht war zwar gegen Ost und West durch Gebäude behindert, welche aber anderseits wieder gut zur Markirung des gesehenen Bahtheiles dienten. Dieser erschien „sehr nahe horizontal“. Für die mir an Ort und Stelle von dem Herrn Beobachter bezeichneten Bah-

punkte habe ich durch Messung folgende Daten bestimmt: I. Azim.: 344° , Höhe: $25\cdot5^\circ$, II. Azim.: $3\cdot5^\circ$, Höhe: 23° . Der zweite Punkt lag knapp über dem Dachfirste eines Hauses und der Beobachter konnte das Meteor, auch wenn es sich weiter bewegte, dann nicht mehr sehen. Allein er bemerkte ausdrücklich, dass es an dieser Stelle besonders aufflammte, dann zu erlöschen schien, und war geneigt hier den factischen Endpunkt der Bahn anzunehmen. Die Zeit, in welcher das begrenzte Sehfeld durchlaufen wurde, schätzte er auf höchstens $1\frac{1}{2}$ Secunden. Das Licht war von bläulicher Farbe. Die zurückgebliebene Spur leuchtete noch durch etwa 2 Secunden.

b) Herr Buchhalter Wolf, welcher in der äusseren Allee der Jodokstrasse gegen West ging und die Aussicht gegen Süd verdeckt hatte, bemerkte um diese Zeit in der Richtung des Spielberges (SW) eine von unten aufsteigende blitzartige Erhellung, welche alsbald wieder verschwand. Von dem Meteor selbst sah er nichts. Dagegen behauptet dessen Gattin, welche sich an seiner Seite befand, knapp über den Gebäuden des Spielberges (nach der Angabe in etwa 40° Azimut) deutlich einen „geschlängelten“ Lichtstreifen gesehen zu haben. Durch diese Gebäude sind die Höhen am Himmelsgewölbe bis auf $8-9^\circ$ verdeckt. Denkt man sich nun das von Herrn Müller beobachtete Stück der scheinbaren Bahn bis in jenes Azimut verlängert, so ist die entsprechende Höhe etwas über 10° . Das Meteor konnte also wirklich in der angegebenen Weise sichtbar gewesen sein, wenn es ungefähr so weit gegen Südwesten ging, was durch die Beobachtungen an anderen Orten sichergestellt ist.

3. Zbeschau (L.: $34^\circ 1'$, Br.: $49^\circ 9\cdot3'$.) Herr Bergingenieur Julius Sauer berichtete mir unmittelbar nach der Beobachtung brieflich Folgendes: Um $7^h 20^m$ Prager Zeit war in der Richtung von SE nach NW ein leuchtender Streifen mit einem Kern voran sichtbar; letzterer explodirte unter prachtvollem blauen Lichte, aber ein Lichtstreifen liess sich noch weiter in der Fortsetzung der Falllinie sehen. Herr Sauer bestimmte später durch eine Einmessung gegen Sirius für den Punkt der „Explosion“ das Azimut zu $353\cdot5^\circ$, die Höhe ergab sich: $20^\circ 50'$. An dieser Stelle schien die Bahn nur 5° von der Horizontalen abweichend in Ost höher. Der nach der Explosion

noch weiter gegen SW sich erstreckende Streifen mochte etwa 48—50° lang gewesen sein. Die ganze Dauer wurde zu 4—5 Secunden geschätzt.

Ein diesen Angaben entsprechender grösster Kreis hat 21° Neigung gegen den Horizont, welchen er in 69° Azimut trifft. Nach der obigen Schätzung wäre das Azimut für das westliche Ende des Streifens ungefähr 42·5° und die Höhe an dieser Stelle 9·7° gewesen. Die Wahrnehmung *b)* von Brünn wird somit durch diese Beobachtung bestätigt.

4. Wien. Von den vielen Nachrichten der Tagesblätter ist eigentlich nur der durch spätere briefliche Mittheilungen ergänzte Bericht des Herrn Dr. G. A. Koch, Docenten an der Hochschule für Bodencultur (im „Neuen Wiener Tagblatt“ Nr. 71) bemerkenswerth. Als Zeit wird 7^h 30^m angegeben. Herr Dr. Koch ging die Salesianergasse entlang gegen Süden und befand sich wenige Häuser vor der Strohgasse, als er das Meteor bemerkte, welches die erstere Gasse scheinbar genau rechtwinklig in „mässiger Höhe“ übersetzte und gleichsam die Richtung der Strohgasse verfolgte. Das Erlöschen konnte er nicht beobachten, da ein Dach die Aussicht hemmte. Später stellte der Herr Beobachter fest dass die Bahnverlängerung ungefähr zwischen Bellatrix und den drei Gürtelsternen des Orion getroffen sein und am Schnitt mit dem Horizonte eine Neigung von etwa 30° gehabt haben mochte. Ferner berichtete mir Herr Dr. Koch, dass die scheinbare Richtung der Bahn, mit dem Compass gemessen, E 10° N—W 10° S, also mit Rücksicht auf die magnetische Declination ziemlich genau Ost—West war, und schätzte den Höhenwinkel, da das Meteor südlich in Sicht kam, auf etwas über 50°, beiläufig 52°. Es strahlte einen herrlichen bläulichen Lichtglanz aus, brauchte um die Salesianergasse zu übersetzen 1¹/₂—2 Secunden und erlosch nach circa 3 Secunden.

Diese schätzbaren Daten enthalten überschüssige Stücke welche eine Ausgleichung fordern. War die Bahn 30° geneigt, so konnte sie nirgends einen grösseren Höhenwinkel darbieten. Derselbe konnte gegen Süd höchstens 30° betragen. Da oben 52° für diese Höhe angegeben sind, so wäre etwa das Mittel: 41° für die Höhe zu nehmen. Denkt man sich zwischen die bezeichneten Orionsterne in der damaligen Stellung einen durch

Ost-West gehenden grössten Kreis gelegt, so gibt dieser für Süd ungefähr 45° Höhe, was nicht viel von dem früheren Mittel abweicht. Es dürften also schliesslich 43° dem reellen Werthe ziemlich nahe kommen.

Über den eigentlichen Endpunkt der Bahn gaben die Wiener Beobachtungen keine sicheren Aufschlüsse, doch scheint es, dass sie noch über den Orion hinaus ziemlich weit westlich ging. So heisst es u. A.: „dass sich das Meteor scheinbar nahe dem Monde am südwestlichen Himmel von SE—SW unter blitzähnlicher Lichtentfaltung bewegte. Das Phänomen dauerte etwa 2 Secunden und schien das leuchtende Meteor in der Gegend des Wiener Waldes niederzugehen.“ (N. Fr. Pr. 6661). Der Mond stand damals in WSW (Azim. 72.5° Höhe 38.5°). Solche Beziehungen sind zwar nicht gar zu genau zu nehmen, doch deuten sie immerhin an, dass das Ende zwischen SW und W gesehen worden sein mochte.

5. Bernstein (Eisenburger Comitatz in Ungarn. L.: $33^\circ 55' 4''$, Br.: $47^\circ 24' 3''$.) Herr Director Dr. G. Schenzl hatte die Güte, mir den folgenden von Herrn Michael Schuch, Lehrer am Beobachtungsorte eingesendeten Bericht mitzutheilen: „Ich sass in meinem Zimmer, als plötzlich um $7^h 20^m$ ein greller Lichtschein durch die halbverhängten Fenster mein Auge blendete. Im ersten Momente dachte ich an ein herannahendes Gewitter, als ich aber den fast völlig heiteren Himmel erblickte, ging ich hinaus, um nachzusehen. Ich bemerkte jetzt nur noch einen schwachen weissen Zickzackstreifen, der sich von S gegen N zog aber alsbald verschwand.“

Herr Schuch theilte mir dann noch mit, dass nach mehrseitigen übereinstimmenden Äusserungen das Meteor zuerst in SSE etwa 45 — 50° hoch entstanden, südlich ganz nahe am Zenit vorbeigezogen und 120 — 125° westlich erloschen sei. Die Bahnlänge wurde verschieden, von 60° bis 125° beurtheilt. „Die Erscheinung glich einem brennenden Feuerbündel ohne bestimmt abgegrenzten Kern und war beim ersten Auftreten sehr intensiv weiss wie ein Blitz, während sie bis zum Erlöschen bedeutend schwächer wurde. Die Dauer war 3 Secunden.“

6. Leoben (L.: $33^\circ 45'$, Br. $47^\circ 22' 4''$.) Herr Professor P. Rochel an der k. k. Bergakademie beobachtete um $7^h 23^m$

das Meteor vom offenen Gange im ersten Stockwerke des Akademiegebändes und zwar nur ein ziemlich kleines Bahnstück über der nordöstlichen Hofecke desselben, da das zweistöckige Gebäude die weitere Aussicht verdeckte. Der Herr Beobachter war so gefällig, mir eine sorgfältige Situationsskizze, mit Einzeichnung der scheinbaren Bahnrichtung zu senden. Letztere war gegen Compassstunde 21—22, also mit Rücksicht auf die Deklinationen $35\text{—}50^\circ$ nördlich von West gerichtet. Die Annäherung an das Zenit gegen NE musste ziemlich bedeutend gewesen sein — nach der Skizze zu schliessen etwa $35\text{—}40^\circ$ — da der gegenüberliegende Flügel des Gebäudes die Beobachtung sonst unmöglich gemacht hätte. Es wurde gar kein Geräusch vernommen.

7. Judenburg (L.: $33^\circ 19'$, Br.: $47^\circ 15'$). Herr Bürgerschuldirektor Max Helf theilt im XVIII. Bande S. 138 der Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie mit, dass das Meteor um $7^h 23^m$ in WNW circa 30° über dem Horizonte erlosch. Aus den directen Mittheilungen des Herrn Beobachters ersehe ich jedoch, dass die Richtung nicht westlich, sondern östlich zu nehmen sei, „ 26° östlich von N, etwa gegen Leoben hin, bei 24° gemessener Höhe.“ Jedenfalls ist die Richtungsangabe sehr unsicher und nur jene der Höhe brauchbar. Über die Bahnrichtung konnte Herr Helf nichts Bestimmtes berichten, da ihm nur der Moment des „Zerplatzens“ in Erinnerung geblieben war.

8. Obdach (L.: $33^\circ 21' 5''$, Br. $47^\circ 3' 7''$). Von hier theilte mir Herr Rudolf Falb eine allerdings nur beiläufige, aber nicht unwichtige Beobachtung des Meteors mit. Der Werksbesitzer Herr Sabaty sah dasselbe in der Gegend des „Grossen Bären“ von S—N ziehen, und zwar nach einer nur ganz ungefähren Skizze etwas unterhalb und westlich von γ Ursae maj. Das scheinbare Bahnstück wird nahezu horizontal oder etwas mehr parallel zur Linie $\gamma\text{—}\delta$ Ursae maj. angegeben, also der Richtung nach allenfalls durch die zwei Punkte $\alpha: 188^\circ \delta: +31^\circ$ und $\alpha: 220^\circ \delta: +50^\circ$ bestimmt. Herr Falb hielt zwar selbst die mitgetheilten Daten für wenig verwendbar, allein sie schliessen sich, wie die Folge zeigt, den übrigen Beobachtungen recht gut an.

9. Klagenfurt (L.: $31^{\circ} 57' \cdot 5''$, Br.: $46^{\circ} 37' \cdot 5''$). Herr Bergrath F. Seeland war so freundlich, mir die Resultate seiner Erkundigungen, namentlich bei dem Gärtner Hirsch, welcher das Meteor um $7^h 20^m$ in Ehrenhausen beobachtet hatte, mitzutheilen. Der grössere Theil dieser Angaben ist auch in der oben angeführten Zeitschrift S. 140 abgedruckt und ich führe hier nur das Wesentlichste an. Das Erlöschen (respective Auflösen in vier deutliche Stücke) erschien von Ehrenhausen aus „über dem vom Spitalberge gebildeten Ecke“ gegen Ehrenthal, nach der Planskizze des Herrn Bergrathes in etwa 200° Azimut. Die Höhenangabe 20—30 Met. ist nicht brauchbar. Der Neigungswinkel der Bahn betrug an dieser Stelle $25\text{—}30^{\circ}$. Ein Schreiben des Herrn Hirsch an Herrn Bergrath Seeland, welches mir vorliegt, enthält mehrere bemerkenswerthe Angaben, deren Werth durch die Ursprünglichkeit des Ausdruckes nicht vermindert wird. Es heisst nämlich darin: „Um die genannte Stunde ging ich neben meinem Gartenzaune, der gegen Osten liegt, als mich plötzlich ein Lichtstrahl blendete und da sehe ich eine feurige Kugel von der Grösse einer Literflasche, die von Südosten gegen Westen in einer sehr schiefen Richtung in drei wellenförmigen Bewegungen niederging¹ und in wunderbaren roth, blau, grün und weissen Farben verschwand. Der zweite Beobachter ging desselben Weges wie ich, war jedoch weiter zurück; er gibt Folgendes an: ich sah einen ungewöhnlich grossen Stern, so dass ich mir dachte, „na heute gibt es grosse Sterne“, währenddem fährt derselbe ab.“² Der dritte Beobachter,

¹ Der Beobachter gibt auch eine Skizze der Bahnform, an welcher jedoch nur ein Culminationspunkt, wie es dem grössten Kreise entspricht, vorkommt. Doch kann sich die Bemerkung über die wellenförmige Krümmung auch auf die zurückgebliebene Spur beziehen, welche von anderen Beobachtern ebenfalls als geschlängelt bezeichnet wurde.

² Hierauf bezieht sich wohl die Bemerkung b) des Berichtes in der citirten Zeitschrift: „Ein Bauer dort behauptet fest, das Meteor sei einen Moment stille gestanden, was Hirsch nicht bemerkte.“ Diese Beobachtung ist aber bis zu einem gewissen Grade sicher begründet. Ähnliche Schilderungen kommen nicht selten vor, wenn das Meteor schon in der Nähe des Radiationspunktes gesehen wurde, wo die scheinbare Ortsveränderung noch gering ist.

ein Bursche von 15 Jahren sah das Meteor und schrie vor Schrecken „mein Gott, der Mond fliegt.“ Die Dauer wurde auf 6 Secunden geschätzt.

10. Laibach (L.: $32^{\circ} 10'$, Br.: $46^{\circ} 2.4'$.)

a) Herr Prof. Josef Borghi an der dortigen Oberrealschule schrieb mir Folgendes: „Ich spazierte eben längs des Laibachflusses, also gegen Ost, da sah ich um $7^h 15^m$ einen Lichtstreifen als Widerschein im Flusse, quer durch denselben, also in der Richtung von Süden gegen Norden. Als ich aufblickte, war das Meteor einer Rakete ähnlich, von rother und blauer Farbe scheinbar über dem Orte Ober-Kaschel oder in dieser Richtung. Es bewegte sich horizontal und erlosch nach 4—5 Secunden ungefähr scheinbar über dem Orte „Sadobrova“ oder in der Richtung über „Lustthal“. Der Ausgangspunkt, sowie der Endpunkt waren in einer Höhe von 19° — 21° über dem Horizonte, wie die Bestimmung nachträglich, aber so verlässlich als möglich ergab. Die Aussicht war nicht durch Häuser behindert, sondern ich konnte die schöne Erscheinung vom Anfange bis zum Ende beobachten.“ Nach der Spezialkarte hat die Richtung Ober-Kaschel: 270° Azimut, Sadobrova—Lustthal: 240° Azimut.

Wir haben hier einen ähnlichen Fall wie bei der Brünner Beobachtung. Während nämlich Herr Prof. Borghi das Meteor schon in ENE erlöschen zu sehen glaubte, zeigt die folgende Wahrnehmung eine Bahnverlängerung bis N völlig im Einklange mit den übrigen Beobachtungen.

b) Herr Custos Carl Deschmann in Laibach berichtet nämlich (Zeitschr. f. Met. S. 139 und in gefälliger Beantwortung einer von mir an ihn gerichteten Anfrage), dass er um $7^h 18^m$ von der Herrengasse aus, eine höchstens $1\frac{1}{2}$ Secunden dauernde Lichterscheinung in nördlicher Richtung wahrte, die ganz den Charakter eines einmaligen Wetterleuchtens an sich trug. Es war weder ein feuriger Kern, noch dessen Bahn sichtbar, sondern die Erscheinung beschränkte sich auf die momentane Beleuchtung des von dieser Gasse aus sichtbaren nördlichen Himmels bis höchstens 35° Höhe, als ob es hinter den Alpen geblitzt hätte. Die äusserste Grenze des Lichtscheines gegen NNE wäre durch eine Linie zu bezeichnen, zur Hochalpenspitze Brana (etwa 20° östlich von N). Gegen Westen hin scheint sie nicht über die Thal-

spalte des Kankerthales hinter Krainburg oder über die Richtung des Hoch Obir (2° westl. von N) hinausgegangen zu sein. Das Aufblitzen erfolgte in N einen Moment später als in NNE.

Das Meteor wurde übrigens noch an vielen anderen Orten beobachtet, aber es gelang mir nicht überall die Namen der betreffenden Berichterstatter zu erfahren, um nähere Daten einzuholen. So wird es angegeben: in Olmütz (nördlichster Ort) um $7\frac{1}{2}$ Uhr als „prächtiges Meteor in südöstlicher Richtung, von nur wenigen Secunden Dauer“, in Baden, Gloggnitz „blendend leuchtend, unter starkem Sausen (?) in der Richtung E—W“, Neuberg $7^h 23^m$ „ein Blitz während mässigen Schneefalles“, Gratz $7\frac{1}{2}^h$ „am nordwestlichen Firmamente ein interessantes Meteor, durch dessen intensive Leuchtkraft die in der entsprechenden Richtung liegenden Strassen und Plätze vollkommen erhellt wurden“. Auch in Cilli wurde es beobachtet (Brünner Morgenpost, Deutsche Zeitung, Gratzter Tagespost.) —

Die verschiedenen Zeitnotirungen gaben auf den Meridian von Wien reducirt, für die Epoche der Erscheinung im Mittel ziemlich übereinstimmend $7^h 27 \cdot 2^m$ m. W. Z.

Lage und Höhe des Endpunktes. Aus den angeführten Berichten geht hervor, dass an einigen von der Bahn weit entfernten Punkten das Meteor nach heftigem Aufflammen dem einen Beobachter zu erlöschen schien, während andere an demselben Orte eine weitere Fortsetzung der Bahn sahen (Brünn, Laibach). In Zbeschau wurde die Erscheinung von Herrn Sauer vollständig beobachtet, indem er die „Explosion“ inmitten der Bahn und den sich weiter fortsetzenden Lichtstreifen wahrnahm. Wir werden später an der guten Übereinstimmung der Beobachtungen erkennen, dass sich dieselben zweifellos auf einen und denselben Punkt beziehen, in welchem eine partielle Hemmung, vielleicht des grösseren Theiles der meteorischen Partikel stattgefunden hatte. Als eigentlichen Endpunkt der Bahn haben wir jedoch jenen zu betrachten, an welchem die in die Atmosphäre am weitesten vorgedrungenen Massen gehemmt wurden. Dieser

ist characterisirt durch das Ende des Lichtstreifens und für die näheren Orte durch das thatsächliche Erlöschen der ganzen Feuerkugel.

Mit Bestimmtheit beziehen sich auf diesen Punkt nur die Richtungsangaben von Bernstein, Klagenfurt und Zbeschau und jene der Höhe von Judenburg. Es lassen sich jedoch auch noch die Daten von Brünn *a*), Wien und selbst von Laibach *a*) verwerthen, wenn man die Ausgleichung der Höhe mit jener der Richtungen verbindet, die nicht bis zum Ende reichenden Bahnbogen sich verlängert denkt und aus der durch jede scheinbare Bahn bestimmten Beziehung zwischen Azimut und Höhe, jene Hypothese aufsucht, welche die kleinste Quadratsumme der Verbesserungen in Richtung und Höhe mit sich bringt. Es zeigt sich hiebei, dass der Schnittpunkt der Richtungen aus Bernstein und Klagenfurt auch den übrigen Bestimmungen am besten genügt. Namentlich liefert die Berechnung der auf diesen Punkt bezogenen linearen Höhen ein, für Beobachtungen solcher Art, überraschend günstiges Ergebniss. Derselbe liegt eine Meile südwestlich von Gammig in Niederösterreich (L.: $31^{\circ} 39' 5''$, Br. $47^{\circ} 53' 2''$.) Die zur Bestimmung der Höhen dienenden Daten ergeben sich auf folgende Art: für Brünn erschien dieser Punkt in 38.5° Azimut; der durch die Beobachtung *a*) bestimmte grösste Kreis gibt für dieses Azimut 12° Höhe. Für Zbeschau ist das Azimut 35° und die zugehörige Höhe ebenfalls 12° . Für Wien ist in dem angenommenen Bahnbogen von 43° Neigung E—W der Höhenwinkel 18.5° im zugehörigen Azimut von 69° . In Laibach erschien der Punkt in 190° Azimut, für welches die Beobachtung *a*) bei Verlängerung des Bogens 9° Höhe liefert. Hiezu kommt endlich noch die directe Höhenangabe von 24° aus Judenburg.

Die Resultate ergeben sich aus folgender Übersicht: ¹

¹ Der Gebrauch der geogr. Meile schien mir hier noch zweckmässig. Die Schlussresultate sind überdies auch in Kilometern angeführt.

	Entfernung vom End- punkte g. Meilen	Höhen- winkel h	Linear. Höhe des Endpunkt. II g. Meilen	Verbesserung von	
				H	h
Brün a)	25·2	12°	5·76	-0·54	-1·2°
Zbeschau	23·0	12	5·23	-0·01	-0·0
Wien	14·4	18·5	4·97	+0·25	+0·9
Judenburg	11·4	24	5·18	+0·04	+0·2
Laibach a)	28·3	9	4·97	+0·25	+0·5

Es ist hier am besten das einfache Mittel zu nehmen, da, wie ich an anderen Orten schon gezeigt habe, für die näheren Beobachtungspunkte, welche der Theorie gemäss mit grösserem Gewichte eingehen müssten, in der Regel die Beobachtungen an sich wegen der grösseren scheinbaren Höhe ungenauer sind. Man erhält demnach als Mittel für die

Höhe des Hemmungspunktes: $5·22$ g. M. $\pm 0·09$ w. F.
oder $38·7$ Km.

Die Beobachtung von Leoben wurde hier nicht in Rechnung gezogen, weil die Angabe der scheinbaren Bahnrichtung in den Grenzen von 15° schwankt, auch die Neigung nur beiläufig geschätzt wurde. Indessen gibt auch diese Beobachtung, wenn man die mittlere Richtung und Neigung nimmt, zufällig einen mit dem obigem Mittel gut übereinstimmenden Werth. Das Azimut für das Ende ist nämlich $174·5^\circ$ und die zugehörige Höhe in dem entsprechenden Bahnbogen $34·5^\circ$. Dies gibt mit der Entfernung von $7·7$ M. verbunden für die lineare Höhe $5·36$ M.

Man sieht aus dem Vorstehenden, dass diese Beobachtungen in Bezug auf die Fixirung des Endpunktes zu den besten gehören, welche je für solche Zwecke vorlagen.

Ehe ich zur Bestimmung des Radiationspunktes übergehe, will ich noch zeigen, dass auch die drei auf die erste „Explosion“ oder Hemmung bezüglichen Daten nicht allzu grosse Differenzen aufweisen, mit Berücksichtigung des Umstandes, dass hier die Entfernungen und auch die Höhenwinkel grösser waren, wodurch die Fixirung nach der Erinnerung schwieriger und der Fehlereinfluss grösser wird.

Die Einschnitte der drei in Brünn *a*), Zbeschau und Laibach *a*) angegebenen Richtungen liefern ein nicht sehr grosses Dreieck dessen Mitte etwa 1 g. M. südlich von Körmönd in Ungarn liegt. Man erhält nun aus den oben angeführten Beobachtungsdaten für:

	Entfernung	Höhenwinkel	Lineare Höhe
Brünn	34 g. M.	23°	15·4 g. M.
Zbeschau	33 "	21	13·5 "
Laibach	25·5 "	20	10·0 "

Im Mittel rund 13 g. M. (96·5 Km.)

Man könnte hieraus schon einen Näherungswerth für die Bahnlage ableiten, aber doch nur um zu versuchen, wie viel derselbe von dem definitiven abweicht, für dessen Bestimmung auch die übrigen Beobachtungen heranzuziehen sein werden.

Die Verbindung der beiden fixirten Punkte gibt nämlich für die Bahn 310° Azimut. Ihr Abstand ist 21. g. M. Die lineare Senkung ist, von 13 auf 5·2 M., 7·8 M., woraus man 19·5° für die Neigung der Bahn erhält. Diesen Daten entspricht für die angegebene Zeit eine Position am Himmel in Rectasc. $\alpha = 148\cdot5$ und südl. Decl. $\delta = -9^\circ$, also etwas östlich von α Hydrae.

Es ist aber nun die Bestimmung des Radiationspunktes mit Benützung aller Beobachtungen vorzunehmen.

Radiationspunkt und Lage der Bahn. Wir haben den Endpunkt jedenfalls sicher genug bestimmt, um durch denselben die beiden unvollständigen Beobachtungen von Bernstein und Klagenfurt, für welche die Höhen nicht angegeben sind, zu ergänzen. Die Bestimmungsstücke für die übrigen scheinbaren Bahnen sind aus dem mitgetheilten Beobachtungsmaterial (2—10) ersichtlich. In der nachstehenden Übersicht sind (auf $\frac{1}{2}^\circ$ abgerundet) die Positionen in Rectascension (α) und in Declination (δ) für je zwei Bahnpunkte angeführt, wobei zu beachten ist, dass unter I nur für Brünn, Wien, Bernstein und Laibach der Punkt des ersten Erblickens verstanden ist, während für die übrigen Orte diese Positionen nur die Richtung der scheinbaren Bahn fixiren, da der Anfangspunkt nicht näher bezeichnet wurde. In Bezug auf den Radiationspunkt ist dies auch ohne Belang.

Scheinbare Bahnen:

	I		II	
	α	δ	α	δ
Brünn.....	118°	—14°	100	—17·5
Zbeschau.....	109·5	—19·5	65·5	—21·5
Wien.....	103	+ 1	41	+ 1·5
Bernstein.....	118	+ 7	4	+34
Leoben.....	154·5	+38·5	214	+62·5
Obdach.....	188	+31	220	+50
Klagenfurt....	171	+24	247·5	+53
Laibach.....	176·5	+14	198	+35

Hinsichtlich der Benützung dieser Daten zur Ableitung des Radianten muss man sich gegenwärtig halten, dass sie aus directen Angaben sehr verschiedener Art hervorgegangen, also in Bezug auf ihr Gewicht nicht ohneweiters vergleichbar sind. Nur die erste und letzte Beobachtung gaben unmittelbar zwei Positionen, andere lieferten nur einen Punkt und die Neigung der Bahn oder auch nur das scheinbare Streichen der Bahn in Verbindung mit der Neigung. Zunächst müssen jedenfalls die Angaben von Bernstein und Leoben nur als beiläufige gelten, weil die eine hinsichtlich des Anfangspunktes (SSE) und die andere bezüglich des scheinbaren Streichens der Bahn innerhalb ziemlich weiter Grenzen genommen werden kann. Da aber gerade diese beiden Beobachtungen in Verbindung miteinander ganz wesentlich die Richtung der Bahntrajectorie bestimmen, und namentlich für die Rectascension des Radianten wichtig sind, so kann man sie nicht vernachlässigen. Sie wurden mit halbem Gewichte berücksichtigt, allen übrigen aber das Gewicht Eins beigelegt, obwohl ohne Zweifel einzelne davon in einer schwer abzuschätzenden Weise genauer sind als die anderen. Hieraus erhalte ich nun für den

scheinbaren Radianten: $\alpha = 149^\circ$, $\delta = -9^\circ$

also nicht wesentlich von dem vorläufig bestimmten Werthe abweichend.

Für die Beurtheilung der Genauigkeit dieses Resultates, wie auch zur Gewinnung von Erfahrungen über die Güte von Beob-

achtungen dieser Art ist es nicht unwichtig, die Abweichungen der Beobachtungen anzugeben.

Als die am wenigsten abweichenden stellen sich folgende Daten dar: für Brunn sind die Verbesserungen an I in Höhe -2.5° , an II in Azimut -4° und in Höhe -1.3° . In Zbeschau war die Bahnneigung 22 statt 21° , das östliche Azimut für den ersten „Explosionspunkt“ 5° statt 6.5° und die Höhe 21° , wie beobachtet. Für Klagenfurt ergibt sich die Neigung der Bahn 28 statt 30.5° . Alle diese Verbesserungen sind also sehr gering. Grösser fallen sie für die übrigen Angaben aus.

In Wien erschien die Bahn 36° geneigt ($v = -6^\circ$) die Bewegungsrichtung aus 8° S von E ($v = +8^\circ$), die Höhe gegen Süden: 35.5° wird noch um 7.5° geringer als die angenommene. Diese Bahn würde nahe an ξ im Gürtel des Orion vorbeigegangen sein. — In Laibach betragen die Verbesserungen bei I: $+8^\circ$ in Höhe, bei II: -3° im Azim. und $+6^\circ$ in Höhe. — Für Bernstein müsste die Höhe von $45-50^\circ$ statt streng SSE in 38° östl. Azim. zu verstehen sein, was, wenn die Abweichung gleichmässig vertheilt wird 9.5° Verbesserung für Azimut und Höhe gibt. Die Bahn kam in SSW dem Zenit bis 15° , mit der Angabe gut übereinstimmend, nahe. — In Leoben näherte sich die Bahn dem Zenit bis auf 37° ($v = -0.5^\circ$) und die Richtung war noch 52° nördlich von W ($v = +10.5^\circ$). In Obdach waren für die angenommenen Azimute die Höhen in I um $+7^\circ$, in II um $+3^\circ$ zu verbessern, das Bahnstück war also etwas mehr geneigt (13° statt 6°).

Ogleich sich unter den benützten Beobachtungen einige nur beiläufige Schätzungen befanden, stellt sich der wahrscheinliche Fehler einer Angabe nicht über $\pm 4.5^\circ$ und die wahrscheinliche Unsicherheit des Schlussresultates auf nahe $\pm 3^\circ$.

Unter den Schätzungen haben sich jene der scheinbaren Bahnneigung fast durchwegs als recht gut und bei weitem nicht so unsicher erwiesen, als man erwarten möchte. Sie sind fast überall besser als die Bestimmungen der scheinbaren Höhen, wo diese nicht direct gemessen wurden. Dies stimmt mit meinen früheren Erfahrungen bei Bearbeitung ähnlicher Beobachtungen überein, so zwar, dass, namentlich bei kurzen Bahnen, die Neigung des beobachteten Bahnstückes gegen den Horizont oder den Vertical,

in Verbindung mit der Fixirung eines Bahnpunktes, ein nicht zu verachtendes Rechnungselement liefert. Dagegen erweist sich die Angabe des scheinbaren Streichens in der Regel als minder brauchbar.

Wenn die Laibacher Beobachtung nicht vorhanden wäre oder unberücksichtigt bliebe, so würde sich die Position des scheinbaren Radianten etwas weiter nördlich, ungefähr bei $\alpha = 146^\circ$, $\delta = -6^\circ$ ergeben, wofür namentlich die ohne Zweifel sehr sichere Beobachtung in Brunn spricht. Man wird jedoch vorläufig gut thun, das ohne Vernachlässigung einer Beobachtung gefundene Resultat beizubehalten.

Aus dem oben ermittelten Radianten ergibt sich für das Azimut der Bahn am Hemmungspunkte 309.5° und für die Neigung derselben 19.4° . Das Meteor ging also über die Gegend etwas südlich von Fünfkirchen (in Ungarn, am westlichen Ende des Plattensees vorbei, zwischen Langenwang und Krieglach bis zu dem bereits bestimmten Endpunkte bei Gamming.

Bahnlänge, Höhen und Geschwindigkeit. Am frühesten wurde das Meteor offenbar von dem zweiten Beobachter in Klagenfurt gesehen, scheinbar einen Moment stillstehend, also in der Nähe des Radianten in ESE. Auch Herr Hirsch muss es bald darauf bemerkt haben, da er die Bahn zuerst aufsteigend sah und dieser Theil nur südlich von Ost gelegen sein konnte. Die erste sichere Positionsangabe liefert jedoch Laibach, u. zw. genau Ost. Als das Meteor hier zuerst erblickt wurde, war es demnach in der obigen Bahn 22.2 g. M. (164.7 Km.) hoch über einem Punkte 2 M. südlich von Fünfkirchen und 47.8 M. (354.7 Km.) vom Endpunkte entfernt. Von Klagenfurt aus erschien dieser Punkt 12° südlich von Osten und man kann mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass es auch dort schon gesehen wurde, so dass sich die angegebene Dauer von 6 Secunden auf diese Bahnlänge beziehe. Kaum minder wahrscheinlich ist dasselbe auch für Prossnitz und Zbeschau. Am ersteren Orte gibt der Beobachter den Anfang „südöstlich von Sirius“ an. Dieser Anfangspunkt aber hatte dort 12° östliches Azimut und lag 16° östlich von Sirius, $3-4^\circ$ tiefer als dieser Stern, was der Angabe ganz gut entspricht. Auch konnte dann in der That ein grosser

Theil der Bahn nahe horizontal erscheinen. Als Dauer ist 5—6 Sekunden angegeben.

Herr Sauer in Zbeschau sah den Anfang ebenfalls gegen SE hin und den „Explosionspunkt“ mitten in der Bahn, wobei er bemerkte „wir hielten es im ersten Momente nur für eine Sternschnuppe“. Die Dauer von 4—5 Sekunden wird also ebenfalls auf diese ganze Bahnlänge zu beziehen sein, so zwar, dass das Mittel aus diesen drei Dauerschätzungen $5\frac{1}{3}$ Sekunden mit derselben verglichen nicht weniger als 9·0 g. Meilen geocentrische Geschwindigkeit ergeben würde.

Einige andere Schätzungen der Dauer beziehen sich nur auf kürzere Theile der Bahn. Die Beobachtung Laibach a) reicht nur bis zur ersten Explosion 13 M. hoch über der Gegend bei Körmönd, bezieht sich also nur auf 25·5 M. Länge und liefert für $4\frac{1}{2}$ Sekunden Dauer nur 5·7 M. Geschwindigkeit. Dagegen gibt die Wahrnehmung in Brünn für ein streng begrenztes Bahnstück von 15 M. Länge mit $1\frac{1}{2}$ Sekunden 10 M. Geschwindigkeit. Bezieht man die Dauerangabe von 2 Sekunden in Bernstein nur auf das Stück von SSE bis zum Ende, d. i. auf 20 M., so erhält man ebenfalls 10 M. Geschwindigkeit. Wird für Wien die Dauer (3 Sekunden) von dem Punkte an gerechnet, da das Meteor ungefähr südlich in das Azimut der Salesianergasse trat, also für eine Bahnlänge von 21 M., so gibt dies 7 M. Geschwindigkeit.

Von den übrigen Zeitangaben lässt sich nicht ermitteln, auf welche Bahnlänge sie sich beziehen; es ist aber keine darunter, welche über 6 Sekunden hinausgeht, vielmehr wird in den meisten Berichten das Blitzartige der Erscheinung besonders hervorgehoben.

Die Daten zur Bestimmung der Geschwindigkeit sind hier noch übersichtlich zusammengestellt:

	Gesehene Bahnlänge	Dauer	Geschwindigkeit
		Sec.	g. M.
Klagenfurt . . .	47·8 g. M.	6	8·0 g. M.
Prossnitz	47·8 "	5·5	8·7 "
Zbeschau	47·8 "	4·5	10·6 "
Brünn	15 "	1·5	10·0 "
Bernstein	20 "	2	10·0 "
Laibach	25·5 "	4·5	5·7 "
Wien	21 "	3	7·0 "

Das einfache Mittel ohne Rücksicht auf die Bahnlängen und Gewichte ist somit 8.6 g. Meilen \pm 0.5 M. w. F. (63.8 Km.) für die geocentrische oder relative Geschwindigkeit.

Die früher gefundene Höhe für das Aufleuchten, etwas über 22 Meilen, ist so ziemlich die gewöhnliche bei grossen Feuerkugeln; sie ist jedoch, wie in vielen anderen Fällen, eigentlich nur als die untere Grenze der sicheren Bestimmung zu betrachten. Aus der zweiten Beobachtung in Klagenfurt wird man schliessen dürfen, dass das Meteor schon viel früher, in einer Höhe von 30—40 M. sichtbar war, an einer Stelle der Bahn, für welche die scheinbare Ortsveränderung auf jenen Beobachtungsort bezogen etwa nur 1—2° in der Secunde betragen haben mochte. Auch so grosse Höhen gehören keineswegs zu den Seltenheiten.

Das Meteor scheint aus einem Schwarm sehr kleiner, vielleicht staubartiger Theile, von nahezu gleicher Grösse und nur wenigen wesentlich grösseren Stücken bestanden zu haben. Die ersteren wurden schon in 13 M. Höhe gelynnt, wodurch die wahrgenommene Explosion innerhalb der Bahn verursacht wurde, während einzelne grössere Partikel den Weg bis zum Ende fortsetzten. Die Angabe einiger Beobachter, dass die zurückgebliebene Lichtspur etwas wellenförmig erschien, deutet auf Rotation eines Stückes. Dagegen spricht die Nachricht aus Klagenfurt (Theilung am Ende) für mehrere Stücke. Jedenfalls war die Lichtintensität auch in dem letzteren Theile der Bahn für die näher liegenden Orte noch immer eine sehr bedeutende, selbst bei bedecktem Himmel (Neuberg). Berichte über Detonationen liefen nicht ein, jedoch muss bertcksichtigt werden, dass jene Gegenden, über welche der Zug der Feuerkugel unmittelbar vor dem Ende hinging, ein schwachbesiedeltes Hochalpengebiet darstellen, zugleich auch theilweise bedeckten Himmel hatten, so dass der ganze Complex der Erscheinung für die Aufeinanderfolge von Blitz und Donner eines Gewitters gehalten werden konnte. Immerhin scheint es jedoch, dass die betreffenden Massen nicht sehr bedeutend waren.

Der Radiationspunkt dieser Feuerkugel hatte eine Elongation von 107° vom Apex, die Neigung der Bahn war 27° und die heliocentrische Geschwindigkeit $10\cdot5$ g. M. (78 Km.). Der stark hyperbolische Character dieser Bahn kann gar nicht bezweifelt werden. Wollte man diese Geschwindigkeit auf die parabolische herabmindern, so müsste die beobachtete fast auf die Hälfte reducirt werden. Es ist aber unmöglich, so grosse Fehler in der Angabe der Bahnlage oder in den Beziehungen der Zeitschätzungen zu den betreffenden Längen anzunehmen, welche das Resultat derart entstellt haben könnten. Mit diesen Daten würde man die Position des kosmischen Ausgangspunktes im Weltraume in Länge und Breite: $L = 129^\circ$, $B = -19\cdot5^\circ$ erhalten. Die übrigen Elemente sind vorläufig nicht von besonderem Interesse, übrigens auch in den vorstehenden implicite gegeben.

Die in Rede stehende Feuerkugel bietet aber vom astronomisch-kosmischen Standpunkte noch eine bemerkenswerthe Seite. In dem von mir gesammelten Material besserer Beobachtungen und Reductionen von Boliden, finden sich nämlich zunächst zwei Erscheinungen, welche in Bezug auf den Radiationspunkt eine verhältnissmässig gute Übereinstimmung mit unserem Meteor zeigen. Es sind dies:

- a) Feuerkugel: 1877 März 17 $9^h 57^m$ in England und Irland. Der Radiant war nach Tupmans Bestimmung: $\alpha = 145^\circ$
 $\delta = -4^\circ$ „sehr genau“ (Report of the brit. Association 1877, p. 118 und 135 und Annual Report of the Royal Astronomical Society 1877, p. 228).
- b) Feuerkugel: 1866. Jänner 11 $9^h 55^m$ in England. Nach meiner Bearbeitung der im Report 1866 p. 84 und 126 angeführten guten Beobachtungen war der Radiant $\alpha = 150^\circ$,
 $\delta = -4^\circ$, etwas weniger sicher als bei unserer Feuerkugel.

Da für die erstere Feuerkugel auch die Epoche nur um vier Tage verschieden ist, wird man begründeten Einwendungen kaum begegnen, wenn man die Zusammengehörigkeit derselben mit dem grossen Meteor vom 13. März, als Theile eines Stromes für wahrscheinlich hält. Hinsichtlich der zweiten Feuerkugel, für welche der Unterschied der Knotenlänge über 60° beträgt,

dürften sich jedoch ohne nähere Untersuchung Bedenken geltend machen, da man — den entsprechenden Querschnitt des Stromes vorausgesetzt — eine viel grössere Verschiebung des scheinbaren Radianten für wahrscheinlich halten und daher eben die beiläufige Übereinstimmung eher gegen die Zusammengehörigkeit geltend machen wird. Allein abgesehen davon, dass diese Radiantenbestimmungen jedenfalls um einige Grade unsicher sind, ergibt es sich, dass in der That gerade in der Zeit vom Jänner bis März die kleinste Verschiebung eintreten muss, wenn man die Betrachtungen anwendet, welche ich in meinen Untersuchungen über die Verschiebungen der Radiationspunkte ausführlich entwickelt habe.¹ Für den früher berechneten kosmischen Ausgangspunkt und mit der Geschwindigkeit des Meteoros vom 13. März (eine ziemlich beträchtliche Änderung der Geschwindigkeit ist übrigens hier von geringem Einflusse, wenn man nur für beide Fälle denselben Werth nimmt) würde nämlich der scheinbare Radiant am 11. Jänner die Position $\alpha = 144^\circ$, $\delta = -2^\circ$ einnehmen, welche also nicht viel mehr als 6° von der wirklich beobachteten verschieden ist. Eine viel bessere Übereinstimmung kann man kaum erwarten. — Über die Wahrscheinlichkeit kosmischer Ströme, welche einen grossen Theil der Erdbahn ausfüllen, dabei aber vielleicht minder dicht sind als — ich möchte sagen — planetarische, habe ich in der erwähnten Abhandlung Einiges angeführt. Von ähnlichen Gesichtspunkten geleitet, habe ich nun hier, gleichsam beispielsweise, die Verschiebungen dieses Radiationspunktes auch für andere Epochen — unter Voraussetzung desselben kosmischen Ausgangspunktes und gleicher heliocentrischer Geschwindigkeit — durch Rechnung noch weiter verfolgt. Für die Sommerhälfte des Jahres ist er meistens am Tage über dem Horizont und man kann kaum erwarten, gute Beobachtungen zum Vergleiche mit der Rechnung zu erlangen. Im Herbst liegt er dem Apex ziemlich nahe, woher, wie wir aus Erfahrung wissen, wenig tief gehende grosse Meteore kommen. Wir können

¹ Theoretische Untersuchungen über die Verschiebungen der Radiationspunkte aufgelöster Meteorströme. Sitzb. der k. Akad. d. Wissensch. LXXXIII. Bd. II. Abth. Jänner 1881. Man findet dort auch sehr bequeme Formeln für die hier und in Folgendem erwähnten Rechnungen.

aber dagegen für diese Jahresperiode die Radianten von Sternschnuppen vergleichen. In der folgenden Übersicht sind die Resultate der Rechnung und Beobachtung nebeneinander dargestellt.

Vergleichung

berechneter Positionen der scheinbaren Radianten, welche sich aus einem kosmischen Ausgangspunkte von 129° Länge und 19.5° südlicher Breite für verschiedene Jahresepochen (Knotenlängen) ergeben, mit beobachteten Radianten von Feuerkugeln und Sternschnuppen.

	Berechneter Radiant			Beobachtete Radianten	
	α	δ			
März 13	149°	-9°	Fkgl.	$\alpha:149^\circ, \delta:-9^\circ$	(worauf die Rechnung gegründet ist).
			Fkgl.	$\alpha:145^\circ, \delta:-4^\circ$	(März 17. 1877. (Mittel: $\alpha:147^\circ, \delta:-6.5^\circ$).
			Sternschn.	$\alpha:152^\circ, \delta:-6^\circ$	(Schmidt ohne nähere Angabe der Epoche).
Febr. 3	147	-5	Sternschn.	$\alpha:153^\circ, \delta:+2^\circ$	(Schiaparelli für Febr. 3) $\alpha:150^\circ, \delta:+3^\circ$
				$\alpha:150^\circ, \delta:+3^\circ$	(Denning für Febr. 1872).
				$\alpha:141^\circ, \delta:-2^\circ$	(Greg für Jänner 1 bis März 16, zusammengezogen).
Jänn. 11	144	-2	Fkgl.	$\alpha:150^\circ, \delta:-4^\circ$	Jänner 11. 1866).
Nov. 7	123	+5	Sternschn.	$\alpha:124.5^\circ, \delta:+5^\circ$	(Tupm. für November 7) $\alpha:125^\circ, \delta:+5^\circ$
				$\alpha:125^\circ, \delta:+5^\circ$	(Gruber für November 3-12).
				$\alpha:130^\circ, \delta:+5^\circ$	(Greg für Oct. 30 bis Nov. 30? zusammengezogen, also etwa Mitte November).
Oct. 15	108	+8	Sternsch.	$\alpha:107^\circ, \delta:+12^\circ$	(für Oct. 8) und $\alpha:110^\circ, \delta:+6^\circ$
				$\alpha:110^\circ, \delta:+6^\circ$	(für October 14, Tupman).
				$\alpha:108^\circ, \delta:+12^\circ$	(für Oct. Schmidt).
Sept. 15	103.5°	+6	Sternschn.	$\alpha:101^\circ, \delta:11^\circ$	(für September 15, 16. Denning im Report 1878. Abdr. p. 69).

Die beobachteten Radianten liegen zumeist einige Grade nördlicher als die berechneten und die Übereinstimmung würde noch besser sein, wenn auch jener der Feuerkugel vom 13. März 1883 etwas nördlicher genommen würde, wofür, wie schon früher angedeutet wurde, auch einige und zwar gerade die anscheinend besseren Beobachtungen dieses Meteoros sprechen.

Dass die Radiantenverzeichnisse uns nicht eine ununterbrochene Kette der Verschiebungen darbieten, kann Niemanden befremden, der mit diesem Gegenstande sich jemals eingehend befasst hat. Die Materialien für die einzelnen Tage, ja für ganze Wochen sind in vielen Theilen des Jahres noch sehr mangelhaft namentlich für die südlicheren Radianten und die dadurch nothwendig werdenden Zusammenziehungen, lassen immer nur sprungweise Veränderungen hervortreten.

Wenn es noch gestattet wäre, auch solche Resultate zu vergleichen, welche von bedeutend minderm Gewichte sind, so könnte der am 15. April 1812 um 4 Uhr bei Erxleben gefallene Meteorit angeführt werden.¹

¹ Gilbert's Annalen (Bd. 40, S. 450) sind folgende Daten zu entnehmen: In Dessau sah man die Feuerkugel von SE nach NW gehen. In Preilitz hinter Cöthen hörte man eine starke wiederholte Detonation, eben so in Wörlitz östlich von Dessau. Bei Erxleben wurde der Schall „halb aus E und S“ vernommen und eine lange schmale röthliche Wolke in der Richtung von Morgen nach Mittag gesehen. Fast alle Orte, an welchen Detonationen vernommen wurden, liegen zwischen ESE und SE vom Fallorte, die weitesten selbst 12 Meilen entfernt. Sorgfältige Untersuchungen über die Art, wie sich die Schallerscheinungen bei solchen Meteoriten darstellen, deren Bahnlage sich aus den optischen Wahrnehmungen gut bestimmen liessen, gewähren uns die Möglichkeit, bei analogen Erscheinungen Schlüsse zu ziehen, auch wenn nicht genug Beobachtungen der Feuerkugel vorliegen. Man wird in dem gegebenen Falle gewiss nicht viel fehlen, wenn man das Azimut der Trajectorie etwa zu 305° oder 55° östlich von S annimmt. Ferner beweisen die Schallwahrnehmungen in so grosser Entfernung vom Fallorte, dass die Neigung der Bahn sehr gering war. Sie konnte füglich nicht über 20° gewesen sein, da man sonst 12 Meilen nach rückwärts kaum mehr Detonationen hätte wahrnehmen können. Wahrscheinlich war sie noch kleiner, aber gewiss grösser als Null. Nimmt man also den mittleren Werth von 10° für die Höhe des Radianten in dem obigen Azimut, so ist dessen Ort: $\alpha = 139^\circ$, $\delta = -12^\circ$.

Nach einer um etwa 10° , aber auch kaum mehr unsicheren Schätzung war der Radiationspunkt desselben $\alpha = 139^\circ$, $\delta = -12^\circ$. Für den früher angenommenen kosmischen Ausgangspunkt der Feuerkugel vom 13. März würde der Radiant am 15. April der Rechnung nach $\alpha = 142^\circ$, $\delta = -14^\circ$ sein. —

Man darf freilich den hier im Anhange gegebenen Beispielen zunächst wohl kein übertriebenes Gewicht beilegen, denn da die Zahl der bekannten Radiationspunkte ziemlich gross ist (die südlicheren sind allerdings minder zahlreich), so sind einzelne Übereinstimmungen noch nicht beweisend, dürften aber doch zur näheren Untersuchung in anderen Fällen anregen. Würde man es der Mühe werth finden, diese Frage eingehend zu behandeln, so wäre der Ausgangspunkt eines Meteoros nur vorläufig zu Grunde zu legen und nach der Methode der kleinsten Quadrate jene Position desselben, sowie auch jene Geschwindigkeit aufzusuchen, welche den in Vergleich kommenden beobachteten Radianten am besten Genüge leisten. Hiezu wird man sich ebenfalls mit Vortheil jener Ausdrücke bedienen können, welche ich in meiner oben angeführten Abhandlung gegeben habe.

Zur Geschichte der Eichenrindegerbsäuren.

Von C. Ettl.

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.)

Beinahe gleichzeitig mit dem in dieser Zeitschrift 1880, Seite 262, erschienenen Berichte über das Ergebniss einer von mir ausgeführten Untersuchung der Eichenrindegerbsäure veröffentlichte C. Böttinger in Liebig's Annalen der Chemie 102, 1, seine Versuche über Phlobaphen, Eichenroth etc. und ein Jahr später kam in Fresenius' Zeitschrift für analytische Chemie 20, 208, von Julius Löwe eine Arbeit „Über die Gerbsäure der Eichenrinde“.

In diesen drei Untersuchungen findet man betreffs der Zusammensetzung der genannten Gerbsäure gar keine Conformität und nur in einigen Punkten decken sich die angeführten Resultate, worüber ich zunächst referiren will.

Nach meinen Versuchen existirt der Gerbstoff in der Eichenrinde in zweierlei Form, als Gerbsäure, die isolirt eine röthlich weisse Farbe besitzt und als ihr Anhydrid, auch Phlobaphen¹ genannt, dem isolirt eine braunrothe Farbe zukommt. J. Löwe fand dieses Ergebniss bestätigt. Den Praktikern ist dieses Verhältniss schon lange bekannt, nur nennen sie das Anhydrid einfach Farbstoff und perhorresciren Rinden, die diesen Farbstoff in grösserer Menge enthalten, da das Leder, mit derartiger Rinde bereitet, eine allzu rothe Farbe bekommt.

¹ C. Stähelin und J. Hofstetter, Ann. d. Ch. u. Ph. 51, 63, führten, als sie den Farbstoff der Rindeborke verschiedener Hölzer untersuchten, das Wort „Phlobaphen“ ein. Sie leiteten es ab von *φλοῖς*, Rinde, und *βαφή*, Farbe.

Die Frage, ob die Gerbsäure der Eichenrinde ein Glycosid sei, ist jetzt, als im negativen Sinne erledigt, zu betrachten, da es weder Löwe noch mir möglich war, in der mit Essigäther ausgezogenen Gerbsäure irgend eine zuckerartige Substanz aufzufinden. Auch C. Böttinger¹ berichtet in neuerer Zeit, dasselbe Resultat erhalten zu haben. Die Ursache, warum früher der Gerbstoff der Eichenrinde als Glycosid erklärt wurde, indem nach dem Kochen desselben mit verdünnter Schwefelsäure Zucker in Syrupform gefunden wurde, liegt in der damaligen Darstellung des Gerbstoffes und in dem Vorkommen von Lävulin in der Eichenrinde. Dass sich der Gerbstoff in zweierlei Form in derselben vorfinde, wurde damals nicht berücksichtigt. Der Gerbstoff wurde aus einem weingeistigen oder wässerigen Auszuge der Rinde mit Bleiacetat² gefällt. Aus dem Bleiniederschlage wurde das Blei mit H₂S entfernt, das Filtrat, als eine Lösung von reiner Gerbsäure angesehen, mit verdünnter Schwefelsäure gekocht, der hierbei entstandene rothe Niederschlag als die von Zucker befreite Gerbsäure analysirt und aus dem Filtrate nach dem Entfernen der Schwefelsäure der Zucker in Syrupform erhalten. Nachdem ich³ auf das Vorkommen des Lävulins in der Eichenrinde aufmerksam gemacht habe und die mit Essigäther dargestellte Gerbsäure zuckerfrei gefunden wurde, so kann der Grund, warum bei der Darstellung durch Fällen mit Blei neben dem Gerbstoff amorpher flüssiger Zucker zum Vorschein kam, blos darin zu suchen sein, dass dem Gerbstoffblei das in dem Rindenauszuge vorhandene Lävulin hartnäckig anhängt und desswegen nicht vollständig durch Auswaschen entzogen werden kann. Nach der Angabe von Dieck und Tollens⁴ geht Lävulin durch Kochen mit verdünnter Schwefelsäure oder Salzsäure in Lävulose über. Zugleich konnte bei der Prüfung der Glycosidfrage der Umstand irreführen, dass die Gerbsäure beim Erhitzen mit den soeben genannten Säuren Wasser verliert.

¹ Berliner Berichte 14, 2390.

² A. Grabowski, Ann. d. Ch. u. Ph. 45, 16. Johansen, Archiv d. Pharmacie 3) 9, 210.

³ Berliner Berichte 14, 1826.

⁴ Liebig's Ann. d. Ch. 198, 238.

Bis jetzt wurden die Gerbsäure und ihr Anhydrid nur im amorphen Zustande kennen gelernt und desswegen mit so verschiedenem Resultate untersucht, dass beinahe in jeder Berichterstattung der Vorwurf zu lesen ist, der andere Autor sei im Besitz von unreinen Substanzen gewesen, jedoch ohne daneben den Nachweis zu liefern, worin die Beimengungen bestehen.

Die Reinheit der Gerbsäure, wenn man sie aus einem weingeistigen Auszuge der Eichenrinde mit Essigäther ausschüttelt, kann hauptsächlich von zwei in der Rinde vorkommenden Substanzen beeinträchtigt werden, von einem braungrünen amorphen Terpenharze und dem Phlobaphen. Ersteres ist leicht zu erkennen, ebenso bequem und scharf zu trennen, indem es ausser in Essigäther in Äthyläther und Benzol sehr leicht löslich ist, während die Gerbsäure in Benzol gar nicht und in Äthyläther sehr schwer löslich ist. 100 Theile weingeistfreier Äther nehmen 0.035 Theile Gerbsäure auf. Das Anhydrid ist ebenfalls leicht zu erkennen, seine Trennung aber schon etwas weniger einfach. Während dasselbe durch Bleiacetat als braunrother Niederschlag niederfällt, fällt die Gerbsäure rein gelb und ist letzterer nur eine Spur von Anhydrid beigemengt, so hat der Bleiniederschlag einen deutlich erkennbaren Stich ins Röthliche.

Ich war früher der Meinung, dass in weingeistfreiem Essigäther oder in einem Gemisch von Essigäther und Äthyläther sich nur Gerbsäure löse und das Anhydrid absolut unlöslich sei. Es stellte sich jedoch heraus, dass auch das letztere von den genannten Lösungsmitteln in kleinen Mengen aufgenommen wird. Zudem entdeckte ich im Verlauf meiner Untersuchung den misslichen Umstand, dass die Gerbsäure der Eichenrinde den Essigäther in höherer Temperatur, auch bei vermindertem Drucke, so energisch, wie verdünnte Schwefel- oder Salzsäure, in Essigsäure und Weingeist zu zerlegen vermag und der nach dem Abdampfen und Trocknen bei der Gerbsäure verbleibende Rest der hiedurch immer concentrirter werdenden Essigsäure einem Theile der Gerbsäure Wasser entzieht, wodurch Anhydrid entsteht. Aus diesem Grunde kann bei Anwendung von Essigäther unmöglich eine von Anhydrid freie Gerbsäure gewonnen werden. Desshalb war ich genöthigt, zum Ausschütteln der letzteren ein anderes

Lösungsmittel zu benutzen, wörtber ich im Nachfolgenden das Nähere mittheilen werde.

Um sich in kurzer Zeit von der Reinheit der Gerbsäure zu überzeugen, reicht, wie ich glaube, folgende qualitative Prüfung aus. Die Gerbsäure muss sich in der hinreichenden Menge weingeistfreien Essigäthers vollständig lösen, ihre Lösung in sehr verdünntem Weingeist muss mit Bleiessig einen rein gelben Niederschlag geben und die Gerbsäure darf an weingeistfreien Äthyläther oder Benzol keine fremdartigen Körper abgeben. Die isolirte reine Gerbsäure ist in Wasser sehr schwer löslich, 100 Theile Wasser lösen nur 0.6 Theile von ihr auf, dagegen ist sie in Weingeist von jeder Concentration sehr leicht löslich.

Das Phlobaphen ist in Wasser und Äther so gut wie unlöslich, dagegen in Weingeist von jeder Stärke leicht löslich. Das Phlobaphen, aus der Rinde bereitet, kann mit Terpenharz und Pektin-substanzen verunreinigt sein. Ersteres wird erkannt und getrennt durch eine Behandlung mit Äther oder Benzol, von welchen Lösungsmitteln dasselbe aufgenommen wird; die Anwesenheit der Pektin-substanzen lässt sich durch die Unlösbarkeit derselben in 90% Weingeist constatiren und auf diese Weise können sie auch entfernt werden. Die Gegenwart von Gerbsäure im Phlobaphen wird erkannt, wenn letzteres, nachdem durch Trocknen bei 110° die anhängende Feuchtigkeit entfernt ist, bei 130—140° wieder Wasser verliert.

Zur Besprechung der Zusammensetzung der Eichenrindegerbsäure halte ich für nothwendig, die dahin zielenden Angaben von J. Oser,¹ C. Böttinger,² J. Löwe³ und mir⁴ mit einander zu vergleichen und die Ursachen der Differenzen zu erörtern. Zu diesem Zwecke erfolgt zunächst eine Recapitulation meiner früheren Untersuchung. Die von mir damals analysirte Gerbsäure wurde durch Abdampfen ihrer Lösung in Essigäther bei gewöhnlicher Temperatur erhalten und lieferte Zahlen, die mit der aus

¹ Sitzungsab. d. k. W. Akad. d. W. Band 72, Juni 1875.

² Liebig's Ann. d. Ch. 102, 1.

³ loc. c.

⁴ loc. c.

der Formel $C_{17}H_{16}O_9$ berechneten sehr gut übereinstimmen. Bei $130-140^\circ$ getrocknet gibt die Gerbsäure Wasser ab und nimmt eine braunrothe Farbe an. Die Analyse dieser Substanz gibt Zahlen, welche der Formel $C_{34}H_{30}O_{17}$ entsprechen, wodurch angezeigt wird, dass aus 2 Mol. Gerbsäure durch Verlust von 1 Mol. Wasser eine Anhydridverbindung entstanden ist. Das in der Eichenrinde vorkommende Phlobaphen hat dieselbe Zusammensetzung. 1 Mol. dieses ersten Anhydrids verliert beim Kochen mit verdünnter Schwefel- oder Salzsäure wieder 1 Mol. Wasser, denn die analysirte und als zweites Anhydrid bezeichnete Substanz lieferte mit der Formel $C_{34}H_{28}O_{16}$ stimmende Zahlen. Durch Kochen der anhydridfreien Gerbsäure mit einer der gedachten Säuren bildet sich eine noch wasserärmere und daher drittes Anhydrid, genannte Substanz, deren Analysen mit der Formel $C_{34}H_{26}O_{15}$ stimmende Zahlen gab. Demnach haben 2 Mol. Gerbsäure 3 Mol. Wasser verloren. Als bemerkenswerthe Eigenschaft dieser drei Anhydride ist ihre Löslichkeit in Weingeist und Ätzalkalien hervorzuheben. Die im Nachfolgenden angeführten Thatsachen sprechen ebenfalls dafür, dass der hier besprochenen Eichenrindegerbsäure als wirklicher Ausdruck ihrer Zusammensetzung die Formel $C_{17}H_{16}O_9$ zukommt.

J. Oser stellte Gerbsäure aus gerbsaurem Blei dar, das er durch fraktionirte Fällung von wässerigen Extracten der Eichenrinde mit Bleiacetat erhielt, wobei nur die zuletzt fallenden, mehr weiss gefärbten Portionen benutzt wurden. Nach dem Kochen dieser Gerbsäure mit verdünnter Schwefelsäure fand Oser eine von ihm Eichenroth genannte Substanz und in geringer Menge einen amorphen, gährungsfähigen Zucker. Das Eichenroth gab bei der Analyse dieselben Zahlen, welche mir die Analyse des unter den gleichen Bedingungen hergestellten dritten Anhydrids $C_{34}H_{28}O_{15}$ lieferte. Auf Grund dieses Versuches hält Oser die Eichenrindegerbsäure für eine chemische Verbindung von Eichenroth und Zucker, d. h. für ein Glycosid. Die amorphe Beschaffenheit jedoch, sowie die geringe Quantität des von Oser aufgefundenen Zuckers und die Zusammensetzung seiner aus gerbsaurem Blei gewonnenen Gerbsäure lassen eher vermuthen, dass letztere mit wenig Lävulin verunreinigt war und dieses beim Kochen mit Schwefelsäure Lävulose lieferte.

	Berechnet für Gerbsäure $C_{17}H_{16}O_9$	Gefunden von Oser tur die bei 100° zwei Tage lang getrocknete Gerbsäure		Berechnet für Lävulin $C_6H_{10}O_5$
C...	56·04	55·11	55·17	44·14
H ..	4·40	4·31	4·33	6·17

C. Böttinger acceptirte die Ansicht Oser's, die Eichenrindegerbsäure sei = Eichenroth + Zucker und fügte noch die Bemerkung hinzu, das in der Eichenrinde vorkommende Phlobaphen sei identisch mit Eichenroth, woraus der Schluss erfolgen würde, dass der Gerbstoff in der Eichenrinde in zweierlei Form, als Phlobaphen und Phlobaphenzucker, vorkomme. Letztere Verbindung wurde nicht dargestellt, sondern Böttinger wollte ihre Existenz, wie Oser, damit beweisen, dass er die Componenten derselben, jedoch nicht aus der Gerbsäure selbst, sondern aus einem weingeistigen Auszuge der Rinde zu gewinnen suchte. Er erschöpfte Eichenlohe (22 Kilo), welche zuerst mit Äther ausgezogen worden war, mit Weingeist. Der weingeistige Auszug lieferte nach dem Eindampfen und Aufnahme des Rückstandes mit Wasser und Weingeist einen in diesen Lösungsmitteln nunmehr unlöslichen Rückstand, den Böttinger als Phlobaphen ansieht. Das Filtrat wurde zum Zwecke der Reinigung noch öfters eingedampft, mit Wasser aufgenommen und filtrirt, bis zuletzt eine klare Flüssigkeit vorhanden war, die nach Böttinger's Ansicht wesentlich nur Eichenrothzucker gelöst enthalten sollte. Er kochte nun diese Lösung mit verdünnter Schwefelsäure und erhielt einen braunrothen Niederschlag, der bei der Analyse die Zusammensetzung des von mir hergestellten dritten Anhydrids $C_{34}H_{26}O_{15}$ besass, daher mit Oser's Eichenroth identisch ist und nach Entfernung der Schwefelsäure einen dicken, energisch reducirenden Syrup von süssem, zugleich widerlich bitterem Geschmacke und schwach saurer Reaction. In diesem Syrup zeigten sich nach einigen Monaten eine geringe Quantität von Krystallen, die sich bei der Analyse und durch die Bestimmung ihres Schmelzpunktes als Quarcit zu erkennen gaben und nach einem Jahre noch einmal Krystalle in geringer Menge, die stark reducirten und rechts drehten, daher von Böttinger als Glucose angesprochen werden. Es geht aus Böttinger's Angaben deutlich hervor, dass er aus

dem von ihm in Arbeit genommenen Material nur eine verschwindend geringe Menge von Glucose im Verhältniss zu den grossen Quantitäten des dargestellten Eichenroths gewinnen konnte und desswegen glaube ich nicht, dass in der Eichenrinde eine chemische Verbindung von Eichenroth und Glucose existent ist und überhaupt triftige Beweise vorliegen, um dem Worte Böttinger's¹ beistimmen zu können: „ich halte es für Sache der Übereinkunft, ob man die Eichenrindegerbsäure nach wie zuvor zu den Glucosiden zählen will“. Obgleich ich Eichenrinde von verschiedenem Alter und Standorte verarbeitete, konnte ich niemals Glucose, immer nur Lävulin, Lävulose und Quercit auffinden und zwar in quantitativer Hinsicht in sehr untergeordnetem Verhältniss zum Gerbstoff.

Den von Böttinger als Phlobaphen beschriebenen und analysirten Körper bekommt man immer, wenn wässerige oder weingeistige Auszüge der Eichenrinde abgedampft werden. Vermöge seines gallertartigen Aussehens im feuchten Zustande, seiner korkartigen Beschaffenheit im trockenen, seiner totalen Unlöslichkeit in den verschiedenen Lösungsmitteln halte ich ihn für einen zu den Pektinsubstanzen gehörenden Körper, der deshalb braunroth gefärbt ist, weil ihm Phlobaphen untrennbar anhaftet.

J. Löwe bereitete sich die Gerbsäure, gleich mir, mit Hilfe von Essigäther. Zu diesem Zwecke benützte er einen weingeistigen Auszug der Eichenrinde, destillirte den Weingeist ab, worauf sich nach dem Erkalten ein rothbrauner Niederschlag, hauptsächlich aus Phlobaphen bestehend, absetzte, der auf einem Filter gesammelt wurde. Das Filtrat schüttelte Löwe zuerst zur Entfernung von Gallussäure und Ellagsäure mit Äthyläther und hierauf zur Gewinnung der Gerbsäure mit Essigäther aus. Nach dem Abdestilliren des Essigäthers erhielt Löwe eine Gerbsäure, welche nach den von ihm ausgeführten Analysen sowohl Anhydrid als Essigsäure enthielt, wodurch meine oben angeführten Erfahrungen eine Bestätigung finden, nämlich, dass die Eichenrindegerbsäure in höherer Temperatur den Essigäther in Alkohol und Essigsäure zu spalten vermag und dann letztere einem Theil der Gerbsäure Wasser entzieht, um Anhydrid zu bilden. Löwe erhielt bei der

¹ Berl. Ber. 14, 2390.

Analyse der Gerbsäure, welche er durch Trocknen über Schwefelsäure vollständig von Wasser befreite, für den Kohlenstoff zu niedrige Zahlen im Vergleiche zu den von mir für die Gerbsäure berechneten, welches Verhältniss in diesem Falle nur der Gegenwart von Essigsäure zugeschrieben werden kann.

	Berechnet für Gerbsäure $C_{17}H_{16}O_9$	Gefunden von Löwe im Mittel von acht Analysen
C	56.04	55.422
H	4.40	4.631

Nachdem durch Trocknen der Gerbsäure bei 120° die Essigsäure entfernt war, erhielt Löwe bei der Verbrennung zu hohe Zahlen für den Kohlenstoff. Sowohl dieses Resultat als auch das von Löwe angegebene Factum, dass die Gerbsäure durch Bleiacetat als gelbbrauner Niederschlag gefällt wurde, können nur in der Anwesenheit von Anhydrid ihren Grund haben.

	Berechnet für Gerbsäure $C_{17}H_{16}O_9$	Gefunden von Löwe im Mittel von 14 Analysen	Berechnet für Anhydrid $C_{34}H_{30}O_{17}$
C . . .	56.04	56.835	57.46
H . . .	4.40	4.372	4.22

Den das Phlobaphen enthaltenden Niederschlag reinigte Löwe durch wiederholtes Auflösen in 90% Weingeist und Ausfällen mit Wasser. Die mit der bei 120—125° getrockneten Substanz ausgeführten Analysen zeigen einen viel höheren Kohlenstoffgehalt, als die von mir für das erste Anhydrid berechnete Formel verlangt.

	Berechnet für Anhydrid $C_{34}H_{30}O_{17}$	Gefunden von Löwe im Mittel von 5 Analysen
C	57.46	59.947
H	4.22	4.267

Die Ursache der Differenz liegt allein darin, dass dem von Löwe dargestellten Phlobaphen das in der Eichenrinde vorhandene Terpenharz beigemischt war, welcher Fall dadurch ermöglicht ist, dass dem Harze und Phlobaphen die ganz gleichen Löslichkeitsverhältnisse insofern zukommen, indem sie beide in Weingeist gleich leicht löslich und in Wasser unlöslich sind, so

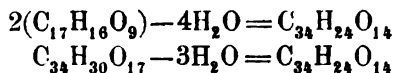
dass beide zusammen mit Wasser aus ihrer weingeistigen Lösung gefällt werden. Sie können nur durch Äthyläther oder Benzol von einander getrennt werden, in welchen Flüssigkeiten bloß das Harz löslich ist. Ausser dem Terpenharze, das sich mir bei der Analyse aus 74·38% C und 10·34% H zusammengesetzt zeigte, findet sich in der Eichenrinde keine andere Substanz, die einen grösseren Kohlenstoffgehalt besitzt, als die Gerbsäure und das Phlobaphen.

Löwe behandelte sowohl seine Gerbsäure, als sein Phlobaphen entweder mit verdünnter Schwefelsäure oder mit Oxalsäure, oder auch mit destillirtem Wasser allein in zugeschmolzenen Röhren acht Tage lang bei einer Temperatur von 108—110°. Der Inhalt in allen Röhren bestand nach dem Erkalten aus einer rothgefärbten Flüssigkeit und einem braunrothen Niederschlag, welcher gesammelt und nach dem Auswaschen mit Wasser und Weingeist noch mit 90% Weingeist ausgekocht wurde. Diese Substanz, welche nach dem Trocknen ein leichtes rothbraunes Pulver vorstellt, ist deshalb bemerkenswerth und wichtig, weil sie nach Löwe's Angabe von einer Lösung der ätzenden Alkalien nur theilweise, nicht ohne Zersetzung aufgenommen wird, daher kein Hydroxyl mehr besitzen kann. Die Analysen von Löwe, die nur um 0·1—0·2% unter einander differiren, zeigen, dass die Substanz noch wasserärmer ist, als das mehrfach erwähnte dritte Anhydrid. Die gefundenen Zahlen stimmen mit den aus der Formel $C_{34}H_{26}O_{14}$ berechneten sehr gut überein.

	Berechnet für $C_{34}H_{26}O_{14}$	Gefunden von Löwe		
		im Mittel von drei Analysen	im Mittel von zwei Analysen	
		I	II	III
C	62·20	62·339	62·197	61·997
H	3·66	4·154	4·015	4·056

I wurde erhalten durch Behandlung der Gerbsäure mit Schwefelsäure oder Oxalsäure, II durch Behandlung des Phlobaphens mit denselben Säuren und III durch Behandlung der Gerbsäure mit destillirtem Wasser allein.

Die Formel $C_{34}H_{24}O_{14}$ zeigt an, dass 2 Mol. Gerbsäure durch vorstehende Behandlung 4 Mol. Wasser oder 1 Mol. Phlobaphen 3 Mol. Wasser verloren haben.



Ich nenne diese Substanz das vierte Anhydrid der Eichenrindegerbsäure, während Löwe dieselbe mit dem Namen Eichenroth belegte.

In folgender Übersicht sind die gefundenen und berechneten Werthe für die Gerbsäure und ihre Derivate verzeichnet. Ich glaube, es ist daraus leicht zu ersehen, dass die gefundenen Zahlen nur allein mit der Formel $C_{17}H_{16}O_9$ für die Gerbsäure vereinbar sind.

Gerbsäure $C_{17}H_{16}O_9$	Berechnet	Gefunden von mir			
	C . . 56·04 H . . 4·40	56·31	56·06	4·63	4·69
1. Anhydrid $C_{34}H_{30}O_{17}$ Phlobaphen (Grabowski's Eichenroth)	C . . 57·46 H . . 4·22	57·28	57·62	4·64	4·33
2. Anhydrid $C_{34}H_{28}O_{16}$	C . . 58·96 H . . 4·04	58·76	4·20		
		Gefunden von			
		Oser	Böttinger	mir	
3. Anhydrid $C_{34}H_{26}O_{15}$ (Oser's Eichenroth)	C . . 60·58 H . . 3·86	60·70	60·19	60·08	60·33
		4·03	4·22	3·94	4·03
		Gefunden von Löwe			
4. Anhydrid $C_{34}H_{24}O_{14}$ (Löwe's Eichenroth)	C . . 62·20 H . . 3·66	62·339	62·197	61·997	4·056
		4·154	4·015		

Ich bemerke hiezu ausdrücklich, dass die hier genannten Autoren die bestimmte Angabe machten, die von ihnen verwendete Gerbsäure gebe mit Fe_2Cl_6 einen schwarzblau gefärbten Niederschlag.

In meinen früheren Mittheilungen habe ich angeführt, dass man beim Erhitzen der Gerbsäure mit verdünnter Schwefelsäure im geschlossenen Rohre ausser sehr grossen Quantitäten der verschiedenen Anhydride noch eine kleine Menge von Gallussäure, aber keine anderen Producte, namentlich keine phenolartigen Körper erhält.

Beim Behandeln der Gerbsäure mit Salzsäure unter erhöhtem Drucke konnte ferner die Bildung eines mit grünesäumter Flamme brennenden Gases (wahrscheinlich Chlormethyl) beobachtet werden und endlich liefern, wie oben erwähnt, 2 Mol. Gerbsäure unter Abspaltung von 4 Mol. Wasser ein (das vierte) Anhydrid, in welchem keine freie Hydroxylgruppe mehr vorhanden ist.

Berücksichtigt man diese Thatsachen, so erscheint es am wahrscheinlichsten, dass als Grundsubstanz der Eichenrindegerbsäure ein Complex anzusehen ist, der aus 2 Mol. Gallussäure unter Verlust von 1 Mol. Wasser entstanden ist, den aber nicht ein gewöhnliches Anhydrid wie das Tannin oder die noch nicht dar-

gestellte Verbindung ¹ $\begin{matrix} \text{C}_6\text{H}_2(\text{OH})_2\text{CO} \\ \text{C}_6\text{H}_2(\text{OH})_2\text{CO} \end{matrix} \text{O}$, auch kein sogenanntes

Phenolanhydrid $\begin{matrix} \text{C}_6\text{H}_2(\text{OH})_2 \\ \text{C}_6\text{H}_2(\text{OH})_2 \end{matrix} \text{O} \begin{matrix} \text{COOH} \\ \text{COOH} \end{matrix}$ darstellt, sondern nach der

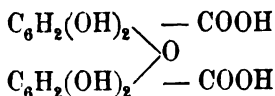
Art der Ketonsäuren constituirt ist und Gallylgallussäure genannt werden kann. Diese Formel müsste also



geschrieben werden.

In diesem Complex $\text{C}_{14}\text{H}_{10}\text{O}_9$ wären dann drei Hydroxylwasserstoffe durch Methyl ersetzt und man hätte die Formel der Gerbsäure $\text{C}_{17}\text{H}_{16}\text{O}_9$. Die gewöhnlichen Anhydride der Gallussäure sind in der Eichenrindegerbsäure sicher nicht vorhanden, da man daraus viel leichter und quantitativer Gallussäure zu gewinnen vermöchte, als es im vorliegenden Falle geschah. Auch die Formel

¹ Diese Verbindung würde übrigens kaum so stark sauer reagiren, wie es die Eichenrindegerbsäure thut.



ist nicht wohl möglich. Denn abgesehen

davon, dass solche Phenolanhydride sich durch verdünnte Säuren, auch nicht bei erhöhtem Drucke, in die Componenten spalten lassen, sind darin nur sechs Hydroxyle frei enthalten. In Folge dieses letzteren Umstandes würden, da sich in der Eichenrindegerbsäure vier freie Hydroxyle im Ganzen nachweisen lassen, nur zwei Hydroxylgruppen verfügbar sein zur Bindung von C_3H_6 , d. h. es könnten nur ein Methyl und ein Äthyl und nicht drei Methylene in der Gerbsäure enthalten sein. Die Existenz einer Äthoxyl- neben einer Methoxylgruppe in der Gerbsäure ist sehr unwahrscheinlich¹. Diese lässt sich also am besten definiren als eine dreifach methylyrte Gallylgallussäure.

In dem Berichte über meine frühere Untersuchung der Eichenrindegerbsäure erwähnte ich eines Öles, welches bei der trockenen Destillation des Gerbstoffes neben Brenzkatechin erhalten wurde. Ich beschrieb es als ein angenehm riechendes, in Ätzalkalien unlösliches Öl, das in weingeistiger Lösung durch Eisenchlorid nicht grün gefärbt wurde. Die geringe Quantität, welche mir nach der Reindarstellung des Öls übrig blieb, erlaubte mir nur die Ausführung einer Analyse und einer Dampfdichtebestimmung, welche Zahlen gaben, die mit denen aus der Formel des Veratrols berechneten annähernd stimmten. Wegen Mangels an Material war es mir nicht möglich, den vollständigen Beweis zu liefern, dass fragliches Öl identisch mit Veratrol sei. Aus diesem Grunde entschloss ich mich, mir das Öl noch einmal zur näheren Untersuchung darzustellen. Herr W. Eitner, Director der hiesigen Versuchsstation für Lederindustrie, hatte die Güte, mir zu genanntem Zwecke Eichenrinde in genügender Quantität zur Verfügung zu stellen, wofür ich ihm hiemit den besten Dank abstatte. Die Untersuchung der Gerbsäure dieser Eichenrinde nahm jedoch einen andern Verlauf als den gewünschten, indem eine Gerbsäure resultirte, welche durch Eisenchlorid grün gefärbt² wurde und bei der

¹ Vergl. Ferd. Tiemann und W. Will Berl. Ber. XIV, S. 961.

² Der weingeistige Auszug dieser Rinde wurde durch Fe_2Cl_6 graublau gefärbt, er enthielt Gallussäure und keine Ellagsäure.

Analyse Zahlen lieferte, die der Formel $C_{20}H_{20}O_9$ entsprechen. Letztere zeigt bei dem gleichen Sauerstoffgehalte, wie er der zuerst besprochenen Gerbsäure zukommt, ein Plus von C_3H_4 . Ohne hierauf an dieser Stelle näher einzugehen, will ich vorerst die Darstellung der neuen Gerbsäure, ihre Eigenschaften und ihre Derivate besprechen.

Da die neue Gerbsäure den Essigäther während des Abdestillirens ebenfalls in seine Componenten zu zerlegen im Stande ist, so wählte ich zur Darstellung als Lösungsmittel weingeisthaltigen Äther zum Ausschütteln, welcher jedoch nicht nur die Gerbsäure, sondern auch das Phlobaphen in geringer Menge aufnimmt. Die Darstellung der reinen Gerbsäure wurde auf folgende Weise ausgeführt.

Das gepulverte Rindenparenchym wurde mit 20% Weingeist erschöpft und dem filtrirten Auszuge so viel Äthyläther zugesetzt, dass über jenem nach dem Umschütteln eine mehrere Centimeter hohe Ätherschicht zu stehen kam. Letztere wurde abgehoben und der Äther abdestillirt. Diese Operation wurde dann so oft wiederholt, bis Benzol, mit einer Probe des Destillationsrückstandes geschüttelt, kein grünes Harz mehr aufnahm. Von jetzt an wurden die Rückstände der Destillation besonders aufbewahrt und die ersteren, welche neben Gerbstoff Harz in Weingeist gelöst enthalten, mit so viel Wasser verdünnt, dass hauptsächlich nur letzteres niederfiel, von welchem dann abfiltrirt wurde. Das noch im Filtrat gelöste Harz wurde durch Ausschütteln mit Benzol gänzlich entfernt und alle harzfreien Lösungen der Gerbsäure vereinigt, welche, um das in kleiner Menge vorhandene Phlobaphen auszuschcheiden, mit gewässertem Weingeist verdünnt und so lange vorsichtig in kleinen Portionen mit Bleiessig versetzt wurden, bis eine abfiltrirte Probe mit dem letzteren einen gelben Niederschlag gab. Das Ganze wurde dann filtrirt und mit weingeisthaltigem Äther so lange ausgeschüttelt, als noch Gerbsäure von diesem gelöst wurde. Nach dem Abdestilliren des Äthers wurde der Rückstand auf dem Wasserbade abgedampft und im Trockenkasten unter häufigem Umrühren die Gerbsäure bei 100—105° vollends ausgetrocknet. Die von der Gerbsäure befreite Flüssigkeit wurde zur Gewinnung des Phlobaphens und der übrigen Bestandtheile des Auszuges abgedampft.

Die so gewonnene Gerbsäure ist ebenfalls amorph, von röthlich weisser Farbe und zeigt dieselbe Löslichkeit in Wasser, Äther und Weingeist, wie die Gerbsäure $C_{17}H_{16}O_9$; gibt, wie diese, in ihrer Lösung mit Bleiacetat einen gelben Niederschlag, unterscheidet sich aber, wie schon oben erwähnt, von derselben dadurch, dass sie in verdünntem Weingeist gelöst auf Zusatz von wenig Eisenchlorid im ersten Momente bläulich grün, kurz darauf intensiv grün gefärbt erscheint. Fügt man eine Sodalösung hinzu, so geht die intensiv grüne Farbe in Blau und auf weiteren Zusatz desselben Reagens in Roth über. Andererseits bildet sich in der durch Eisenchlorid grün gefärbten Flüssigkeit in kurzer Zeit ein grüner Niederschlag, der sich auf ferneren Zusatz von Eisenchlorid wieder löst, wobei die Lösung etwas lichter wird, eine olivengrüne Farbe annimmt, kurz, sich ganz genau wie eine Lösung von Gallussäure gegen Eisenchlorid verhält. Die Gerbsäure fängt bei 124° an, Wasser zu verlieren, schmilzt bei 140° und wird unter Verlust von mehr Wasser wieder fest, wobei sie jetzt braunroth gefärbt erscheint und bei der Verbrennung Zahlen gibt, welche mit denjenigen übereinstimmen, die das aus der Rinde gewonnene Phlobaphen liefert. Überhaupt lassen sich aus der Gerbsäure $C_{20}H_{20}O_9$ die gleiche Anzahl von Anhydriden mit denselben Eigenschaften auf ähnliche Weise darstellen, wie aus der Säure $C_{17}H_{16}O_9$, so dass ich in dieser Hinsicht auf meine frühere Untersuchung verweisen kann. Nur über die Bereitung des zweiten und vierten Anhydrids habe ich Folgendes zu ergänzen. Ersteres wurde hergestellt, indem man das erste Anhydrid (Phlobaphen) mit im Verhältniss von 1:12 verdünnter Schwefelsäure im Wasserbade kochte, den nach dem Erkalten abgeschiedenen braunrothen Niederschlag sammelte, hinreichend auswusch und hierauf mit 90% Weingeist in der Kälte behandelte, welcher das zweite Anhydrid auflöst und das etwa vorhandene vierte Anhydrid ungelöst zurücklässt. Zur Darstellung des vierten Anhydrids löste ich entweder Gerbsäure allein, oder Phlobaphen, oder auch ein Gemisch von beiden in 20% Weingeist und erhitzte die filtrirte Lösung nach Zusatz von so viel verdünnter Schwefelsäure, dass im Ganzen etwa 25% SO_4H_2 in der Lösung enthalten waren, in einer zugeschmolzenen Röhre bei $130-140^\circ$ vier Stunden lang. Nach dem Erkalten bestand der Röhreninhalt jedesmal aus einer wasser-

klaren Flüssigkeit und aus einem braunen Niederschlag, indem aller Gerbstoff in das vierte Anhydrid verwandelt worden war. Nachdem der auf einem Filter gesammelte und ausgewaschene Niederschlag getrocknet wurde, löste er sich weder in Weingeist, selbst nicht in kochendem, noch in Ätzalkalien; daher kann kein Hydroxyl mehr in dieser Substanz vorhanden sein.

In folgender Übersicht sind die Belege der Analysen von der Gerbsäure und ihrer vier Anhydriden aufgezeichnet. Man ersieht daraus, dass sich die gefundenen Zahlen denjenigen der Formel $C_{20}H_{20}O_9$ viel besser anpassen, als den aus der Formel $C_{20}H_{22}O_9$ berechneten, mit welchen namentlich die gefundenen Zahlen für Wasserstoff differiren.

Gerbsäure:

I.	0.2543 Grm.	lieferten	0.5521 Grm. CO_2	und	0.1159 Grm. H_2O .
II.	0.2330	" "	0.5028	" "	0.1034
III.	0.3006	" "	0.6565	" "	0.1365

Die Substanz wurde jedesmal bei 100—105° getrocknet.

	Berechnet für $C_{20}H_{22}O_9$	Gefunden			Berechnet für $C_{20}H_{20}O_9$
		I	II	III	
C	59.11	59.21	59.10	59.56	59.40
H	5.42	5.06	4.95	4.96	4.96

Erstes Anhydrid (Phlobaphen):

I.	0.2442 Grm.	lieferten	0.5440 Grm. CO_2	und	0.1101 Grm. H_2O .
II.	0.2626	" "	0.5842	" "	0.1190
III.	0.2780	" "	0.6170	" "	0.1255

I. Aus der Rinde bereitetes Phlobaphen, bei 120—125° getrocknet.

II. Ebenfalls so gewonnen und getrocknet.

III. Aus bei 139—140° getrockneter Gerbsäure.

	Berechnet für $C_{40}H_{42}O_{17}$	Gefunden			Berechnet für $C_{40}H_{38}O_{17}$
		I	II	III	
C	60.46	60.75	60.66	60.53	60.76
H	5.28	5.00	5.03	5.01	4.80

Zweites Anhydrid:

I. 0·2191 Grm. lieferten 0·4972 Grm. CO₂ und 0·0950 Grm. H₂O.
 II. 0·2340 „ „ 0·5326 „ „ „ 0·0975 „ „

Die nach der oben erwähnten Vorschrift bereitete Substanz wurde bei 125° ungefähr getrocknet.

	Berechnet für <u>C₄₀H₄₀O₁₆</u>	Gefunden		Berechnet für <u>C₄₀H₃₆O₁₆</u>
		I	II	
C....	61·86	61·96	62·07	62·18
H....	5·15	4·81	4·63	4·66

Drittes Anhydrid:

I. 0·1715 Grm. lieferten 0·3993 Grm. CO₂ und 0·0723 Grm. H₂O.
 II. 0·2366 „ „ 0·5530 „ „ „ 0·1014 „ „

Die Substanz wurde in beiden Fällen durch Kochen von anhydridfreier Gerbsäure mit verdünnter Schwefelsäure dargestellt und bei 125—130° getrocknet.

	Berechnet für <u>C₄₀H₃₈O₁₅</u>	Gefunden		Berechnet für <u>C₄₀H₃₄O₁₅</u>
		I	II	
C....	63·32	63·49	63·74	63·66
H....	5·02	4·62	4·76	4·50

Viertes Anhydrid:

I. 0·2103 Grm. lieferten 0·5006 Grm. CO₂ und 0·0804 Grm. H₂O.
 II. 0·2365 „ „ 0·5653 „ „ „ 0·0928 „ „

Die Substanz, nach der oben mitgetheilten Vorschrift bereitet, wurde bei 125—130° getrocknet.

	Berechnet für <u>C₄₀H₃₆O₁₄</u>	Gefunden		Berechnet für <u>C₄₀H₃₂O₁₄</u>
		I	II	
C....	64·86	64·92	65·19	65·22
H....	4·86	4·25	4·36	4·34

10 Grm. Gerbsäure wurden mit Salzsäure von 1·10 spec. Gew. in einer zugeschmolzenen Röhre bei 130° fünf Stunden lang erhitzt. Nach dem Erkalten bemerkte man beim Aufblasen der Rohrspitze einen geringen Druck und das ausströmende Gas brannte mit grün gesäumter Flamme. Der Druck und die Menge des ausströmenden Gases waren in diesem Falle relativ geringer, als bei der gleichen Behandlung der Gerbsäure $C_{17}H_{16}O_9$. Als hierauf das erste Anhydrid mit Salzsäure von der gleichen Concentration, wie im vorhergehenden Versuche, im Rohre erhitzt wurde, so zeigte sich negativer Druck beim Aufblasen, so dass die Röhre durch Abbrechen der Spitze geöffnet werden musste. Ich schliesse aus diesen zwei Versuchen, dass die Gerbsäure eine oder mehrere Alkyloxygruppen enthält und dass bei der gleichen Behandlung des Anhydrids kein Alkylchlorid gebildet wird. Letzteres steht im Einklange mit einer Beobachtung, die ich schon in meiner früheren Untersuchung in dieser Hinsicht machte.

Es wurden ferner 90 Grm. Gerbsäure, je 10 Grm. in einer Röhre, mit verdünnter Schwefelsäure (1 : 12) unter Druck bei 130—140° erhitzt. Nach dem Öffnen der Röhren wurde der Inhalt, bestehend aus einer rothgefärbten Flüssigkeit und einer grossen Menge ungelöster Anhydride, filtrirt und das Filtrat mit Äther ausgeschüttelt. Die rothgefärbte Ätherlösung hinterliess einen Rückstand, in welchem neben amorphem Anhydrid Krystalle zu erkennen waren, welche nach mehrmaligem Umkrystallisiren aus Wasser ziemlich farblos erhalten wurden, aber in sehr geringer Quantität, die zu einer Analyse nicht hinreichte. Ich kann von diesen Krystallen nur so viel mittheilen, dass ihre wässrige Lösung durch Eisenchlorid schwarzblau gefällt wurde, überhaupt sich gegen dieses Reagens genau so verhielt, wie eine Gallussäurelösung.¹

Bei der trockenen Destillation des Phlobaphens, 1 $\frac{1}{2}$ Kilo, wurden ungefähr 4 Grm. reines Brenzkatechin, 800 Grm. Kohle und 2·5 CC. eines in Kaliumhydratlösung unlöslichen Öls gewonnen, welches einen an ein Terpen erinnernden, unangenehmen Geruch hatte und 72·46% C, 7·11% H enthielt. Diese Zahlen

¹ Ich will hier speciell auf die Verschiedenheit aufmerksam machen in der Wirkung concentrirter Schwefelsäure in alkoholischer Lösung (vide pag. 152—153) und verdünnter in wässriger Lösung.

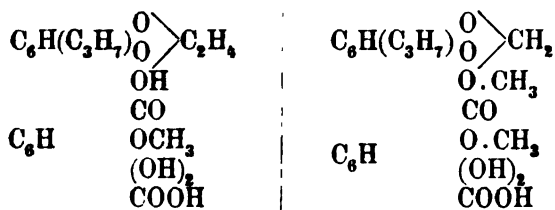
zeigen an, dass hier kein Phenoläther vorliegt. Als das Öl mit übermangansaurem Kali im Wasserbade oxydirt wurde, erhielt man ein Product vom Ansehen eines amorphen Harzes. In Folge dieses Resultates bin ich überzeugt, dass das Öl mit dem Gerbstoff durchaus nicht im Zusammenhange steht, sondern vom Terpenharz herkommt, welches dem der trockenen Destillation unterworfenen Phlobaphen beigemischt war.

Kaliumhydrat färbt eine gelb gefärbte Lösung von Gerbsäure in sehr verdünntem Weingeist bei gewöhnlicher Temperatur allmählig roth bis dunkelroth, wahrscheinlich in Folge von Aufnahme von Sauerstoff aus der Luft, denn die Färbung geht von der Oberfläche der Lösung aus. Kocht man eine wässrige Gerbsäurelösung in Kaliumhydrat anhaltend, so entsteht nach Zusatz von verdünnter Schwefelsäure ein rother Niederschlag von Anhydrid und die davon abfiltrirte Flüssigkeit gibt an Äther keine Spur einer krystallisirten Substanz ab.

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass beide der untersuchten Gerbsäuren gleiche Eigenschaften besitzen bis auf die Reaction mit Eisenchlorid. Die nämliche Anzahl von Sauerstoffatomen in beiden Formeln deutet darauf hin, dass der Gerbsäure $C_{20}H_{20}O_9$, ebenfalls die durch Vereinigung zweier Gallussäuremoleküle entstehende Verbindung $C_{14}H_{10}O_9$, Gallylgallussäure, die, wie oben erwähnt, sieben Hydroxyle enthält, zu Grunde liegt. Die Zahl und das relative Verhältniss der übrigen Kohlenstoff- und Wasserstoffatome lassen schliessen, dass sie Alkylgruppen angehören, welche zum Theil den Wasserstoff der Hydroxyle, zum Theil vielleicht auch Wasserstoff in einem der vorhandenen Benzolkerne substituiren. Ja, wenn die Formel $C_{20}H_{20}O_9$ als feststehend angenommen wird — woran nach den bei den Analysen gefundenen Zahlen kein Zweifel übrig bleiben kann — so muss sich unter den substituirenden Gruppen ein Rest C_nH_{2n} befinden.

Die Frage, welche Kohlenwasserstoffreste zur Substituierung dienen, welche Stellung jedem derselben zukommt, lässt sich zur Zeit nicht beantworten, zumal beide Gerbsäuren, wie oben erwähnt, der trockenen Destillation unterworfen — wenigstens bei den Bedingungen, die im Laboratorium gegeben sind — unter Entwicklung von uncondensirbaren Gasen (bis auf die Bildung von wenig Brenzkatechin) gänzlich verkohlen.

Trotzdem drängt sich die Frage vor, ob nicht die aus dem Holz-Öle und Theer gewonnenen Phenole und Phenoläther ihre Existenz den Gerbsäuren verdanken, welche in den bei der Holz-essigfabrikation der trockenen Destillation unterworfenen Holzarten enthalten sind. Es wäre möglich, dass bei dieser Destillation Verhältnisse obwalten, bei denen die Phenole und Phenoläther, welche in den, wahrscheinlich auf mannigfaltige Weise substituirt vorkommenden Gallylgallussäuren präexistiren, wenn auch nur zum Theil, conservirt blieben. Unter dieser Voraussetzung könnte man sich z. B. die aus dem Holztheer abgeschiedenen Propylgallussäureäther von der Gerbsäure $C_{20}H_{20}O_9$ herstammend denken, wenn letzterer etwa eine der folgenden Constitutionsformeln zukommen würde:



Über die Abstammung der Eichenrinden, aus denen die besprochenen zwei Gerbsäuren dargestellt wurden, bin ich nicht im Stande, Authentisches anzugeben.

Darlegung der in den „Hilfstafeln für Chronologie“ zur Tabulirung der jüdischen Zeitrechnung angewandten Methode.

Von Robert Schram,

Observator der k. k. österreichischen Gradmessung.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1883.)

In meinen „Hilfstafeln für Chronologie“ (Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Band XLV) habe ich die Tafeln für die Zeitrechnung der Juden auf diejenige tabellarische Form gebracht, welche ich in der angeführten Abhandlung auch allen anderen Zeitrechnungen zu Grunde legte. Während aber bei den anderen, weit einfacher gebauten Zeitrechnungen die Anwendung dieser Form auf keine grossen Schwierigkeiten stiess und auch die Richtigkeit der Anordnung bei den meisten derselben leicht zu prüfen ist, gestalten sich die Verhältnisse bei der so ausserordentlich complicirten jüdischen Rechnungsweise wesentlich anders. Es mussten ziemlich umständliche Rechnungen und Transformationen durchgeführt werden, um diese Zeitrechnung in den einmal gewählten Rahmen hineinzupassen, und es ist daher auch die Richtigkeit der erhaltenen Resultate nicht so leicht controlirbar wie bei anderen Aeren. Es schien mir nicht passend, in die „Hilfstafeln für Chronologie“, welche ja doch in erster Linie einem praktischen Bedürfnisse, dem der Verwandlung von Daten verschiedener Aeren in einander, dienen sollten, eine längere Auseinandersetzung über die Art und Weise der Berechnung einer einzelnen der dort gegebenen Tafeln aufzunehmen, es ist aber doch nothwendig, die Richtigkeit der in den Tafeln durchgeführten Tabulirung nachzuweisen, und ich will daher hier zeigen, wie sich die dort gewählte Form direct aus der von Gauss gegebenen Formel für das Osterfest der Juden ableiten lässt.

Die Osterformel von Gauss lautet (Zach's Monatliche Correspondenz, Band V, pag. 435—437):

„Der 15 Nisan des jüdischen Jahres A , an welchem die Juden ihr Osterfest feiern, fällt in das Jahr $A - 3760 = B$ der christlichen Zeitrechnung; zur Bestimmung des entsprechenden Monatstages dient folgende rein arithmetische Regel. Man dividire $12A + 17$ oder, was hier einerlei ist, $12B + 12$ mit 19 und nenne den Rest a , ferner dividire man A oder B durch 4 und setze den Rest $= b$. Man berechne den Werth

$$\begin{array}{rcl}
 \text{von } 32,0440932 & = 32 \frac{4343}{98496} & \text{oder von } 20,0955877 \\
 + 1,5542418a & = 1 \frac{272953}{492480} a & + 1,5542418a \\
 + 0,25b & = \frac{1}{4} b & + 0,25b \\
 - 0,003177794A & = \frac{313}{98496} A & - 0,003177794B
 \end{array}$$

und setze ihn $= M + m$, so dass M die ganze Zahl, m den Decimalbruch bedeute. Endlich dividire man $M + 3A + 5b + 5$ oder $M + 3B + 5b + 1$ durch 7 und setze den Rest $= c$. Nun hat man folgende vier Fälle zu unterscheiden:

1. Ist $c = 2$ oder 4 oder 6, so fällt Ostern den $M + 1$. März alten Styls, wofür man den $M - 30$. April schreibt, wenn $M > 30$ wegen Adu.

2. Ist $c = 1$, zugleich $a > 6$ und ausserdem $m \leq 0,63287037$ ¹ so fällt Ostern den $M + 2$. März alten Styls wegen Gaträd.

3. Ist $c = 0$ zugleich $a > 11$ und auch $m \leq 0,89772376$ ² so ist Ostern den $M + 1$. März alten Styls wegen Betutakpat.

4. In allen übrigen Fällen ist Ostern den M^{ten} März alten Styls.

$$^1 0,63287037 = \frac{311676}{492480} = \frac{1367}{2160}$$

$$^2 0,89772376 = \frac{442111}{492480} = \frac{23269}{25920}$$

Anmerkung I. Diese Vorschriften dienen zugleich zur Bestimmung des ersten Tischri oder Neujahrs, welches alle Zeit 163 Tage nach Ostern des vorhergehenden Jahres fällt.

Anmerkung II. Das Jahr A ist ein gemeines Jahr (von 12 Monaten), wenn $a < 12$, hingegen ein Schaltjahr von 13 Monaten, wenn $a > 11$.¹

Will man also den Tag des 0^{ten} Tischri im Jahre A der Juden finden, so wird man Ostern für das Jahr $A - 1$ berechnen und 162 Tage hinzufügen. Man wird also setzen:

$$32 \frac{4343}{98496} + 1 \frac{272953}{492480} \left(\frac{12(A-1)+17}{19} \right)_r + \frac{1}{4} \left(\frac{A-1}{4} \right)_r - \frac{313}{98496} (A-1) + 162 = M + m \quad 1)$$

und

$$c = \left(\frac{M - 162 + 3(A-1) + 5 \left(\frac{A-1}{4} \right)_r + 5}{7} \right)_r \quad 2)$$

wo wieder M , nach den vorhergehenden Regeln eventuell um 1 oder 2 vermehrt, den Tag des März² im Jahre $(A-1) - 3760$ der julianisch-christlichen Zeitrechnung geben wird, auf welchen der 0^{te} Tischri des jüdischen Jahres A fällt.

Nun entspricht aber der 0^{te} März des Jahres $- 3760$ dem Tage 347777 der julianischen Periode, also der M ^{te} März des Jahres $- 3760$ dem Tage $347777 + M$ der julianischen Periode und endlich der M ^{te} März des Jahres $- 3760 + (A-1)$ dem Tage der julianischen Periode

$$\mathfrak{X} = 347777 + M + 365 \frac{1}{4} (A-1) - \frac{1}{4} \left(\frac{A-1}{4} \right)_r.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt sofort

$$M = \mathfrak{X} - 347777 - 365 \frac{1}{4} (A-1) + \frac{1}{4} \left(\frac{A-1}{4} \right)_r. \quad 3)$$

¹ Einen Beweis für diese Gaussische Osterformel gibt Cisa de Crécy in der Correspond. astronom., Vol. I, pag. 556.

² Der Tag wird natürlich einem ganz anderen Monate als dem März angehören, aber man kann ja z. B. den 16. September auch den 200^{ten} März nennen.

Setzt man diesen Werth in 1) ein und schreibt zugleich der Gleichförmigkeit wegen statt m den Buchstaben t , so erhält man:

$$32 \frac{4343}{98496} + 1 \frac{272953}{492480} \left(\frac{12A+5}{19} \right)_r + \frac{1}{4} \left(\frac{A-1}{4} \right)_r - \frac{313}{98496} A + \frac{313}{98496} + 162 = \mathfrak{X} - 347777 - 365 \frac{1}{4} A + 365 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{A-1}{4} \right)_r + t$$

oder zusammengezogen

$$347605 \frac{78528}{98496} + 1 \frac{272953}{492480} \left(\frac{12A+5}{19} \right)_r + 365 \frac{24311}{98496} A = \mathfrak{X} + t. \quad 4)$$

Setzt man ebenso den Werth aus 3) in 2) ein, so erhält man:

$$c = \left(\frac{\mathfrak{X} - 347777 - 365 \frac{1}{4} (A-1) + \frac{1}{4} \left(\frac{A-1}{4} \right)_r - 162 + 3(A-1) + 5 \left(\frac{A-1}{4} \right)_r + 5}{7} \right)_r$$

oder wenn man die Vielfachen von 7 fortlässt

$$c = \left(\frac{\mathfrak{X} - 3 - 1 \frac{1}{4} (A-1) + \frac{1}{4} \left(\frac{A-1}{4} \right)_r - 1 + 3(A-1) + 5 \left(\frac{A-1}{4} \right)_r + 5}{7} \right)_r$$

oder zusammengezogen

$$c = \left(\frac{\mathfrak{X} + 1 + 1 \frac{3}{4} (A-1) + 5 \frac{1}{4} \left(\frac{A-1}{4} \right)_r}{7} \right)_r;$$

setzt man jetzt $A - 1 = 4p + q$, so erhält man

$$c = \left(\frac{\mathfrak{X} + 1 + 7p + 1 \frac{3}{4} q + 5 \frac{1}{4} q}{7} \right)_r = \left(\frac{\mathfrak{X} + 1 + 7p + 7q}{7} \right)_r$$

oder endlich

$$c = \left(\frac{\mathfrak{X} + 1}{7} \right)_r \quad 5) ^1$$

¹ Diese Formel hätte man auch aus folgender Betrachtung ableiten können: In der Gaussischen Formel stellt c , wenn man mit 0 Montag, mit 1 Dienstag u. s. w. bezeichnet, den Wochentag des $(M + 2)$ ten März dar; Sitzb. d. mathem.-naturw. Cl. LXXXVIII. Bd. II. Abth. 11

An Stelle von $a = \left(\frac{12A+17}{19}\right)_r$ ist jetzt der Werth $\left(\frac{12A+5}{19}\right)_r$ getreten; die Anmerkung II wird sich also dahin abändern, dass A ein Gemeinjahr ist, wenn $\left(\frac{12A+5}{19}\right)_r > 6$, dagegen ein Schaltjahr, wenn $\left(\frac{12A+5}{19}\right)_r < 7$. Trägt man nun die so entwickelten Formeln zusammen, so erhält man folgende Formel für den Anfang des jüdischen Jahres A :

Setzt man $\left(\frac{12A+5}{19}\right)_r = a$, ferner

$$347605 \frac{78528}{98496} + 365 \frac{24311}{98496} A + 1 \frac{272953}{492480} a = \mathfrak{X} + t,$$

wo \mathfrak{X} die ganze Zahl, t den Bruch bezeichnet, und endlich

$$c = \left(\frac{\mathfrak{X} + 1}{7}\right)_r,$$

so fällt der 0^{te} Tischri des Jahres A der Juden

für $c = 2, 4$ oder 6	auf den Tag	$\mathfrak{X} + 1$	}	der julianischen Periode.
$n \ c = 1; a > 6; t \leq \frac{311676}{492480}$	" " "	$\mathfrak{X} + 2$		
$n \ c = 0; a > 11; t \leq \frac{442111}{492480}$	" " "	$\mathfrak{X} + 1$		
n alle anderen Fälle	" " "	\mathfrak{X}		

Das Jahr A ist ein Schaltjahr, wenn $a < 7$, ein Gemeinjahr, wenn $a > 6$ ist.

Wenn man die Grösse a betrachtet, so ergeben sich zunächst drei Gruppen, nämlich $a < 7$, $6 < a < 12$ und $a > 11$; es ist aber, um die Art des Jahres zu bestimmen, auch nothwendig, den Anfang des nächstfolgenden Jahres zu kennen, man wird also zu jeder dieser Gruppen auch die für das folgende Jahr $A + 1$ geltende Grösse

da $M = \mathfrak{X} - 162$, so wird der Wochentag des $(M + 2)$ ten März gleich dem Wochentage des Tages $\mathfrak{X} - 160$ oder $\mathfrak{X} - 6$, oder endlich auch $\mathfrak{X} + 1$ sein, und dieser ist bei der gewählten Bezeichnung (0 Montag, 1 Dienstag u. s. w.) einfach $\left(\frac{\mathfrak{X} + 1}{7}\right)_r$. Doch wurde die rein arithmetische Ableitung vorgezogen.

$a' = \left(\frac{12(A+1)+5}{19} \right)_r$ hinzuschreiben und erhält auf diese Weise

die drei Gruppen:

a	a'	a	a'	a	a'
0	12	7	0	12	5
1	13	8	1	13	6
2	14	9	2	14	7
3	15	10	3	15	8
4	16	11	4	16	9
5	17			17	10
6	18			18	11

In der ersten Gruppe ist $a < 7$, $a' > 11$, in der zweiten Gruppe ist $6 < a < 12$, $a' < 7$, in der dritten Gruppe ist $a > 11$, dagegen a' theils < 7 , theils > 6 , diese Gruppe muss daher noch getheilt werden, und man erhält so folgende vier Gruppen:

I		II		III		IV	
a	a'	a	a'	a	a'	a	a'
0	12	7	0	12	5	14	7
1	13	8	1	13	6	15	8
2	14	9	2			16	9
3	15	10	3			17	10
4	16	11	4			18	11
5	17						
6	18						

In der ersten Gruppe, welche die Schaltjahre enthält, ist $t' = a + 12$ und daher

$$\mathfrak{X}' + t' = \mathfrak{X} + t + 365 \frac{24311}{98496} + 1 \frac{272953}{492480} \times 12$$

der

$$\mathfrak{X}' + t' = \mathfrak{X} + t + 383 \frac{442111}{492480}.$$

In den drei anderen Gruppen dagegen ist $a' = a - 7$, daher

$$\mathfrak{X}' + t' = \mathfrak{X} + t + 365 \frac{24311}{98496} - 1 \frac{272953}{492480} \times 7$$

ler

$$\mathfrak{X}' + t' = \mathfrak{X} + t + 354 \frac{180804}{492480}.$$

Jede der vier Gruppen zerfällt nun wieder in mehrere Abtheilungen nach der Grösse von t oder t' , welche auf die Bestimmung des Anfangstages Einfluss nimmt. Und zwar wird sich diese Zerfällung folgendermassen gestalten. In der ersten Gruppe kommt es wegen $a < 7$ auf die Grösse von t nicht an, dagegen müssen wegen $a' > 11$ für t' die Grenzen $\frac{311676}{492480}$ und $\frac{442111}{492480}$ bestimmt werden; man hat also die drei Fälle:

$$I\alpha: t \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{50369}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 383; t' \text{ von } \frac{442111}{492480} \text{ bis } 1; \\ c' = c + 5.$$

$$I\beta: t \text{ von } \frac{50369}{492480} \text{ bis } \frac{362045}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 384; t' \text{ von } 0 \text{ bis } \\ \frac{311676}{492480}; c' = c + 6$$

$$I\gamma: t \text{ von } \frac{362045}{492480} \text{ bis } 1; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 384; t' \text{ von } \frac{311676}{492480} \text{ bis } \\ \frac{442111}{492480}; c' = c + 6.$$

In der zweiten Gruppe ist wegen $6 < a < 12$ für t nur die Grenze $\frac{311676}{492480}$, für t' aber wegen $a < 7$ gar keine Grenze in Betracht zu ziehen und man erhält die zwei Fälle:

$$II\alpha: t \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{311676}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 354; t' \text{ von } \frac{180804}{492480} \text{ bis } 1; \\ c' = c + 4$$

$$II\beta: t \text{ von } \frac{311676}{492480} \text{ bis } 1; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 355; t' \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{180804}{492480}; \\ c' = c + 5.$$

In der dritten Gruppe sind wegen $a > 11$ für t die Grenzen $\frac{311676}{492480}$ und $\frac{442111}{492480}$, für t' aber wegen $a' < 7$ gar keine Grenzen zu bestimmen, und man erhält die drei Fälle:

$$III\alpha: t \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{311676}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 354; t' \text{ von } \frac{180804}{492480} \text{ bis } 1; \\ c' = c + 4.$$

$$\text{III}\beta: t \text{ von } \frac{311676}{492480} \text{ bis } \frac{442111}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 355; t' \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{130435}{492480}; c' = c + 5;$$

$$\text{III}\gamma: t \text{ von } \frac{442111}{492480} \text{ bis } 1; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 355; t' \text{ von } \frac{130435}{492480} \text{ bis } \frac{180804}{492480}; c' = c + 5.$$

In der vierten Gruppe endlich hat man wegen $a > 12$ für t die Grenzen $\frac{311676}{492480}$ und $\frac{442111}{492480}$, für t' aber wegen $6 < a < 12$ nur die Grenze $\frac{311676}{492480}$ zu bestimmen, und erhält so die vier Fälle:

$$\text{IV}\alpha: t \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{130872}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 354; t' \text{ von } \frac{180804}{492480} \text{ bis } \frac{311676}{492480}; c' = c + 4;$$

$$\text{IV}\beta: t \text{ von } \frac{130872}{492480} \text{ bis } \frac{311676}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 354; t' \text{ von } \frac{311676}{492480} \text{ bis } 1; c' = c + 4;$$

$$\text{IV}\gamma: t \text{ von } \frac{311676}{492480} \text{ bis } \frac{442111}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 355; t' \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{130435}{492480}; c' = c + 5;$$

$$\text{IV}\delta: t \text{ von } \frac{442111}{492480} \text{ bis } 1; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 355; t' \text{ von } \frac{130435}{492480} \text{ bis } \frac{180804}{492480}; c' = c + 5.$$

Wenn man jetzt in jeder dieser Theilgruppen alle Werthe von c einsetzt und mit Rücksicht auf c , a und t den Anfangstag des Jahres A , mit Rücksicht auf c' , a' und t' den Anfangstag des Jahres $A + 1$ bestimmt, erhält man für alle möglichen Fälle die Anfangstage und die Dauer des Jahres. Man wird also erhalten für:

Jede der vier Gruppen zerfällt nun wieder in mehrere Abtheilungen nach der Grösse von t oder t' , welche auf die Bestimmung des Anfangstages Einfluss nimmt. Und zwar wird sich diese Zerfällung folgendermassen gestalten. In der ersten Gruppe kommt es wegen $a < 7$ auf die Grösse von t nicht an, dagegen müssen wegen $a' > 11$ für t' die Grenzen $\frac{311676}{492480}$ und $\frac{442111}{492480}$ bestimmt werden; man hat also die drei Fälle:

$$\text{I}\alpha: \quad t \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{50369}{492480}; \quad \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 383; \quad t' \text{ von } \frac{442111}{492480} \text{ bis } 1; \\ c' = c + 5.$$

$$\text{I}\beta: \quad t \text{ von } \frac{50369}{492480} \text{ bis } \frac{362045}{492480}; \quad \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 384; \quad t' \text{ von } 0 \text{ bis } \\ \frac{311676}{492480}; \quad c' = c + 6$$

$$\text{I}\gamma: \quad t \text{ von } \frac{362045}{492480} \text{ bis } 1; \quad \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 384; \quad t' \text{ von } \frac{311676}{492480} \text{ bis } \\ \frac{442111}{492480}; \quad c' = c + 6.$$

In der zweiten Gruppe ist wegen $6 < a < 12$ für t nur die Grenze $\frac{311676}{492480}$, für t' aber wegen $a < 7$ gar keine Grenze in Betracht zu ziehen und man erhält die zwei Fälle:

$$\text{II}\alpha: \quad t \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{311676}{492480}; \quad \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 354; \quad t' \text{ von } \frac{180804}{492480} \text{ bis } 1; \\ c' = c + 4$$

$$\text{II}\beta: \quad t \text{ von } \frac{311676}{492480} \text{ bis } 1; \quad \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 355; \quad t' \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{180804}{492480}; \\ c' = c + 5.$$

In der dritten Gruppe sind wegen $a > 11$ für t die Grenzen $\frac{311676}{492480}$ und $\frac{442111}{492480}$, für t' aber wegen $a' < 7$ gar keine Grenzen zu bestimmen, und man erhält die drei Fälle:

$$\text{III}\alpha: \quad t \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{311676}{492480}; \quad \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 354; \quad t' \text{ von } \frac{180804}{492480} \text{ bis } 1; \\ c' = c + 4.$$

$$\text{III}\beta: t \text{ von } \frac{311676}{492480} \text{ bis } \frac{442111}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 355; t' \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{130435}{492480}; c' = c + 5;$$

$$\text{III}\gamma: t \text{ von } \frac{442111}{492480} \text{ bis } 1; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 355; t' \text{ von } \frac{130435}{492480} \text{ bis } \frac{180804}{492480}; c' = c + 5.$$

In der vierten Gruppe endlich hat man wegen $a > 12$ für t die Grenzen $\frac{311676}{492480}$ und $\frac{442111}{492480}$, für t' aber wegen $6 < a < 12$ nur die Grenze $\frac{311676}{492480}$ zu bestimmen, und erhält so die vier Fälle:

$$\text{IV}\alpha: t \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{130872}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 354; t' \text{ von } \frac{180804}{492480} \text{ bis } \frac{311676}{492480}; c' = c + 4;$$

$$\text{IV}\beta: t \text{ von } \frac{130872}{492480} \text{ bis } \frac{311676}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 354; t' \text{ von } \frac{311676}{492480} \text{ bis } 1; c' = c + 4;$$

$$\text{IV}\gamma: t \text{ von } \frac{311676}{492480} \text{ bis } \frac{442111}{492480}; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 355; t' \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{130435}{492480}; c' = c + 5;$$

$$\text{IV}\delta: t \text{ von } \frac{442111}{492480} \text{ bis } 1; \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} + 355; t' \text{ von } \frac{130435}{492480} \text{ bis } \frac{180804}{492480}; c' = c + 5.$$

Wenn man jetzt in jeder dieser Theilgruppen alle Werthe von c einsetzt und mit Rücksicht auf c , a und t den Anfangstag des Jahres Δ , mit Rücksicht auf c' , a' und t' den Anfangstag des Jahres $\Delta + 1$ bestimmt, erhält man für alle möglichen Fälle die Anfangstage und die Dauer des Jahres. Man wird also erhalten für:

Ia.

	0 Tischri des	0 Tischri des	
	Jahres A	Jahres A + 1	des Daher Länge
	Jahres A		des Jahres A
c=0 \mathfrak{X} $\mathfrak{X} + 383$ $\mathfrak{X} + 383$
=1 \mathfrak{X} $\mathfrak{X} + 384$ $\mathfrak{X} + 384$
=2 $\mathfrak{X} + 1$ $\mathfrak{X} + 384$ $\mathfrak{X} + 383$
		$\frac{442111}{492480}$	
		$a' > 11; t' \leq$	
=3 \mathfrak{X} $\mathfrak{X} + 385$ $\mathfrak{X} + 385$
		$\frac{311676}{492480}$	
		$a > 6; t' >$	
=4 $\mathfrak{X} + 1$ $\mathfrak{X} + 384$ $\mathfrak{X} + 383$
=5 \mathfrak{X} $\mathfrak{X} + 383$ $\mathfrak{X} + 383$
=6 $\mathfrak{X} + 1$ $\mathfrak{X} + 384$ $\mathfrak{X} + 383$

Iß.

 \mathfrak{X} $\mathfrak{X} + 385$ $\mathfrak{X} + 385$
c=0 \mathfrak{X} $\mathfrak{X} + 384$ $\mathfrak{X} + 384$
=1 $\mathfrak{X} + 1$ $\mathfrak{X} + 384$ $\mathfrak{X} + 383$
=2 \mathfrak{X} $\mathfrak{X} + 385$ $\mathfrak{X} + 385$
=3 $\mathfrak{X} + 1$ $\mathfrak{X} + 384$ $\mathfrak{X} + 383$
=4 \mathfrak{X} $\mathfrak{X} + 385$ $\mathfrak{X} + 385$
=5 $\mathfrak{X} + 1$ $\mathfrak{X} + 384$ $\mathfrak{X} + 383$
=6 \mathfrak{X} $\mathfrak{X} + 385$ $\mathfrak{X} + 385$
 $\mathfrak{X} + 1$ $\mathfrak{X} + 384$ $\mathfrak{X} + 383$

I γ.

	0 Tischnr des Jahres A		0 Tischnr des Jahres A+1	Daher Länge des Jahres A
c=0
=1
=2
=3
=4
=5
=6

c'=6
=0
=1; a' > 6; t' ≧
=2
=3
=4
=5

311676
492480

II α.

c=0
=1
=2
=3
=4
=5
=6

c'=4
=5
=6
=0
=1
=2
=3

II β .

$c=0$	\mathfrak{X}	$c'=5$	$\mathfrak{X}+355$	355
$=1; a>6; t \leq 311676$	$\mathfrak{X}+2$	$=6$	$\mathfrak{X}+356$	354
$=2$	$\mathfrak{X}+1$	$=0$	$\mathfrak{X}+355$	354
$=3$	\mathfrak{X}	$=1$	$\mathfrak{X}+355$	355
$=4$	$\mathfrak{X}+1$	$=2$	$\mathfrak{X}+356$	355
$=5$	\mathfrak{X}	$=3$	$\mathfrak{X}+355$	355
$=6$	$\mathfrak{X}+1$	$=4$	$\mathfrak{X}+356$	355

III α (gleich mit II α).

$c=0$	\mathfrak{X}	$c'=4$	$\mathfrak{X}+355$	355
$=1$	\mathfrak{X}	$=5$	$\mathfrak{X}+354$	354
$=2$	$\mathfrak{X}+1$	$=6$	$\mathfrak{X}+355$	354
$=3$	\mathfrak{X}	$=0$	$\mathfrak{X}+354$	354
$=4$	$\mathfrak{X}+1$	$=1$	$\mathfrak{X}+354$	353
$=5$	\mathfrak{X}	$=2$	$\mathfrak{X}+355$	355
$=6$	$\mathfrak{X}+1$	$=3$	$\mathfrak{X}+354$	353

III β (gleich mit II β).

$c=0$	\mathfrak{X}	$c'=5$	$\mathfrak{X}+355$	355
$=1; a>6; t \leq 311676$	$\mathfrak{X}+2$	$=6$	$\mathfrak{X}+356$	354
$=2$	$\mathfrak{X}+1$			

0 Tischr. des Jahres A	0 Tischr. des Jahres $A+1$	Daher Länge des Jahres A
$c=2$	$\mathfrak{X}+1$	$\mathfrak{X}+355$
$=3$	\mathfrak{X}	$\mathfrak{X}+355$
$=4$	$\mathfrak{X}+1$	$\mathfrak{X}+356$
$=5$	\mathfrak{X}	$\mathfrak{X}+355$
$=6$	$\mathfrak{X}+1$	$\mathfrak{X}+356$

III γ .

$c=0; a > 11; t \leq \frac{442111}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	$\mathfrak{X}+355$	354
$=1; a > 6; t > \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+2$	$\mathfrak{X}+356$	354
$=2$	$\mathfrak{X}+1$	$\mathfrak{X}+355$	354
$=3$	\mathfrak{X}	$\mathfrak{X}+355$	355
$=4$	$\mathfrak{X}+1$	$\mathfrak{X}+356$	355
$=5$	\mathfrak{X}	$\mathfrak{X}+355$	355
$=6$	$\mathfrak{X}+1$	$\mathfrak{X}+356$	355

IV α .

$c=0$	\mathfrak{X}	$\mathfrak{X}+355$	355
$=1$	\mathfrak{X}	$\mathfrak{X}+354$	354

I.	Gattung des Jahres Oter Tischri des Jahres A	$\frac{50369}{c=0; t < 492480}$ $\frac{362045}{t < 492480}$ $\frac{362045}{t \geq 492480}$
II.	$\frac{311676}{c=0; t < 492480}$ $\frac{311676}{t \geq 492480}$	$\frac{311676}{c=0; t < 492480}$ $\frac{311676}{t \geq 492480}$
III.	$\frac{311676}{c=0; t < 492480}$ $\frac{442111}{t < 492480}$ $\frac{442111}{t \geq 492480}$	$\frac{311676}{c=1; t < 492480}$ $\frac{442111}{t < 492480}$ $\frac{442111}{t \geq 492480}$
IV.	$\frac{130872}{c=0; t < 492480}$ $\frac{311676}{t < 492480}$ $\frac{442111}{t < 492480}$ $\frac{442111}{t \geq 492480}$	$\frac{130872}{c=1; t < 492480}$ $\frac{311676}{t < 492480}$ $\frac{442111}{t < 492480}$ $\frac{442111}{t \geq 492480}$

0 Tischri des Jahres A	Tischri des Jahres A + 1	Daher Länge des Jahres A
= 4	= 2	355
= 5	= 3	355
= 6	= 4	355

IV δ.

$c = 0; a > 11; t \geq \frac{442111}{492480}$	= 5	354
$= 1; a > 6; t > \frac{311676}{492480}$	= 6	354
= 2	= 0	354
= 3	= 1	355
= 4	= 2	355
= 5	= 3	355
= 6	= 4	355

Stellt man nun die Theilresultate für die einzelnen Gruppen zusammen und bezeichnet die Länge des Jahres durch einen Buchstaben, so dass ein Jahr von 383 Tagen durch *M*, von 384 durch *R*, von 385 durch *U*, ferner von 353 durch *m*, von 354 durch *r* und von 355 durch *u* ausgedrückt wird (mangelhaft, regelmässig, überzählig; in Schaltjahren grosse Buchstaben, in Gemein Jahren kleine), so erhält man:

50369	$\mathfrak{X}+1$	M	$c=4; t < \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	m	$c=4; t < \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	m	$c=4; t < \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	m
362045	$\mathfrak{X}+1$	M	$t \leq \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	$c=4; t < \frac{442111}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	$t < \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u
362045	$\mathfrak{X}+1$	M	$t \leq \frac{442111}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	$c=4; t \leq \frac{442111}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	$t < \frac{442111}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u
50369	\mathfrak{X}	M	$c=5; t < \frac{311676}{492480}$	\mathfrak{X}	u	$c=5; t < \frac{311676}{492480}$	\mathfrak{X}	u	$c=5; t < \frac{311676}{492480}$	\mathfrak{X}	u
362045	\mathfrak{X}	U	$t \leq \frac{311676}{492480}$	\mathfrak{X}	u	$c=5; t < \frac{442111}{492480}$	\mathfrak{X}	u	$t < \frac{311676}{492480}$	\mathfrak{X}	u
362045	\mathfrak{X}	U	$t \leq \frac{442111}{492480}$	\mathfrak{X}	u	$c=5; t \leq \frac{442111}{492480}$	\mathfrak{X}	u	$t < \frac{442111}{492480}$	\mathfrak{X}	u
50369	$\mathfrak{X}+1$	M	$c=6; t < \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	m	$c=6; t < \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	m	$c=6; t < \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	m
362045	$\mathfrak{X}+1$	M	$t \leq \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	$c=6; t < \frac{442111}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	$t < \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	m
362045	$\mathfrak{X}+1$	M	$t \leq \frac{442111}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	$c=6; t \leq \frac{442111}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	$t < \frac{442111}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u
442111	$\mathfrak{X}+1$								$t \leq \frac{442111}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u

Viele von den so zusammengestellten Grenzen fallen jetzt aus, da Anfangstag und Art des Jahres öfter in zwei und selbst in drei Intervallen gleich bleiben. Lässt man die überflüssigen Grenzen fort und nimmt als massgebend für Anfangstag und Art des Jahres die Grösse $c+t$, so erhält man endlich die folgende allgemeine Regel für den Beginn und die Art des jüdischen Jahres A :

Setzt man $\left(\frac{12A+5}{19}\right) = a$, ferner $347605 \frac{78528}{98496} + 365 \frac{24311}{98496} A + 1 \frac{272953}{492480} a = \mathfrak{X} + t$, wo \mathfrak{X} die ganze

Zahl, t den Bruch bedeutet und endlich $\left(\frac{\mathfrak{X}+1}{7}\right) = c$, so ist für:

$a < 7$	$6 < a < 12$	$11 < a < 14$	$a > 13$
und für $c+t$ zwischen	0	0	0
der 0 ^{te} Tischri des Jahres A	\mathfrak{X}	\mathfrak{X}	\mathfrak{X}
die Gattung des Jahres	M	u	u
und für $c+t$ zwischen	1	$\frac{442111}{492480}$	$\frac{442111}{492480}$
der 0 ^{te} Tischri des Jahres A	\mathfrak{X}	$\mathfrak{X}+1$	$\mathfrak{X}+1$
die Gattung des Jahres	U	r	r
und für $c+t$ zwischen	$\frac{311676}{492480}$	1	1
der 0 ^{te} Tischri des Jahres A	$\mathfrak{X}+2$	\mathfrak{X}	\mathfrak{X}
die Gattung des Jahres	R	r	r
und für $c+t$ zwischen	2	$\frac{311676}{492480}$	$\frac{311676}{492480}$
der 0 ^{te} Tischri des Jahres A	$\mathfrak{X}+1$	$\mathfrak{X}+1$	\mathfrak{X}
die Gattung des Jahres	M	r	r

$2 \frac{362045}{492480}$									
3	$\mathfrak{X}+1$	U	3	\mathfrak{X}	r	2	$\mathfrak{X}+2$	r	
4	\mathfrak{X}	U	$3 \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	3	$\mathfrak{X}+1$	r	
5	$\mathfrak{X}+1$	M	4	\mathfrak{X}	m	$3 \frac{311676}{492480}$	\mathfrak{X}	r	
	\mathfrak{X}	M	$4 \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	4	\mathfrak{X}	u	
$5 \frac{50369}{492480}$	\mathfrak{X}	U	5	$\mathfrak{X}+1$	u	311676	$\mathfrak{X}+1$	m	
6	$\mathfrak{X}+1$	M	6	\mathfrak{X}	u	$4 \frac{492480}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	
0			$6 \frac{311676}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	m	5	\mathfrak{X}	u	
			0	$\mathfrak{X}+1$	u	6	$\mathfrak{X}+1$	m	
						311676	$\mathfrak{X}+1$		
						$6 \frac{492480}{492480}$	$\mathfrak{X}+1$	u	
						0	$\mathfrak{X}+1$		

Um nun diese Formel zu einer Tabulirung der jüdischen Zeitrechnung nach demselben Principe, welches für die anderen Zeitrechnungen gewählt wurde, benutzen zu können, muss zunächst die Jahreszahl in zwei Theile zerfällt werden, von denen der eine eine Anzahl grösserer Perioden, der zweite die noch übrigbleibenden ein-

zeln Jahre enthält, entsprechend den Tafeln I und II der „Hilfstafeln für Chronologie.“¹ Als Periode wählt man naturgemäss wegen der Grösse $a = \left(\frac{12A+5}{19}\right)_r$ die Zeit von 19 Jahren. Man wird also in die obige Formel statt A den Werth $19n+p$ einsetzen, wodurch $a = \left(\frac{12p+5}{19}\right)_r$ wird, während sowohl $\mathfrak{X}+t$ als auch c in einen periodischen und einen nicht periodischen Theil zerfallen. Man wird dann, wenn gleichzeitig der periodische Theil, um seinen kleinsten Werth auf 0 zu reduciren, um acht vermindert, dagegen der nicht periodische Theil um acht vermehrt wird, erhalten:

$$\mathfrak{X}_p + t_p = 1 \frac{272953}{492480} a + 365 \frac{24311}{98496} p + \frac{78528}{98496} - 8 =$$

$$1 \frac{272953}{492480} a + 365 \frac{121555}{492480} p + \frac{392640}{492480} - 8$$

$$\mathfrak{X}_n + t_n = 347605 + 365 \frac{24311}{98496} \times 19n + 8 =$$

$$347613 + 6939 \frac{3575}{5184} n$$

$$c_p = \left(\frac{\mathfrak{X}_p + 2}{7}\right)_r$$

$$c_n = \left(\frac{\mathfrak{X}_n - 1}{7}\right)_r$$

¹ In den Hilfstafeln für Chronologie sind folgende Druckfehler zu berichtigen:

pag. 2 Zeile 9 und 10 v. O. statt j zu setzen z .

pag. 2 nach Zeile 22 v. O. einzufügen: (Hierbei ist die Zeit nach rückwärts positiv gezählt und es ist, wenn A die Jahreszahl bezeichnet $j=1800-A$).

pag. 4 Zeile 7 v. O. statt $1^{\circ}0032164$ zu setzen $0^{\circ}0132164$.

pag. 17 Zeile 2 v. U. statt XIX zu setzen XXIX.

pag. 24 Columne 11 Zeile 5 v. O. statt $18h$ zu setzen $18c$.

pag. 24 Columne 11 Zeile 6 v. O. statt $25i$ zu setzen $25h$.

pag. 24 Columne 12 Zeile 6 v. O. statt $25h$ zu setzen $25d$.

pag. 55 Zeile 21 v. U. statt „Kalenderzahl und Cyclus des zugehörigen Werthes aus Tafel I“ zu setzen „Kalenderzahl und Index des zugehörigen Cyclus aus Tafel I“.

pag. 58 letzte Columne, nach Zeile 54 v. O. einzufügen: nur in Schaltjahren.

Der Bruch $\frac{78528}{98496}$ wurde desshalb zum periodischen Theile

herübergezogen, um beim nichtperiodischen Theile auf den Nenner 5184 abkürzen zu können. Schreitet man jetzt an die Tabulirung des periodischen Theiles, so wird man für jeden der 19 Werthe von p mit Rücksicht auf die Gruppe, in welche das zugehörige a fällt, mehrere Fälle zu unterscheiden haben, je nach den Grenzen, zwischen welchen $c+t$ eingeschlossen ist; $c+t$ ist aber für diese Entscheidung keine bequeme Grösse, da sie jedesmal erst durch Addition von c_p+t_p mit c_n+t_n gebildet werden müsste, und man wird daher die Grenzen so umsetzen, dass sie nur von c_n+t_n abhängen. Da $c+t=(c_p+t_p)+(c_n+t_n)$ ist, wird man dies einfach dadurch erreichen, dass man für jeden einzelnen Werth von p die demselben nach der Grösse von a zukommenden Grenzen um den entsprechenden Werth von c_p+t_p vermindern wird, wodurch statt $c+t$ die Grösse c_n+t_n in den Grenzen eingeführt erscheint. Nur muss man hierbei bedenken, dass wohl $c+t$ unter allen Umständen gleich $(c_p+t_p)+(c_n+t_n)$ ist, \mathfrak{X} aber nur so lange gleich $\mathfrak{X}_p+\mathfrak{X}_n$ ist als $t_p+t_n<1$ bleibt, dagegen gleich $\mathfrak{X}_p+\mathfrak{X}_n+1$ wird, sobald $t_p+t_n>1$ ist. Es wird also in denjenigen Intervallen, in welchen $t_p+t_n>1$ oder was dasselbe ist, in denen $t_n>1-t_p$ wird, \mathfrak{X} noch um eine Einheit zu vergrössern sein; Intervalle aber, in denen t_n sowohl kleiner wie grösser als $1-t_p$ werden kann, müssen durch neu eingeschobene Grenzen, welche letztere immer ganze Zahlen sein werden, in zwei Theile getheilt werden, in deren einem $t_n>1-t_p$, in dem anderen dagegen $<1-t_p$ ist, und es muss in dem ersten Theile \mathfrak{X} um eine Einheit vermehrt werden. In der nun folgenden Zusammenstellung für jeden der 19 Werthe von p sind die so eingeschalteten neuen Grenzen, um sie als solche ersichtlich zu machen, in Klammern gesetzt und es sind überdies jene Intervalle, in denen wegen $t_p+t_n>1$ die Grösse \mathfrak{X} um eine Einheit zu erhöhen ist, durch ein hineingesetztes Sternchen angezeigt. Man erhält so für die einzelnen Werthe von p :

$\begin{aligned} p &= 4 \\ a &= 16 \\ \mathfrak{X}_p &= 1477 \\ c_p &= 2 \\ &48355 \\ t_p &= \frac{492480}{4} \\ 1 - t_p &= \frac{444125}{4} \\ c_p + t_p &= \frac{48355}{4} + \frac{492480}{4} \end{aligned}$	$\begin{aligned} p &= 3 \\ a &= 3 \\ \mathfrak{X}_p &= 1093 \\ c_p &= 3 \\ &98724 \\ t_p &= \frac{492480}{3} \\ 1 - t_p &= \frac{393756}{3} \\ c_p + t_p &= \frac{98724}{3} + \frac{492480}{3} \end{aligned}$	$\begin{aligned} p &= 2 \\ a &= 10 \\ \mathfrak{X}_p &= 738 \\ c_p &= 6 \\ &410400 \\ t_p &= \frac{492480}{2} \\ 1 - t_p &= \frac{82080}{2} \\ c_p + t_p &= \frac{410400}{2} + \frac{492480}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} p &= 1 \\ a &= 17 \\ \mathfrak{X}_p &= 384 \\ c_p &= 1 \\ &229596 \\ t_p &= \frac{492480}{1} \\ 1 - t_p &= \frac{262884}{1} \\ c_p + t_p &= \frac{229596}{1} + \frac{492480}{1} \end{aligned}$	$\begin{aligned} p &= 5 \\ a &= 5 \\ \mathfrak{X}_p &= 0 \\ c_p &= 2 \\ &279965 \\ t_p &= \frac{492480}{5} \\ 1 - t_p &= \frac{212515}{5} \\ c_p + t_p &= \frac{279965}{5} + \frac{492480}{5} \end{aligned}$	<p>für $c_n + t_n$</p> <p>Anfang und Gattung des Jahres</p> <p>für $c_n + t_n$</p> <p>Anfang und Gattung des Jahres</p> <p>für $c_n + t_n$</p> <p>Anfang und Gattung des Jahres</p> <p>für $c_n + t_n$</p> <p>Anfang und Gattung des Jahres</p> <p>für $c_n + t_n$</p>	<p>1478 u</p> <p>1477 u</p> <p>1094 M</p> <p>1094 U</p> <p>739 u</p> <p>738 u</p> <p>385 u</p> <p>384 u</p> <p>1 M</p> <p>1 U</p>	<p>444125</p> <p>492480</p> <p>*</p> <p>(5)</p> <p>393756</p> <p>492480</p> <p>*</p> <p>444125</p> <p>492480</p> <p>*</p> <p>(4)</p> <p>82080</p> <p>492480</p> <p>*</p> <p>(2)</p> <p>262884</p> <p>492480</p> <p>*</p> <p>(6)</p> <p>212515</p> <p>492480</p> <p>*</p> <p>(5)</p>	<p>12 *</p>
--	---	--	---	--	---	---	---	-------------

$5 \frac{212515}{492480}$	$0 \ U$	$6 \frac{262884}{492480}$	$385 \ r$	$2 \frac{393756}{492480}$	$739 \ r$	$4 \frac{393756}{492480}$	$1093 \ U$	$5 \frac{444125}{492480}$	$1478 \ r$
$* (6)$	$1 \ R$	$* (0)$	$385 \ r$	$* (3)$	$741 \ r$	$* (5)$	$1094 \ R$	$* (6)$	$1478 \ r$
$6 \frac{212515}{492480}$	$0 \ R$	$0 \frac{82080}{492480}$	$384 \ r$	$3 \frac{82080}{492480}$	$740 \ r$	$5 \frac{393756}{492480}$	$1093 \ R$	$6 \frac{263321}{492480}$	$1477 \ r$
$* (0)$	$2 \ M$	$* (4)$	$386 \ r$	$* (4)$	$740 \ r$	$6 \frac{263321}{492480}$	$1095 \ M$	$* (0)$	$1479 \ r$
$0 \frac{82080}{492480}$	$1 \ M$	$0 \frac{262884}{492480}$	$386 \ r$	$4 \frac{82080}{492480}$	$739 \ r$	$6 \frac{393756}{492480}$	$1094 \ M$	$6 \frac{444125}{492480}$	$1479 \ r$
$* (1)$	$1 \ U$	$* (1)$	$385 \ r$	$* (5)$	$739 \ r$	$* (0)$	$1094 \ U$	$* (1)$	$1478 \ r$
$0 \frac{212515}{492480}$	$1 \ U$	$1 \frac{262884}{492480}$	$385 \ r$	$4 \frac{393756}{492480}$	$739 \ r$	$6 \frac{393756}{492480}$	$1094 \ U$	$0 \frac{444125}{492480}$	$1478 \ r$
$* (1)$	$0 \ U$	$* (2)$	$384 \ r$	$* (5)$	$738 \ r$	$* (0)$	$1093 \ U$	$* (1)$	$1477 \ r$
$1 \frac{212515}{492480}$		$2 \frac{82080}{492480}$		$5 \frac{82080}{492480}$		$0 \frac{393756}{492480}$		$1 \frac{263321}{492480}$	

$p = 1$ $a = 5$ $\Sigma p = 0$ $c_p = 2$ $t_p = 279965$ $\frac{279965}{492480}$ $1 - t_p = 212515$ $\frac{212515}{492480}$ $c_p + t_p = 2$ $\frac{279965}{492480}$	$p = 1$ $a = 17$ $\Sigma p = 384$ $c_p = 1$ $t_p = 229596$ $\frac{229596}{492480}$ 262884 $\frac{262884}{492480}$ $1 - t_p = 262884$ $\frac{262884}{492480}$ $c_p + t_p = 1$ $\frac{229596}{492480}$	$p = 2$ $a = 10$ $\Sigma p = 738$ $c_p = 5$ $t_p = 41040$ $\frac{41040}{492480}$ 82080 $\frac{82080}{492480}$ $1 - t_p = 82080$ $\frac{82080}{492480}$ $c_p + t_p = 5$ $\frac{41040}{492480}$	$p = 3$ $a = 3$ $\Sigma p = 1093$ $c_p = 3$ $t_p = 98724$ $\frac{98724}{492480}$ 393756 $\frac{393756}{492480}$ $1 - t_p = 393756$ $\frac{393756}{492480}$ $c_p + t_p = 3$ $\frac{98724}{492480}$	$p = 4$ $a = 16$ $\Sigma p = 1477$ $c_p = 2$ $t_p = 48355$ $\frac{48355}{492480}$ 444125 $\frac{444125}{492480}$ $1 - t_p = 444125$ $\frac{444125}{492480}$ $c_p + t_p = 2$ $\frac{48355}{492480}$	<p>für $c_n + t_n$</p> $\frac{212515}{1\ 492480}$ $\frac{279965}{2\ 492480}$ <p>(2)</p> <p>212515 $\frac{279965}{492480}$</p>	<p>für $c_n + t_n$</p> $\frac{82080}{2\ 492480}$ $\frac{262884}{2\ 492480}$ <p>(2)</p> <p>82080 $\frac{262884}{492480}$</p>	<p>für $c_n + t_n$</p> $\frac{41040}{5\ 492480}$ $\frac{82080}{5\ 492480}$ <p>(6)</p> <p>41040 $\frac{82080}{492480}$</p>	<p>für $c_n + t_n$</p> $\frac{98724}{0\ 492480}$ $\frac{393756}{492480}$ <p>(1)</p> <p>98724 $\frac{393756}{492480}$</p>	<p>für $c_n + t_n$</p> $\frac{48355}{1\ 492480}$ $\frac{444125}{1\ 492480}$ <p>(2)</p> <p>48355 $\frac{444125}{492480}$</p>	<p>Anfang und Gattung des Jahres</p> <p>384 u</p> <p>386 m</p> <p>384 u</p> <p>386 m</p> <p>740 m</p> <p>740 u</p> <p>1095 M</p> <p>1094 M</p> <p>1477 u</p> <p>1479 m</p>
---	---	--	--	---	--	--	--	---	--	--

1 M	* 262884 <u>2</u> 492480	2 393756 <u>4</u> 92480	386 u	6 82080 <u>6</u> 492480	739 u	* 444125 <u>1</u> 492480	1094 M	2 82517 <u>2</u> 492480	1478 m
1 U	* (3)	(3)	385 u	* (0)	739 u	* (2)	1094 U	2 444125 <u>2</u> 492480	1478 u
0 U	262884 <u>3</u> 492480	3 262884 <u>3</u> 492480	385 u	0 82080 <u>0</u> 492480	738 u	393756 <u>2</u> 492480	1093 U	* (3)	1478 u
2 M	* (4)	(4)	384 u	* 393756 <u>0</u> 492480	740 m	* (3)	1095 M	3 444125 <u>3</u> 492480	1477 u
1 M	212515 <u>4</u> 492480	4 262884 <u>4</u> 492480	386 m	* (1)	740 u	393756 <u>3</u> 492480	1094 M	* (4)	1479 m
		(5)	385 m	1 82080 <u>1</u> 492480	739 u			263321 <u>4</u> 492480	1478 m
			385 u					444125 <u>4</u> 492480	1478 u

$p = 5$ $a = 8$ $\Sigma p = 1831$ $c_p = 6$ $t_p = 229159$ $1 - t_p = 263321$ $c_p + t_p = 229159$ 492480	$p = 6$ $a = 1$ $\Sigma p = 2186$ $c_p = 3$ $t_p = 409963$ 82517 $1 - t_p = 82517$ 492480 409963 $c_p + t_p = 3$ 492480	$p = 7$ $a = 13$ $\Sigma p = 2569$ $c_p = 2$ $t_p = 359594$ 132886 $1 - t_p = 132886$ 492480 359594 $c_p + t_p = 2$ 492480	$p = 8$ $a = 6$ $\Sigma p = 2924$ $c_p = 0$ $t_p = 47918$ 444562 $1 - t_p = 444562$ 492480 47918 $c_p + t_p = 0$ 492480	$p = 9$ $a = 18$ $\Sigma p = 3307$ $c_p = 5$ $t_p = 490029$ 2451 $1 - t_p = 2451$ 492480 490029 $c_p + t_p = 5$ 492480	Anfang und Gattung des Jahres für $c_n + t_n$	263321 0 492480 * (1) 203321 1 492480	82517 3 492480 * 132886 3 492480 * (4) 2186 1831 u	132886 4 492480 * (5) 82517 5 492480	444562 6 492480 * (0) 2451 0 492480	2451 1 492480 * 3308 u 444562 1 492480 * (2) 3309 r	Anfang und Gattung des Jahres für $c_n + t_n$	2186 1832 u	2186 1831 u	2570 2569 u	2925 2924 M	2925 2924 M	3308 3309 u	3308 3309 r
--	---	--	---	--	--	--	---	---	--	--	--	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

*	1832 r	2185 U	2570 r	2924 U	3308 r
(2)	$\frac{82517}{4\ 492480}$	$\frac{132886}{5\ 492480}$	$\frac{0\ 444562}{492480}$	$\frac{2\ 2451}{492480}$	
	1831 r	2186 R	2570 r	2925 R	3308 r
	$\frac{82517}{2\ 492480}$	$\frac{444562}{5\ 492480}$	(1)	*	
	1833 r	2185 R	2572 r	2924 R	
	$\frac{263321}{2\ 492480}$	$\frac{82517}{5\ 492480}$	$\frac{1\ 444562}{492480}$	*	3310 r
	1833 r	2187 M	2571 r	2926 M	3309 r
(3)	$\frac{444562}{5\ 492480}$	$\frac{132886}{6\ 492480}$	(2)	*	
	1832 r	2187 U	2571 r	2925 M	3309 r
	$\frac{263321}{3\ 492480}$	$\frac{82517}{5\ 492480}$	$\frac{2\ 314127}{492480}$	$\frac{3\ 2451}{492480}$	
	1832 r	2186 U	2570 r	2925 U	3308 r
(4)	$\frac{82517}{6\ 492480}$	$\frac{132886}{0\ 492480}$	(0)	*	
	1831 r	2186 U	2570 r	2925 U	3308 r
	$\frac{82517}{4\ 492480}$	$\frac{444562}{0\ 492480}$	(3)	$\frac{4\ 2451}{492480}$	
	1831 u	2185 U	2570 u	2924 U	3308 u
	$\frac{82517}{0\ 492480}$	$\frac{444562}{0\ 492480}$	$\frac{3\ 444562}{492480}$	$\frac{4\ 314127}{492480}$	
			(1)	*	
				(5)	

$r = 8$ $a = 1831$ $\mathfrak{X}_p = 6$ $c_p = 229159$ $t_p = 492480$ $1 - t_p = 263321$ $c_p + t_p = 229159$ $ = 492480$	$p = 7$ $a = 13$ $\mathfrak{X}_p = 2569$ $c_p = 2$ $t_p = 359594$ $1 - t_p = 132886$ $c_p + t_p = 359594$ $ = 492480$	$p = 8$ $a = 6$ $\mathfrak{X}_p = 2924$ $c_p = 0$ $t_p = 47918$ $1 - t_p = 444562$ $c_p + t_p = 47918$ $ = 492480$	$p = 9$ $a = 18$ $\mathfrak{X}_p = 3307$ $c_p = 5$ $t_p = 490029$ $1 - t_p = 2451$ $c_p + t_p = 490029$ $ = 492480$	<p>für $c_n + t_n$</p> <p>Anfang und Gattung des Jahres</p> <p>(5) 263321 $\underline{492480}$ $*$ (5)</p> <p>1833 m</p> <p>1832 m</p>	<p>für $c_n + t_n$</p> <p>Anfang und Gattung des Jahres</p> <p>(1) 132886 $\underline{492480}$ $*$ (1)</p> <p>2569 u</p> <p>2571 m</p>	<p>für $c_n + t_n$</p> <p>Anfang und Gattung des Jahres</p> <p>(4) 444562 $\underline{492480}$ $*$ (4)</p> <p>2926 M</p> <p>2925 M</p>	<p>für $c_n + t_n$</p> <p>Anfang und Gattung des Jahres</p> <p>(b) 2451 $\underline{492480}$ $*$</p> <p>3307 u</p> <p>3309 m</p>
---	---	--	---	--	--	--	--

$p = 10$ $a = 11$ $\Sigma p = 3662$ $c_p = 3$ $t_p = \frac{178353}{492480}$ $1 - t_p = \frac{314127}{492480}$ $c_p + t_p = 3 \frac{178353}{492480}$	$p = 11$ $a = 4$ $\Sigma p = 4016$ $c_p = 0$ $t_p = \frac{359157}{492480}$ $1 - t_p = \frac{133323}{492480}$ $c_p + t_p = 0 \frac{359157}{492480}$	$p = 12$ $a = 16$ $\Sigma p = 4400$ $c_p = 6$ $t_p = \frac{308788}{492480}$ $1 - t_p = \frac{183692}{492480}$ $c_p + t_p = 6 \frac{308788}{492480}$	$p = 13$ $a = 9$ $\Sigma p = 4754$ $c_p = 3$ $t_p = \frac{489592}{492480}$ $1 - t_p = \frac{2888}{492480}$ $c_p + t_p = 3 \frac{489592}{492480}$	$p = 14$ $a = 2$ $\Sigma p = 5109$ $c_p = 1$ $t_p = \frac{177916}{492480}$ $1 - t_p = \frac{314564}{492480}$ $c_p + t_p = 1 \frac{177916}{492480}$	Anfang und Gattung des Jahres	für $c_n + t_n$	5110 <i>M</i> 5110 <i>U</i>
314127 $3 \frac{492480}{492480}$ * (4)	133323 $6 \frac{492480}{492480}$ * (1)	183692 $0 \frac{492480}{492480}$ * (1)	2888 $3 \frac{492480}{492480}$ * (4)	314564 $5 \frac{492480}{492480}$ * (6)	Anfang und Gattung des Jahres	für $c_n + t_n$	4755 <i>u</i> 4754 <i>u</i>
3663 * (4)	4017 * (0)	4401 * (1)	4400 * (4)	4755 * (4)	Anfang und Gattung des Jahres	für $c_n + t_n$	4401 <i>u</i> 4400 <i>u</i>
314127 $3 \frac{492480}{492480}$ * (4)	4017 * (0)	4401 * (1)	4400 * (4)	4755 * (4)	Anfang und Gattung des Jahres	für $c_n + t_n$	4401 <i>u</i> 4400 <i>u</i>

* (5)	3663 r	4016 U	4401 r	4755 r	5109 U
		$\frac{133323}{0 \ 492480}$	$\frac{183692}{1 \ 492480}$	* $\frac{314564}{4 \ 492480}$	$\frac{314564}{6 \ 492480}$
133323 5 $\frac{492480}{492480}$	3662 r	4017 R	4401 r	4757 r	5110 R
		* (1)	* (2)	* (5)	* (0)
	3664 r	4016 R	4400 r	4756 r	5109 R
314127 5 $\frac{492480}{492480}$		$\frac{133323}{1 \ 492480}$	2888 $\frac{2888}{2 \ 492480}$	2888 $\frac{2888}{5 \ 492480}$	$\frac{314564}{0 \ 492480}$
* (6)	3664 r	4018 M	4402 r	4756 r	5111 M
		* (2)	$\frac{183692}{2 \ 492480}$	* (6)	* (1)
314127 6 $\frac{492480}{492480}$	3663 r	4017 M	4402 r	4755 r	5110 M
		2888 $\frac{2888}{2 \ 492480}$	* (3)	2888 $\frac{2888}{6 \ 492480}$	184129 $\frac{184129}{1 \ 492480}$
* (0)	3663 r	4017 U	4401 r	4755 r	5110 U
		$\frac{133323}{2 \ 492480}$	183692 $\frac{183692}{3 \ 492480}$	* $\frac{314564}{6 \ 492480}$	$\frac{314564}{1 \ 492480}$
133323 0 $\frac{492480}{492480}$	3662 r	4017 U	4401 r	4755 u	5110 U
		* (3)	* (4)	* (0)	* (2)
314127 0 $\frac{492480}{492480}$	3662 u	4016 U	4400 r	4754 u	5109 U
		$\frac{133323}{3 \ 492480}$	2888 $\frac{2888}{4 \ 492480}$	2888 $\frac{2888}{0 \ 492480}$	$\frac{314564}{2 \ 492480}$

$p = 14$ $a = 2$ $\mathfrak{X}_p = 5109$ $c_p = 1$ $t_p = 177916$ $1 - t_p = 492480$ 314564 $1 - t_p = 492480$ $c_p + t_p = 177916$ $c_p + t_p = 1492480$	Anfang und Gattung des Jahres	$5111 M$ $5110 M$
$p = 13$ $a = 9$ $\mathfrak{X}_p = 4754$ $c_p = 3$ $t_p = 489592$ $1 - t_p = 492480$ 2888 $1 - t_p = 492480$ 489592 $c_p + t_p = 3492480$	Anfang und Gattung des Jahres	$4756 m$ $4756 u$
$p = 12$ $a = 16$ $\mathfrak{X}_p = 4400$ $c_p = 6$ $t_p = 308788$ $1 - t_p = 492480$ 183692 $1 - t_p = 492480$ 308788 $c_p + t_p = 6492480$	Anfang und Gattung des Jahres	$4400 u$ $4402 m$
$p = 11$ $a = 4$ $\mathfrak{X}_p = 4016$ $c_p = 0$ $t_p = 359157$ $1 - t_p = 492480$ 133323 $1 - t_p = 492480$ 359157 $c_p + t_p = 0492480$	Anfang und Gattung des Jahres	$4018 M$ $4017 M$
$p = 10$ $a = 11$ $\mathfrak{X}_p = 3662$ $c_p = 3$ $t_p = 178353$ $1 - t_p = 492480$ 314127 $1 - t_p = 492480$ 178353 $c_p + t_p = 3492480$	Anfang und Gattung des Jahres	$3664 m$ $3663 m$
$p = 14$ $a = 2$ $\mathfrak{X}_p = 5109$ $c_p = 1$ $t_p = 177916$ $1 - t_p = 492480$ 314564 $1 - t_p = 492480$ $c_p + t_p = 177916$ $c_p + t_p = 1492480$	für $c_n + t_n$	314564 2492480 $*$ (3) 314564 3492480
$p = 13$ $a = 9$ $\mathfrak{X}_p = 4754$ $c_p = 3$ $t_p = 489592$ $1 - t_p = 492480$ 2888 $1 - t_p = 492480$ 489592 $c_p + t_p = 3492480$	für $c_n + t_n$	2888 0492480 $*$ 314564 0492480 $*$ (1)
$p = 12$ $a = 16$ $\mathfrak{X}_p = 4400$ $c_p = 6$ $t_p = 308788$ $1 - t_p = 492480$ 183692 $1 - t_p = 492480$ 308788 $c_p + t_p = 6492480$	für $c_n + t_n$	2888 4492480 183692 4492480 $*$
$p = 11$ $a = 4$ $\mathfrak{X}_p = 4016$ $c_p = 0$ $t_p = 359157$ $1 - t_p = 492480$ 133323 $1 - t_p = 492480$ 359157 $c_p + t_p = 0492480$	für $c_n + t_n$	133323 3492480 $*$ (4) 133323 4492480
$p = 10$ $a = 11$ $\mathfrak{X}_p = 3662$ $c_p = 3$ $t_p = 178353$ $1 - t_p = 492480$ 314127 $1 - t_p = 492480$ 178353 $c_p + t_p = 3492480$	für $c_n + t_n$	314127 0492480 $*$ (1) 133323 1492480

3663 u	*	4017 M	4755 u	5110 M
314127	183692	314564	2888	364933
1 492480	4 492480	4 492480	1 492480	3 492480
*	*	*	*	*
(2)	(5)	(5)	(2)	(4)
3663 u	4017 U	4402 u	4755 u	5110 U
314127	183692	4401 u	2888	314564
2 492480	5 492480	4401 u	2 492480	4 492480
*	*	4400 u	*	*
(3)	(6)	4402 m	314564	(5)
3664 m	4018 M	4401 m	4756 u	5111 M
313323	183692	4401 m	2888	314564
3 492480	6 492480	4401 u	3 492480	5 492480
*	*	4402 m	*	*
(3)	(0)	4401 m	(3)	(5)
3663 u	4017 M	4401 u	4755 u	5110 M
313323	183692	2888	2888	314564
3 492480	6 492480	0 492480	3 492480	5 492480
*	*	183692	*	*
(3)	(0)	0 492480	183692	(5)

$p = 15$ $a = 14$ $\Sigma p = 5493$ $c_p = 0$ $t_p = \frac{127547}{492480}$ $1 - t_p = \frac{364933}{492480}$ $c_p + t_p = \frac{127547}{492480}$	$p = 16$ $a = 7$ $\Sigma p = 5847$ $c_p = 4$ $t_p = \frac{308351}{492480}$ $1 - t_p = \frac{184129}{492480}$ $c_p + t_p = \frac{308351}{492480}$	$p = 17$ $a = 0$ $\Sigma p = 6201$ $c_p = 1$ $t_p = \frac{489155}{492480}$ $1 - t_p = \frac{3325}{492480}$ $c_p + t_p = \frac{489155}{492480}$	$p = 18$ $a = 12$ $\Sigma p = 6585$ $c_p = 0$ $t_p = \frac{438786}{492480}$ $1 - t_p = \frac{53694}{492480}$ $c_p + t_p = \frac{438786}{492480}$
für $c_n + t_n$ $\frac{364933}{492480}$ $\frac{5494}{(0)}$ $\frac{314564}{492480}$	für $c_n + t_n$ $\frac{184129}{492480}$ $\frac{5848}{(3)}$ $\frac{184129}{492480}$	für $c_n + t_n$ $\frac{3325}{492480}$ $\frac{6202}{(6)}$ $\frac{6202}{492480}$	für $c_n + t_n$ $\frac{53694}{492480}$ $\frac{6586}{(0)}$ $\frac{3325}{492480}$
Anfang und Gattung des Jahres $\frac{5494}{(0)}$ 6586 u 6585 u	Anfang und Gattung des Jahres $\frac{5848}{(3)}$ 6202 M 6202 U	Anfang und Gattung des Jahres $\frac{6202}{(6)}$ 6202 M 6202 U	Anfang und Gattung des Jahres $\frac{6586}{(0)}$ 6586 u 6585 u

5494 r	$\begin{array}{r} * \\ 364933 \\ 0 \overline{) 492480} \end{array}$	5848 r	$\begin{array}{r} * \\ (4) \\ 4 \overline{) 492480} \end{array}$	6201 U	$\begin{array}{r} 3325 \\ 6 \overline{) 492480} \end{array}$	6586 r	$\begin{array}{r} 53694 \\ 0 \overline{) 492480} \end{array}$
5494 r	$\begin{array}{r} * \\ (1) \\ 184129 \\ 4 \overline{) 492480} \end{array}$	5847 r	$\begin{array}{r} 3325 \\ 4 \overline{) 492480} \end{array}$	6202 R	$\begin{array}{r} * \\ (0) \\ 3325 \\ 0 \overline{) 492480} \end{array}$	6586 r	$\begin{array}{r} * \\ 365370 \\ 0 \overline{) 492480} \end{array}$
5493 r	$\begin{array}{r} 184129 \\ 1 \overline{) 492480} \end{array}$	5849 r	$\begin{array}{r} 184129 \\ 4 \overline{) 492480} \end{array}$	6201 R	$\begin{array}{r} * \\ (1) \\ 3325 \\ 0 \overline{) 492480} \end{array}$	6588 r	$\begin{array}{r} * \\ (1) \\ 53694 \\ 1 \overline{) 492480} \end{array}$
5495 r	$\begin{array}{r} 364933 \\ 1 \overline{) 492480} \end{array}$	5849 r	$\begin{array}{r} * \\ (5) \\ 5 \overline{) 184129} \\ 5 \overline{) 492480} \end{array}$	6203 M	$\begin{array}{r} * \\ 365370 \\ 0 \overline{) 492480} \end{array}$	6587 r	$\begin{array}{r} * \\ (2) \\ 53694 \\ 2 \overline{) 492480} \end{array}$
5495 r	$\begin{array}{r} * \\ (2) \\ 364933 \\ 2 \overline{) 492480} \end{array}$	5848 r	$\begin{array}{r} 184129 \\ 6 \overline{) 492480} \end{array}$	6203 U	$\begin{array}{r} * \\ (1) \\ 3325 \\ 1 \overline{) 492480} \end{array}$	6587 r	$\begin{array}{r} * \\ (2) \\ 53694 \\ 2 \overline{) 492480} \end{array}$
5494 r	$\begin{array}{r} * \\ (3) \\ 184129 \\ 3 \overline{) 492480} \end{array}$	5848 r	$\begin{array}{r} * \\ (6) \\ 6 \overline{) 3325} \\ 6 \overline{) 492480} \end{array}$	6202 U	$\begin{array}{r} 3325 \\ 2 \overline{) 492480} \end{array}$	6586 r	$\begin{array}{r} * \\ 365370 \\ 2 \overline{) 492480} \end{array}$
5494 r	$\begin{array}{r} * \\ (3) \\ 184129 \\ 3 \overline{) 492480} \end{array}$	5847 r	$\begin{array}{r} 184129 \\ 6 \overline{) 492480} \end{array}$	6202 U	$\begin{array}{r} * \\ (2) \\ 3325 \\ 2 \overline{) 492480} \end{array}$	6586 r	$\begin{array}{r} * \\ (3) \\ 53694 \\ 3 \overline{) 492480} \end{array}$

$ \begin{aligned} p &= 15 \\ a &= 14 \\ \Sigma p &= 5493 \\ c_p &= 0 \\ t_p &= \frac{127547}{492480} \\ 1 - t_p &= \frac{364933}{492480} \\ c_p + t_p &= \frac{127547}{492480} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} p &= 16 \\ a &= 7 \\ \Sigma p &= 5847 \\ c_p &= 4 \\ t_p &= \frac{308351}{492480} \\ 1 - t_p &= \frac{184129}{492480} \\ c_p + t_p &= \frac{308351}{492480} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} p &= 17 \\ a &= 0 \\ \Sigma p &= 6201 \\ c_p &= 1 \\ t_p &= \frac{489155}{492480} \\ 1 - t_p &= \frac{3325}{492480} \\ c_p + t_p &= \frac{489155}{492480} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} p &= 18 \\ a &= 12 \\ \Sigma p &= 6585 \\ c_p &= 0 \\ t_p &= \frac{438786}{492480} \\ 1 - t_p &= \frac{53694}{492480} \\ c_p + t_p &= \frac{438786}{492480} \end{aligned} $	<p>für $c_n + t_n$</p> <p>(3)</p> <p>53694 3 492480</p> <p>6585 u</p> <p>*</p> <p>6587 m</p>	<p>Anfang und Gattung des Jahres</p>
<p>für $c_n + t_n$</p> <p>(4)</p> <p>364933 3 492480</p> <p>5493 u</p> <p>*</p> <p>5495 m</p>	<p>Anfang und Gattung des Jahres</p>				
<p>für $c_n + t_n$</p> <p>(0)</p> <p>184129 6 492480</p> <p>5849 m</p> <p>(0)</p> <p>5848 m</p>	<p>Anfang und Gattung des Jahres</p>				
<p>für $c_n + t_n$</p> <p>(3)</p> <p>3325 2 492480</p> <p>6203 M</p> <p>(3)</p> <p>6202 M</p>	<p>Anfang und Gattung des Jahres</p>				

5494 m	3325 <u>4 492480</u>	5848 u	* 53694 <u>3 492480</u>	6202 M	365370 <u>3 492480</u>	6587 u
5494 u	364933 <u>4 492480</u>	5848 u	* (4)	6202 U	(4)	6586 u
5494 u	* 184129 <u>1 492480</u>	5847 u	3325 <u>4 492480</u>	6201 U	53694 <u>4 492480</u>	
5493 u	(5)	5849 m	* (5)	6203 M	* (5)	6586 u
5495 m	364933 <u>5 492480</u>	5848 m	3325 <u>5 492480</u>	6202 M	53694 <u>5 492480</u>	6585 u
5494 m	* (6)	5848 u	3325 <u>2 492480</u>		* (6)	6587 m
5494 u	184129 <u>6 492480</u>		184129 <u>2 492480</u>		365370 <u>5 492480</u>	6587 u
	364933 <u>6 492480</u>				* (6)	6586 u
					53694 <u>6 492480</u>	

Wie man sieht, werden auch jetzt wieder einzelne Grenzen ausfallen, da durch die in einigen Intervallen erfolgte Vermehrung von \mathfrak{X} um eine Einheit dieses häufig mit dem \mathfrak{X} des vorangehenden oder folgenden Intervalles gleich wurde. Es erscheint jetzt alles auf $c_n + t_n$ reducirt und es erübrigt nur noch, diesen Grenzen eine etwas bequemere Gestalt zu geben; es kommt, wie man sieht, nicht darauf an, gerade den genauen Werth von $c_n + t_n$ zu kennen, sondern es genügt, zu wissen, zwischen welche Grenzen dieser Werth hineinfällt. Ordnet man alle in den Grenzen für die 19 Werthe von p vorkommenden Brüche nach ihrer Grösse und bezeichnet das Intervall zwischen je zweien derselben durch einen Buchstaben, so erhält man folgende Zusammenstellung:

0	bis	$\frac{2451}{492480}$	<i>a</i>
$\frac{2451}{492480}$	"	$\frac{2888}{492480}$	<i>b</i>
$\frac{2888}{492480}$	"	$\frac{3325}{492480}$	<i>c</i>
$\frac{3325}{492480}$	"	$\frac{53694}{492480}$	<i>d</i>
$\frac{53694}{492480}$	"	$\frac{82080}{492480}$	<i>e</i>
$\frac{82080}{492480}$	"	$\frac{82517}{492480}$	<i>f</i>
$\frac{82517}{492480}$	"	$\frac{132886}{492480}$	<i>g</i>
$\frac{132886}{492480}$	"	$\frac{133323}{492480}$	<i>h</i>
$\frac{133323}{492480}$	"	$\frac{183692}{492480}$	<i>i</i>
$\frac{183692}{492480}$	"	$\frac{184129}{492480}$	<i>k</i>
$\frac{184129}{492480}$	"	$\frac{212515}{492480}$	<i>l</i>
$\frac{212515}{492480}$	"	$\frac{262884}{492480}$	<i>n</i>
$\frac{262884}{492480}$	"	$\frac{263321}{492480}$	<i>p</i>

$\frac{263321}{492480}$	bis	$\frac{314127}{492480}$ <i>q</i>
$\frac{314127}{492480}$	"	$\frac{314564}{492480}$ <i>s</i>
$\frac{314564}{492480}$	"	$\frac{364933}{492480}$ <i>t</i>
$\frac{364933}{492480}$	"	$\frac{365370}{492480}$ <i>v</i>
$\frac{365370}{492480}$	"	$\frac{393756}{492480}$ <i>w</i>
$\frac{393756}{492480}$	"	$\frac{444125}{492480}$ <i>x</i>
$\frac{444125}{492480}$	"	$\frac{444562}{492480}$ <i>y</i>
$\frac{444562}{492480}$	"	1 <i>z</i>

Soll also z. B. das erste Intervall bei den Grenzen für $p=0$ bezeichnet werden, so wird man dem Werthe von c_n den den Werth von t_n ausdrückenden Buchstaben gleichsam als Index anhängen, und es wird daher das Intervall $4 \frac{212515}{492480}$ bis $4 \frac{262884}{492480}$ bezeichnet werden durch 4_n ; das nächste Intervall $4 \frac{262884}{492480}$ bis 5 wird bezeichnet werden mit 4_{p-s} u. s. w. Führt man diese Umsetzung vollständig durch, beginnt aber mit dem Intervalle, welches mit 0 anfängt und lässt die überflüssig gewordenen Grenzen aus, so erhält man für $p=0$:

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{für } c_n+t_n}$	$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Oer Tischri und Gattung des Jahres}}$
0_{a-e}	1 <i>M</i>
0_{f-z}	1 <i>U</i>
1_{a-l}	0 <i>U</i>
1_{n-s}	2 <i>M</i>
2_{a-n}	1 <i>M</i>
2_{p-s}	1 <i>U</i>
3_{a-l}	0 <i>U</i>
3_{n-z}	2 <i>M</i>

für $c_n + t_n$	Oter Tischri und Gattung des Jahres
4_{a-n}	1 <i>M</i>
4_{p-s}	1 <i>U</i>
5_{a-l}	0 <i>U</i>
5_{n-s}	1 <i>R</i>
6_{a-l}	0 <i>R</i>
6_{n-s}	2 <i>M</i>

Setzt man jetzt noch diejenigen Grenzen, für welche Anfangstag und Gattung des Jahres denselben Werth haben, in eine Zeile, so erhält man für $p=0$:

Grenzen für $c_n + t_n$			Oter Tischri und Gattung des Jahres
0_{a-s}	2_{a-n}	4_{a-n}	1 <i>M</i>
0_{f-s}	2_{p-s}	4_{p-s}	1 <i>U</i>
1_{a-l}	3_{a-l}	5_{a-l}	0 <i>U</i>
1_{n-s}	3_{n-s}	6_{n-s}	2 <i>M</i>
5_{n-s}		1 <i>R</i>
6_{a-l}		0 <i>R</i>

Hiermit ist für den periodischen Theil die Form der Tabulirung, wie sie in den „Hilfstafeln für Chronologie“ in Tafel II durchgeführt ist, vollkommen erreicht und es erscheint überflüssig, diese letzte Umsetzung hier für alle 19 Werthe von p durchzumachen, da sie auf ganz analoge Weise stattfindet, wie für den Werth $p=0$.

Was den nicht periodischen Theil anbelangt, so hat man hierfür:

$$\mathfrak{X}_n + t_n = 347613 + 6939 \frac{3575}{3184} n$$

$$c_n = \left(\frac{\mathfrak{X}_n - 1}{7} \right)_r$$

es ist also sowohl \mathfrak{X}_n , als auch c_n sehr einfach zu erhalten, um aber $c_n + t_n$ auszudrücken, wird man der Zahl, welche c_n bezeichnet und welche in Tafel I der „Hilfstafeln für Chronologie“ Kalendernzahl genannt wird, als Index denjenigen Buchstaben anhängen,

welcher das Intervall, in welches der Werth von t_n hineinfällt, nach dem pag. 38 und 39 gegebenen Täfelchen anzeigt. Da aber in diesem Täfelchen die Brüche den Nenner 492480, t_n dagegen nur den Nenner 5184 hat, so wird man durch Division mit 95 die Brüche des erwähnten Täfelchens ebenfalls auf den Nenner 5184 bringen und so erhalten:

für t_n zwischen		Index
0	bis $\frac{25}{5184}$	<i>a</i>
26	$\frac{30}{5184}$	<i>b</i>
31	$\frac{34}{5184}$	<i>c</i>
35	$\frac{565}{5184}$	<i>d</i>
566	$\frac{863}{5184}$	<i>e</i>
864	$\frac{868}{5184}$	<i>f</i>
869	$\frac{1398}{5184}$	<i>g</i>
1399	$\frac{1403}{5184}$	<i>h</i>
1404	$\frac{1933}{5184}$	<i>i</i>
1934	$\frac{1938}{5184}$	<i>k</i>
1939	$\frac{2236}{5184}$	<i>l</i>
2237	$\frac{2767}{5184}$	<i>n</i>
2768	$\frac{2771}{5184}$	<i>p</i>
2772	$\frac{3306}{5184}$	<i>q</i>
3307	$\frac{3311}{5184}$	<i>s</i>

für t_n zwischen	Index
3312	3841
5184	5184
3842	3845
5184	5184
3846	4144
5184	5184
4145	4674
5184	5184
4675	4679
5184	5184
4680	5183
5184	5184

Es ist somit die Berechnung der in den beiden Tafeln, der periodischen und der nichtperiodischen, respective Tafel I und II, vorkommenden Grössen vollkommen dargelegt und es erübrigt nur noch über die Grösse „Kalenderzahl“ in der Tafel II einige Worte zu sagen. Es gibt im Ganzen nur 14 verschiedene jüdische Festkalender, welche von der Länge des Jahres und dem Wochentage des ersten Tischri abhängen. Diese 14 Festkalender werden gewöhnlich so bezeichnet, dass man dem Buchstaben, welcher die Länge des Jahres angibt, eine Zahl vorsetzt, welche den Wochentag des ersten Tischri bezeichnet, wobei man aber mit 1 Sonntag, 2 Montag, 3 Dienstag, 4 Mittwoch, 5 Donnerstag, 6 Freitag und 7 Samstag anzeigt, also den Rest des julianischen Tages durch 7 noch um 2 vermehrt, da der Rest des julianischen Tages durch 7 nur dann den Wochentag anzeigt, wenn mit 0 der Montag bezeichnet wird. Da das Jahr nicht an jedem Wochentage beginnen kann, so sind nur folgende 14 Arten von Jahren möglich:

$2u, 2m, 3r, 5u, 5r, 7u, 7n, \quad 2U, 2M, 3R, 5U, 5M, 7U, 7M;$

bezeichnet man diese der Reihe nach mit den Zahlen von 1 bis 7 für die Gemeinjahre, und von 13 bis 19 für die Schaltjahre (die Zahlen von 8 bis 12 sind nicht verfügbar, denn da die Kalenderzahl eine Summe zweier Zahlen ist, von denen jede nur kleiner als 7 zu sein braucht, deren Summe aber 7 auch überschreiten kann, so muss man 8 gleich 1, 9 gleich 2, 10 gleich 3, 11 gleich 4

und 12 gleich 5 setzen; ebenso wird man setzen 20 gleich 13, 21 gleich 14, 22 gleich 15, 23 gleich 16 und endlich 24 gleich 17), so hat man für: $2u, 2m, 3r, 5u, 5r, 7u, 7m, 2U, 2M, 3R, 5U, 5M, 7U, 7M$
Kalenderzahl: 1 2 3 4 5 6 7 13 14 15 16 17 18 19

Wie man sieht, drückt die Kalenderzahl bei Gemeinjahre für die Jahre von der Form u den Wochentag des 0^{ten} Tischri, dagegen für die Jahre von der Form m und r den Wochentag des ersten Tischri aus; ebenso drückt in Schaltjahren die um 12 verminderte Kalenderzahl in Jahren von der Form U den Wochentag des 0^{ten}, von der Form M und R des ersten Tischri aus. Setzt man nun den nach den vorhergehenden Regeln eventuell um 1, 2 oder 3 vermehrten Werth von \mathfrak{X}_p , also den in Tafel II dem 0^{ten} Tischri entsprechenden Werth gleich T_p , so wird, da die Kalenderzahl von Tafel I oder c_n gleich $\left(\frac{\mathfrak{X}_n-1}{7}\right)_r$ ist, $c_n + \left(\frac{T_p}{7}\right)_r$ den Wochentag des dem 0^{ten} Tischri vorangehenden Tages geben; dieser Werth muss also um eins vermehrt werden, um den Wochentag des 0^{ten}, und um 2, um den des ersten Tischri zu geben, überdies müssen beide noch um 2 Einheiten vermehrt werden, um auf die andere Bezeichnung der Wochentage überzugehen, und man hat somit die Kalenderzahl in Tafel II für Jahre von der Form u : $\left(\frac{T_p}{7}\right)_r + 3$, von der Form m oder r : $\left(\frac{T_p}{7}\right)_r + 4$, dagegen für Jahre von der Form U : $\left(\frac{T_p}{7}\right)_r + 15$ und endlich von der Form M oder B : $\left(\frac{T_p}{7}\right)_r + 16$. Die Summe der Kalenderzahl aus Tafel II und der zugehörigen aus Tafel I, von welcher natürlich der Index fortzulassen ist, bildet dann das Argument zum Aufsuchen des dem gegebenen Jahre entsprechenden Festkalenders.

XVI. SITZUNG VOM 21. JUNI 1883.

Das c. M. Herr Prof. Dr. V. Ritter v. Ebner in Graz dankt für die Zuerkennung des Ig. L. Lieben'schen Preises.

Das w. M. Herr Prof. Dr. E. Weyr übergibt für die akademische Bibliothek den ersten Theil seines eben erschienenen Werkes: „Die Elemente der projectivischen Geometrie.“

Herr Dr. John J. Mason übermittelt ein Exemplar der Autorsausgabe seines illustrierten Werkes: „Minute structure of the central nervous system of certain reptiles batrachians of America“. Series A.

Das c. M. Herr Prof. L. Pfaunder in Innsbruck übersendet eine von Herrn Dr. H. Hammerl, Privatdocenten und Assistenten am dortigen physikalischen Cabinet ausgeführte Untersuchung unter dem Titel: „Studien über das Kupfervoltameter“.

Der Secretär legt folgende eingesendete Arbeiten aus dem Laboratorium für analytische Chemie an der technischen Hochschule in Wien vor:

1. „Notizen über Halogenderivate“, von den Herren Dr. Rudolf Benedikt und Max v. Schmidt.
2. „Über Nitroresorcinsulfosäure“, von Herrn K. Hazura.

Herr Prof. Dr. Zd. H. Skraup in Wien stellt das Ansuchen um Eröffnung des in der Sitzung dieser Classe vom 20. Juli 1882 behufs Wahrung seiner Priorität hinterlegten versiegelten Schreibens und um Veröffentlichung der darin enthaltenen Abhandlung: „Zur Constitution des Chinins und Chinidins“ in den Sitzungsberichten.

Zugleich ersucht derselbe um weitere Aufbewahrung eines zweiten der genannten Abhandlung beigeschlossenen versiegelten Schreibens.

Der Secretär legt ferner ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Johann Gruber, Lehrer in Wien, mit der Aufschrift: „Constitutionsformel der Kohlehydrate und Weg zur Synthese von Pyrol aus“ vor.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht drei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. Lieben und S. Zeisel: „Über Condensationsproducte der Aldehyde und ihre Derivate“, III. Abhandlung.
2. Dr. Konrad Natterer: „Über $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyd, ein Condensationsproduct des Monochloraldehyds“.
3. J. Kachler und F. V. Spitzer: „Verhalten der isomeren Bibromcampher gegen Salpetersäure“.

Das w. M. Herr Hofrath Ritter v. Hauer überreicht folgende zwei Abhandlungen von Herrn Dr. Alex. Bittner in Wien:

- I. „*Micropsis Veronensis*, ein neuer Echinide des oberitalienischen Eocäns.“
- II. „Beiträge zur Kenntniss tertiärer Brachyuren-Faunen.“

Das c. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine Abhandlung: „Über die mangelhafte Erregbarkeit der Netzhaut für Licht von abnormer Einfallsrichtung“.

Herr Dr. Johann Nep. Woldřich, Professor am akadem. Gymnasium in Wien, überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Diluviale Fauna von Zuzlawitz im Böhmerwalde. Dritter Bericht. (Der Mensch.)“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie, Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Bulletin. 52^e année, 3^e série, tome 5. Nr. 4. Bruxelles, 1883; 8^o.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinische deutsche der Naturforscher: Leopoldina, Heft XIX, Nr. 9—10. Halle a. S., 1883; 4^o.

Annales des Mines. VIII^e série, tome I, 3^e et 4^e livraisons. Tome II, 5^e livraison de 1882. Paris, 1882; 8^o. — Recueil des Mémoires sur l'exploitation des Mines. Table des Matières de la VII^e série décennale 1872—1881. Paris, 1882; 8^o.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3^e période. Tome IX. Nr. 5. — 15 Mai 1883. Genève, Lausanne, Paris, 1883; 8^o.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII, Nr. 42—45. Cöthen, 1883; 4^o.

- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.
Tome XCVI. Nr. 23. Paris, 1883; 4°.
- Gesellschaft, Berliner medicinische: Verhandlungen aus dem
Gesellschaftsjahre 1881/82. Band XIII. Berlin, 1883; 8°.
- deutsche chemische: Berichte. XVI. Jahrgang. Nr. 9. Berlin,
1883; 8°.
- gelehrte estnische zu Dorpat: Sitzungsberichte 1882. Dorpat,
1883; 8°.
- physikalisch-chemische: Bulletin. Tome XV, Nr. 5. St. Pé-
tersburg, 1883; 8°.
- Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XLIV. Jahrg. Nr. 16
bis 24. Wien, 1883; 4°.
- Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift
VIII. Jahrgang, Nr. 16—24. Wien, 1883; 4°.
- Kiel, Universität: Akademische Schriften pro 1881—1882;
16 Stücke 4° & 8°.
- Marburg, Universität: Akademische Schriften pro 1882; 45
Stücke 4° & 8°.
- Musée, royal d'Histoire naturelle de Belgique: Annales. Tome
VIII. Faune du Calcaire carbonifère de la Belgique. 4° Partie
avec un Atlas de 36 planches in folio. Bruxelles, 1883; folio.
- Nature. Vol. XXVIII. No. 711. London, 1883; 8°.
- Observatoire Impérial de Rio de Janeiro: Annales. Tome I.
Description de l'Observatoire. Rio de Janeiro, 1882; 4°.
- Smithsonian, Institution: Annual Report of the Board of Re-
gents for the year 1880. Washington, 1881; 8°.
- — Miscellaneous Collections. List of foreign correspondents
corrected to January, 1882. Washington; 8°.
- — First annual Report of the Bureau of Ethnology 1879—
1880 by J. W. Powell. Washington, 1881; 4°.
- Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux:
Mémoires. 2° série. Tome V. 1^{er} cah. Paris, Bordeaux, 1882; 8°.
- Linnéenne de Bordeaux: Actes. Volume XXXV. 4° série:
Tome V. Bordeaux, 1881; 8°.
- Société des Sciences de Nancy: Bulletin. Série II. Tome VI. Fas-
cicule XIII. 14^e année. Paris, 1882; 8°.
- Linnéenne de Normandie: Bulletin. 3° série. — 5° Volume.
Année 1880—81. Caen, 1881; 8°.

- Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux: Mémoires et Bulletins. Année 1880. Paris, Bordeaux, 1881; 8°.
- géologique de France: Mémoires. 3^e série. Tome deuxième. III. Les Foraminifères de l'Éocène des environs de Paris par M. Terquem. Paris, 1822; 4°. — IV. Recherches sur les Reptiles trouvés dans le Gault de l'Est du Bassin de Paris par M. H. E. Sauvage. Paris, 1882; 4°.
 - nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg: Catalogue de la Bibliothèque. 1^{re} Partie. 2^e édition. Janvier 1881. Cherbourg, 1881; 8°.
- United States: Annual Report of the Comptroller of the Currency to the first session of the 47th congress. Decembre 5, 1881. Washington, 1881; 8°. — Forty seventh congress 1st session. Washington, 1882; 8°.
- Annual Report of the Commissioner of Agriculture for the year 1880. Washington, 1881; 8°.
 - Report upon geographical Surveys west of the one hundredth meridian. Vol. III. Supplement - Geology. Washington, 1881; 4°.
 - Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1877 at the naval Observatory. Washington, 1881; 4°. — Monograph of the central parts of the Nebula of Orion by Edward S. Holden. Washington, 1882; 4°.
 - Commission of Fish and Fisheries Part VII. for 1879. Washington, 1882; 8°. — 176. Special-Bulletin. A Monograph of the Seal — Islands of Alaska; by Henry W. Elliot. Washington, 1882; 4°.
- Verein, entomologischer in Berlin: Berliner entomologische Zeitschrift. XXVII. Band. I. Heft. (Seite I—IV, 1—172, i—xx.) Berlin, 1883; 8°.
- Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 16 bis 24. Wien, 1883; 4°.
- Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ, III. Jahrgang 1883. 5. Heft; Mai. Berlin, 1883; 4°.
- für physiologische Chemie. VII. Band, 5. Heft. Strassburg, 1883; 8°.

Über Condensationsproducte der Aldehyde und ihre Derivate.

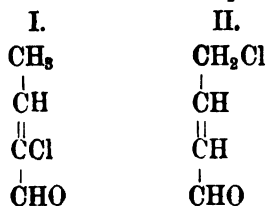
Von Ad. Lieben und S. Ziesel.

III. Abhandlung.

Constitution des Butyrchlorals.

Wir haben in der vorhergehenden Abhandlung¹ die Art und Weise, wie sich die Condensation zwischen zwei Aldehydmoleculen unter Austritt von H₂O vollzieht, auf experimentellem Weg aufgeklärt und auch angegeben, dass es uns gelungen ist, Condensation zwischen zwei verschiedenen Aldehyden (Acetaldehyd und Propionaldehyd) herbeizuführen.

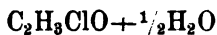
Es schien von Interesse, auch die Condensation eines Aldehyds mit einem halogensubstituirten Aldehyd zu versuchen, und zwar haben wir zu diesem Zweck die Einwirkung von Acetaldehyd auf den von Natterer im hiesigen Laboratorium erhaltenen Monochloraldehyd untersucht. Man durfte erwarten zu einem Monochlorcrotonaldehyd zu gelangen dessen Constitution einer der beiden folgenden Formeln entsprechen würde:



Durch Chloraddition müsste dann ein Körper von der Zusammensetzung des Butyrchlorals entstehen, der mit dem bekannten entweder identisch oder isomer sein konnte.

¹ Monatshefte f. Chemie, 1883 p. 10. oder Sitzgsber. d. k. Akad. d. Wiss. Bd. 87. — p. 110 (Jännerheft 1883).

Wir haben für die Condensation den Monochloraldehyd in Form des schön krystallisirten rein weissen Hydrates



angewandt und etwas mehr als die äquivalente Menge Acetaldehyd im zugeschmolzenen Rohr darauf wirken lassen. Als condensirendes Agens konnte die sonst für Aldehydcondensationen von uns verwendete Lösung von essigsäurem Natron natürlich hier nicht verwendet werden, sondern wurde statt derselben eine Spur rauchender Salzsäure benützt, die dem Gemenge der beiden Aldehyde zugesetzt wurde. Die Menge der Salzsäure sowie die Temperatur, auf welche man erhitzt, endlich die Dauer der Einwirkung sind für den Verlauf der Reaction von erheblichem Einfluss. Eine glatt erfolgende Condensation haben wir nicht erreichen können; stets bilden sich schwarze, schmierige nicht flüchtige Körper, deren Menge mit der Temperatur, der Dauer der Einwirkung und der Menge zugesetzter Salzsäure zunimmt. Als wir in einem Versuch (mit 4 Grm. Monochloraldehydhydrat) mehr als eine Spur Salzsäure in Anwendung brachten, trat schon bei gewöhnlicher Temperatur ein Beginn von Reaction ein, insofern sich eine sehr kleine Wasserschicht abschied, die jedoch auch nach mehreren Tagen nicht weiter zunahm. Als wir dann durch $7\frac{1}{2}$ Stunden auf 100° erhitzten, war der Inhalt der Röhre sehr schwarz und dicklich geworden und auf der schwarzen Flüssigkeit schwamm eine bedeutende Wasserschicht.

In einem anderen Versuch, in welchem wir uns nur eines kleinen Tröpfchens conc. Salzsäure bedienten, trat weder bei gewöhnlicher Temperatur noch selbst bei langem Erhitzen auf 40° , dann auf 60° irgend eine sichtliche Reaction ein. Erst durch mehrtägiges Erhitzen auf 76° bildete sich eine allmählig zunehmende Wasserschicht, doch in dem Masse als sie zunahm, wurde auch die untere Schicht immer schwärzer und dicklicher. Das Gesamtvolum blieb dabei unverändert.

Beim Öffnen der Röhren war kein Druck merklich.

In jedem Falle wurde ihr Inhalt mit Wasserdampf destillirt, wobei anfangs ein Öl, später Wasser überging, das noch etwas von demselben, durch wiederholte Destillation daraus abscheidbaren Öl, ferner, wie die Untersuchung zeigte, Monochloraldehydhydrat,

wahrscheinlich Crotonaldehyd und ausserdem noch höhersiedende Substanzen in Lösung hielt. Das gesammte Destillat zeigte einen an Crotonaldehyd erinnernden, doch noch schärferen Geruch. Der Destillationsrückstand bestand aus schwarzen, schmierigen, beim Erkalten pechartig erhärtenden Substanzen, über denen gelbes, etwas trübes, stark grün fluorescirendes Wasser stand.

Das aus dem Destillat gewonnene Öl, das etwas schwerer als Wasser war, ging, nach dem Trocknen mit Chlorcalcium in Kohlensäureatmosphäre destillirt, grösstentheils zwischen 148° und 160° über (der höher siedende Destillationsrückstand, der vielleicht Condensationsproducte des Monochloraldehyds enthalten mochte, wurde nicht weiter untersucht).

Ein constanter Siedepunkt konnte an dem destillirten Öl, das offenbar keine reine Substanz war, nicht beobachtet werden. Es stellte eine farblose Flüssigkeit dar, die jedoch beim Aufbewahren sich allmählig dunkler färbte, und einen an Crotonaldehyd erinnernden, doch noch stechenderen Geruch besass. Auch die Augen werden beim Arbeiten mit dieser Substanz angegriffen. Eine damit vorgenommene Chlorbestimmung ergab:

0.3047 Grm. mit Kalk geglüht lieferten

0.466 Grm. AgCl, enthalten also 37.83 Proc. Chlor.

Für den erwarteten Monochlorcrotonaldehyd berechnen sich 33.97 Proc. Chlor.¹ Trotz der beträchtlichen Abweichung der Analyse von der Rechnung, ist es doch unzweifelhaft, dass der untersuchte Körper hauptsächlich aus Monochlorcrotonaldehyd besteht. Er ist nämlich fähig sich additionell mit Chlor zu verbinden und das Product liefert mit Wasser ein krystallinisches Hydrat $C_4H_5Cl_2O + H_2O$.

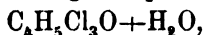
0.652 Grm. Substanz, durch kaltes Wasser gekühlt, nahmen beim Durchleiten von trockenem Chlorgas und Verdrängen des überschüssigen Chlors durch Kohlensäure 0.34 Grm., d. i. 52.15 Proc. Chlor auf.

¹ Es ist bemerkenswerth, dass Pinner (Berl. Ber. [1875] p. 1322) unter den Nebenproducten bei der Darstellung des Croton (Butyr)-chlorals in bei circa 147° siedendes Öl erwähnt, das er für Monochlorcrotonaldehyd hält, das einen höchst stechenden Geruch besitzt, beim Aufbewahren sich dunkler färbt, und in dem er einmal 38.04, ein andermal 38.31 Proc. Cl fand, so fast genau denselben Chlorgehalt, den wir an unserem Condensationsproduct gefunden haben.

0.9704 Grm. Substz. einer anderen Darstellung in gleicher Weise behandelt nahmen 0.5126 Grm. d. i. 52.82 Proc. Chlor auf.

Reiner Monochlorcrotonaldehyd sollte nach der Rechnung 67.94 Proc. Chlor aufnehmen.¹

Die mit Chlor behandelte farblose flüssige Substanz, die jetzt einen gegen früher veränderten Geruch zeigte, wurde mit Wasser versetzt und verwandelte sich dadurch unter Erwärmung in eine weisse Krystallmasse, welche durch Auspressen zwischen Papier und Umkrystallisiren aus 70°—80° heissem Wasser von etwas anhängender öli ger Substanz befreit und völlig rein erhalten wurde. Eine Chlorbestimmung entsprach der Formel



welche 55.04 Proc. Cl fordert.

0.2519 Grm. der über Schwefelsäure getrockneten Krystalle lieferten nach dem Glühen mit Kalk 0.5623 Grm. AgCl, enthalten also 55.22 Proc. Cl.

Die erhaltenen Krystalle stimmen nicht nur in der Zusammensetzung, sondern auch in allen Eigenschaften mit dem bekannten Butyrchloralhydrat überein und sind zweifellos damit identisch. Wir haben sie direct mit Krystallen verglichen, die wir durch Behandlung mit Wasser aus von Kahlbaum bezogenem Butyrchloral dargestellt haben. Geruch, Verhalten zu Wasser, zu Alkohol (aus dem es nicht krystallisirt), zu Kali (wodurch Dichlorpropylen abgespalten wird) erwiesen sich ganz gleichartig.

Der Schmelzpunkt wurde an beiden Präparaten übereinstimmend bei 74°—74.5 beobachtet, was mit Berücksichtigung aller Correctionen 73.7—74.2 entspricht. Krämer und Pinner

¹ Berechnet man umgekehrt aus der beobachteten Chloraufnahme (im Mittel 52.5 Proc. Chlor) die Menge Monochlorcrotonaldehyd, die in der mit Chlor behandelten Substanz enthalten war und zieht zugleich den gefundenen Chlorgehalt (37.83 Proc.) in Rechnung, so ergibt sich, dass diese Substanz aus 77.27 Proc. Monochlorcrotonaldehyd und 22.73 Proc. eines anderen Körpers zusammengesetzt ist, der selbst 50.95 Proc. Chlor enthält und unfähig ist, Chlor additionell aufzunehmen. Dieser andere Körper, der wie es scheint durch Destillation nicht leicht von Monochlorcrotonaldehyd zu trennen ist, könnte vielleicht Dichlorbutyraldehyd sein, dessen Bildung neben und aus Monochlorcrotonaldehyd durch Anlagerung von HCl leicht zu begreifen wäre und der (in annähernder Übereinstimmung mit obiger Rechnung) 50.35 Proc. Chlor enthält.

geben den Schmelzpunkt bei 78° an. Das Schmelzen ist übrigens von einer wenigstens theilweisen Dissociation begleitet, welche sich durch eine schwache Trübung der geschmolzenen Masse und noch offener dadurch manifestirt, dass die wieder erstarrte Substanzprobe bei neuerlichem und wiederholtem Schmelzen einen immer niedrigeren Schmelzpunkt zeigt. Dadurch wird auch die Schmelzpunktbestimmung beeinflusst, so zwar, dass man bei raschem Erhitzen in freilich unsicherer Weise einen höheren, dagegen bei vorsichtigem Erhitzen einen um so niedrigeren Schmelzpunkt findet, je langsamer man die Temperatur ansteigen lässt. Ja wir haben uns überzeugt, dass man schon bei 71° vollständiges Schmelzen herbeiführen kann, wenn man diese Temperatur durch eine Reihe von Stunden constant erhält.

Herr Prof. v. Lang hatte die Güte eine krystallographische Vergleichung der beiden Präparate vorzunehmen und hat sie auch in dieser Beziehung völlig identisch befunden. Da, so viel wir wissen, noch keine Krystallmessungen von Butyrylchloralhydrat vorliegen, so dürften die nachstehenden Beobachtungen v. Lang's um so mehr Dank verdienen.

Krystallsystem: rhombisch,

Elemente: $a : b : c = 0.6486 : 1 : 1.1939$,

Beobachtete Formen: (001), (011), (111),

Habitus: tafelförmig durch Vorherrschen der Flächen (001).

Durch die vorstehenden Untersuchungen kann als erwiesen betrachtet werden, dass aus der Condensation von Acetaldehyd mit Monochloraldehyd ein Chlorcrotonaldehyd hervorgeht, der durch Chloraddition das bekannte Butyrylchloral liefert. Dadurch sind neue Anhaltspunkte gewonnen, um die Frage nach der Constitution dieses Körpers endgiltig zur Entscheidung zu bringen. Soviel nämlich auch das Butyrylchloral Gegenstand der Untersuchung gewesen ist, so reichen doch die bisher bekannten That-sachen nicht aus, um uns erkennen zu lassen, wie und an welche Kohlenstoffatome die Chloratome im Molecul gebunden sind.

Ursprünglich waren Krämer und Pinner, die Entdecker des damals als Crotonchloral bezeichneten Körpers, von der Ansicht ausgegangen, dass er ähnlich dem gewöhnlichen Chloral eine CCl_2 -Gruppe enthalten müsse. Später namentlich als seine Zusammensetzung richtig erkannt worden war und die Erkenntniss sich

Bahn brach, dass er wahrscheinlich durch eine Chloraddition entstehe, wurde die angeführte lang festgehaltene Ansicht durch andere Ansichten, die in vorgeschlagenen Formeln für das Butyrchloral ihren Ausdruck fanden, verdrängt und gegenwärtig scheint die, wenn wir nicht irren, zuerst von Pinner und Klein als „wahrscheinlich“ aufgestellte Formel $\text{CH}_3 \cdot \text{CCl}_2 \cdot \text{CHCl} \cdot \text{CHO}$, welche auch in die Handbücher von Kolbe-Meyer und Beilstein übergegangen ist, die gewöhnlich angenommene zu sein.

Aus der vorstehend dargelegten Entstehung des Butyrchlorals aus einem Condensationsproduct, dessen Constitution durch die Eingangs angeführten Formeln I oder II ausgedrückt wird, folgt, dass diesem Körper eine der beiden Formeln $\text{CH}_3 \cdot \text{CHCl} \cdot \text{CCl}_2 \cdot \text{CHO}$ oder $\text{CH}_2\text{Cl} \cdot \text{CHCl} \cdot \text{CHCl} \cdot \text{CHO}$ zukommen muss, welche beide, wie man sieht, von der heute meist angenommenen Formel des Butyrchlorals abweichen. Es spitzt sich nun die Frage dahin zu, ob das Butyrchloral eine intacte CH_3 -Gruppe enthält oder nicht. Die experimentelle Antwort auf diese Frage ist leicht zu geben. Wir haben zu diesem Zweck untersucht, ob das Dichlorpropylen, welches durch eine einfache Reaction aus Butyrchloral hervorgeht, bei der Oxydation Essigsäure liefert oder nicht.

Das Dichlorpropylen $\text{C}_3\text{H}_4\text{Cl}_2$ wurde aus Butyrchloralhydrat durch Kochen mit Soda am Rückflusskühler dargestellt, davon abdestillirt und als constant bei 77° (uncorr.) siedendes Öl erhalten. 1 Grm. davon wurde, nach dem Verhältniss $\text{C}_3\text{H}_4\text{Cl}_2$ auf 30, mit 2.65 Grm. Kaliumbichromat, 3.5 Grm. Schwefelsäure und 25 Cc. Wasser in ein Glasrohr eingeschmolzen und durch 48 St. auf 100° , dann noch durch 24 St. auf 130° erhitzt. Die Reaction war auch dann noch nicht ganz beendet, denn die Lösung zeigte noch keine rein grüne Farbe und eine geringe Menge Öl war im Rohr noch wahrzunehmen. Beim Öffnen des Rohr's zeigte sich starker Druck (wohl von CO_2). Die Lösung wurde abdestillirt, das saure Destillat mit Soda gesättigt und wieder abdestillirt, wobei zuerst Öltröpfchen (wohl von unverändertem Dichlorpropylen) übergingen. Der Destillationsrückstand wurde mit Phosphorsäure angesäuert und abdestillirt, endlich das saure Destillat durch Digestion mit Silberoxyd in Silbersalz übergeführt, das wir successive in 3 Fractionen krystallisiren liessen. Die Krystalle waren schöne Nadeln vom Aussehen des

essigsäuren Silbers und wurden behufs Analyse über Schwefelsäure getrocknet.

Erste Fraction. 0.2166 Grm. lieferten beim Glühen 0.139 Grm. Ag, enthalten also 64.17 Proc. Silber.

Letzte Fraction. 0.2404 Grm. hinterliessen beim Glühen 0.1544 Grm. Ag, enthalten also 64.23 Proc. Silber.

Essigsäures Silber enthält 64.67 Proc. Silber.

Damit ist festgestellt, dass durch Oxydation des Dichlorpropylens Essigsäure und zwar als ein Hauptproduct gebildet wird, und daran knüpft sich der weitere Schluss, dass im Dichlorpropylen wie auch im Butyrylchloral eine intacte Methylgruppe enthalten ist.

Für das Dichlorpropylen ist daraus die Constitution noch nicht mit Sicherheit zu entnehmen, denn neben der am nächsten liegenden Formel $\text{CH}_2 \cdot \text{CH} : \text{CCl}_2$ bietet sich auch die andere $\text{CH}_2 \cdot \text{CCl} : \text{CHCl}$ als möglich dar. Dagegen darf die Constitution des Butyrylchlorals als sicher festgestellt betrachtet werden. Sie entspricht der Formel $\text{CH}_2 \cdot \text{CHCl} \cdot \text{CCl}_2 \cdot \text{CHO}$ und damit ist zugleich die Constitution der zahlreichen Derivate des Butyrylchlorals z. B. des kürzlich von Garzarolli-Thurnlakh daraus erhaltenen Trichlorbutylalkohols, ferner der Trichlorbuttersäure, der Trichlorangelactinsäure u. s. w. aufgeklärt.

Was die Entstehung des Butyrylchlorals bei seiner gewöhnlichen Bereitung durch Einwirkung von Chlor auf Aldehyd oder Paraldehyd anlangt, so bieten sich zur Erklärung dieses chemischen Processes gegenwärtig zwei Wege dar. Man kann annehmen, dass der Acetaldehyd zunächst in Crotonaldehyd, dann in Monochlorcrotonaldehyd verwandelt wird (welcher Körper von Pinner im Rohproduct aufgefunden worden und ohne Zweifel mit dem hier beschriebenen Condensationsproduct identisch ist), und dass dann durch weitere Chloreinwirkung der Monochlorcrotonaldehyd in Butyrylchloral übergeht, — oder aber man kann die vielleicht nach einfachere Annahme machen, dass durch die Einwirkung von Chlor auf Aldehyd zunächst Monochloraldehyd gebildet wird, der kaum entstanden unter dem Einfluss der zugleich frei werdenden Salzsäure sich mit Acetaldehyd zu Monochlorcrotonaldehyd condensirt und dadurch zur Entstehung des Butyrylchlorals Gelegenheit gibt, in der Weise wie sie Schritt für Schritt in vorstehender Abhandlung dargelegt ist. Für die zweite Erklärungsweise

spricht die Erwägung, dass erstens Crotonaldehyd unter den Producten der Einwirkung von Chlor auf Aldehyd bisher nicht nachgewiesen ist, und dass zweitens bei Gegenwart von Wasser aus Aldehyd Chloral entsteht, was die vorgängige Bildung von Monochloraldehyd wohl unzweifelhaft macht. Durch die Anwesenheit von Wasser wird nämlich, wie man wohl annehmen darf, die Condensation des Monochloraldehyds mit Acetaldehyd verhindert und so geht dann die Einwirkung des Chlors weiter und verwandelt den Monochloraldehyd in Chloral.

Wir sind mit Versuchen über die Einwirkung von Chlor auf Crotonaldehyd beschäftigt und hoffen die Frage nach der Entstehungsweise des Butyrylchlorals definitiv aufklären zu können.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass aus der ermittelten Constitution des Butyrylchlorals für das oben durch Condensation erhaltene Monochlorcrotonaldehyd die Eingangs aufgestellte Formel I, $\text{CH}_2 \cdot \text{CH} : \text{CCl} \cdot \text{CHO}$ sich ergibt und dass demnach bei der Condensation der Sauerstoff des Acetaldehydes auf die dem Chlor benachbarten Wasserstoffatome des Monochloraldehydes eingewirkt hat, dass also auch hier, wie beim Propionaldehyd, die Methylengruppe sich als angreifbarer durch den Aldehydsauerstoff erwiesen hat als die Methylgruppe.

Über $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyd, ein Condensationsproduct des Monochloraldehyds.

Von Dr. Konrad Natterer.

(Aus dem k. k. Universitätslaboratorium des Professors A. Lieben.)

Bei Ausführung meiner, vor Jahresfrist veröffentlichten Arbeit „Über Monochloraldehyd“¹ hatte ich wiederholt Gelegenheit zu beobachten, dass sich Monochloraldehyd bei längerem Erhitzen unter Dunkelfärbung und Abspaltung von Wasser in ein hochsiedendes, äusserst scharf riechendes Öl verwandelt, welchen Umstand ich auch in meiner Publication an mehreren Stellen erwähnt habe.

Es lag nahe, diesen Vorgang den seit Jahren von verschiedenen Forschern mit so günstigen Resultaten untersuchten Aldehydcondensationen anzureihen, so dass der erste Fall einer Condensation eines halogensubstituirten Aldehydes der Methanreihe vorläge, welche Vermuthung durch die im Folgenden wiedergegebene Untersuchung bestätigt wurde.

Darstellung und Eigenschaften des $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyds.

Was das Ausgangsmaterial betrifft, so habe ich gefunden, dass sowohl in diesem Fall, als auch bei anderweitigen Reactionen das Hydrat dem wasserfreien Monochloraldehyd vorzuziehen ist, da sich das letztere zu leicht polymerisirt, und so die Reaction zum Stillstande gebracht oder wenigstens verzögert wird.²

¹ Monatshefte für Chemie (1882), p. 442 ff.

² Leider ist es erforderlich, reines Monochloraldehydhydrat zur Condensation zu verwenden, da das, aus Monochloracetal und Oxalsäure gewonnene, rohe, Alkohol und Monochloracetal enthaltende Monochloraldehydhydrat bei Gegenwart von Mineralsäuren oder Salzen schon bei

Zusatz einer fremden Substanz, wie bei den Condensationen der anderen Aldehyde ist nicht unbedingt nöthig, da auch beim Erhitzen von reinem, wasserfreiem Monochloraldehyd oder seinem Hydrat die Condensation eintritt, wohl desshalb, weil sich etwas Chlorwasserstoff abspaltet und dieser wasserentziehend wirkt. — Trotzdem füge ich dem zu condensirenden Monochloraldehydhydrat einen Tropfen Schwefelsäure zu, da ich bemerkt habe, dass sich bei Gegenwart einer Spur der letzteren Säure das so beständige (krystallisirte) Polymere des Monochloraldehyds, das stets, wenn auch in geringer Menge, neben den Condensationsproducten entsteht, bei langem Erhitzen auf 100° allmählig in Monochloraldehyd, respective in seine Condensationsproducte umwandelt.

Die wichtigsten Rollen fallen der Temperatur und der Dauer des Erhitzens zu. Bei einer Reihe von Versuchen, die angestellt wurden, um die günstigste Temperatur ausfindig zu machen, hat sich gezeigt, dass bei gewöhnlicher Temperatur eine mit etwas Chlorwasserstoff versetzte, concentrirte wässrige Lösung von Monochloraldehyd auch bei monatelangem Stehen keine Veränderung erleidet, dass bei sechstägigem Erhitzen von Monochloraldehydhydrat mit einer Spur Chlorwasserstoff auf 75° fast keine Färbung auftritt, sich wohl Wasser abspaltet, aber so wenig, dass es gelöst bleibt, und sich schliesslich neben viel unverändertem Monochloraldehydhydrat hauptsächlich krystallisirtes Polymeres des Monochloraldehyds vorfindet. Die Bildung des letzteren nimmt dann mit steigender Temperatur ab, doch entstehen auch bei 100° noch geringe Mengen davon. — Schon unter 100° stellt sich der Bildung des zunächst am meisten interessirenden, flüchtigsten Condensationsproductes ein anderer störender Umstand entgegen, nämlich das Auftreten von dunkelgefärbten, nicht unzersetzt siedenden, sonst jedoch ungemein beständigen Producten. Da diese Harzbildung oberhalb 100° sehr rasch zunimmt, empfiehlt sich die Einhaltung einer Temperatur von 100° am meisten. Da ferner bei zu langem Erhitzen reichliche Mengen

gewöhnlicher Temperatur, noch mehr aber beim Erhitzen durch Wechselwirkung von Alkohol und Monochloraldehyd zur Rückbildung von Monochloracetal Gelegenheit gibt.

vom Harz entstehen, soll man nicht länger als 15 Stunden erhitzen.

Erhitzt man also Monochloraldehydhydrat mit einem Tropfen Schwefelsäure durch 15 Stunden auf 100° , so erhält man eine schwere, dunkelgefärbte ölige Schicht und eine bedeutende, auf jener aufschwimmende wässerige (die letztere nimmt circa ein Drittel des Gesamtvolumens ein); das Gesamtvolum bleibt beim Condensationsvorgang nahezu unverändert. Die wässerige Schicht enthält noch Monochloraldehyd und wird entfernt¹; die ölige wird sofort nach dem Erkalten mit Wasser gewaschen, wonach sie aus Condensationsproducten und etwas polymerem Monochloraldehyd besteht; sie wird im Vacuum destillirt, wobei höhere, harzartige Condensationsproducte im Rückstand bleiben, während sich in der mit Eis gekühlten Vorlage, in die man zweckmässig etwas Wasser bringt, neben den leichter flüchtigen Condensationsproducten (durch Dissociation des Polymeren entstandenes) Monochloraldehyd ansammelt, das sich im Wasser der Vorlage löst, sowie auch (der Dissociation entgangenes) mitgerissenes Polymeres selber.

Diese Art der ersten, wenn auch unvollständigen Scheidung der entstandenen Producte hat sich als praktischer erwiesen als die Destillation des Rohproductes mit Wasserdampf, da, um die flüchtigeren Condensationsproducte zugleich mit dem krystallisirten Polymeren (welch' letzteres in reinem Zustande mit Wasserdampf sehr leicht flüchtig ist,) aus dem dicken, harzreichen Öl herauszutreiben, sehr langes Durchleiten von Wasserdampf von Nöthen ist, was um so misslicher, als gerade das zunächst zu erhaltende, erste Condensationsproduct durch heisses Wasser langsam eine von Schwarzfärbung begleitete Zersetzung erleidet.

Das nach Obigem erhaltene Öl wird zur Entfernung von eventuell gelöstem Monochloraldehyd nochmals mit Wasser gewaschen, dann durch längeres Durchleiten von trockenem Kohlendioxyd im Vacuum und bei gelinder Erwärmung getrocknet und im Vacuum (im Kohlensäurestrom) fractionirt, wobei man

¹ Aus dieser wässerigen Schicht und aus den Waschwässern der öligen kann man durch Ausschütteln mit Äther, unter gleichzeitigem Sättigen mit Natriumsulfat, Monochloraldehydhydrat zurückgewinnen.

alsbald eine bei 86—87° siedende Hauptfraction erhält, während unter dieser Temperatur Nichts, oberhalb derselben erst von 130° an (bis ca. 150°) eine kleine Menge eines dicken Öles überdestillirt. Jene bei 86—87° siedende Hauptfraction bildet den Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Die auf eben beschriebene Weise erhaltene Substanz vom Siedepunkt 86—87° bei 18 Mm. Druck, welcher Siedepunkt bei verschiedenen Arten der Reinigung sich stets gleich blieb, stellt eine leicht bewegliche, stark lichtbrechende, gleich nach der Destillation wasserhelle sonst gelbgefärbte Flüssigkeit dar, bei — 30° nicht viel dicker werdend, in Kohlensäureschnee glasartig erstarrend, von sehr scharfem Geruch, nahezu unlöslich in Wasser, bei gewöhnlichem Druck unter Zersetzungserscheinungen destillirend.

Diese Substanz gab bei der Elementaranalyse folgende Zahlen:

- I. 0·2022 Grm. davon lieferten (mittelt Kupferoxyds bei vorgelegtem Silber verbrannt) 0·2615 Grm. CO₂ und 0·056 Grm. H₂O.
 II. 0·2059 Grm. (mit Kalk geglüht) gaben 0·4195 Grm. AgCl.
 III. 0·2373 Grm. einer anderen Darstellung gaben 0·307 Grm. CO₂ und 0·0687 Grm. H₂O.
 IV. 0·2017 Grm. lieferten 0·4145 Grm. AgCl.

In 100 Theilen:

	Gefunden				Berechnet für C ₄ H ₄ Cl ₂ O
	I.	II.	III.	IV.	
Kohlenstoff	35·26	—	35·27	—	34·53
Wasserstoff	3·06	—	3·20	—	2·88
Chlor	—	50·36	—	50·81	51·08
Sauerstoff	—	—	—	—	11·51
					100·00

Die gefundenen Zahlen stimmen genügend mit denen überein, die ein Körper verlangt, der aus dem Monochloraldehyd dadurch entstanden ist, dass je zwei Moleküle ein Molekül Wasser abgespalten haben.

Nach der Theorie der Atomverkettung und nach Analogie mit den Condensationen anderer Aldehyde ist für dieses Conden-

sationsproduct nur eine Structurformel möglich, nämlich die des $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyds:



Und wirklich lassen sich die in dieser Abhandlung vorzubringenden Thatsachen nach keiner anderen Formel deuten; in dieser jedoch finden sie ihren klaren und vollständigen Ausdruck.

Die Aldehydnatur der Substanz gibt sich durch die starke Silberreduction beim Kochen mit ammoniakalischer Silberlösung kund, sowie durch die beim Kochen mit Kalilauge auftretende Rothfärbung und Harzabscheidung, durch die Absorption von Sauerstoffgas unter gleichzeitiger Säurebildung, endlich durch die Fähigkeit sich mit Natriumbisulfit zu verbinden, welche letztere Reaction weiter unten näher dargelegt wird.

Die in obiger Formel gezeichnete doppelte Bindung soll andeuten, dass sich an den Körper additionell Brom und Chlorwasserstoff anlagern, und zwar an ein Molekül genau ein Molekül der genannten Substanzen. Die daraus hervorgehenden neuen Körper sollen ebenfalls beschrieben werden.

Das Kohlenstoffbindung zwischen den beiden zusammengetretenen Monochloraldehydmolekülen statt hat, wurde durch die Reduction bewiesen; für die Stellung der beiden Chloratome und die Lage der doppelten Bindung waren die bei energischer Oxydation auftretenden Zerfallsproducte bestimmend

Reduction des $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyds.

Das Dichlorcrotonaldehyd wurde nach derjenigen Methode reducirt, welche Lieben und Zeisel als die für Crotonaldehyd und Butylchloral geeignetste erkannt haben.

Demnach wurden 5 Grm. Dichlorcrotonaldehyd in 150 Grm. 60 procentiger Essigsäure gelöst, 30 Grm. feiner Eisenfeile dazugebracht und unter häufigem Umschütteln vier Wochen stehen gelassen. Dann wurde mit ca. 2 Volumina Wasser verdünnt und

zur Hälfte abdestillirt, wobei anfänglich zugleich mit Wasser ein leichtes Öl überging, welches abgehoben wurde und aus der wässerigen Schicht des Destillates durch eine Reihe von partiellen Destillationen einen kleinen Zuwachs erfuhr.

Das Öl wog 3 Grm., war nahezu chlorfrei und wurde mit dem halben Volum Natriumbisulfidlösung geschüttelt, wobei die Natriumbisulfidlösung entfärbt wurde, hingegen keine merkliche Erwärmung eintrat und das Volum des Öles sich kaum verminderte.

Die Bisulfidschicht wurde mit überschüssiger Sodalösung versetzt, ohne dass Aldehydgeruch auftrat; als jedoch destillirt wurde, trat Letzteres sofort ein und es sammelten sich im Destillat einige leichte Öltröpfchen an. Die wässerige Lösung dieses Öles reagirte neutral, reducirte ammoniakalische Silberlösung unter Spiegelbildung, nahm beim Verweilen an der Luft alsbald saure Reaction und den Geruch von Buttersäure an. Diese Öltröpfchen waren wohl (Normal)-butyraldehyd.

Der in Natriumbisulfidlösung unlösliche Theil des ursprünglichen Öles wurde mit verdünnter Natronlauge 2 Stunden am Rückflusskühler gekocht, dann mit Wasser versetzt und zur Hälfte abdestillirt. Zum klaren wässrigen Destillat, dessen erste Antheile ein Öl enthalten hatten, wurde unter Umschütteln so lange Brom zufließen gelassen, als noch Entfärbung eintrat, wozu 2·342 Grm. Brom nöthig waren. (Unter der Annahme, dass das Brom sich an Crotonylalkohol angelagert hat, waren 1·05 Grm. des letzteren vorhanden gewesen.)

Hierauf wurde durch 40 Stunden auf 100° erhitzt, dann zur Hälfte abdestillirt:

Ins Destillat ging Anfangs ein leichtes, roth gefärbtes Öl von Crotonaldehydgeruch, das abgehoben wurde; aus der wässerigen Schicht konnte durch fortgesetztes partielles Destilliren zuletzt unter Zusatz von Pottasche noch Etwas von dem Öl gewonnen werden. Dieses Öl (1·1 Grm.) wurde mit Natriumbisulfidlösung geschüttelt, wobei kaum merkliche Erwärmung eintrat und das Volum des Öles sich ein wenig verringerte. Die Bisulfidschicht wurde entfernt, das Öl mit etwas Kochsalzlösung gewaschen, mit geglühter Pottasche getrocknet und destillirt. Beinahe Alles ging von 115—119° über, während reiner Normalbutylalkohol bei 116·88° siedet. Da die Reindarstellung von Alkoholen,

besonders in kleiner Menge Schwierigkeiten bietet, wurde das wasserhelle, alkoholisch riechende Destillat durch 22stündiges Erhitzen mit 6 Grm. rauchender Bromwasserstoffsäure auf 100° in das Bromid übergeführt. Das letztere schwamm auf der Bromwasserstoffsäure als farbloses Öl auf, in einer dem angewandten Alkohol entsprechenden Menge. Es wurde abgehoben, mit Wasser gewaschen, mit Chlorcalcium getrocknet und destillirt. Es destillirte nahezu vollständig bei 100° . Reines Normalbutylbromid hat den Siedepunkt $99\cdot88^\circ$.

0·1839 Grm. des Destillates lieferten 0·2532 Grm. AgBr.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für C_4H_9Br
Brom	58·56	58·39

Ein Hauptproduct der Reduction des α -Dichlorcrotonaldehyds ist also Normalbutylalkohol.

Der Rückstand von der Destillation der durch die Brombehandlung des Alkoholgemenges und nachträgliches langes Erhitzen mit Wasser erhaltenen, wässerigen Flüssigkeit wurde von etwas Harz abfiltrirt, zur Entfernung des Bromwasserstoff mit überschüssigem Bleioxyd in der Wärme digerirt, eingedampft, der Abdampfungsrückstand mit Alkohol ausgezogen, der Alkohol verjagt, der syrupöse Rückstand in Wasser gelöst, mit Schwefelwasserstoff entbleiet, das Filtrat vom Bleisulfid aufgeköcht, mit essigsaurem Silber in geringem Überschuss versetzt, vom Bromsilber abfiltrirt, das Filtrat durch Schwefelwasserstoff vom Silber befreit und am Wasserbade unter öfterem Erneuern des Wassers eingedampft. Es hinterblieb eine sehr dicke Flüssigkeit von süßem Geschmack — Butenylglycerin.

Das andere Hauptproduct der Reduction ist demnach Crotonylalkohol, der durch die Behandlung mit Brom und Wasser Butenylglycerin geliefert hat. (Lieben und Zeisel¹)

Das erste Condensationsproduct des Monochloraldehyds liefert also bei der Reduction mit Eisen und Essigsäure dieselben Producte wie Crotonaldehyd und Butylchloral, ein Beweis, dass seine Constitution denen der beiden zuletzt genannten Aldehyde

¹ Monatshefte I. 832 ff.

analog sein muss. In vollster Übereinstimmung mit dieser Schlussfolgerung steht seine oben aufgestellte Constitutionformel, die es als $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyd darstellt.

Oxydation des $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyds mittelst rauchender Salpetersäure.

3 Grm. Dichlorcrotonaldehyd wurden in 15 Grm. rauchender Salpetersäure gelöst, wobei trotz Kühlung energische Reaction stattfand. Nach einer Woche (als sich in den letzten 24 Stunden keine rothen Dämpfe mehr entwickelt hatten) wurde ein kleiner Theil ohne Weiteres mit Wasser verdünnt, wodurch ein Tropfen Chlorpikrin gefällt wurde; die wässerige Lösung gab mit ammoniakalischem Gypswasser einen reichlichen Niederschlag, der alle Eigenschaften von oxalsaurem Calcium besass.

Bei der theilweisen Destillation der Hauptmenge entwichen massenhaft rothe Dämpfe und viel Kohlendioxyd; das Destillat enthielt eine kleine Menge Chlorpikrin, dessen Auftreten ich auch bei der Oxydation des Monochloraldehyds mit Salpetersäure beobachtet habe.¹ Der bei 120° (Thermometer im Dampf) bleibende Rückstand erstarrte beim Erkalten krystallinisch. Diese Krystallmasse roch nach Monochloressigsäure, zerfloss an der Luft und enthielt noch Oxalsäure und Salpetersäure; sie wurde in wenig Wasser gelöst und die Lösung zur Entfernung der Salpetersäure über Ätznatron und Schwefelsäure wieder eindunsten gelassen. Dann wurde in Wasser aufgenommen, mit verdünntem Barytwasser genau neutralisirt, vom oxalsauren Baryum abfiltrirt, das Filtrat im Vacuum über Schwefelsäure eindunsten gelassen, der undeutlich krystallinische Rückstand zu einem weissen Pulver zerrieben und über Schwefelsäure bis zur Annahme eines constanten Gewichtes gestellt. Es blieb nahezu ein Gramm des Baryumsalzes.

0·4246 Grm. davon gaben nach Carius analysirt 0·3452 Grm.

AgCl und 0·2856 Grm. BaSO₄.

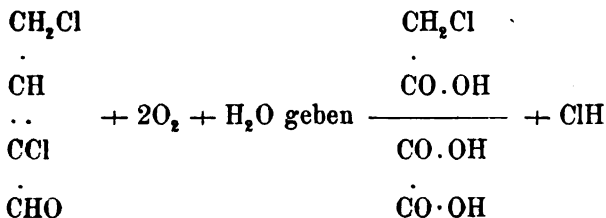
In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für (C ₂ H ₂ ClO ₂) ₂ Ba + H ₂ O
Chlor	20·11	20·76
Baryum	39·54	40·06

¹ Monatshefte (1882), p. 457.

Die gefundenen Werthe stimmen genügend auf das mit einem Molekül Wasser krystallisirende Baryumsalz der Monochloressigsäure.¹

Bei energischer Oxydation zerfällt also das Condensationsproduct in Oxalsäure und Monochloressigsäure, was unter der Annahme der für das Condensationsproduct aufgestellten Constitutionsformel leicht verständlich ist:

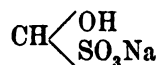


Der Chlorwasserstoff liefert mit Salpetersäure freies Chlor, das die theilweise Umwandlung der Monochloressigsäure in Chlorpikrin bedingt.

Natriumdisulfitverbindung des $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyds.

4 Grm. Dichlorcrotonaldehyd wurden mit 2 Volumina einer concentrirten Natriumbisulfitlösung (vom spec. Gew. 1.37) geschüttelt, wobei unter Erwärmung (wesshalb mit Wasser gekühlt wurde) vollständige Lösung eintrat und sich alsbald Krystalle ausschieden, die sich beim Erkalten vermehrten und das Ganze in eine compacte Masse verwandelten. Nachdem das Röhrchen über Nacht bei 0° gestanden, wurden die Krystalle aufs Filter gebracht, abgesaugt und zwischen kalkfreiem Filtrirpapier gepresst. Auf diese Weise wurden 6 Grm. eines weissen in Wasser ziemlich schwer löslichen Pulvers erhalten, dem, wie die Analyse und die folgenden Reactionen beweisen, die Formel:

¹ In die Arbeit R. Hoffmann's „über Monochloressigsäure“ (Ann. Chem. Pharm. 102, p. 10) und daraus in die chemischen Handbücher hat sich ein Versehen eingeschlichen, indem für monochloressigsäures Baryum 2 Mol. H₂O angegeben werden, trotzdem dass der für Baryum gefundene, wie auch der, dort angegebene, berechnete Werth auf 1 Mol. H₂O stimmen.



mit 3 oder 4 Mol. Krystallwasser

zukommt.

- I. 0·4853 Grm. davon gaben nämlich, nach Carius behandelt, 0·4495 Grm. AgCl und 0·3608 Grm. BaSO₄.
 - II. 0·4125 Grm. mit Kalk geglüht, lieferten 0·3745 Grm. AgCl.
 - III. 0·5664 Grm. gaben, mit Salpetersäure und Schwefelsäure eingedampft und geglüht, 0·1452 Grm. Na₂SO₄.
- Hieraus ergeben sich die Atomverhältnisszahlen:

$$\text{S} : \text{Cl} : \text{Na} = 1 : 2 \cdot 02 : 1 \cdot 12$$

In 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für	
	I.	II.	III.	$\text{C}_4\text{H}_4\text{Cl}_2\text{O} + 3\text{H}_2\text{O}$	$\text{SO}_3\text{NaH} + 4\text{H}_2\text{O}$
Chlor	22·91	22·44	—	23·9	22·53
Schwefel	10·19	—	—	10·77	10·15
Natrium	—	—	8·29	7·74	7·30

Versetzt man eine wässrige Lösung der analysirten Natriumbisulfidverbindung mit Sodalösung, so tritt in der Kälte nur schwache Reaction ein; erwärmt man jedoch, so entwickelt sich reichlich Kohlensäure, sonst tritt aber kein Geruch auf; bei der partiellen Destillation geht dann ins Destillat nur Wasser, während der gelbgefärbte Rückstand Natriumchlorid und Natriumsulfid enthält. Dieser Rückstand entfärbt sich beim Ansäuern mit Schwefelsäure und gibt, am Platinblech eingedampft, eine klebrige Salzmasse, die beim weiteren Erhitzen schmilzt und sich unter Verkohlung und Entwicklung eines scharfen, an organische Schwefelverbindungen erinnernden Geruchs stark aufbläht, neben anorganischem Salz eine leicht verglimmende Kohle hinterlassend.

Das Auftreten von Natriumchlorid und einer fixen, schwefelhaltigen organischen Verbindung findet eine Erklärung, wenn

man annimmt, dass die Soda zuerst die Natriumdisulfitverbindung thatsächlich zerlegt, das frei gemachte Dichlorcrotonaldehyd sich aber sofort mit Natriumsulfit unter Bildung von Natriumchlorid und des Natriumsalzes einer Aldehydsulfonsäure umsetzt.

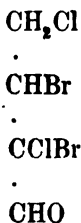
Diese Annahme gewinnt sehr an Wahrscheinlichkeit durch den Umstand, dass eine concentrirte Lösung der Natriumbisulfitverbindung bei Zusatz von Schwefelsäure unter Entwicklung von Schwefeldioxyd quantitativ das Dichlorcrotonaldehyd abspaltet, wohl deshalb, weil durch die Umwandlung des Natriumsulfits in Natriumsulfat die Möglichkeit einer weiteren Reaction benommen wird.

Bromadditionsproduct des $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyds und sein Hydrat.

In 0·5363 Grm $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyd wurde unter Eiskühlung und häufigem Umschütteln solange Brom zufließen gelassen, bis keine Entfärbung mehr eintrat, was nach einem Zusatz von 0·5975 Grm. Brom der Fall war, während die Theorie für die Vereinigung von je einem Molekül Dichlorcrotonaldehyd mit einem Molekül Brom 0·617 Grm. Brom verlangt.

Das so erhaltene Product enthält keinen Bromwasserstoff, ist schwach gelb gefärbt, lässt sich ohne Zersetzung beliebig lang aufbewahren; sein Geruch ist wenig verschieden von dem des Dichlorcrotonaldehyds, bei -30° wird es sehr dicklich, bei -78° erstarrt es glasartig.

Diesem Körper kann nach der Bildungsweise nur die Formel:



zukommen, wonach er als $\alpha\gamma$ -Dichlor- $\alpha\beta$ -dibrom-(normal)-butyraldehyd aufzufassen ist.

Beim Schütteln mit einer concentrirten Natriumdisulfitlösung tritt sehr starke Erwärmung und Abscheidung einer krystallinischen, in Wasser schwer löslichen Natriumdisulfitverbindung ein.

Wird das Bromadditionsproduct mit dem gleichen Volum Wasser geschüttelt, so findet nur mässige Erwärmung und kaum merkliche Lösung statt; gleichwohl erstarrt das Öl bald zu einer weissen, compacten Krystallmasse.

Diese Krystalle können durch Anreiben mit Wasser, Absaugen, Pressen zwischen Filtrirpapier und einmaliges Umkrystallisiren aus Äther leicht rein gewonnen werden.

0·4863 Grm. davon gaben 0·2683 Grm. CO_2 und 0·0988 Grm. H_2O .

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $\text{C}_4\text{H}_4\text{Cl}_2\text{Br}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O}$
Kohlenstoff	15·05	15·14
Wasserstoff	2·24	1·89

Demnach liegt das Hydrat des Bromadditionsproductes vor; dasselbe ist luftbeständig, von schwachem, melonenartigen Geruch, schwer löslich in Wasser, löslich in Alkohol und in Äther. Bei 72° (nicht scharf) schmilzt es zu einer trüben Flüssigkeit; die Trübung nimmt beim weiteren Erhitzen (bis 85°) zu, beim Erkalten wieder ab und verschwindet bei ca. 70°; die klare Flüssigkeit erstarrt wieder bei Zimmertemperatur nach einiger Zeit. Dieses Verhalten beweist, dass sich das Hydrat des Bromadditionsproductes schon bei seinem Schmelzpunkte in seine Componenten spaltet.

Wenn man die wässrige Lösung des Bromadditionsproductes mit Kalilauge oder Sodalösung versetzt, so scheidet sich sofort ein schweres Öl von petroleumartigem Geruch ab unter gleichzeitiger Bildung von Halogenmetall und ameisensaurem Salz beim Erhitzen verändert sich der Geruch. — Es ist höchst wahrscheinlich, dass sich das Bromadditionsproduct gegenüber wässrigen Alkalien und Alkalicarbonaten ähnlich verhält, wie Chloral und Butylchloral, dass sich unter Abspaltung der CO-Gruppe und von Brom- oder Chlorwasserstoff ein halogensubstituirtes Propylen oder Allylen bildet.

Chlorwasserstoffadditionsproduct des $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyds.

Leitet man durch $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyd bei 0° einen langsamen Strom von Chlorwasserstoff, so tritt Absorption des letzteren und sich immer steigernde Verdickung ein. Nach 12-stündigem Durchleiten lässt man die mit Chlorwasserstoff gesättigte, ungemein dicke Flüssigkeit noch zwei Tage stehen, worauf man durch einen Kohlensäurestrom den ungebundenen Chlorwasserstoff verdrängt.

- I. 0.9885 Grm. $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyd nahmen auf diese Weise 0.2688 Grm. ClH auf, während sich für eine Verbindung von 1 Molekül Dichlorcrotonaldehyd mit 1 Molekül Chlorwasserstoff 0.2595 Grm. ClH berechnen.
- II. 12.521 Grm. Dichlorcrotonaldehyd nahmen 3.215 Grm. ClH auf, statt 3.2878 Grm. ClH.
- III. 7.023 Grm. nahmen auf 2.062 Grm. ClH statt 1.844 Grm.
- IV. 17 Grm. nahmen auf 4.5 Grm. ClH statt 4.46 Grm.

Die so erhaltene Substanz ist ein Trichlor(normal)butyraldehyd, also ein Isomeres des Butylchloral, an das sie auch dem Geruch nach täuschend erinnert; sie ist dicklicher als Butylchloral, erstarrt bei -78° glasartig, entwickelt beim Stehen keine Salzsäure, oxydirt sich nur äusserst langsam an der Luft, ist schwer löslich in Wasser und bildet kein Hydrat. Beim Schütteln mit einer Natriumdisulfitlösung findet Erwärmung und baldige Abscheidung einer Natriumdisulfitverbindung statt.

Es gibt zwei Möglichkeiten für die Art der Anlagerung des Chlorwasserstoff an $\alpha\gamma$ -Dichlorcrotonaldehyd. Zwischen diesen beiden Möglichkeiten werde ich in einer späteren Abhandlung entscheiden.

Säure des Chlorwasserstoffadditionsproductes.

Das Chlorwasserstoffadditionsproduct lässt sich leicht in die entsprechende, schön krystallisirende Trichlorbuttersäure überführen.

10 Grm. Chlorwasserstoffadditionsproduct wurden in 20 Grm. rauchender Salpetersäure gelöst, wobei Rothfärbung der Flüssig-

keit und Erwärmung eintrat, wesshalb das Kölbchen sofort mit einem Rückflusskühler verbunden und in kaltes Wasser gestellt wurde. Durch mehrere Stunden entwickelte sich ein regelmässiger Strom von rothen Dämpfen. Nach 24 Stunden wurde die dunkelrothe Flüssigkeit bis zur Hälfte des ursprünglichen Volums abdestillirt (Ölbadtemperatur zuletzt 150°). Im Destillat war ein wenig Chlorpikrin vorhanden; der Rückstand wurde mit zwei Volumina Wasser geschüttelt, wobei ein schweres Öl herausfiel, welches wiederholt mit kleinen Mengen Wasser gewaschen wurde. Die Waschwässer enthielten neben Salpetersäure und Trichlorbuttersäure etwas Oxalsäure und Monochloressigsäure. Das Öl wurde dann in Wasser gelöst, die Lösung von einigen harzigen Flocken abfiltrirt, mit Äther ausgeschüttelt, vom ätherischen Auszug der Äther abdestillirt und der Rückstand über Schwefelsäure gestellt, wo er sich bald in eine weisse Krystallmasse verwandelte, die zerrieben, zwischen Papier gepresst und mehrere Tage über Schwefelsäure stehen gelassen wurde.

I. 0·250 Grm. der auf diese Weise erhaltenen Substanz gaben 0·2298 Grm. CO_2 und 0·0594 Grm. H_2O .

II. 0·312 Grm. gaben 0·702 Grm. AgCl .

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $\text{C}_4\text{H}_5\text{Cl}_3\text{O}_3$
	I.	II.	
Kohlenstoff	25·08	—	25·07
Wasserstoff	2·64	—	2·61
Chlor	—	55·67	55·61
Sauerstoff	—	—	16·71
			<hr/> 100·00

Die gefundenen Zahlen stimmen also ausnehmend gut mit den von Trichlorbuttersäure verlangten. Der Umstand jedoch, dass der Schmelzpunkt dieser Säure niemals ganz scharf ist und bei verschiedenen Darstellungen etwas variirt, macht es wahrscheinlich, dass der in Hauptmenge entstandenen Trichlorbuttersäure eine geringe Menge einer isomeren Säure beigemischt ist.

Die analysirten Krystalle schmolzen bei $73-75^{\circ}$, besaßen einen scharfen, an Monochloressigsäure erinnernden Geruch; ihre

Lösung wirkte, auf die Haut gebracht, blasenziehend; sie zerfloss beim Anreiben mit Wasser zu einem Öl und lösten sich in beiläufig 20 Theilen Wasser.

Die Mittheilungen über die Derivate des Chlorwasserstoffadditionsproductes und seiner Säure werden demnächst erfolgen.

Zum Schluss will ich bemerken, dass ich unter Anderem auch Ammoniak auf Monochloraldehyd habe einwirken lassen. Für das Studium dieser wie auch anderweitiger Reactionen des Monochloraldehyds erhoffe ich mir ungestörtes Fortarbeiten, indem ich den am Schluss meiner ersten Arbeit „über Monochloraldehyd“ ausgesprochenen Vorbehalt wiederhole.

Verhalten der isomeren Bibromcampher gegen Salpetersäure.

Von **J. Kachler** und **F. V. Spitzer**.

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. A. Lieben.)

Die isomeren Verbindungen $C_{10}H_{14}Br_2O$, der α -Bibromcampher (Schmelzpunkt $61^\circ C.$) und der β -Bibromcampher (Schmelzpunkt $115^\circ C.$) werden, wie wir bereits gezeigt haben,¹ durch eine geeignete Behandlung mit Natriumamalgam in saurerer Lösung in Campher zurückverwandelt und hiedurch als Campherderivate charakterisirt. In ihrem Verhalten gegen andere Reagentien erwiesen sich diese Körper jedoch vollständig verschieden.

In der erwähnten Abhandlung war es uns blos darum zu thun, Anhaltspunkte zur Charakterisirung dieser Verbindungen zu geben; zu diesem Zwecke wurden daher die meisten Reactionen nur kurz erwähnt.

Im Folgenden soll das Verhalten des α - und β -Bibromcamphers gegen Salpetersäure eingehender beschrieben werden.

Einwirkung von Salpetersäure auf α -Bibromcampher.

Wenn α -Bibromcampher in Partien von etwa 20 Grm. mit dem vierfachen Gewichte eines Gemisches aus gleichen Theilen rauchender und gewöhnlicher concentrirter Salpetersäure zusammengebracht wird, so löst sich derselbe auf und färbt die Salpetersäure dunkelbraun. Erwärmt man gelinde auf dem Wasserbade, so tritt alsbald eine stürmische Reaction ein; das Gemenge entwickelt unter starkem Schäumen massenhaft rothe Dämpfe von Stickoxyden, freiem Brom, Nitrosylbromür neben

¹ Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. II. Abth., Bd. 85, p. 596; Monatshefte f. Chem. 1882, p. 205.

Bromwasserstoff und Kohlensäure.¹ Diese heftige Einwirkung lässt jedoch bald nach; erhitzt man dann auf dem Sandbade, um das Ganze im Kochen zu erhalten, so bemerkt man, dass neben Salpetersäure dunkelgefärbte Tropfen in die Vorlage übergehen, die sich als schwerere Schichte abscheiden. Dabei entweichen noch immer gelbrothe, gasförmige Producte, die Stickoxyde, Bromwasserstoff und Kohlensäure enthalten.

Die Destillation wurde unter öfterem Zurückgiessen der über der dunklen Flüssigkeitsschichte in der Vorlage angesammelten Salpetersäure so lange fortgesetzt, bis keine Öltropfen mehr übergiengen. Auf diese Weise wurden 100 Grm. α -Dibromcampher in fünf Operationen verarbeitet und dabei nachstehende Producte erhalten.

A) Der mit etwas Salpetersäure zurückgebliebene Destillationsrückstand bestand aus einer rothgelben Flüssigkeit von dicker Consistenz, welche sich beim Verdünnen mit Wasser trübt. Um die vorhandene Salpetersäure so viel als möglich zu entfernen, wurde mehrmals mit Wasser abgedampft; dabei hinterblieb zuletzt ein schwach gelblich gefärbter Syrup (65 Grm.), der mit heissem Wasser durch längere Zeit behandelt, sich nur zum Theil löst, während eine dickflüssige Masse (24 Grm.) am Boden des Gefässes abgeschieden wird. Dieselbe ist in Alkohol, Äther etc. leicht löslich, zersetzt sich beim Erhitzen unter Entwicklung von Bromwasserstoff und gibt beim Kochen mit alkoholischem Kali viel Bromkalium neben einer braunen, zähen Substanz.

Wird jedoch dieser in Wasser unlösliche Theil des Destillationsrückstandes mit etwas absolutem Alkohol aufgenommen und die Lösung längere Zeit einer langsamen Verdunstung überlassen, so bilden sich am Boden des Gefässes farblose, nadelförmige Krystalle, die zu Büscheln vereinigt und zum Theil gut ausgebildet waren.

Dieselben wurden so gut wie möglich durch Absaugen von der zähen Mutterlange getrennt und dann aus verdünntem Alkohol

¹ Da Kautschuk- und Korkverbindungen zerstört werden, ist es zweckmässig, die Operation in einem Destillationsapparate vorzunehmen, der aus einem hohen Glaskolben besteht, welcher einen aufgeschliffenen Helm mit Kühler trägt.

umkrystallisirt. Dabei haben wir bloß etwa 2 Grm. vollständig weisser Krystalle erhalten, die bei 87—88° C. schmelzen, brom- und stickstoffhäftig sind, beim raschen Erhitzen verpuffen und sich in Alkalien nicht lösen.

- I. 0·2596 Grm. gaben 0·4185 Grm. CO₂ und 0·1250 Grm. H₂O;
 II. 0·3570 Grm. gaben 0·5760 Grm. CO₂ und 0·1720 Grm. H₂O;
 III. 0·2552 Grm. gaben 0·0740 Grm. AgBr. (mit Ätzkalk);
 IV. 0·3000 „ „ 0·0902 „ „ (nach Carius);
 V. 0·4165 „ „ 32·8 C. C. N bei 17° C. und 755·9 Mm. Druck.

Daraus berechnet sich:

	I.	II.	III.	IV.	V.
C	43·97	44·00	—	—	— %
H	5·35	5·35	—	—	„
Br	—	—	12·32	12·79	„
N	—	—	—	—	9·08 „

Diese Zahlen entsprechen am besten der Formel C₂₄H₃₃BrN₄O₁₂, welche verlangt:

C	44·37%
H	5·08 „
Br	12·32 „
N	8·63 „

Nach dieser Zusammensetzung wäre die Substanz kein einfaches Campherderivat; es ist auch nicht ausgeschlossen, dass dieselbe ein Gemenge sei. Bei dem unzureichenden Materiale mussten wir jedoch einstweilen auf die nähere Untersuchung dieses Zwischenproductes verzichten.

Der in Wasser lösliche Theil des Destillationsrückstandes bildete nach dem Abdampfen einen hellgelben, dicken, stark sauren Syrup, der selbst nach längerer Zeit keine Krystalle abschied.

Es wurden nun Versuche gemacht, etwa darin vorhandene Säuren zu isoliren. Die wässrige Lösung mit Ätzbaryt abgesättigt

gab keine Fällung; dagegen mit einem Überschuss des letzteren gekocht, entstand ein gelblicher, körniger Niederschlag, der abfiltrirt und mit heissem Wasser gewaschen wurde. Aus demselben konnte nach dem Zersetzen mit Schwefelsäure und Ausschütteln mit Äther die darin enthaltene Säure gewonnen werden. Der nach dem Abdunsten des Äthers zurückgebliebene Rückstand wurde in wenig heissem Wasser gelöst und mit Thierkohle entfärbt. Die farblose Lösung im Vacuum über Schwefelsäure abgedampft, schied weisse, kuglige Krystalldrüsen ab, die zwischen 125–127° C. allmählig schmolzen und im übrigen Verhalten mit den Eigenschaften der Camphoronsäure¹ $C_9H_{12}O_5$, H_2O übereinstimmen. Ein Theil der Säure in wässriger Lösung mit überschüssigem Ammon und Chlorbaryum gekocht, gab den charakteristischen Niederschlag von camphoronsauren Baryt.

0.4682 Grm. bei 180° C. getrocknetes Baryumsalz lieferten 0.3847 Grm. $BaSO_4$.

	$C_9H_9Ba_3O_5, H_2O$	Gefunden
Ba.	48.87	48.31%

Die vom camphoronsauren Baryt abfiltrirte Lösung wurde zunächst durch Einleiten von Kohlensäure vom überschüssigen Ätzbaryt befreit, die noch vorhandenen Säuren hierauf mit Bleiessig unter Vermeidung eines Überschusses gefällt, der entstandene weisse Niederschlag durch Decantation mit Wasser gewaschen und schliesslich unter heissem Wasser mit Schwefelwasserstoff zerlegt. Die vom Schwefelblei abfiltrirte Lösung, ziemlich weit eingedampft, mit Ammoniak neutralisirt, gab beim Kochen mit essigsauerm Kupfer einen voluminösen grünlichen Niederschlag, der ebenfalls abfiltrirt, mit heissem Wasser gewaschen und dann durch Schwefelwasserstoff zerlegt wurde.

Um ein klares Filtrat zu erhalten, ist es zweckmässig, die Lösung sammt dem Schwefelkupfer auf dem Wasserbade einzudampfen und erst dann zu filtriren. Die so erhaltene Lösung zur Krystallisation durch Abdampfen concentrirt, lieferte zu Drüsen

¹ Kachler, Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. II. Abth., Juliheft 1871. *Annal. d. Chem. u. Pharm.* 159, p. 281.

vereinigte Nadeln und Blättchen, die bei 160° C. schmolzen. Sie erwiesen sich als nicht ganz reine Hydrooxycamphoronsäure¹ C₉H₁₄O₆ (Schmelzpunkt 164·5° C.), die als solche durch Überführung in das charakteristische bei 170° C. schmelzende saure Ammonsalz C₉H₁₃(NH₄)O₆ erkannt werden konnte.

0·1723 Grm. gaben 0·3214 Grm. CO₂ und 0·0952 Grm. H₂O.

	C ₉ H ₁₄ O ₆	Gefunden
C	49·54	50·87%
H	6·42	6·14 „

Die vom hydrooxycamphoronsauren Kupfer abfiltrirte Lösung gibt beim Versetzen mit Bleiessig einen gelblichen Niederschlag, aus dem nach dem Zersetzen mit Schwefelwasserstoff noch eine braune, nicht leicht krystallisationsfähige Masse von sauren Eigenschaften erhalten wurde, aus welcher sich aber nach langem Stehen ebenfalls krystallinische Hydrooxycamphoronsäure auschied.

Der in Wasser lösliche Theil der nicht flüchtigen Producte bei der Einwirkung von Salpetersäure auf α -Bibromcampher, besteht demnach hauptsächlich aus Camphoronsäure neben Hydrooxycamphoronsäure und geringen Mengen einer nicht krystallinischen Substanz.

B) Der flüchtige Theil der Producte, welcher sich bei der Einwirkung von Salpetersäure auf α -Bibromcampher in der Vorlage angesammelt hat, besteht, wie Eingangs schon erwähnt, aus zwei Schichten. Die obere braungefärbte ist Salpetersäure, welche Stickoxyde neben Bromwasserstoff gelöst enthält; die untere schwerere, beinahe schwarze Flüssigkeit entwickelt an der Luft erstickende Dämpfe von Nitrosylbromtr.

Beim Vermischen mit Wasser wird das Letztere unter heftiger Reaction zersetzt, wobei eine dunkelbraun gefärbte schwere Schichte zurückbleibt, welche behufs weiterer Reinigung mit Wasserdampf destillirt wurde.

¹ Kachler, Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. II. Abth., 1877. *Annal. d. Chem. u. Pharm.* 191, p. 143.

Dabei konnte beobachtet werden, dass noch vor Beginn der Destillation im Kühlrohre lange nadelförmige Krystalle entstanden, welche jedoch von den ersten mit dem Wasserdampfe übergehenden Öltropfen gelöst wurden.

Das darauf mit Wasser gewaschene und schliesslich mit salpetersaurem Kalk getrocknete Destillationsproduct (20 Grm.) bildet eine wasserhelle, leicht bewegliche schwere Flüssigkeit, von stechendem Geruche, die sich am Lichte ziemlich rasch gelb färbt und in einer Kältemischung krystallinisch erstarrt. Beim Erwärmen ist selbe nicht ohne Zersetzung flüchtig. Mit concentrirtem Ätzkali oder mit alkoholischem Kali entsteht unter Erhitzung eine gelbe krystallinische Ausscheidung einer Kaliumverbindung.

Bei der Analyse wurden folgende Resultate erhalten:

- I. 0.3962 Grm. gaben 0.0856 Grm. CO_2 und 0.0130 Grm. H_2O ;
- II. 0.3220 Grm. gaben 0.0678 Grm. CO_2 und 0.0118 Grm. H_2O ;
- III. 0.3844 Grm. gaben 0.5243 Grm. AgBr;
- IV. 0.1215 „ „ 13.4 CC N bei 16°C . und 748.7 Mm. Druck.

Daraus berechnen sich folgende Zahlen:

	Gefunden				Berechnet für	
	I.	II.	III.	IV.	$\text{C}_6\text{H}_7\text{Br}_2\text{N}_2\text{O}_4$	$\text{C}_6\text{H}_7\text{Br}_2\text{N}_2\text{O}_4$
C	5.89	5.74	—	—	6.49	4.55%
H	0.36	0.40	—	—	0.54	— „
Br	—	—	58.04	—	43.24	60.61 „
N	—	—	—	12.65	15.14	10.61 „

Nach diesem Ergebnisse ist die erhaltene Substanz ein Gemenge.

Um womöglich eine Trennung zu bewerkstelligen, wurde ein Theil im luftverdünnten Raume zu destilliren versucht. Bei einem Drucke von ca. 100 Mm. fängt die Flüssigkeit an unter Braunfärbung gegen 100°C . heftig zu sieden, dabei aber rothe Dämpfe abzugeben, wodurch das Destillat ebenfalls rothbraun gefärbt erscheint. Eine mit diesem Letzteren vorgenommene Brom-

bestimmung ergab 58.02% Br, also denselben Gehalt, wie vor der Destillation. Aus diesem Umstande mussten wir schliessen, dass der bei der Destillation mit Wasserdampf beobachtete krystallinische Körper möglicherweise die Verunreinigung bildet und den höheren Bromgehalt bedingt.

Da, wie bereits erwähnt, aus der fraglichen Substanz mit Ätzkali eine krystallinische Kaliumverbindung entsteht, so versuchten wir solche im reinen Zustande darzustellen, um dann daraus durch Zerlegung mit einer Säure, eine einheitliche Verbindung zu gewinnen. Zu diesem Behufe wurden ca. 100 Grm. des auf die früher angegebene Weise bereiteten flüchtigen Öles in absolutem Alkohol gelöst und unter Eiskühlung alkoholisches Kali eingetragen. Sofort entstand eine reichliche Ausscheidung des gelbgefärbten krystallinischen Salzes, welche sich gut absetzte. Nachdem durch weiteren Zusatz von alkoholischem Kali kein gelber Niederschlag mehr entstand, wurde nach einigem Stehen das gebildete Kaliumsalz abfiltrirt und mit absolutem Alkohol gewaschen. Der ablaufende Alkohol ist gelb gefärbt; wird derselbe destillirt, so krystallisirt aus dem Destillationsrückstande noch ein Theil des Kaliumsalzes neben Bromkalium aus. Die davon abfiltrirte letzte alkoholische Lauge mit Wasser verdünnt, scheidet eine schwere Flüssigkeitsschicht ab, in der sich nach einiger Zeit derbe, nahezu farblose Krystalle bilden, die nach dem Pressen zwischen Papier, durch Sublimation gereinigt, den Schmelzpunkt von 93° C. zeigten. Der überdestillirte Alkohol ist farblos und besitzt einen eigenthümlichen, an Aldehyd erinnernden Geruch; beim Vermengen mit einer grossen Menge Wasser entsteht eine Trübung und nach einiger Zeit erfolgt die Ausscheidung von weissen nadelförmigen Krystallen (ca. 1 Grm.). Dieselben wurden auf einem Filter gesammelt und mit Wasser gewaschen, zwischen Papier gepresst, hierauf sublimirt und schmolzen dann ebenfalls bei 93° C. Diese Substanz ist mit der eben beschriebenen, im Destillationsrückstande gefundenen, äusserst leicht sublimationsfähigen Verbindung identisch und erwies sich als Tetrabromkohlenstoff.

0.1664 Grm. gaben 0.3742 Grm. AgBr.

	Gefunden	Berechnet für CBr_4
Br	<u>95.69</u>	<u>96.38%</u>

Das gewonnene Kaliumsalz ist in Alkohol oder Äther nicht löslich, dagegen löst es sich im Wasser mit intensiv gelber Farbe. Aus der mit kochendem Wasser bereiteten Lösung erscheinen beim Abkühlen gelbe, schön ausgebildete, glänzende Krystalle, während beim Verdunsten der Mutterlauge neben der gelben Kaliumverbindung noch farblose Würfel von Bromkalium in ziemlicher Menge erhalten werden konnten. Nur die ersten Krystallisationen gaben in wässriger Lösung mit Silbernitrat selbst beim Kochen keine Fällung von Bromsilber, erwiesen sich somit frei von Bromkalium. Beim raschen Erhitzen verpufft die Kaliumverbindung sehr lebhaft; mit verdünnten Säuren zusammengebracht, verschwindet die gelbe Farbe und ein schweres, farbloses Öl wird abgeschieden.

Über die krystallographischen Verhältnisse dieser Kaliumverbindung hatte Herr Oberbergrath Prof. v. Zepharovich die Güte, uns Folgendes mitzutheilen:

$$\begin{aligned} &\text{„Krystallsystem : asymmetrisch,} \\ &a : b : c = 0.7845 : 1 : 0.6619, \\ (bc) = \alpha &= 77^\circ 15'; \text{ oP} : \infty\text{P}\infty = 80^\circ 8' \\ (ac) = \beta &= 117^\circ 4'; \text{ oP} : \infty\text{P}\infty = 115^\circ 54\frac{1}{2}' \\ (ab) = \gamma &= 98^\circ 49'; \infty\text{P}\infty : \infty\text{P}\infty = 93^\circ 30'. \end{aligned}$$

Die angegebenen Winkel liegen im ersten Octanten. Bei wechselnden Habitus wurden beobachtet:

$$\text{oP; } \infty\text{P}'; \infty'\text{P}; \infty\text{P}\infty; ,\text{P},\infty.\text{P}; ,\frac{1}{2}\text{P}; ,\text{P}; \text{P}."$$

Die ausgeführten Analysen ergaben folgendes:

- I. 0.4691 Grm. gaben 0.0960 Grm. CO_2 und 0.0137 Grm. H_2O ;
- II. 0.5779 Grm. gaben 0.1235 Grm. CO_2 und 0.0266 Grm. H_2O ;
- III. 0.4426 Grm. gaben 0.1753 Grm. K_2SO_4 ;
- IV. 0.3680 " " 0.1473 " "
- V. 0.2390 " " 0.1970 " AgBr ;
- VI. 0.3680 " " 0.3027 " "
- VII. 0.2978 " " 0.2495 " "
- VIII. 0.2560 " " 28.6 C. C. N bei 20°C . und 747.3 Mm. Druck.

	Gefunden							
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
C.....	5·58	5·82	—	—	—	—	—	—
H.....	0·32	0·51	—	—	—	—	—	—
K.....	—	—	17·78	17·96	—	—	—	—
Br.....	—	—	—	—	35·07	35·00	35·65	—
N.....	—	—	—	—	—	—	—	12·56

Berechnet für CKBrN_2O_4

C...	5·38
K...	17·52
Br..	35·86
N...	12·55

Die Kaliumverbindung ist somit Monobromdinitromethan-
kalium. Da dieselbe aus der durch Einwirkung von Salpetersäure
auf α -Bibromcampher gewonnenen Bromnitroverbindung leicht
dargestellt werden kann, halten wir es für wahrscheinlich, dass
diese Letztere hauptsächlich aus Monobromdinitromethan
 $\text{CHBr}(\text{NO}_2)_2$ besteht und dass demselben Bromkohlenstoff, den
wir auf die angegebene Weise isoliren konnten, beigemischt ist.
Dadurch erklärt sich auch, dass die bei der Analyse gefundenen
Zahlen, mit den für die Verbindung $\text{CHBr}(\text{NO}_2)_2$ berechneten,
nicht übereinstimmen.

Wir glaubten nun durch Zerlegung des Kaliumsalzes die
reine Verbindung erhalten zu können. Es wurde deshalb eine
wässrige Lösung der Kaliumverbindung mit verdünnter Schwefel-
säure versetzt, wobei sich eine schwere Flüssigkeitsschichte
abschied und auch eine geringe Gasentwicklung auftrat. Das
von der wässrigen Lösung getrennte Zerlegungsproduct wurde
mit Wasser destillirt, hierauf einigemal gewaschen und mit
salpetersaurem Kalk getrocknet.

- I. 0·718 Grm. gaben 0·1413 Grm. CO_2 und 0·0206 Grm.
 H_2O ;
- II. 0·5709 Grm. gaben 0·1090 Grm. CO_2 und 0·0160 Grm.
 H_2O ;
- III. 0·2947 Grm. gaben 0·3766 Grm. AgBr.

	Gefunden			Berechnet für $\text{CHBr}(\text{NO}_2)_2$
	I.	II.	III.	
C	5·36	5·21	—	6·49 ^o / _o
H	0·32	0·31	—	0·54 „
Br	—	—	54·38	43·24 „

Aus diesen analytischen Daten ergibt sich, dass die aus der Verbindung $\text{CKBr}(\text{NO}_2)_2$ mittelst Schwefelsäure gewonnene Substanz nicht reines Monobromdinitromethan ist, sondern dass dasselbe eine bromreichere Verbindung enthält, welche sich erst bei der Zerlegung des reinen Kaliumsalzes gebildet hat. Wir haben auch thatsächlich in diesem Producte wieder Bromkohlenstoff nachgewiesen. Wird nämlich dasselbe in einem mit Kühlrohr versehenen Kölbchen einige Zeit auf dem Wasserbade gelinde erwärmt, so beschlagen sich die gekühlten Stellen bald mit langen, farblosen, strahlenförmig auslaufenden Krystallen, die als Tetrabromkohlenstoff erkannt wurden.

Dieser Gehalt an Bromkohlenstoff mag auch die Ursache sein, dass sowohl die ursprüngliche aus α -Bibromcampher und Salpetersäure erhaltene, als auch die aus dem reinen Kaliumsalze durch Säuren abgeschiedene Substanz bei der Behandlung mit alkoholischem Kali eine mit Bromkalium gemengte Kaliumverbindung liefert.

Es lag die Vermuthung nahe, dass das Monobromdinitromethan selbst eine Zersetzung unter Bildung von Tetrabromkohlenstoff erleidet, da die bekannten Chlornitromethanverbindungen ein ähnliches Verhalten zeigen. Wir versuchten desshalb die Zerlegung des Kaliumsalzes bei Vermeidung jeder Temperaturerhöhung in der Weise vorzunehmen, dass dabei die Anwendung eines Säureüberschusses vermieden und die freiwerdende Substanz jeder weiteren Umsetzung, sei es mit einem Theile nicht zerlegter Kaliumverbindung oder zugefügter Säure, womöglich entzogen werde. Zu diesem Zwecke wurden 5 Grm. des reinen Kaliumsalzes in Wasser gelöst, dann Äther zugegeben und unter Kühlung mit Wasser und fortwährendem Schütteln die zur Umsetzung nöthige, berechnete Menge titrirter Schwefelsäure aus einem Tropftrichter allmählig zugefügt. Dabei trat mit dem letzten Tropfen der zugesetzten Säure vollständige Entfärbung

der früher gelben, wässrigen Schichte ein. Nachdem die ätherische Lösung abgezogen, mit Wasser gewaschen, hierauf mit Chlorcalcium getrocknet war, wurde der Äther durch gelindes Erhitzen auf dem Wasserbade abdestillirt. Sobald dies aber geschehen war, trat bei gleichzeitiger Einwirkung von directem Sonnenlicht eine heftige Zersetzung der zurückgebliebenen Substanz unter Entwicklung von rothen Dämpfen ein. Beim weiteren Erhitzen auf dem Wasserbade sammelten sich im Kühlrohre auch wieder Krystalle von Tetrabromkohlenstoff an.

Wir haben daher neuerdings 5 Grm. des reinen Kaliumsalzes auf die eben angegebene Weise zerlegt, nur dabei den Zutritt von Licht möglichst vermieden. Der Äther wurde unter einer Glocke über Paraffin bei gewöhnlicher Temperatur abgedunstet und schliesslich im Vacuum entfernt. Es blieb dabei eine nahezu farblose, etwas trübe Flüssigkeit zurück, die nach vollständiger Klärung eine geringe Menge Wasser an der Oberfläche abschied, das durch sorgfältiges Abpipettiren entfernt werden konnte. Das so gewonnene Product nahm, trotzdem es immer vor Zutritt des Lichtes nach Möglichkeit geschützt war, ziemlich rasch eine gelbe Farbe an.

- I. 0·7391 Grm. gaben 0·1562 Grm. CO_2 und 0·0284 Grm. H_2O ;
 II. 0·3560 Grm. gaben 0·4474 Grm. AgBr;
 III. 0·4060 Grm. gaben 47·5 C. C. N bei 24°C . und 744·7 Mm. Druck.

	Gefunden			Berechnet für $\text{CHBr}(\text{NO}_2)_2$
	I.	II.	III.	
C	5·76	—	—	6·49%
H	0·43	—	—	0·54 „
Br	—	53·48	—	43·24 „
N	—	—	12·84	15·14 „

Daraus ist zu ersehen, dass man trotz aller Vorsicht bei der Zerlegung der Verbindung $\text{CKBr}(\text{NO}_2)_2$ mittelst Säuren, nicht reines Monobromdinitromethan erhalten kann; der Grund ist wohl in der leichten Zersetzlichkeit dieser Substanz zu suchen.

Es muss hier erwähnt werden, dass Losanitsch¹ durch Einwirkung von Salpetersäure auf Tribromanilin oder Äthylenbromid eine brom- und stickstoffhaltige Verbindung bekommen hat, die in alkoholischer Lösung mit wässrigem Kali behandelt, ebenfalls ein gelbes krystallinisches Kaliumsalz von der Zusammensetzung $\text{CKBr}(\text{NO}_2)_2$ lieferte, welches ohne Zweifel mit der von uns beschriebenen Kaliumverbindung identisch ist. Losanitsch behauptet nun, dass beim Zersetzen desselben mit Säuren unter Gasentwicklung Dibromdinitromethan $\text{CBr}_2(\text{NO}_2)_2$, allerdings in geringer Ausbeute entsteht; nebenbei aber auch eine weisse, krystallinische, leicht flüchtige, campherartig riechende Verbindung gebildet werde.

Er meint, es sei leicht zu ersehen, dass hiebei mindestens zwei Moleküle des Kaliumsalzes ein Molekül Dibromdinitromethan liefern. Unsere Versuche bestätigen diese Angabe nicht, da wir niemals die Verbindung $\text{CBr}_2(\text{NO}_2)_2$ erhalten konnten. Es ist vielmehr anzunehmen, dass die von Losanitsch bemerkte krystallinische, flüchtige Substanz Tetrabromkohlenstoff gewesen sei, welcher wohl auch dem von ihm aus dem Kaliumsalze erhaltenen Producte beigemischt war. Auf diese Weise wäre es zu erklären, dass er bei der Analyse Zahlen erhalten hat, welche mit den für $\text{CBr}_2(\text{NO}_2)_2$ berechneten gut übereinstimmen.

Auf welche Weise auch die freie Bromnitroverbindung dargestellt wurde, immer konnte darin Tetrabromkohlenstoff nachgewiesen werden, dessenungeachtet war der gefundene Bromgehalt niedriger als der für $\text{CBr}_2(\text{NO}_2)_2$ berechnete.

Wir gründen hierauf die Ansicht, dass sowohl die bei der Einwirkung von Salpetersäure auf α -Bibromcampher, als auch die aus der Verbindung $\text{CKBr}(\text{NO}_2)_2$ dargestellte Substanz hauptsächlich aus Monobromdinitromethan $\text{CHBr}(\text{NO}_2)_2$ besteht und Tetrabromkohlenstoff enthält; möglicherweise ist auch noch eine andere Verbindung in geringer Menge beigemischt.

Wir haben demnach gefunden, dass bei der Einwirkung von concentrirter Salpetersäure auf α -Bibromcampher, Camphoron-

¹ Ber. d. d. chem. Ges., XV., 1882, 471. Ber. d. d. chem. Ges., XVI., 1883 51.

säure, Hydrooxycamphoronsäure und Bromdinitromethan neben Kohlensäure, Bromwasserstoff und Nitrosylbromür als Hauptproducte gebildet werden.

Einwirkung von Salpetersäure auf β -Bibromcampher.

Wie wir bereits in unserer früheren Abhandlung¹ angegeben haben, wird der β -Bibromcampher von Salpetersäure nicht leicht angegriffen und bei der Destillation mit rauchender Salpetersäure hauptsächlich Bibrommonitrocampher $C_{10}H_{13}Br_2(NO_2)O$ gebildet.

Um zu untersuchen, ob nicht neben diesem Körper noch andere Producte entstehen, haben wir diese Reaction mit grösseren Mengen ausgeführt. 50 Grm. β -Bibromcampher wurden auf dieselbe Weise wie der α -Bibromcampher, mit dem Gemenge von concentrirter und rauchender Salpetersäure durch mehrere Tage erhitzt und die abdestillirte Säure öfters ersetzt.

Unter den flüchtigen Producten konnte neben Stickoxyden, Bromwasserstoff, Kohlensäure und geringen Mengen von Nitrosylbromür, kein schweres Öl bemerkt werden. Der Destillationsrückstand bildete nach dem Vermischen mit Wasser zwei Schichten, von denen die untere nahezu fest wurde. Die von dem festen Producte getrennte wässrige Lösung gab nach öfterem Abdampfen mit Wasser, etwa 2 Grm. einer dickflüssigen Masse, die noch Bromwasserstoff enthielt. Dieselbe wurde in ähnlicher Weise, wie der in Wasser lösliche Destillationsrückstand von der Behandlung des α -Bibromcamphers mit Salpetersäure, auf darin etwa enthaltene Säuren untersucht. Dabei konnte jedoch nur etwas Oxalsäure mit Sicherheit nachgewiesen werden.

Das erwähnte, in Wasser unlösliche krystallinische Product gab nach dem Umkrystallisiren aus Alkohol 30 Grm. Bibrommonitrocampher $C_{10}H_{13}Br_2(NO_2)O$, während nur wenig einer schmierigen Mutterlauge hinterblieb.

¹ In dieser Abhandlung ist bei der Angabe der Krystallform des β -Bibromcamphers folgender Druckfehler zu corrigiren: Seite 606, Zeile 12 von oben, lies 0·5206 statt 1·05206; ferner ist auf Seite 612 die Formel der der Campherkohlsäure $C_{22}H_{32}O_6$, statt $C_{20}H_{32}O_6$ zu lesen. .

Der nochmals aus einem Gemische von Äther und Alkohol umkrystallisirte Bibrommonitrocampher bildet farblose Nadeln oder Säulchen, die genau bei 130° C. schmelzen, in Wasser unlöslich, dagegen in Alkohol oder Äther leicht löslich sind.

Über die krystallographischen Verhältnisse stellte uns Herr Oberbergath Prof. v. Zepharovich folgende Daten zur Verfügung.

„Krystallsystem: rhombisch,

$$a : b : c = 0.8474 : 1 : 0.5684$$

Nadeln oder Säulchen nach der Brachyaxe;

Formen: $\infty P\infty$, $P\infty$, $P\infty > \infty P\bar{2}$.“

Der Bibrommonitrocampher $C_{10}H_{13}Br_2(NO_2)O$ geht bei der Reduction in Amidocampher $C_{10}H_{15}(NH_2)O$ über. Es wurde erstere Verbindung in einer Lösung von Eisessig mit Zinn einige Zeit am Rückflusskühler gekocht, das Product nach dem Verdünnen mit Wasser mittelst Schwefelwasserstoff vom Zinn befreit, die Lösung mehrmals unter Zusatz von Salzsäure auf dem Wasserbade abgedampft und dann mit Wasser aufgenommen, wobei etwas unlösliche, nicht krystallinische Substanz zurückblieb. Aus der concentrirten wässrigen Lösung schieden sich in Wasser sehr leicht lösliche Krystalle ab. Das daraus gewonnene Platindoppelsalz, wurde in drei Fractionen getheilt. Die beiden ersten enthielten zwei verschiedenen krystallisirende Substanzen, rothgelbe, körnige Krystalle neben hellgelben sternförmig gruppirten Nadeln. In der letzten Fraction waren nur Spuren der ersten Substanz bemerkbar und bei der Analyse gaben 0.1415 Grm. 0.0396 Grm. Pt.

Gefunden	Berechnet für $2[C_{10}H_{15}(NH_2)O \cdot HCl]PtCl_4$
Pt. . . . 27.98	26.05 ⁰ / ₀ .

Dieses Platindoppelsalz stimmt in seinen Eigenschaften mit dem von R. Schiff¹ aus dem salzsauren Amidocampher

¹ Gaz. chim. ital. t. X, 1880; Ber. d. d. chem. Ges. XIII, 1880, 1404.

erhaltenen überein. Der etwas zu hoch gefundene Platingehalt rührt von einer geringen Beimengung an Platinsalmiak her, welcher in der ersten Fraction in grösserer Menge vorhanden ist.

Wie wir dies bereits in der eingangs angeführten Abhandlung hervorgehoben haben, wirkt Salpetersäure auf die beiden isomeren Bibromcampher verschieden ein. Während der α -Bibromcampher dabei leicht die aus Campher entstehenden Säuren mit 9 Kohlenstoffatomen und Bromdinitromethan liefert, wobei aber immer Producte einer vollständigen Zersetzung, wie Kohlensäure, Bromwasserstoff etc. auftreten, entsteht aus dem β -Bibromcampher zunächst dessen Nitrosubstitutionsproduct, dass dann weiter durch die oxydirende Wirkung der Salpetersäure, direct in Kohlensäure, Bromwasserstoff etc. zerfällt.

Es wird unsere weitere Aufgabe sein, die aus dem Campher entstehenden Säuren, speciell diejenigen mit 9 Kohlenstoffatomen näher zu untersuchen, um dann im Zusammenhange mit den bereits erhaltenen Resultaten, zu weiteren Anhaltspunkten bezüglich der Constitution dieser Verbindungen zu gelangen.

Über Derivate des Dipyridyls.

Von Zd. H. Skraup und G. Vortmann.

2. Mittheilung.

(Aus dem Laboratorium der Wiener Handelsakademie VII.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juni 1883.)

Vor einem Jahre haben wir mitgetheilt,¹ dass *m*-Phenylendiamin mit *m*-Dinitrobenzol, Glycerin und Schwefelsäure erhitzt, eine Base der Formel $C_{12}H_8N_2$ liefert, die wir Phenanthrolin nannten, um eine Ähnlichkeit derselben mit dem Phenanthren anzudeuten, wie sie sich im Verlauf der Untersuchung herausstellte. Das Phenanthrolin geht nämlich mit Kaliumpermanganat oxydirt in eine zweibasische gut krystallisirte Säure über, welche die Zusammensetzung $C_{12}H_8N_2O_4$ besitzt, für sich erhitzt 1 Mol. CO_2 verliert und in eine einbasische Säure $C_{11}H_8N_2O_2$, als Kalksalz erhitzt aber 2 Mol. CO_2 abgibt und in eine ölige Base $C_{10}H_8N_2$ übergeht, welche wir Dipyridyl nannten und deren Namen wir bei Benennung beider Säuren zu Grunde legten.

Die angeführten Reactionen stehen dem Übergang von Phenanthren in Diphensäure und endlich in Diphenyl also vollständig zur Seite.

Sie schienen uns bemerkenswerth genug, um ähnliche Versuche mit einem zweiten Phenylendiamin auszuführen und haben wir als solches das leichter beschaffbare *p*-Derivat gewählt, statt dem Dinitrobenzol Nitrobenzol verwendet, und gelang es so unschwer eine dem Phenanthrolin isomere Base zu erhalten.

Wir wollen, um Undeutlichkeiten zu begegnen, schon an dieser Stelle erwähnen, dass wir das neue Alkaloïd mit dem Namen Pseudophenanthrolin bezeichnen werden, um die Isomerie

¹ Monatshefte III, 570.

mit dem Phenanthrolin aus *m*-Phenylendiamin anzudeuten. Die vielleicht näher liegende Bezeichnung „Paraphenanthrolin“ haben Beziehungen zu Pyridinderivaten von im Verlaufe der Arbeit erkannter Stellung ausgeschlossen.

Pseudophenanthrolin.

Käufliches *p*-Nitranilin wurde durch Reduction mit Zinn und Salzsäure in Diamidobenzol verwandelt. Die Überführung ist vollständig, wenn auf 2 Mol. Nitranilin 3 Sn verbraucht sind; durch Eindampfen der Reductionsflüssigkeit erhält man das Zinnchloriddoppelsalz des Phenylendiamin's in fast ungefärbten Krystallen und fast theoretischer Ausbeute, das direct zur Synthese dient.

Zur Darstellung der neuen Base kamen jedesmal 110 Grm. Zinndoppelsalz, 31 Grm. Nitrobenzol, 100 Grm. Glycerin und 100 Grm. englische Schwefelsäure in Anwendung, die in einem Kolben vor dem Rückflusskühler auf dem Sandbad durch 5—6 Stunden bis zum gelinden Sieden erhitzt wurden. Die Reaction ist nach 4 Stunden schon grösstentheils vollendet, dann aber immer ein Theil des Diamins noch unverändert, der die Reindarstellung sehr erschwert, und selbst nach sechsständigem Kochen nicht vollständig verschwindet. Nach vierständigem Erhitzen bleiben rund 9, nach sechsständigem Kochen gegen 2 Grm. Nitrobenzol unverändert nachweisbar, die durch Wasserdampf abgetrieben werden.

Die verdünnte, von Nitrobenzol freie Reactionsflüssigkeit verarbeiteten wir ähnlich, wie es für das Phenanthrolin beschrieben worden ist, dadurch nämlich, dass mit Ätzkali übersättigt und mit alkoholhaltigem Äther oft ausgeschüttelt, dem Äther das Gelöste durch Salzsäure entzogen und die saure Lösung auf dem Wasserbad eingedampft wurde.

Die nach starker Concentration entstandene Krystallisation ist das Chlorhydrat des Pseudophenanthrolins vermisch mit dem salzsauren Salz des Phenylendiamins; durch Absaugen, Waschen mit Alkohol wird die braune Mutterlauge entfernt, die eingedampft und mit Alkohol angerührt noch ein bis zwei Anschüsse liefert, die nur mehr wenig Phenylendiaminsalz enthalten.

Das Gemisch der Chlorhydrate kann durch oxydirende Agentien, wie Chromsäure, die das Phenylendiamin zerstören sollten, auf reines Product direct nicht verarbeitet werden, sondern erst dann, wenn die Hauptmenge des Phenylendiamins abgeschieden ist. Dies ist unschwer durch concentrirte Salzsäure zu erreichen, die aus der concentrirt-wässrigen Lösung des Salzgemisches nur das Phenylendiamin niederschlägt. Das Filtrat nach dem Einengen nochmals mit concentrirter Salzsäure behandelt, scheidet noch einen kleinen Rest des Amins ab, und wird nun durch Eindampfen von überschüssiger Salzsäure befreit, in verdünnter wässriger Lösung kalt mit der annähernd berechneten Menge von Kaliumbichromat versetzt. Es fallen gelbe bis bräunlichgelbe Blätter des Chromats aus, das nach dem Waschen mit Wasser und Erwärmen mit Ammoniak die freie Base, das Pseudophenanthrolin als bald erstarrendes gelbliches Öl liefert.

Geschieht die Fällung des Chromats kochend, fällt es braun und zersetzt aus, selbst wenn man es fractionell niederschlägt, und liefert sehr dunkel gefärbte Base. Kleinere Mengen vom Gemisch der beiden Chlorhydrate können durch Zufügung von Ammoniak verarbeitet werden — das Pseudophenanthrolin fällt aus, während Diamidobenzol gelöst bleibt — vorausgesetzt, dass rasch und bei möglichstem Luftabschluss gearbeitet wird, indem sonst mit der ausgeschiedenen Base dunkle harzige Substanzen niederfallen, die wieder erst durch Überführung ins Chromat etc. umständlich abgeschieden werden können.

Die in der einen oder anderen Art durch Ammoniak abgeschiedenen Krystalle enthalten Krystallisationswasser, das schon an freier Luft, rascher noch bei 100° entweicht, wobei aber auch ein Theil der Trockensubstanz durch Sublimation entweicht.

Die wasserfreie Substanz destillirt über freier Flamme erhitzt erst über der Thermometergrenze und unzersetzt, wenn sie ganz rein ist. Da sie bei höherer Temperatur ziemlich luftempfindlich ist, empfiehlt es sich das Öl in Kolben aufzufangen, und die Gefäße vor der Destillation mit CO₂ zu füllen.

Wir haben auch bei dieser Synthese ein dem Amin nicht correspondirtes Nitroderivat, und zwar Nitrobenzol angewendet. ¹

¹ Siehe u. a. Skraup u. Cobenzl, diese Monatshefte IV, S.

Während nun bei Darstellung des β -Naphtochinolins mittelst β -Naphthylamin und Nitrobenzol nicht die Spur Chinolin gebildet wird, war dasselbe, wenn auch in kleiner Menge, in unserem Falle nachweisbar. Bei einer Operation haben wir in die alkalisch gemachte Flüssigkeit Wasserdampf eingeblasen, und ein nicht erstarrendes Öl von ausgesprochenem Chinolingeruch erhalten, das mit Äther gesammelt, getrocknet und nach Entfernung des Äthers über freiem Feuer destillirt, jedoch zwischen $220\text{--}260^\circ$ uncorr. destillirte, ohne dass der Thermometerfaden irgendwo länger stehen blieb. Die geringe Menge (etwa 4 Grm.) machte ein Ausfractioniren unmöglich. Aus der Fraction $220\text{--}230^\circ$ wurde ein Platinsalz bereitet, das der Chinolinverbindung ganz ähnlich aussah, aber weniger Platin enthält, als sich für diese berechnet.

0.2602 Grm. verloren bei 100° 0.0148 Grm. H_2O und hinterliessen 0.0674 Grm. Pt.

Berechnet für $(\text{C}_9\text{H}_7\text{N})_3\text{H}_2\text{Cl}_6\text{Pt} + 2\text{H}_2\text{O}$	Gefunden
$\text{H}_2\text{O} \dots 5.1$	5.6
$\text{Pt} \dots 27.7$	25.9

Trotzdem glauben wir behaupten zu können, dass Chinolin vorlag, das aber mit einem hochsiedenden Körper von grösserem Moleculargewicht verunreinigt ist, und daher der Nitrokörper bei der Chinolinsynthese ziemlich oft in kleinen Mengen in ein Chinolinderivat übergeht.

Das reine Pseudophenanthrolin wird bei der Destillation als farbloses Öl erhalten, das rasch zur schneeweissen krystallinischen Masse erstarrt, die leicht zerreiblich und aus kleinen Prismen zusammengesetzt ist und am Licht nach und nach schwach gelb oder röthlich gefärbt wird. Durch Sublimation erhält man es in weissen Nadelchen, die meist parallel zu blättrigen Aggregaten verwachsen sind. In der Kälte riecht es schwach und nicht unangenehm, beim Erhitzen verbreitet es weisse, zum Husten reizende Dämpfe und verbrennt endlich unter Hinterlassung von viel feinvertheilter Kohle.

Mit Wasser übergossen, backt es zusammen und geht in ein Hydrat über, das beim Erhitzen sich ziemlich leicht löst, nach

dem Erkalten in besonders dann gut ausgebildeten langen, dicken Nadeln anschießt, wenn man etwas Alkohol zugefügt hat.

Alkohol löst schon in der Kälte leicht, noch besser in der Wärme, Äther schwierig, Benzol und Schwefelkohlenstoff in der Kälte schwierig, leicht beim Erhitzen, Chloroform schon in der Kälte sehr leicht. Auch verdünnte Säuren lösen mit Leichtigkeit, Fluorescenz beobachtet man bei keiner, auch nicht in der Lösung von verdünnter Schwefelsäure.

Die alkoholische Lösung reagiert schwach alkalisch, sie färbt sich auf Zusatz von Eisenchlorid rothgelb, scheidet mit Kupferacetat versetzt, grünliche Flocken ab, die beim Kochen krystallinisch werden, auf Zusatz von Silbernitrat eine Gallerte, die in der Hitze in schimmernde Nadelchen übergeht, Eisenvitriol verändert sie dagegen nicht, erst nach einigem Stehen bildet sich eine gelblichgrüne Trübung.

Das Pseudophenanthrolin und sein Hydrat haben denselben Schmelzpunkt, der sehr glatt bei 173° liegt, während das wasserfreie Phenanthrolin bei $78-78.5^{\circ}$ sein Hydrat bei 65.5° schmilzt.

0.2647 wasserfreie Substanz gaben 0.7775 Grm. CO_2 und 0.1060 Grm. H_2O .

Berechnet für $\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2$	Gefunden
C. . . . 80.00	80.26
H . . . 4.44	4.45

Die Bestimmung des Krystallwassers im aus Wasser oder verdünnten Alkohol krystallisirtem Hydrate gab keine übereinstimmenden Resultate, hauptsächlich darum, da die Krystalle schon verwittern, wie sie von der Mutterlauge getrennt sind. Wir erhielten 24.2, 25.02, und beim raschesten Abpressen 29.43 % Trockenverlust, während die Formel $\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2 + 4\text{H}_2\text{O}$, 28.57, ein Hydrat $\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2 + 3\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$, 25.92% erfordert. Wahrscheinlich ist die erstangeführte Formel die richtige.

Das Pseudophenanthrolin verbindet sich mit Säuren, dann mit Jodmethyl zu gut krystallisirenden Körpern, von denen einige näher untersucht worden sind.

Chlorhydrate.

Löst man 1 Mol. Base in 1 Mol. Salzsäure und dampft zur Krystallisation, so entstehen weisse Blättchen, die in der Kälte sehr leicht in Wasser, schwieriger in Weingeist, in absolutem Alkohol in der Hitze ziemlich leicht löslich sind und beim Erkalten als Nadelchen fast vollständig wieder ausfallen.

Die Zusammensetzung dieses Salzes ist $C_{12}H_8N_2, HCl + 2H_2O$, es ist also das basische Chlorhydrat.

0·2321 Grm. verloren bei 100° 0·0339 Grm. H_2O .

0·2382 Grm. gaben mit $AgNO_3$ unter Zusatz von NO_3H gefällt 0·1390 Grm. $AgCl$ und 0·0013 Grm. Ag .

Berechnet	Gefunden
H_2O 14·25	14·60
HCl 14·45	14·39.

Ein zweites, u. zw. das neutrale Chlorhydrat $C_{12}H_8N_2, 2HCl$ krystallisirt aus der Lösung in überschüssiger Salzsäure bei langsamer Bildung in grossen dicken, durchsichtigen Prismen, bei rascher in kleinen dicken Nadeln; es ist in Wasser sehr leicht, in concentrirter Salzsäure ziemlich leicht löslich und krystallwasserfrei.

0·1205 Grm. über H_2SO_4 getrocknet, gaben 0·1357 Grm. $AgCl$ und 0·0008 Grm. Ag .

Berechnet	Gefunden
HCl 28·85	28·86

Herr Dr. Březina hatte die Güte, die krystallographische Messung dieser, sowie einiger weiter unten beschriebener Verbindungen vorzunehmen, wofür wir ihm bestens danken.

Er theilt über das neutrale Chlorhydrat des Pseudophenanthrolins mit:

Monoklin.

$$a : b : c = 1 \cdot 2369 : 1 : 0 \cdot 8913; \eta = 102^\circ 53.$$

$$a (100) \ e (\bar{1}01) \ d (\bar{2}01) \ m (111) \ q (\bar{1}11) \ r (\bar{3}12).$$

Winkel	Rechnung	Messung
$\bar{a}d$	$(\bar{1}00) (\bar{2}01)$	$38^\circ 40$ $38^\circ 41$
am	$(100) (110)$	59 8 59 9
$\bar{m}'d$	$(110) (\bar{2}01)$	66 24 66 23
$\bar{m}'q$	$(110) (\bar{1}11)$	37 36 37 40

Optische Orientirung: Axenebene die Symmetrieebene, Bisectrix senkrecht zu d , Schema (100) $b_a = 141^\circ 20'$; $\rho < v$.

Chromat $(C_{12}H_8N_2)_2H_2Cr_2O_7 + 2\frac{1}{2}H_2O$. Die Darstellung dieser schönen Verbindung ist schon früher besprochen worden. Sie bildet feine Nadeln oder auch Prismen, die zu schmalen Blättern gereiht sind, hat schön orangegelbe Farbe, ist in kaltem Wasser schwer, leichter in heissem löslich, zersetzt sich beim Kochen der wässrigen Lösung nicht und enthält Krystallwasser, das über Schwefelsäure entweicht.

1) 0·3600 Grm. lufttrockene Substanz verloren 0·0260 Grm. H_2O und hinterliessen 0·0897 Grm. Cr_2O_3 .

2) 0·3594 Grm. Trockensubstanz hinterliessen 0·0952 Grm. Cr_2O_3 .

Berechnet für	Gefunden	
$(C_{12}H_8N_2)_2H_2Cr_2O_7$	1.	2.
Cr_2O_3 26·39	26·85	26·49
$2\frac{1}{2}H_2O$ 7·77	7·78	—

Platindoppolverbindung $C_{12}H_8N_2, H_2Cl_6Pt + 2\frac{1}{2}H_2O$. Auf Zusatz von Platinchlorid zur heissen, verdünnt salzsauren Lösung der Base fällt augenblicklich ein matt orangegelber, fein krystallinischer Niederschlag aus, der in Wasser nicht, in kochender Salzsäure sehr schwer löslich ist.

0·3090 Grm. bis 120° getrocknet, verloren 0·0212 Grm. H_2O und hinterliessen 0·0957 Grm. Pt.

Berechnet	Gefunden
Pt. 30·71	30·98
H_2O 7·09	6·86

Jodmethylverbindungen. Seinerzeit haben wir mitgeteilt, dass das Phenanthrolin aus *m*-Phenylendiamin sehr leicht und vollständig 2 Mol. Jodmethyl addirt. Das Pseudophenanthrolin aus *p*-Phenylendiamin verhält sich insoferne anders, als es denselben Bedingungen ausgesetzt, ein Gemenge zweier Verbindungen gibt, von denen die eine 2, die andere 1 Mol. CH_3J enthält.

1 Theil Base, 5 Theile Jodmethyl und 10 Theile Methylalkohol 3 Stunden auf $100-110^\circ$ erhitzt, hatten nach dem

Erkalten ein Gemenge von viel grossen rothbraunen und von wenig kleinen hellorange gelben Krystallen abgeschieden, das durch öfters Umkrystallisiren aus Wasser leicht zu trennen ist, da in diesem Lösungsmittel die hellen Krystalle weit leichter löslich sind als die dunklen. Bei jedesmaligem Umkrystallisiren färbte sich die heisse Lösung dunkelbraunroth und schied gleichgefärbte Krystalle ab, während die Mutterlauge nur einen schwachen, röthlichen Stich besass, beim Eindunsten aber wieder dunkle Krystalle ansetzte.

Die öfters umkrystallisirte Verbindung erhält man entweder in dicken Tafeln, oder in mit der Basis auf einander gestellten Doppelpyramiden, die in dünner Schicht braungelb, in dicker granatroth gefärbt sind. Sie sind in kaltem Wasser ziemlich, in heissem sehr leicht löslich, ähnlich in verdünntem Weingeist, schwer in absolutem Alkohol, nicht in Äther. Die verdünnt alkoholische Lösung wird auf Zusatz von Ätzkali dunkelkirschroth gefärbt, beim Erwärmen trübt sie sich unter Abscheidung eines dunklen, geruchlosen Öls.

Die dunklen Krystalle sind eine krystallwasserhaltige Dijodmethylverbindung des Pseudophenanthrolins, welche das Krystallwasser zum grössten Theile schon bei 100°, vollständig aber erst bei 110° verliert.

1. 0·2485 Grm. lufttrockene Substanz verloren 0·0083 Grm. H₂O.
2. 0·2392 Grm. lufttrockene Substanz gaben 0·2301 Grm. AgJ und 0·0015 Grm. Ag.
3. 0·2840 Grm. lufttrockene Substanz gaben 0·2752 Grm. AgJ und 0·0014 Grm. Ag.

Berechnet für C ₁₂ H ₈ N ₂ (CH ₃ J) ₂ + H ₂ O	Gefunden		
	1.	2.	3.
H ₂ O.....	3·75	—	—
J	52·91	52·72	52·95

Herr Dr. Brezina fand bei Untersuchung des Dijodmethylproductes:

Prismatisch.

$$a:b:c = 0\cdot8559:1:1\cdot7572.$$

$$a(100) c(001) d(012) p(111) q(112).$$

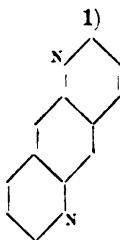
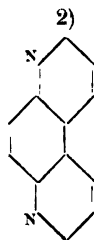
Winkel		Rechnung	Messung
<i>cd</i>	(001) (012)	41° 18	41° 24
<i>cq</i>	(001) (112)	53 30	53 36
<i>cp</i>	(001) (111)	69 42	69 41
<i>uq</i>	(100) (112)	52 21	52 18

Die neben der Dijodmethylverbindung entstandenen orange-gelben Nadeln sind zweifellos die Monojodmethylverbindung, die man ohne Nebenproducte erhalten kann, wenn die Base in Methylalkohol gelöst und mit der berechneten Menge Methyljodid versetzt einige Tage bei gewöhnlicher Temperatur sich selbst überlassen wird. Sie stellt dann citronengelbe Nadeln dar, die, was Löslichkeit betrifft, mit der vorbeschriebenen dunkel krystallisirenden Verbindung vollständig übereinstimmt. Die wässrige Lösung ist fast ungefärbt, die verdünnt weingeistige gelb und scheidet auf Zusatz von Ätzkali ein beim Schütteln wieder verschwindendes Öl aus, das nach längerem Stehen wieder ausfällt und in Krystalle übergeht, die im Ansehen von denen des Pseudophenanthrolinhydrates nicht zu unterscheiden sind. Leider waren sie nicht ungefärbt und die Menge zu klein, um beufuß Schmelzpunktsbestimmung eine Reinigung vornehmen zu können. Wir wollen gelegentlich diese Reaction näher untersuchen. Die Analyse der zweiten Jodmethylverbindung gab:

0·2371 Grm. verloren bei 110°, 0·0131 Grm. H₂O und gaben 0·1589 Grm. AgJ und 0·0022 Grm. Ag.

Berechnet für		Gefunden
<u>C₁₂H₈N₂, CH₃J + H₂O</u>		
H ₂ O	5·29	5·52
J	37·35	37·31

Die Zusammensetzung des Pseudophenanthrolins, sowie seiner Salze lässt keinen Zweifel, dass beide N-Atome des Biamidobenzols durch die Glycerinreaction in Pyridinringe einbezogen werden. Ebenso wie beim Phenanthrolin kann auch beim Pseudophenanthrolin diese Bildung in verschiedener Weise erfolgen.

*p*-Phenylendiamin*p*-Phenanthrolin

wie unten gezeigt wird, besitzt letzteres die durch die zweite Formel veranschaulichte Constitution, es ist also ebenso ein phenanthrenartiger Körper wie wir es für das Phenanthrolin, und wie der Eine von uns mit A. Cobenzl¹ es für das α und das β Naphtochinolin nachgewiesen haben.

Brom- und Jodadditionsproducte.

Wie das Phenanthrolin hat auch das Pseudophenanthrolin die Fähigkeit mit Brom additionelle Verbindungen zu liefern.

Bei Zusatz von titrirtem Bromwasser zu einer wässrigen Lösung des salzsauren Paraphenanthrolins fällt ein gelber, krystallinischer Körper aus, dessen Fällung erst durch einen grossen Überschuss von Bromwasser beendigt wird. Selbst als 3 Mol. Br verbraucht waren, schied das Filtrat noch immer, wenn auch nur in kleiner Menge, den Körper ab, wenn abermals sehr viel Bromwasser zugefügt wurde.

Die Fällung mit kaltem Wasser vollständig ausgewaschen und möglichst rasch abgepresst, stellt orangegelbe, unter dem Mikroskope als hübsche Prismen erkennbare Kryställchen dar, die nach Brom riechen und dasselbe constant, wenn auch nur langsam, abgeben. Die Krystalle verwandeln sich beim Liegen manchmal in einer Stunde, manchmal erst nach Wochen in ein braunrothes Pulver, das rasch unter Bromabspaltung beim Kochen mit Wasser entsteht. Mit verdünntem Ammoniak übergossen, tritt unter vollständiger Entfärbung und lebhafter Gasentwicklung (N wahrscheinlich) Lösung ein und nach einiger Zeit haben sich Nadeln gebildet, die nach Aussehen und Schmelzpunkt

¹ Diese Monatshefte, IV. 436.

unverändert abgeschiedenes Pseudophenanthrolin sind, wodurch eine substituierende Wirkung des Broms ausgeschlossen ist.

Die Analysen geschahen einmal jodometrisch, so wie wir es bei Untersuchung der Phenanthrolinbromide angaben, dann gewichtsanalytisch nach vorgehendem Glühen mit Ätzkalk oder Lösen in schwefeliger Säure, die leicht entfärbt und löst.

In Folge der Zersetzlichkeit der Substanz wurde zu jeder Bestimmung das Material frisch dargestellt.

Jodometrisch.

1.	0·4252 Grm.	verbrauchten	28·2 CC.	$\frac{1}{10}\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$	=53·00%	Br.
2.	0·3779	"	24·6	"	=52·1	
3.	0·5248	"	23·3	"	=57·4	
4.	0·6327	"	45·9	"	=58·1	

Gewichtsanalytisch vermitteltst SO_2 .

5.	0·5188 gaben	0·7184 Grm.	AgBr	und	0·0009 Grm.	Ag	=59·05%	Br.
6.	0·8243	"	1·1665	"	"	0·0009	"	=60·29

Für ein Bromadditionsproduct der Formel $\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2 + \text{Br}_2$ berechnen sich 57·14% Br, für die Formel $\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2 + \text{Br}_4$ 64·00% Br; wir halten letztere Zusammensetzung für wahrscheinlicher, da die gefundenen den für besagte Formel berechneten Zahlen um so näher rücken, je rascher die Darstellung erfolgte; die Grösse des zur Fällung benützten Überschusses hatte auf die Zusammensetzung nebenbei kernerkt, keinen Einfluss.

Lässt man das Pseudophenanthrolintetrabromid längere Zeit an der Luft liegen, wird es braunroth, verliert Brom, und verflüchtigt es sich gleichzeitig auch in Substanz.

1. 2343 Grm. verloren nach drei Wochen, wo das Gewicht so gut wie nicht mehr abnahm, im Ganzen 0·6892 Grm. = 55·8 Proc. Der Bromgehalt der ursprünglichen Substanz war 60·28 Proc., nach der genannten Zeit analysirt, gab sie folgende Zahlen:

0·2237 Grm. mit CaO geglüht, gaben 0·2168 Grm. AgBr und 0·0079 Ag = 43·85 Proc. Br.

0·1961 Grm. verbrauchten 10·2 CC. $\frac{1}{10}\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ = 41·61 Proc. Br.

Die Differenz im Gesamt- und im jodometrisch nachweisbaren Brom hat gewiss nur in der Schwierigkeit bei Gegenwart von Alkohol genau titiren zu können, seinen Grund und auch dieser Körper ist zweifellos nur ein Additionsproduct, da er mit NH_3 zersetzt, wieder Pseudophenanthrolinhydrat liefert, und wahr-

scheinlich das Pseudophenanthrolindibromid, für das sich 47·06 Br berechnen.

Beim Erwärmen des gelben Additionsproductes, also des Tetrabromides, mit wenig Alkohol, findet unter Bromabgabe leicht Lösung statt, beim Erkalten erstarrt die Flüssigkeit zu einem Haufwerk langer, gelber Nadeln, die rasch filtrirt und abgepresst sich schon beim Abpressen orangeroth färben und mit NH_3 zersetzt, wieder unverändertes Pseudophenanthrolin geben.

1. 0·2464 Grm. verbrauchten 10·4 CC. $\frac{1}{10}\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$.
2. 0·3455 Grm. mit Ätzkalk geglüht, gaben 0·4920 Grm. AgBr und 0·0010 Ag.

Berechnet für $\text{C}_{12}\text{H}_6\text{N}_2(\text{HBr})_2\text{Br}_2$	Gefunden
Gesamt-Br 63·7	60·8
Freies Br 31·8	33·7

Die gelben Nadeln sind also aller Wahrscheinlichkeit nach das zweifach bromwasserstoffsäure Pseudophenanthrolindibromid. Diese Zusammensetzung spricht wenigstens nicht dagegen, dass das ursprüngliche gelbe Additionsproduct, aus dem das bromwasserstoffsäure Perbromid beim Kochen mit Alkohol entstanden ist, wirklich, wie oben angenommen, ein Tetrabromid ist, das mit Alkohol in der Wärme in Berührung zwei Bromatome abgibt und in das Dibromid übergeht, das, wie aus Obigem hervorgeht, weit beständiger ist, und sich dann mit 2 Mol. Bromwasserstoffsäure verbindet, die durch Wechselwirkung von Brom auf Alkohol entstanden ist.

Alle bisher beschriebenen Bromide bläuen feuchtes Jodstärkepapier sehr energisch.

Wenn besagtes Tetrabromid mit absolutem oder wässrigem Weingeist längere Zeit gekocht wird, entstehen die gelben Nadeln des Dibromidsalzes beim Abkühlen nicht mehr, sondern es fallen dann nahezu ungefärbte Krystalle aus, die aber erst nach mehr denn eintägigem Kochen gegen Jodkaliumstärkekleisterpapier indifferent sind.

Die aus wenig Wasser nochmals umkrystallisirten nadligen Krystalle sind ein bromwasserstoffsäures Salz des Pseudophenanthrolins, wie daraus hervorgeht, dass sie mit Ammoniak ohne

Gasentwicklung die Base abscheiden, die aber stets etwas niedriger (170—172) schmolz, als man sonst beobachtet.

Die Analysen zeigen, dass zweifachsaures Salz verunreinigt mit einem bromärmeren Körper, wahrscheinlich dem einfachsauren Salz vorliegt. Zu den zwei Bestimmungen kamen Substanzen verschiedener Darstellung in Anwendung.

1. 0·2432 Grm. bei 100° getrocknet, gaben 0·2600 Grm. AgBr und 0·0009 Grm. Ag.

2. 0·2232 Grm. bei 100° getrocknet, gaben 0·2158 Grm. AgBr und 0·0019 Grm. Ag.

Berechnet für	Gefunden
$C_{12}H_8N_2(HBr)_2$	$C_{12}H_8N_2(HBr)_2$
2HBr 47·36	46·33 42·27

Pseudophenanthrolinperjodide. In der Hoffnung, dass die Perjodide des Pseudophenanthrolins beständiger sind als die Perbromide, haben wir auch die Darstellung erstgenannter Verbindungen unternommen.

Fügt man zur wässrigen Lösung des Pseudophenanthrolinchlorhydrates titrirte Jodjodkaliumlösung (etwa 3percentige), so fällt ein anfangs röthlichbrauner, bei grösserem Jodüberschuss dunkel werdender Niederschlag aus, der bei weiterem Jodzusatz seine Farbe nicht mehr ändert. Man verbraucht dazu auf 1 Mol. Base etwa 3 Mol. freies Jod. Der filtrirte, mit Wasser gewaschene und rasch abgepresste Niederschlag hat eine schwärzlich-grüne Farbe, ist gefälltem Jod sehr ähnlich, mikrokrystallinisch, riecht nach Jod und geht, in dünner Schicht der Luft ausgesetzt, schon nach einigen Stunden in einen rothbraunen Körper über, ähnlich dem, der bei der Darstellung mit kleineren Jodmengen sich abscheidet.

In Wasser suspendirt gekocht, verliert er Jod, verändert sein Aussehen aber nicht merklich. Mit Ammoniak übergossen behält er seine Farbe in der Kälte, ebenso auch während kurzem Erhitzen, dann aber wird er grünlich und in kleiner Menge gelöst. Die Lösung zeigt folgendes sehr charakteristische Verhalten, wenn sie nach anfangs längerem, später kürzerem Kochen jedesmal abgekühlt, wieder zum Kochen erhitzt, wieder gekühlt wird u. s. f.,

wobei die beim Abkühlen ausfallenden Niederschläge sich beim Erhitzen immer sehr leicht wieder lösen.

Die heisse Lösung ist:

grün, und wird beim Abkühlen trüb von bräunlichen Krystallen;

dunkelgelb, und wird beim Abkühlen gallertartig von eisenhydroxyd-ähnlicher Fällung;

gelb, und wird beim Abkühlen trüb von bronzefarbigem, schimmernden Krystallen;

lichtgelb, und wird beim Abkühlen bluthroth gefärbt und zwar von oben nach unten zu, und bleibt klar;

lichtgelb, und wird beim Abkühlen dunkelblau von Krystallen, die im reflectirten Lichte dunkelbronzebraun sind;

lichtgelb und wird beim Abkühlen trüb von röthlichbronzefarbigem Krystallfittern.

Die Reactionen sind nicht nur charakteristisch, sondern auch überaus empfindlich, so dass sie mit einigen Stäubchen leicht und sicher auszuführen sind. Sie treten, wenn auch viel langsamer, ein, wenn das in Ammoniak suspendirte Perjodid in der Kälte der Luft ausgesetzt wird und sind zum Theil wenigstens Oxydationswirkungen, wie insbesondere bei der Blaufärbung zu beobachten ist.

Schwefelige Säure entfärbt das schwarze Perjodid bei gelindem Erwärmen leicht, die gelbliche Lösung scheidet, mit Ammoniak alkalisch gemacht, nach einiger Zeit die charakteristischen Prismen des Pseudophenanthrolinhydrates (Schmz. 173) ab, die in der Mutterlauge am Uhrglas eingedunstet, stellenweise wieder dunkelblaue Färbung annehmen.

Die Analyse des schwarzen Jodids erfolgte jodometrisch, ergab aber sehr abweichende Zahlen, selbst wo die Darstellung derselben in vollständig gleicher Weise geschah.

0·4969 Grm. verbrauchten	20·6 CC.	$\frac{1}{10}\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$	= 52·6% J.
0·3520 " "	16·1 "	"	= 58·5
0·3242 " "	13·0 "	"	= 50·9

Wahrscheinlich ist der Körper das Pseudophenanthrolin-dijodid, das 58·5% J erfordert.

Löst man dasselbe in wenig heissem Alkohol auf, entsteht eine dunkelbraune Lösung, aus der beim Erkalten dunkelblaugraue Nadeln ausfallen, die in sehr dünner Schicht durchsichtig

granatfarben sind. Sie werden mit NH_3 kurze Zeit gekocht nicht verändert, von schwefliger Säure jedoch leicht gelöst, Ammoniak fällt dann wieder Pseudophenanthrolin.

Dieses Jodproduct enthält nur einen Theil des Jods additionell, den anderen als Jodwasserstoffsäure und ist ein jodwasserstoffsäures Pseudophenanthrolindijodid.

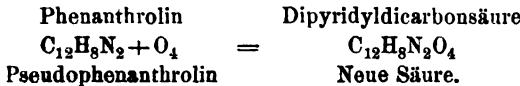
1. 0.4207 Grm. in SO_2 gelöst, gaben 0.5023 Grm. AgJ und 0.0015 Grm. Ag.

2. 0.6360 Grm. mit concentrirter titrirter SO_2 zerlegt, verdünnt und der Überschuss von SO_2 titrirt, enthielten 0.276545 Grm. freies J.

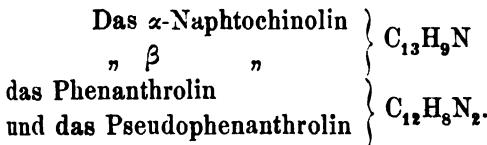
Die Formel	Gefunden
$\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2\text{HJ}_2$ verlangt	
J ₂ 45.19	43.48
J ₃ 67.79	67.84

Oxydation des Pseudophenanthrolins.

Die Base wird von Chromsäure schwierig und erst nach längerem Kochen angegriffen, leicht dagegen und bei grosser Verdünnung von Kaliumpermanganat, das glatt eine zweibasische Säure liefert, die aus dem Pseudophenanthrolin durch Aufnahme von O_4 entsteht, also gerade wie die Dipyridyldicarbonsäure aus dem Phenanthrolin.



Diese Thatsache im Zusammenhange mit dem Verhalten der neuen Säure beweist, dass von den früher angeführten Formeln des Pseudophenanthrolins die zweite richtig ist, welche die Bildung einer zweibasischen Säure von gleichem C-Gehalte leicht begreifen lässt, daher die Base auch zu den phenanthrenartigen Basen der Pyridinreihe gehört, von welchen bis nun vier bekannt sind:



Die Oxydation geschieht mit guter Ausbeute ganz in derselben Art, wie wir sie für das Phenanthrolin beschrieben haben. Auf

5 Grm. Base, vertheilt in 1 Liter Wasser, kamen 12 Grm. KMnO_4 in Anwendung.

Die Entfärbung ist anfangs rasch, wird zum Schluss oder nach Zusatz von noch einigen Cubikcentimetern Chamäleon auffallend langsam, obzwar noch immer unzersetzte Base anwesend ist. Filtrat und Waschwässer vom ausgeschiedenen Mangan-niederschlage werden concentrirt und so ein kleiner Theil nicht-oxydirende Base rückgewonnen, der beim Erkalten auskrystallisirt; dann setzt man Essigsäure bis zum Verschwinden der alkalischen Reaction und Kupferacetat zu, so lange der entstehende blaue Niederschlag sich noch vermehrt. Das blaue Kupfersalz fällt in der Hitze gleich krystallinisch aus, in der Kälte gefällt, ist es für kurze Zeit gelatinös. Dieses Kupfersalz wird nach dem Filtriren und Waschen mit Schwefelwasserstoff heiss zerlegt die Säurelösung durch Eindampfen concentrirt und so Krystalle der Säure $\text{C}_{12}\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_4$ erhalten, deren Mutterlauge bei wiederholtem Einengen neue Krystallisationen derselben Substanz liefern. Die Ausbeute betrug aus 40 Grm. Pseudophenanthrolin 36 Grm. krystallwasserhältige Säure, ist also gleich 64% der theoretischen.

Um eventuell gebildete Nebenproducte zu isoliren, um insbesondere zu entscheiden, ob auch bei Oxydation des Pseudophenanthrolins Chinolinsäure entsteht, die wir als secundäres Oxydationsproduct des Phenanthrolins nachgewiesen haben, ist die Mutterlauge des blauen Kupfersalzes in der Weise verarbeitet worden, dass zunächst etwas eingedampft wurde. Als erste Krystallisation schieden sich prächtig grüne Krystallschuppen ab, die leicht als eine Doppelverbindung von Pseudophenanthrolin mit Kupferacetat zu erkennen waren. Als zweite Krystallisation fiel ein blaues Kupfersalz, identisch mit dem durch Fällung erhaltenen aus. Das Filtrat von diesem mit SH_2 zerlegt, eingedampft, das organische mit Alkohol extrahirt, wieder eingedampft und mit Silbernitrat ausgefällt, gab reichlich Niederschlag, in dem aber nur Essigsäure und kleine Mengen der Säure des blauen Kupfersalzes nachzuweisen waren. Es hatte sich somit nachweisbar nur eine einzige Säure gebildet und die Differenz zwischen der erzielten und der theoretisch möglichen Ausbeute erklärt sich durch die bekannte Schwierigkeit, aus den grossen

Mengen von Mangandioxyd das hartnäckig anhaftende Kalisalz vollständig zu gewinnen.

Für die entstandene Säure der Formel $C_{12}H_8N_2O_4$ ist der Name Metadipyridyldicarbonsäure gewählt worden, da sie sich als Dicarboxylderivat eines Dipyridyls herausstellte, das, wie wir unten zeigen werden, am besten als Metadipyridyl zu bezeichnen ist.

Die Reinigung der Rohkrystallisation geschieht durch Umkrystallisiren aus heissem Wasser, dem eventuell etwas Essigsäure zugesetzt wird, vermittelt Thierkohle. Zusatz von Salzsäure erleichtert das Lösen allerdings sehr, doch krystallisirt dann meist nicht mehr die Säure, sondern deren Chlorhydrat aus, das mit Wasser sich nicht oder nur sehr schwer zerlegt.

Die reine Säure krystallisirt aus Wasser in kleinen weissen Körnern, nur einmal erhielten wir bei langsamer Krystallisation einer grösseren Quantität lange, ziemlich dicke Prismen, die aber zur Krystallmessung unvollständig entwickelt waren und selbst in verschlossenen Röhrchen nach einiger Zeit trüb und weiss wurden. Sie verliert das Krystallwasser leicht und vollständig bei 100—105°. Die Analyse ergab als Zusammensetzung $C_{12}H_8N_2O_4 + \frac{1}{2}H_2O$.

0·2653 Grm. Trockensubstanz gaben 0·5678 Grm. CO_2 und 0·0786 Grm. H_2O .

0·2226 Grm. Trockensubstanz gaben 0·4793 Grm. CO_2 und 0·0718 Grm. H_2O .

Berechnet für $C_{12}H_8N_2O_4$	Gefunden	
C 59·01	58·52	58·78
H 3·28	3·30	3·58

0·2323 Grm. lufttrockene Substanz verloren beim Trocknen 0·0094 Grm. H_2O .

Berechnet für $C_{12}H_8N_2O_4 + \frac{1}{2}H_2O$	Gefunden	
3·58	4·05	

Die Metadipyridyldicarbonsäure löst sich in kaltem Wasser schwierig, leicht in heissem und in angesäuertem Wasser, sehr schwer in Alkohol, fast nicht in Äther und Chloroform, und selbst beim Erhitzen. Sie schmilzt im Capillarrohr bei 213° uncorr.

unter lebhafter Gasentwicklung, nachdem bei 210° schwache Braunfärbung eingetreten ist.

Die wässrige Lösung färbt sich nach Zusatz von Eisenvitriol dunkelorange gelb, nach zwölfstündigem Stehen etwa bilden sich dann röthlichbraune häutige Absonderungen. Eisenchlorid fällt augenblicklich gelblich weisse Flocken, Bromwasser bringt keine Veränderung hervor und die kleine Menge Brom ist noch nach 12 Stunden unvermindert vorhanden. Kupferacetat reagirt genau so wie mit dem Ammoniaksalz.

1 Grm. Säure mit Ammoniak neutralisirt und auf 40 CC. verdünnt, verhält sich folgendermassen gegen Metallsalze:

Chlorcalcium: nach kurzem Stehen durchsichtige Blättchen.

Chlorbaryum: auch nach 12 Stunden keine Fällung.

Eisensulfat: selbst in sehr verdünnter Lösung augenblicklich rothe Flocken, die bald braunroth, auf Zusatz von Sodalösung aber weiter nicht verändert werden.

Eisenchlorid: lichtbraune Flocken.

Nickelsulfat: lichtblaue Flocken.

Cobaltsalze: röthliche Flocken in geringem Überschusse des Fällungsmittels leicht löslich.

Zinksulfat: weissflockig.

Bleizucker: weisse Flocken, die beim Stehen bald feinpulverig werden, im überschüssigen Fällungsmittel nicht löslich sind.

Quecksilberoxydul und Oxydsalze: feinpulverige weisse Niederschläge.

Silbernitrat: weisse Gallerte; beim kurzen Kochen wird sie nicht verändert, bei längerem Stehen aber feinflockig krystallinisch.

Kupferacetat: in der Kälte eine blaue Gallerte, die schon beim Schütteln in himmelblaue Nadelchen übergeht, die beim Fällen in der Wärme augenblicklich ausfallen.

Zur Charakterisirung der Säure ist eine Anzahl von Salzen analysirt worden.

Neutrales Kaliumsalz $C_{12}H_8K_2N_2O_4 + 5H_2O$. Man erhält es nach starkem Concentriren der wässrigen Lösung in flachen tafelförmigen Krystallen, die in Wasser sehr leicht, in verdünntem Weingeist schwierig löslich sind und Krystallisationswasser enthalten, das erst bei sehr hoher Temperatur (370°) entweicht. Bis 370° erhitzt zersetzt sich das Salz nicht, bei 380° tritt aber schon Bräunung ein.

1. 0·2746 Grm. verloren bis 370° 0·0584 Grm. H_2O und hinterliessen 0·1174 Grm. K_2SO_4 .

2. 0·3122 Grm. hinterliessen 0·1334 Grm. K_2SO_4 .

Berechnet	Gefunden	
	1.	2.
H ₂ O 21·94	21·27	—
K 19·06	19·19	19·18

Saures Kaliumsalz $C_{12}H_7KN_2O_4 + 2H_2O$. Dasselbe krystallisiert aus Wasser in dünnen Prismen, ist in Wasser und Weingeist in etwa derselben Masse löslich wie das Neutralsalz, enthält auch Krystallwasser, das aber bei niedrigerer Temperatur, und zwar 150° entweicht. Etwas höher erhitzt beginnt es sich zu zersetzen.

0·2347 Grm. bis 150° getrocknet verloren 0·0259 Grm.

0·2500 „ „ gaben 0·0680 Grm. K_2SO_4 .

Berechnet	Gefunden	
	1.	2.
H ₂ O 11·31	11·03	—
K 12·29	—	12·21

Calciumsalz $C_{12}H_6CaN_2O_4 + 5H_2O$. Die concentrirte Ammonsalzlösung scheidet auf Zusatz von Chlorcalcium allmählich weisse, nadelförmige Krystalle ab, die blätterartig verwachsen und in Wasser sehr schwer löslich sind.

Das Krystallwasser derselben entweicht vollständig erst bei 360° .

0·2774 Grm. verloren 0·0662 Grm. H_2O und gaben 0·1017 Grm. $CaSO_4$.

Berechnet	Gefunden	
	1.	2.
H ₂ O 24·18	23·86	—
Ca 10·75	10·78	—

Silbersalz. Fügt man zur heissen, wässrigen Säurelösung etwas überschüssiges Silbernitrat, entsteht augenblicklich eine voluminöse Fällung, die sich über Nacht in schön ausgebildete, schmale Blätter umwandelt. Dieselben verpuffen auch bei vorsichtigem Erhitzen sehr heftig und sind eine Doppelverbindung von Neutralsalz mit Silbernitrat.

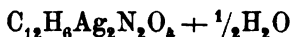
0·2630 Grm. lufttrocken analysirt gaben 0·2284 Grm. CO_2 und 0·0284 Grm. H_2O .

0·3092 Grm. hinterliessen 0·1568 Grm. Ag.¹

¹ Trotz aller Vorsicht trat stürmische Zersetzung ein, in Folge derselben eine kleine Quantität Silber aus dem grossen Tiegel verloren ging.

	Berechnet	Gefunden
C	23·27	23·68
H	0·96	1·20
Ag	51·84	50·71

Ein anderes, und zwar das neutrale Silbersalz



krystallisirte in schmalen, sehr schwer löslichen Blättern, als die Säure in 100 Theilen Wasser gelöst und die zur Bildung des sauren Salzes nothwendige Menge von Silbernitrat zugefügt wurde.

Es zersetzt sich beim Erhitzen sehr ruhig.

0·2648 Grm. gaben 0·2971 Grm. CO_2 , 0·0354 Grm. H_2O und 0·1225 Grm. Ag.

0·2581 Grm. verloren bei 100° 0·0056 Grm. H_2O und gaben 0·1188 Grm. Ag.

	Berechnet	Gefunden	
C	30·83	30·59	—
H	1·49	1·48	—
Ag	46·25	46·26	46·25
$\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$	1·92	—	2·16

Kupfersalz $\text{C}_{12}\text{H}_6\text{CuN}_2\text{O}_4 + 3\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$. Dieses Salz ist schon oben beschrieben worden. Es ist nicht löslich in Wasser, merklich aber in Kupferacetatlösung. Unter dem Mikroskop zeigt es kleine Körnchen. Es enthält Krystallwasser, verliert dasselbe bei etwa 140° , wobei es grauviolett gefärbt wird, ohne beim Stehen an freier Luft die ursprüngliche Farbe wieder anzunehmen.

0·2563 Grm. gaben 0·3630 Grm. CO_2 , 0·0779 Grm. H_2O , 0·0552 Grm. CuO .

0·2249 „ verloren 0·0377 Grm. H_2O und gaben 0·0483 Grm. CuO .

	Berechnet	Gefunden	
C	39·09	38·62	—
H	3·52	3·37	—
Cu	17·21	17·19	17·14
$3\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$	17·10	—	16·76

Chlorhydrat. Die Auflösung der Säure in Salzsäure scheidet beim Verdunsten gut ausgebildete wasserhelle Prismen

b, die in Wasser leicht, etwas schwieriger in concentrirter Salzsäure löslich sind. Sie enthalten Krystallwasser, das über Schwefelsäure nicht entweicht.

0.2662 Grm. gaben 0.1262 Grm. AgCl und 0.0014 Grm. Ag.

Berechnet für	Gefunden
$C_{12}H_8N_2O_4HCl + H_2O$	
HCl 12.22	12.23

Die folgenden Daten verdanken wir Herrn Dr. Brezina:

Krystallsystem monoklin.

Elemente in roher Näherung $a : b : c = 1.274 : 1 : 2.291$;
 $= 110^\circ 16$.

Formen a (100), c (001), e (011), p (111), q ($\bar{1}11$).

Winkel	Rechnung	Messung
ac	(100) (001)	69° 44
ap	(100) (111)	47 33
$\bar{a}q$	($\bar{1}00$) ($\bar{1}11$)	58 14
ec	(011) (001)	65 3
		69° 49
		47 35
		57 30
		64 36

Optische Orientirung: Axenebene die Symmetrieebene; α (100) $\beta \zeta = \text{circa } ((60^\circ))_{na}$; $\rho > r$.

Platindoppolverbindung $(C_{12}H_8N_2O_4)_2H_2Cl_6Pt + 8H_2O$. Zusatz von Platinchlorid zur heissen verdünnten Lösung der Säureverbindung scheiden sich fast augenblicklich schön gelbe, schimmernde Blättchen ab, kaltes Wasser löst sie gut wie nicht, auch verdünnte Salzsäure löst in der Kälte sehr wenig, in heissem Wasser lösen sie sich sehr leicht, krystallin beim Erkalten aber nicht mehr unverändert aus. Man erhält endlich dann ein Gemisch von körnigen, orangeröthen Krystallen einem blassgelben krystallinischen Niederschlag.

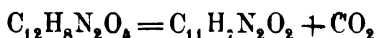
Behufs Analyse wurde die Verbindung durch Waschen mit Alkohol und dann mit Äther von der Mutterlauge befreit und dann in einer Luft getrocknet.

0.2845 Grm. verloren bis 140° erhitzt 0.0374 Grm. H₂O und hinterlassen 0.0538 Grm. Pt.

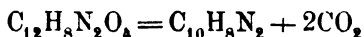
Berechnet	Gefunden
Pt 18.71	18.91
H ₂ O 13.81	13.14

Trockene Destillation der Metadipyridyldicarbonensäure.

Die der eben beschriebenen Dicarbonensäure des Dipyridyls isomere Säure aus dem Phenanthrolin spaltet, wie wir früher beschrieben haben, beim Erhitzen zunächst 1 Mol. CO_2 ab und geht in eine Monocarbonensäure nach der Gleichung



über, als Kalksalz mit überschüssigem Ätzkalk erhitzt aber 2 Mol. CO_2 und liefert ein Dipyridyl, welcher Vorgang entsprechend der Gleichung



verläuft.

Wir haben die genannten Prozesse auch bei unserer neuen Säure untersucht und mussten dabei vor Allem feststellen, ob dieselbe im Stande sei, in eine Monocarbonensäure überzugehen. Die Constitution derselben ist eine vollkommen symmetrische, die Stellung der Carboxylgruppen im Dipyridyl und insbesondere zu den N-Atomen vollkommen congruent, so dass beide COOH -Gruppen wahrscheinlich gleich fest gebunden sind und die Abspaltung von CO_2 aus der einen unter denselben Umständen erfolgt, unter welchen auch die andere CO_2 abgibt.

Thatsächlich ist dies der Fall.

2.006 Grm. bei 110° entwässerte Säure wurden in einem Kölbchen im Ölbad bis zur beginnenden Gasentwicklung erhitzt, die Temperatur, 190° , dann eingehalten und das entweichende Gas in einem Kaliapparat aufgefangen, in welchen im Verlaufe der Operation einige schwere Öltröpfchen überdestillirten. Der Kolben enthielt nach Beendigung der Kohlensäureentwicklung 1.334 Grm. eines dicken, basischen Öls, der Kaliapparat hatte 0.7583 Grm. CO_2 aufgenommen, der Gewichtsverlust betrug also 38.4% , die $\text{CO}_2 = 37.8\%$, während sich für den Verlust von 2 Mol. CO_2 36.06% berechnet. Das hierbei entstandene basische Öl ist identisch mit dem Dipyridyl, welches wir auch durch Destillation des Kalksalzes der Metadipyridyldicarbonensäure erhalten haben, wie insbesondere dessen Siedepunkt, dann Analyse und sonstige Eigenschaften der Pikrinsäureverbindung zeigten.

In kleinen Mengen bildet sich neben dem Dipyridyl eine sehr hochsiedende krystallisirte Substanz, die auch bei der Kalksalzdestillation entstand, stets aber in so kleinen Mengen, dass auch jede oberflächliche Untersuchung unterbleiben musste.

Trockene Destillation des Kalksalzes der Metadipyridyl-dicarbonensäure.

Je 5 Grm. trockenes Kalksalz mit etwa dem $1\frac{1}{2}$ -fachen Gewicht gelöschten Ätzkalk gemischt wurden in schwer schmelzbaren Röhren erhitzt, deren schnabelförmiges Ende mit einer Vorlage, dann mit einem U-Rohr, im unteren Theile gefüllt mit Glasperlen und verdünnter Salzsäure, endlich mit der Wasserluftpumpe verbunden war. Die Zersetzung begann bei Dunkelrothglut, anfangs ging etwas Wasser über, dann ein dickes, gelbes, in Wasser lösliches, schweres Öl, das zum Schluss dunkelbraunroth war und kleine Mengen von Kryställchen beim Erkalten abschied, die beim Umschütteln im Öle sich wieder auflösen. In diesem Stadium entwickelten sich reichlich permanente Gase.

Aus 40 Grm. Kalksalz entstanden 11 Grm. trockenes Öl, während theoretisch 21·8 Grm. Dipyridyl zu erwarten wären.

Beim Auflösen des Öles in der im U-Rohr vorgelegten Salzsäure schieden sich die oben erwähnten Kryställchen wieder ab, die ihrer kleinen Menge halber nicht untersucht wurden; die rothgelbe Lösung wurde eingedampft, mit Ätzkali zerlegt, das in Wasser leicht lösliche Öl durch Zufügung von festem Kaliumcarbonat vollständig abgeschieden und nach dem Verdünnen mit etwas Alkohol getrocknet, zuerst am Wasserbad, dann über freiem Feuer destillirt.

Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, dass in all jenen Fällen, wo die ätherische, alkoholische u. dgl. Lösung eines destillirbaren Körpers zu verarbeiten ist, die Ausbeute an äther- und alkoholfreier Substanz ganz wesentlich gesteigert wird, wenn man vor der eigentlichen Destillation einige Zeit getrockneten Wasserstoff durch die allmählig immer höher erhitzte (je nach dem Siedepunkte endlich 20—40° unter diesen) Flüssigkeit leitet.

Bei der ersten Destillation ging zwischen 290—293 Alles über, bei der zweiten beobachteten wir den Siedepunkt 291—292

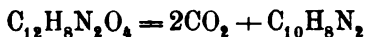
uncorr. bei 736 Mm. Druck (Thermometer bei $+2^\circ$ in Korkmitte, Fadentemperatur 40°).

Das mehrere Tage mit festem Kaliumcarbonat getrocknete Destillat gab bei der Analyse:

0.2774 Grm. gaben 0.7804 Grm. CO_2 und 0.1285 Grm. H_2O .

Berechnet für $\text{C}_{10}\text{H}_8\text{N}_2$	Gefunden
C . . . 76.92	76.72
H . . . 5.12	5.15

Das Hauptproduct ist also ein Körper, der nach der Gleichung



entstanden ist und den wir Metadipyridyl nennen wollen.

Das Metadipyridyl ist frisch destillirt, schwach gelb gefärbt, beim längeren Stehen wird es aber schwach braun. Es ist sehr dickflüssig, riecht bei gewöhnlicher Temperatur fast nicht, beim Erwärmen eigenthümlich und nicht unangenehm. Es löst sich in Wasser in allen Verhältnissen und unter starker Erwärmung, ebenso leicht in Alkohol, schwer in Äther. Die wässrige Lösung reagirt so gut wie nicht auf rothes Lackmuspapier. Bei der Destillation zersetzt es sich etwas, auf 0° abgekühlt wird es sehr dick, bei -15° fast glasig, ohne zu krystallisiren. Bei wochenlangem Stehen in Berührung mit geschmolzenem Kaliumcarbonat erstarrt es aber zu weissen, grossen, tafelfartigen Krystallen, die an der Luft fast augenblicklich wieder zerfliessen, zweifellos in Folge Feuchtwerdens. Substanz, die unter sonst ganz gleichen Bedingungen geschmolzene Pottasche nicht enthielt, zeigt auch nie die Spur von Krystallisation.

Zweifellos ist das vollständig wasserfreie Metadipyridyl fest und krystallisirt, die Krystallisation der sehr hygroskopischen Substanz wird aber schon durch sehr kleine Mengen Wasser verhindert und aufgehoben.

Diese Thatsache dürfte um so bemerkenswerther sein, nachdem von den Pyridin- und Chinolinbasen bisher die meisten nur ölig bekannt sind; auch solche, deren Siedepunkt dem des Metadipyridyls sehr nahe kommt. Es wäre wohl des Versuches werth, zu constatiren, ob nicht auch bei manchen dieser ein kleiner

Wassergehalt die ölige Beschaffenheit verursacht und ob, wenn jede Spur Wasser ausgeschlossen wird, nicht auch bei mittleren oder doch nicht allzu niedrigen Temperaturen Krystallisation eintritt.

Das spec. Gewicht des Metadipyridyls ist bei öligem, nochmals getrockneter und destillirter Substanz, bezogen auf Wasser derselben Temperatur:

Bei 0°	1·1757,
„ 20°	1·1635,
„ 50°	1·1493.

Das Chlorhydrat des *m*-Dipyridyls krystallisirt in langen, weissen Prismen, die nicht hygroskopisch, in Wasser ziemlich leicht, in Alkohol und concentrirter Salzsäure sehr schwer löslich sind.

Pikrat des Metadipyridyls. Die kalte alkoholische Lösung der Base wird durch Pikrinsäure harzig gefüllt, die heisse und verdünnte dagegen scheidet lichtgelbe, mikroskopische, kurze Prismen ab, die in kaltem Alkohol sehr schwer, nicht viel leichter in heissem löslich sind, im Capillarrohr erhitzt, von 175° angefangen, dunkel werden und bei 232° schmelzen.

Die Analyse 1 ist mit Base aus dem Kalksalz, die Analyse 2 mit dem Dipyridyl, erhalten durch Erhitzen der freien Metadipyridyldicarbonensäure ausgeführt,

1. 0·2452 Grm. bei 100° getrocknet gaben 0·3894 Grm. CO₂ und 0·0519 Grm. H₂O.

2. 0·2290 Grm. bei 100° getrocknet gaben 0·3623 Grm. CO₂ und 0·0494 Grm. H₂O.

Berechnet für	Gefunden	
$C_{10}H_8N_2(C_6H_3N_3O_7)_2$	1.	2.
C 42·99	43·31	42·81
H 2·28	2·35	2·39

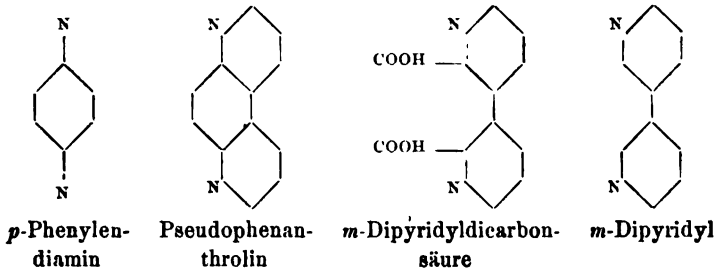
Platindoppelverbindung. Das Chloroplatinat fällt aus der verdünnt salzsauren Lösung der Base fast augenblicklich als orangegelber, feinpulveriger Niederschlag, der in Wasser so gut wie nicht löslich ist. Die mit Alkohol und Äther gewaschene Substanz enthält nach kurzem Liegen an freier Luft kein Krystallwasser.

0·2525 Grm. bei 100° getrocknet hinterliessen 0·0871 Grm. Pt.
 0·2602 " " " " gaben 0·2030 Grm. CO₂ und
 0·0417 Grm. H₂O.

Berechnet für C ₁₀ H ₈ N ₂ ·H ₂ Cl ₆ Pt	Gefunden
C 21·20	21·27
H 1·76	1·78
Pt 34·55	34·49

Oxydation des Metadipyridyls.

Die Entstehung des Metadipyridyls aus dem *p*-Phenylendiamin in Folge der bisher beschriebenen Prozesse spricht dafür, dass es eine symmetrische Constitution besitzt und dass die zwei N-Atome beiderseits zu jenen C-Atomen, welche die Verbindung beider Pyridinreste vermitteln, die Stellung 1, 3 einnehmen (N=1 gesetzt), also in Übertragung des in der aromatischen Reihe usuellen Ausdruckes, die Metastellung. Diese Anschauung hat auch Veranlassung gegeben, den Namen Metadipyridyl zu wählen.



Das Dipyridyl konnte nun bei energischer Oxydation unter Zerstörung eines Pyridinringes in eine Monocarbonsäure des Pyridins übergehen, deren Carboxylgruppe zum N natürlich auch in der Stellung 1, 3 stünde, und es war die Möglichkeit geboten, die Versuche des Einen von uns, der in Gemeinschaft mit Cobenzl auf anderem Wege nachwies,¹ die Nicotinsäure hätte die Stellung 1 : 3, zu controliren.

¹ Diese Monatshefte IV.

Als Oxydationsmittel haben wir Kaliumpermanganat verwendet, das in neutraler Lösung sehr schwierig, relativ leicht aber die warme schwefelsaure Lösung des Dipyridyls angreift.

2 Grm. Base mit 4·16 Grm. H_2SO_4 in 250 Grm. H_2O gelöst wurden auf 80—90° erwärmt, dann allmählig 13·5 Grm. $KMnO_4$ in der eben nothwendigen Menge kalten Wassers gelöst eingetragen. Je 5 CC. der Chamäleonlösung brauchten bis gegen das Ende der Oxydation etwa zwei Minuten bis zur Entfärbung, die, wenn einmal eingeleitet, dann schon bei 40—50° mit gleicher Schnelligkeit verläuft; zum Schlusse waren aber bis 10 Minuten nothwendig. Das farblose Filtrat vom Manganniederschlag bei gelinder Wärme bis zur Ausscheidung von Kaliumsulfat concentrirt und dann mit etwa dem $1\frac{1}{2}$ -fachen Volum Alkohol vermischt, schied fast sämmtliches Kaliumsulfat ab, die alkoholische Lösung hinterliess eine Krystallisation von Nadelchen, in Ansehen und Geruch der Nicotinsäure äusserst ähnlich, durch Lösen in warmem Wasser und Zusatz von Kupferacetat entstand ein grünliches Kupfersalz, das mit kaltem Wasser gewaschen und mit Schwefelwasserstoff zerlegt, nach entsprechender Concentration weisse Nadeln lieferte, die in jeder Beziehung mit Nicotinsäure übereinstimmten. Der Schmelzpunkt der ersten Krystallisation war 229·5—231°, der zweiten 231—232°, das Platin- und Kupfersalz zeigten in Form und Farbe die Eigenschaften der Nicotinsäureverbindung, die Löslichkeit in Wasser und Alkohol der freien Säure, war dieselbe wie die der Nicotinsäure dargestellt aus Chinolinsäure u. s. f.

Das Platinsalz gab bei der Analyse folgende Werthe:

0·1834 Grm. verloren bei 100° 0·0100 Grm. H_2O und hinterliessen 0·0514 Grm. Pt.

Berechnet für		Gefunden
$(C_6H_5NO_2)_2H_2Cl_6Pt + 2H_2O$		
H_2O	5·12	5·45
Pt	28·20	28·02

Herr Dr. Březina hatte überdies die Güte, die Platindoppelverbindung krystallographisch zu untersuchen und constatirte gleichfalls vollständige Identität mit dem Chloroplatinat der Nicotinsäure.

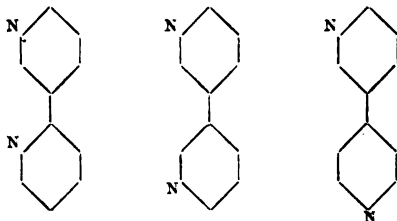
Die Nicotinsäure besitzt also ihrer Entstehung nach aus dem Dipyridyl, das durch die Reihe vorbeschriebener Reactionen aus dem *p*-Diamidobenzol erhalten wird, die Stellung 1:3, ein Resultat, das mit jenem übereinstimmt, welches die Untersuchung des β -Naphtochinolins ergeben hat.

Reduction des Metadipyridyls.

Cahours und Etard haben vor einiger Zeit die Ansicht aufgestellt, dass das Nicotin ein Tetrahydrodipyridin ist $C_{10}H_{10}N_2, H_4$ und haben auch auf verschiedene Weise, so durch Oxydation des Nicotins mittelst Ferridcyanalium ein Dipyridin $C_{10}H_{10}N_2$ aus dem Nicotin dargestellt, das sie zum Unterschied von dem Anderson'schen Dipyridin Isodipyridin nannten.

Weidel und Russo haben inzwischen gezeigt, dass das Anderson'sche Dipyridin nicht ein Polymeres des Pyridins, sondern aus letzterem unter Wasserstoffaustritt entstanden ist, also ihm nicht die Formel $C_{10}H_{10}N_2$, sondern $C_{10}H_8N_2$ zukommt, es also ein Isomeres des Dipyridyls ist, das wir aus dem Phenanthrolin dargestellt und vor einem Jahre beschrieben haben. Sie haben ferner gezeigt, dass neben ihrem Isodipyridyl $C_{10}H_8N_2$ thatsächlich ein Dipyridyl $C_{10}H_{10}N_2$ entsteht und ersteres durch energische Reduction in ein sechsfach hydrirtes Product $C_{10}H_{14}N_2$, das mit dem Nicotin isomere Isonicotin übergeführt werden kann. Bei dieser Gelegenheit haben sie auch die Vermuthung aufgestellt, dass das Nicotin gleichfalls von einem Dipyridyl $C_{10}H_8N_2$ abstamme, und zwar ein sechsfach hydrirtes Dipyridyl $C_{10}H_8N_2, H_6 = C_{10}H_{14}N_2$ sei.

Nachdem nun durch Oxydation des Nicotins in guter Ausbeute Nicotinsäure $C_6H_5NO_2$ entsteht, von welcher wir gezeigt haben, dass sie die Stellung 1:3 besitzt, kann im Nicotin, obige Annahme als richtig vorausgesetzt, nur eines der drei folgenden Dipyridyle existiren:



Im letztangeführten Fall würden bei der Oxydation Nicotinsäure und γ -Pyridincarbonsäure entstehen können, von welcher Skraup und Cobenzl gezeigt haben, dass sie die Parapyridincarbonsäure ist. Nachdem aber die γ -Säure sehr beständig ist, und aller Wahrscheinlichkeit nach unter den Oxydationsproducten des Nicotins leicht aufgefunden worden wäre, wenn besagtes Dipyridyl im Nicotin anwesend ist, besonders Laiblin aber nicht die geringste Angabe in dieser Beziehung macht, dürfte wohl diese Möglichkeit ausgeschlossen sein.

Viel mehr für sich haben die ersten zwei Möglichkeiten. Die Formel 1 lässt Nicotinsäure und die sehr leicht lösliche und sehr leicht veränderliche Picolinsäure erwarten, die Formel 2 nur Nicotinsäure.

Beide Dipyridyle haben wir synthetisch erhalten, das erste aus dem Phenanthrolin, das zweite aus dem Pseudophenanthrolin. Von dem ersten leider so wenig, dass die Reduction derselben damals nicht versucht werden konnte.

Das *m*-Dipyridyl, das wir oben beschrieben haben, versuchten wir in folgender Art in ein Hexahydrodipyridyl zu verwandeln:

5 Grm. der Base wurden in überschüssiger, concentrirter Salzsäure gelöst und unter Erwärmen im Wasserbade mit 22 Grm. granulirtem Zinn reducirt; unter diesen Umständen ist die Wasserstoffentwicklung sehr gering, die bei Anwendung verdünnterer Salzsäure ziemlich energisch ist.

Nach vollständiger Lösung des Zinns wurde eingedampft. Die Lösung schied auch bei starker Concentration nichts Krystallisirtes ab, während nach unvollständiger Reduction ein schwerlösliches Zinndoppelsalz anschießt

Die mit Schwefelwasserstoff vom Zinn befreite Flüssigkeit eingedampft hinterliess ein schwierig krystallisirbares, leicht lösliches Chlorhydrat, das mit KOH zerlegt kein Öl abschied, welches aber in reichlicher Menge durch Pottasche ausfiel. Es wurde behufs leichteren Trocknens mit Alkohol verdünnt, da Äther nur schwierig löste, der Alkohol durch Destillation im Wasserbade, dann durch immer höheres Erwärmen unter Durchleiten von Wasserstoff entfernt.

Bei der Destillation ging zwischen 287—289 uncorr. ein hellgelbes, dickes Öl über, das durch Analyse der Platindoppel-

verbindung als ein Hexahydro-*m*-Dipyridyl erkannt wurde. Es ist nicht empfindlich gegen Luft und Licht, ist in Wasser und Alkohol sehr leicht, schwierig in Äther löslich, reagirt sehr stark alkalisch und riecht intensiv narkotisch, der Schierlingspflanze sehr ähnlich. Es scheint Kohlensäure anzuziehen, zum wenigsten ist beim Zusatz von Salzsäure zur wässrigen Lösung des einige Tage bereiteten Körpers Gasentwicklung zu beobachten. Die alkoholische Lösung gibt auf Zusatz von Pikrinsäure eine anfänglich beim Schütteln verschwindende Trübung, später fällt ein gelblich röthliches Öl aus, das bald in lichtgelbe Krystallkörner übergeht, die in Alkohol selbst in der Hitze sehr schwer löslich sind, bei 180° braun, bei 202—203° flüssig werden.

Die Lösung in Salzsäure scheidet erst nach tagelangem Stehen einige Krystallnadelchen ab und wird durch Ferridcyankalium nicht gefällt, auf Zusatz von Platinchlorid fällt aber ein orangerother, krystallinischer Niederschlag aus, der beim Liegen an der Luft eine etwas matte Farbe annimmt, krystallwasserfrei und ziemlich hygroskopisch ist.

0.3021 Grm. bei 105° getrocknet gaben 0.1039 Grm. Pt, 0.2280 Grm. CO₂ und 0.0723 Grm. H₂O.

	Berechnet für <u>C₁₀H₁₄N₂.H₂Cl₆Pt</u>	Gefunden
Pt	34.09	34.39
C	20.97	20.58
H	2.79	2.65

Das Platinsalz einer Base C₁₀H₁₂N₂ würde verlangen: C 21.04, H 2.45, das einer Base C₁₀H₁₆N₂, C 20.90, H 3.13.

Die Zusammensetzung der Base ist also C₁₀H₁₄N₂, dieselbe wie die des Nicotins; bei der sonstigen grossen Ähnlichkeit beider Alkaloide glauben wir statt dem schleppenden Namen Hexahydrometadipyridyl die Bezeichnung Nicotidin vorschlagen zu sollen.

Das Nicotidin scheint stark giftig zu sein, der Geruch verursacht Kopfschmerzen und sonstiges Unbehagen, das ziemlich heftig auftrat, als beim Trocknen durch Pottasche und beim Destilliren das öftere Einathmen des Dampfes nicht zu vermeiden war.

Herr Professor S. Exner hatte die Güte, das Nicotidin in physiologischer Beziehung zu prüfen; wir sind ihm hiefür umso mehr dankbar, als das ihm zur Verfügung gestellte Material sehr gering war.

Er theilt uns mit:

„Über die physiologische Wirkung des Nicotidins kann ich nach einigen wenigen Versuchen die in dem Folgenden enthaltenen Andeutungen geben:

Ich erhielt 0·681 Grm. Nicotidin und versetzte dieselben mit 6·81 CC. Wasser.

Von dieser Lösung injicirte ich am 8. Juni um 11 Uhr 18 Minuten einem nicht ganz erwachsenen Kaninchen langsam 1·6 CC. in die vena jugularis externa. Schon während der Injection zeigte das Thier Zittern an den Extremitäten. Losgebunden und auf den Boden gesetzt, machte das Thier krampfhaftige Vorwärtsbewegungen mit den Hinterbeinen, wobei es am ganzen Körper zitterte. Die Vorderbeine sind seitlich vom Körper weggestreckt und können nicht benützt werden, so dass das Thier mit Brust, Hals und Kopf auf dem Boden schleift. Auf plötzliches Berühren tritt ein einmaliges, reflectorisches Zucken auf. Die Pupillen sind bis zum Verschwinden der Iris erweitert, die Lippen blass; bedeutender Speichelfluss. Die Athemzüge an den im Allgemeinen tief eingezogenen Weichen auffallend sichtbar, sehr tief, 92 in der Minute. Die Muskeln der Extremitäten sind hart anzufühlen.

Um 11 Uhr 37 Minuten scheint das Thier sich zu erholen. Um die tödtliche Dosis des Nicotidins wenigstens annähernd zu erproben, injicirte ich jetzt in derselben Weise noch weitere 1·6 CC. meiner Lösung. Noch während das geschieht, bekommt das Thier Zittern der Extremitäten und geht gleich nach Vollendung der Injection, auf den Boden gelegt, unter Streckkrämpfen und Opistotonus zu Grunde.

Nach Beendigung der Krämpfe (also im Tode) zeigt sich den ganzen Rücken entlang ein eigenthümliches Wogen der Haare, welches auf fibrilläres Muskelzucken zurückzuführen ist.

13. Juni. Ich durchschnitt an einem Kaninchen den linken Halsympathicus und injicirte gleich nachher um 10 Uhr 10 Minuten 1 CC. meiner Lösung. Die Wunde wird schnell zugenäht und das Thier losgebunden. Ähnliche Krämpfe wie beim

ersten Versuche; die Hinterbeine sind nach hinten ausgestreckt, die Vorderbeine nach vorne und nach der Seite. Ungefähr jede $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$ Minute bekommt das Thier einen kurzdauernden Streckkrampf, der an gewisse Stadien der Strychninvergiftung erinnert. Die linke Pupille ist bei weitem weniger erweitert als die rechte, so wenig, dass man daran zweifeln kann, ob sie überhaupt eine abnorme Grösse hat. Die rechte Pupille bedeutend erweitert. An den Gefässen beider Ohren ist kein Unterschied wahrzunehmen. Starker Speichelfluss.

10 Uhr 25 Minuten. Das Thier beginnt sich zu erholen. An der Rückenhaul aufgehoben und auf den Boden gesetzt verharret es wenigstens eine Zeit lang in normaler Stellung. Auf Druck versucht es Bewegungen zu machen; diese tragen noch den Charakter clonischer Krämpfe. 88 Athemzüge in der Minute. Um 10 Uhr 30 Minuten macht es die ersten selbstständigen Gehversuche. 10 Uhr 45 Minuten. Fortschreitende Erholung. Pupillendifferenz sehr deutlich. Der Speichelfluss ist so stark, dass eine kleine Lache unter dem Kopfe des Kaninchens entsteht, wo es einige Zeit gegessen hat.

11 Uhr 7 Minuten. Gehversuche immer noch krampfhaft, aber das Thier nähert sich in der Stellung der Norm.

11 Uhr 55 Minuten. Das Thier hat wieder normale Stellung angenommen. Rechte Pupille noch stark erweitert.

3 Uhr 8 Minuten. Pupillendifferenz noch sehr bedeutend, die willkürlichen Bewegungen tragen immer noch den Charakter von Krämpfen.

Am nächsten Morgen fand ich das Thier ziemlich normal, die rechte Pupille immer noch weiter als die linke. Am Nachmittag desselben Tages ging es — wie mir berichtet wurde — unter Krämpfen zu Grunde.

13. Juni. Um 10 Uhr 42 Minuten brachte ich einem Frosche 1 CC. meiner Lösung unter die Rückenhaul.

10 Uhr 48 Minuten. Das Thier sitzt in normaler Stellung, nur ist der Rücken stark nach oben concav. In dieser Stellung lässt sich das Thier, als wäre es aus Holz, verschieben, im Kreise herumdrehen, ja, es lassen sich die Zehen der Hinterbeine weg-schneiden, ohne dass es sich rührt. Versucht man aber, es auf den Rücken zu legen, so richtet es sich wie ein normaler Frosch

wieder auf, und zieht man ihm ein Hinterbein vom Körper ab, so wird es in die Normalstellung zurückgebracht. Mit Ausnahme der genannten, an Opisthotonus mahnenden Krümmung des Rückens und der dadurch entstandenen Hebung des Kopfes ist keine Spur eines Krampfes zu bemerken. Die Athmung ist eingestellt, Pupillen erweitert.

10 Uhr 55 Minuten. Das Thier, auf den Rücken gelegt, bleibt jetzt liegen; Herzschläge, durch die Haut gezählt, 36 in der Minute, während ein zum Vergleich benützter normaler Frosch 70 in der Minute hat.

11 Uhr 4 Minuten. Der Frosch macht immer weniger Abwehrversuche, wenn man seine Lage ändert. Auf den Bauch gelegt zieht er immer noch die Hinterbeine an den Leib und bringt sich dadurch in die normale Sitzstellung. Da ich durch die Haut keinen Pulsschlag mehr wahrnehme, so öffne ich das Thier, um das Herz direct zu beobachten, wobei auch keinerlei Schmerzensäusserungen sichtbar werden. Auf den Bauch gelegt nimmt es aber immer noch seine Normalstellung ein. Puls 29 in der Minute unregelmässig.

11 Uhr 25 Minuten. Fängt wieder an Reflexe auf Druck zu zeigen und macht Sprungversuche. 11 Uhr 30 Minuten. Puls 31 in der Minute. 11 Uhr 47 Minuten. Puls 18 in der Minute. 11 Uhr 55 Minuten. Bisweilen eine anscheinend willkürliche Bewegung mit den Hinterbeinen. Um 3 Uhr 8 Minuten finde ich das Thier todt.

Ein zweiter Frosch, dem ich $\frac{1}{2}$ CC. meiner Lösung in derselben Weise gegeben habe, zeigt dieselben Erscheinungen, nur treten sie langsamer auf. Auch er geht zu Grunde. In den vorgeschritteneren Stadien der Vergiftung und im Tode zeigt sich das Herz mit Blut überfüllt.

15. Juni. Den Rest meiner Flüssigkeit versetzte ich mit Phosphorsäure, bis ich eine schwach saure Reaction bekam. Die Flüssigkeit, die ich in dieser Weise hergestellt hatte, enthielt in 1 CC. 0.05 Grm des Giftes.

Ich vergiftete mit 1 CC. einen Frosch in der oben geschilderten Weise und bekam genau dieselben Resultate, nur traten entsprechend der geringeren Dosis, die Erscheinungen langsamer auf und fehlte die Contractur im Rücken und Nacken.

Diese Contractur hat höchst wahrscheinlich mit der Wirkungsweise des Giftes direct nichts zu thun und beruht auf der Reizung, welche die stark alkalische Flüssigkeit, unter die Rückenhaut gebracht, hervorruft.

Den Rest meiner Flüssigkeit, der noch 0.04 Grm. Nicotidin enthielt, injicirte ich am 16. Juni 1883 einem grossen Kaninchen in die vena jugularis externa, nachdem ich vorher den nervus sympathicus links durchschnitten hatte. Es zeigten sich auch hier wesentlich dieselben Resultate, wie bei der nicht neutralisirten Flüssigkeit. Das Thier hatte gleich nach der Injection Krämpfe, die aber entsprechend der geringeren Dosis nicht so heftig waren, als bei den früheren Versuchen. Doch fühlten sich auch bei anscheinender Ruhe die Muskeln hart an. Die linke Pupille normal, die rechte bedeutend erweitert. Starker Speichelfluss. Das Thier war nach $4\frac{1}{2}$ Stunden im Stadium der Erholung und wurde da zu anderen Zwecken getödtet.

Aus diesen spärlichen Versuchen ergibt sich, dass das Nicotidin ein Gift ist, das schon in Dosen unter einem Decigramm ein Kaninchen, in solchen von 5 Centigramm einen Frosch zu tödten vermag. Erzeugt Krämpfe, die bei Kaninchen einen gemischt clonischen und tonischen Charakter haben, bei Fröschen in keinem Falle clonisch waren. Es wirkt reizend auf die centralen Verbindungen des nervus sympathicus, zum mindesten was seine Pupillarfasern anbelangt und tödtet, wie nach den Versuchen an Fröschen zu vermuthen ist, durch Verlangsamung der Pulsfrequenz und schliesslichem diastolischem Stillstand des Herzens.“

Die Überführung des *m*-Dipyridyls in eine dem Nicotin isomere, mit demselben aber nicht identische Base, gibt über die Constitution dieser Pflanzenbase nur in negativer Beziehung Aufschluss und es müssten nun Versuche angestellt werden, durch Reduction eines andern Dipyridyls Nicotin zu gewinnen, um positive Anhaltspunkte zu gewinnen. Wie schon oben erwähnt wurde, hätte da vor Allem die Reduction des Dipyridyls aus Phenanthrolin Interesse.

Bei allen ähnlichen Versuchen ist aber zu berücksichtigen, dass die Reduction der Dipyridyle und ähnlicher ungesättigterer Verbindungen zu gesättigteren ja eine grosse Zahl von isomeren Verbindungen liefern kann. Ob nun das Dipyridyl, das im Nicotin

angenommen wird, bei der Reduction auch wieder Nicotin und nicht etwa ein anderes Hexahydrodipyridyl liefert, ist fraglich und in dieser Beziehung ist die Thatsache bemerkenswerth, dass bei der Reduction der künstlich dargestellten Dipyridyle der Siedepunkt sich wenig erniedrigt, wenigstens siedet das

m-Dipyridyl bei 291—292, das Nicotidin bei 287—289, das γ -Dipyridyl¹ bei 293, das Dihydrodipyridyl¹ bei 286—290, das Isonicotin¹ „weit über 260“, während umgekehrt, beim Übergang des Nicotins in das Isodipyridin, also das Dihydrodipyridyl, eine namhafte Siedepunkterhöhung eintritt, d. i. von 242° auf 274—275°.

Ohne vorstehender Auseinandersetzung besondere Bedeutung beizumessen, glauben wir aus denselben doch den Schluss ziehen zu dürfen, dass eine erschöpfende Untersuchung jener Körper, die aus dem Nicotin durch allmälige Wasserstoffentziehung zu gewinnen sind, die Constitution der Base von grösster Bedeutung und auch sonst in theoretischer Beziehung von Interesse sein müsste.

Ein Resultat unserer Arbeit lässt sich mit denen älterer Untersuchung zusammenfassen. Die bisherigen Versuche über Überführung von Diamiden des Benzols und Monamiden des Naphtalins haben nämlich übereinstimmend gezeigt, dass, wo bei der „Glycerincynthese“ die Umstände der Bildung eines phenanthrenartigen Körpers ebenso günstig sind, wie der eines „anthracenartigen“, immer der erste entsteht, so das β -Naphtacholin aus β -Naphtylamin und die beiden Phenanthroline aus dem *m*- und *p*-Diamidobenzol, Thatsachen, die wohl in mehr als Zufälligkeiten begründet sind und denen vielleicht der Umstand an die Seite gesetzt werden kann, dass, mindestens im Wiener Gastheer, der Phenantrenegehalt weit grösser ist, als der an Anthracen.

¹ Weidel und Russo, Monatshefte III, 869.

Studie über das Kupfervoltmeter.

Von Dr. **Hermann Hammerl**,

Privatdocent.

I. Zweck der Untersuchung.

Während das Knallgasvoltmeter, sowie das Silbervoltmeter insbesondere zu wissenschaftlich genauen Messungen geringerer Stromstärken benützt werden, wird zur Messung starker Ströme vorzugsweise das Kupfervoltmeter als geeignet erachtet. Das von Edison als registrirendes Instrument benützte Zinkvoltmeter ist noch wenig in Anwendung.

Wenn es nun auch für mässig starke Ströme als erwiesen gelten kann, dass mit dem Kupfervoltmeter unter gewissen Vorsichtsmassregeln übereinstimmende Strommessungen erhalten werden können, so fehlt es doch bisher an Versuchen über die Grenzbedingungen, welche noch zulässig sind, insbesondere über die grösste Stromdichte, welche noch eine genaue Messung zulässt. Es ist bekannt, dass bei zu grosser Stromdichte die Elektrolyse der Kupfervitriollösung nicht mehr ganz normal vor sich geht¹ und von secundären Processen begleitet wird.

Bei wenig dichten Strömen setzt sich an der negativen Elektrode das Kupfer sehr glatt ab, ist der Strom dichter, so bildet das Kupfer warzige Massen, und wenn die Dichtigkeit des Stromes sehr bedeutend ist, so setzt sich das Kupfer in wenig cohärenter Gestalt ab, ferner vermag sich dann das an der positiven Elektrode erscheinende Jon SO_4 in der Zeit seines Erscheinens nicht vollständig mit Kupfer zu sättigen, daher ist die an der positiven

¹ Elektrizität von G. Wiedemann 1883. Bd. II. p. 492, 508, 582 und 640.

Elektrode gelöste Kupfermenge kleiner als die an der negativen Elektrode niedergeschlagene. Bei sehr verdünnten Kupfersulfatlösungen wird neben dem Kupfersalz auch Wasser zersetzt, indem die an der positiven Elektrode abgeschiedene Säure bis zur negativen diffundirt, und es erscheint an der negativen Elektrode ein schwarzbrauner Niederschlag von Kupferhydrür, der beim Unterbrechen des Stromes Wasserstoff entweichen lässt.

Bei der Elektrolyse der Kupfervitriollösung tritt aber auch die unter dem Namen die Wanderung der Ionen bekannte Erscheinung auf, dass die Lösung an der negativen Elektrode sich verdünnt, während sie an der positiven Elektrode concentrirter wird. Diese Konzentrationsänderung der Lösung an den Elektroden kann einen Polarisationsstrom hervorrufen, der dem Strom entgegenwirkt, dessen Intensität durch den Kupferniederschlag auf der negativen Elektrode gemessen werden soll. Ausserdem wird aber diese Dichteänderung die gleichzeitige Wasserzeretzung und Bildung von Kupferhydrür sehr begünstigen.

Alle diese besprochenen Erscheinungen sind zwar schon lange bekannt, aber bei welcher Stromstärke, bei welcher Stromdichte dieselben auftreten, inwiefern sie die Messung der Stromstärke beeinflussen, darüber liegen keine Untersuchungen vor.

Einer Einladung des Herrn Prof. Dr. L. Pfaunder folgend, habe ich daher einige Versuche über das Kupfervoltameter angestellt, um wenigstens durch dieselben einige Anhaltspunkte bei Benützung desselben zur Stromstärkemessung zu gewinnen.

II. Methode der Untersuchung.

Die nachfolgenden Versuche wurden nun stets in der Weise angestellt, dass zwei Kupfervoltameter hintereinander in denselben Stromkreis eingeschaltet wurden, der ausserdem noch eine Tangentenbussole enthielt. Während das eine Voltameter stets unter denselben Versuchsbedingungen blieb, wurde im zweiten Voltameter materielle Beschaffenheit der Elektroden, ihre Grösse respective Oberfläche, ihre Distanz, der Bewegungszustand der Kupfervitriollösung, deren Temperatur, kurz jene Versuchsbedingungen geändert, deren Einfluss studirt werden sollte und dann durch sorgfältige Wägung das Verhältniss der abgeschiedenen Kupfermengen beider Voltameter ermittelt.

Diese Versuche wurden ferner bei verschiedener Stärke des Stroms wiederholt, welche an der Tangentenbussole während des Durchgangs desselben controlirt werden konnte. Die verwendeten Kupferplatten waren mit einer dicken Schichte galvanisch abgeschiedenen Kupfer überzogen.

Die Kupfervitriollösung war auf folgende Weise gereinigt. Der käufliche, gewöhnlich Eisen enthaltende Kupfervitriol wurde in Wasser gelöst und unter Zusatz von einigen Tropfen Salpetersäure gekocht. Zur Fällung des in Oxyd verwandelten Eisens wurde Kupferoxyd hinzugegeben und recht lange die Lösung mit demselben digerirt. Die filtrirte Lösung wurde dann eingedampft, bei fortwährendem Umrühren dann abgekühlt, so dass der Kupfervitriol sich in ganz kleinen Krystallen ablagerte.

Dieses Krystallmehl wurde auf das Filter gegeben, mit destillirtem Wasser gewaschen und auf das Vorhandensein von Salpetersäure untersucht. Es wurde dasselbe so oft umkrystallisirt, bis keine Spur von Salpetersäure nachgewiesen werden konnte. Mit dem so gereinigten Krystallmehl wurde eine bei der Temperatur 18° — 20° C. gesättigte Lösung hergestellt, deren Gehalt bei allen folgenden Versuchen derselbe blieb.

Beim Kochen und Eindampfen der Kupfervitriollösung bemerkte ich sehr häufig am Boden der Schale eine hellgrüne Kruste sich bilden, die nach Tommasi und E. Pegna¹ aus basischem Kupfersulfat bestehen soll, entstanden durch Dissociation der Kupfervitriollösung.

Besondere Sorgfalt wurde endlich auf die Behandlung der beiden Kathoden vor der Wägung verwendet. Es erschien am sichersten, die Kathodenplatten vor der ersten Wägung genau in denselben Zustand zu versetzen wie vor der zweiten Wägung, da auf diese Weise allfällige constante Fehler eliminirt werden konnten. Aus diesem Grunde schien es auch gerathen, nicht eine blanke Platinplatte zu wägen und dann nach dem Versuche mit Kupfer bedeckt wieder zu wägen, sondern dieselbe schon vor der ersten Wägung unter gleichen Umständen mit Kupfer zu bedecken und in derselben Weise zu trocknen wie vor der zweiten Wägung.

¹ Beibl. d. Phys. VII. p. 215.

Nach dem Herausnehmen aus der Kupfervitriollösung wurden die Platten von der anhaftenden Kupfervitriollösung mit destillirtem Wasser abgespült, zwischen Filtrirpapier getrocknet und unter die Glocke der Luftpumpe gegeben, aus welcher mehreremale ausgepumpt und trockene Luft eingelassen wurde. Man kann auch die Platten, wenn sie nicht mehr nass sind, über einer Flamme etwas erwärmen, jedoch das Erhitzen der noch nassen Platten über einer Flamme oder in einem Trockenkasten oxydirt die Kupferschichte augenblicklich. Ich habe die obige umständliche Manipulation vorgezogen, damit beide Platten der beiden Voltameter bei allen Versuchen möglichst gleich behandelt sind.

Durch solche Versuche konnte ich mich überzeugen, dass es keinen erheblichen Unterschied machte, ob die Platten mit blanken Platinfächen oder mit einer Kupferschichte bedeckt angewendet wurden, falls die letztere beim Trocknen sorgfältig behandelt wurde. Die Gewichtsmengen der in beiden Voltametern erhaltenen Niederschläge differirten nur bis auf circa $0\cdot02\%$, ein Unterschied, der ebenso auftrat, wenn die beiden Kathoden mit blanker Platinoberfläche oder mit Kupferoberfläche, oder auch die eine mit letzterer, die andere mit ersterer angewendet wurden.

III. Einfluss der Erschöpfung der Kupfervitriollösung in der Umgebung der Kathode. Wirkung der Bewegung der Flüssigkeit und der Temperatur.

Leitet man durch die besprochenen zwei Kupfervoltameter hintereinander ein und denselben starken Strom, so bemerkt man an der miteingeschalteten Tangentenbussole, dass derselbe nicht constant bleibt, sondern binnen wenigen Minuten rasch abnimmt. Es ist dies die Folge der Erschöpfung der Lösung an Kupfervitriol in der Nähe der Kathode. Ist dies eingetreten, so beginnt auch sofort die Polarisation, welche den Strom schwächt.

Durch rasches Umrühren lässt sich diese Wirkung grösstentheils verhindern. War z. B. der Ausschlag an der Tangentenbussole innerhalb 5 Minuten von 24° auf $15\cdot5^\circ$ gesunken, so war es möglich, durch Rühren den ursprünglichen Ausschlag wieder hervorzubringen. Die Grösse des wiedererlangten Winkels hing aber von der Art des Rührens und von dem Grade der ein-

getretenen Polarisation ab. War die Stromstärke sehr gross, spielte die Nadel der Bussole auf 40° ein, und sank dieselbe auf 23° herunter, so musste schon sehr stark und fortwährend gerührt werden, um die Nadel wieder bei 40° zum Einspielen zu bringen.

Es wurde desswegen versucht, ob es nicht möglich ist, das ungleichmässige und undefinirbare Rühren durch das Sieden der Kupfervitriollösung zu ersetzen, so dass die aufsteigenden Dampfblasen eine Konzentrationsänderung der Flüssigkeitsschichten verhindern, somit auch das Auftreten der Polarisation.

Zuvor musste ich aber constatiren, ob nicht schon die Temperaturänderung allein im Voltameter den Kupferniederschlag irgendwie verändert. Zwei Voltmeter I und II wurden in den Stromkreis hintereinander eingeschaltet, in dem Voltmeter I war die Temperatur t_1 der Kupfervitriollösung constant gleich 20° C., in dem Voltmeter II war die Temperatur t_2 der Lösung nacheinander 40° , 60° , 80° und 95° C. Als entsprechende Kupferniederschläge N_1 und N_2 erhielt ich folgende Werthe:

Voltmeter I		Voltmeter II		CuO
t_1	N_1	t_2	N_2	berechnet aus N_1
	Mgr.		Mgr.	Mgr.
20°	136·3	40°	136·4	170·7
20	138·0	60	145·5	172·8
20	90·5	80	116·1	113·3
20	162·0	95	216·0	202·88
	$S_{n_1} = 526·8$		$S_{n_2} = 614·0$	659·68

N_1 und N_2 differiren, wie man sieht, umsomehr von einander, als die Temperatur im Voltmeter II zunimmt, N_2 wird mit der Zunahme der Temperatur grösser, das Kupfer oxydirt sich, was man auch an der Farbe desselben erkennt. Während N_1 immer die schöne Kupferfarbe besitzt, wird N_2 zuerst braun, dann ganz dunkelviolett.

Rechnet man nun, wieviel der jeweilige Niederschlag N_1 Kupferoxyd geben kann, so findet man die in der fünften Columne

stehenden Zahlen. Dass die gefundenen Zahlen für N_2 bei $t_2 = 80^\circ$ und 95° C. grösser sind, als die berechneten, ist nicht ein Beobachtungsfehler, sondern es erklärt sich das daraus, dass bei diesen Temperaturen die nur wenig oxydirten Niederschläge bei den zwei vorausgegangenen Versuchen sich nachträglich fast vollständig oxydirt haben. Die Summe der aufeinanderfolgenden Niederschläge N_1 gibt 526·8 Mgr., die dazugehörige Kupferoxydmenge ist 659·68 Mgr., während die Summe der Niederschläge N_2 nur 614·0 Mgr. beträgt.

IV. Einfluss der Stromstärke und Stromdichte.

Nachdem es also nicht gelingt, den Einfluss der Concentrationsänderung durch Erschöpfung der Lösung ganz zu beseitigen, so muss untersucht werden, von welchen Stromdichten an aufwärts dieser Einfluss so stark ist, dass er genaue Messungen unmöglich macht, beziehungsweise wie weit man die Stromdichte herabsetzen muss, um das Kupfervoltameter brauchbar zu erhalten.

Bevor ich jedoch zur Lösung dieser Fragen gehen konnte, musste ich gleichsam ein Normalvoltameter haben, d. h. ein Voltameter, das immer für alle Stromstärken, die ich in Betracht zog, den denselben entsprechenden Kupferniederschlag auf der negativen Elektrode ablagerte. Zu diesem Zwecke stellte ich mir zwei Kupfervoltameter zusammen, deren Elektroden eine grosse Oberfläche hatten, jede war 15·5 Ctm. lang und 11·3 Ctm. breit. Der Abstand der Elektroden in den Voltametern betrug 2·6 Ctm.; auf einer Seite wurden die negativen Elektroden gefirnisset, so dass sich nur auf einer Seite der Niederschlag bilden konnte, damit sowohl für diese, als auch für die späteren Versuche die Oberfläche der Platte eine genau messbare Grösse hat, um daraus und der bekannten Stromstärke die Dichte berechnen zu können.

Beide Voltameter wurden mit einer Kupfervitriollösung von derselben Concentration gefüllt, durch beide wurde derselbe Strom während fünf Minuten hindurchgeleitet und die während dieser Zeit abgelagerten Kupferniederschläge N_1 und N_2 auf einer empfindlichen Wage bestimmt.

Um sicher zu sein, dass bei einer so grossen Oberfläche der Platten auch bei den verschiedensten Stromstärken keine Polari-

sation eintritt, wurde der Ausschlag der Nadel der gleichzeitig eingeschalteten Tangentenbussole beobachtet, ferner wurde bei annähernd gleicher Stromstärke bei einem Versuche in keinem Voltameter gerührt, in einem zweiten Versuche in beiden Voltametern und in einem dritten Versuche in dem einen gerührt, in dem anderen nicht.

Die Versuche ergaben nun immer für beide Voltameter fast vollständig gleiche Niederschläge auf den beiden negativen Elektroden, so dass deren Verhältniss sehr nahe gleich Eins ist.

Die folgende Tabelle enthält in der ersten Columne die Intensität des Stromes ausgedrückt in Ampère, in der zweiten die Stromdichte, d. i. das Verhältniss der Stromstärke zur Oberfläche der Platte, und die dritte Columne das Verhältniss der Kupferniederschläge N_1 und N_2 in den beiden Voltametern I und II. Die Zahlen für D und $\frac{N_1}{N_2}$ sind jedoch mit 100 multiplicirt; es ist also $D = 100 J/F$, wenn F den Flächeninhalt der Platte bezeichnet der bei den Elektroden 160—166 □ Ctm. betrug.

$F = 160-166 \square \text{ Ctm.}, \text{ Distanz der Elektroden } 2.6 \text{ Ctm.}$					
in Ampère	$D = J/F100$	$\frac{N_1}{N_2} \cdot 100$	in Ampère	$D = J/F100$	$\frac{N_1}{N_2} \cdot 100$
1.429	0.861	99.93	4.825	2.903	99.69
1.786	1.076	100	4.944	2.980	99.99
2.006	1.208	100.03	5.095	3.069	101.20
2.301	1.385	99.96	5.392	3.248	99.97
2.685	1.617	100.21	5.548	3.342	100.01
2.818	1.700	100	5.832	3.51	99.88
2.971	1.789	99.88	5.951	3.585	100.05
3.098	1.866	100	6.355	3.825	100.03
3.444	2.074	99.98	6.939	4.179	98.99
3.695	2.225	99.975	7.352	4.541	100.5
3.758	2.264	100.08	7.508	4.520	100.23
4.743	2.857	99.74	8.764	5.41	99.75

Die Versuche ergeben, dass bei einer so grossen Oberfläche der Platten die Dichtigkeit des Stromes zu gering ist, um abnor-

male Vorgänge in dem Voltmeter bei Stromstärken von 1·429 bis 8·764 Ampère zu erzeugen, das eine oder andere der beiden Voltmeter erlaubt daher genaue Messungen der Stromstärken auszuführen, ohne dass eine Concentrationsänderung der Flüssigkeit einen Polarisationsstrom erzeugt.

Nachdem dies festgestellt war, wurde bei einer und derselben Stromstärke die Dichtigkeit des Stromes in dem einen Voltmeter geändert, während sie in dem anderen constant erhalten wurde. Es wurde in dem Voltmeter II successive Flüssigkeit herausgenommen, somit der Querschnitt für den Durchgang des Stromes verkleinert, die Dichte des Stromes daher vergrössert. Da die Stromstärke im ganzen Schliessungskreis durch die Verkleinerung der Plattenoberfläche in dem Voltmeter II kleiner wurde, so war durch einen eingeschalteten Rheostaten dafür gesorgt, dass durch das Ausschalten eines Widerstandes wieder die verlangte Stromstärke herrschte. Eine zugleich in den Schliessungskreis eingeschaltene Bussole gibt nun einen annähernden Aufschluss über die Vorgänge im Voltmeter II, wenn die Dichte in demselben immer grösser wird.

So lange die Dichtigkeit des Stromes in dem Voltmeter II nicht zu gross ist, bleibt die Stromstärke während fünf Minuten vollkommen constant, die Nadel an der Bussole zeigt immer denselben Ausschlag an; nimmt die Dichte zu, so ändert sich der Ausschlag an der Tangentenbussole in Folge der secundären Erscheinungen, die in dem Voltmeter II auftreten.

Bezeichnet D die Stromdichte in dem Voltmeter II, N_1 den Kupferniederschlag in dem Voltmeter I, in welchem die Dichte wegen der constant grossen Oberfläche der Platte so gering ist, dass nach den früheren Versuchen in demselben keine secundären Erscheinungen auftreten, ist N_2 der Kupferniederschlag in dem Voltmeter II, in welchem eben die verschiedenen Stromdichten D nacheinander herrschen, und bezeichnet α den abgelesenen Winkel an der Tangentenbussole, so habe ich z. B. bei einer mittleren Stromstärke von 2·251 Ampère folgende zusammengehörige Werthe für D , N_1 , N_2 und α bekommen, wenn der Strom fünf Minuten lang andauerte und jede $\frac{1}{2}$ Minute der Winkel α abgelesen wurde.

$J = 2.251$ Ampère

$D = 6.576$	$D = 8.113$	$D = 9.739$	$D = 11.74$	$D = 12.69$	$D = 20.40$
$N_1 = 216.8$	$N_1 = 219.8$	$N_1 = 217.2$	$N_1 = 218.6$	$N_1 = 210.6$	$N_1 = 194.4$
$N_2 = 216.4$	$N_2 = 219.2$	$N_2 = 211.4$	$N_2 = 203.4$	$N_2 = 193.8$	$N_2 = 139.7$
α	α	α	α	α	α
20.5	20.75	20.5	20.6	20.75	20.5
20.5	20.75	20.5	20.75	20.8	20.0
20.5	20.75	20.7	21.0	20.6	19.75
20.5	20.75	20.9	21.3	20.4	18.0
20.5	20.75	21.0	21.2	20.25	16.5
20.5	20.75	21.0	21.2	20.0	14.5
20.5	20.75	21.2	21.0	19.75	14.7
20.5	20.75	21.0	20.5	19.4	15.6
20.5	20.75	20.9	20.0	18.8	16.6
20.5	20.75	20.8	19.0	17.9	17.8

So lange die Stromdichte nicht zu gross ist, bleibt α constant und ich erhalte für N_1 und N_2 dieselbe Kupfermenge. Bei grösserer Dichte steigt α , um dann wieder langsam zu sinken. Diese Zunahme der Stromstärke im ganzen Schliessungskreis ist die Folge der durch den Strom bewirkten Temperaturerhöhung im Voltmeter II. Bei einer grossen Flüssigkeitsmenge ist dieselbe fast unmerklich, wird jedoch im Voltmeter II die Flüssigkeitsmenge zur Erzielung einer grösseren Stromdichte immer kleiner und kleiner, so steigt ihre anfängliche Temperatur schon so hoch, dass das Leitungsvermögen für den Strom ein besseres wird. Daher kommt die langsame Zunahme des Winkels α ; die dann eintretende Abnahme ist der Abkühlung der Flüssigkeit zuzuschreiben. Tritt nun das bei einer gewissen Dichte ein, so ist die Oberfläche der Platte im Voltmeter II schon so klein, dass sich verhältnissmässig viel Kupfer an den Ecken und Kanten in körniger Form niederschlägt, daher Verluste fast unvermeidlich sind; N_1 und N_2 weichen dann von einander ab.

Nimmt die Stromdichte im Voltmeter II noch weiter zu, so steigt zwar anfangs auch noch α wegen der Temperaturerhöhung, sinkt aber dann viel rascher ab als früher, es tritt bereits eine rasche Polarisation auf, die um so stärker wird, als die Stromdichte grösser wird. Es sinkt der Ausschlag bis auf 14° und weiter herab, dabei kann es vorkommen, dass er innerhalb 5 Minuten noch nicht seine volle Stärke erlangt hat, sondern während dem eigentlichen Strom entgegenwirkt, wie bei einer Stromdichte 12-69, oder er erlangt innerhalb der 5 Minuten die volle Stärke, um dann wieder abzunehmen, wahrscheinlich infolge von Strömungen in der Lösung.

Trifft einmal in dem Voltmeter II Polarisation eingetreten, so zeigt sich in keinem der beiden eingeschalteten Voltmetern ein KupfERNIEDERSCHLAG, welcher dem in der ersten halben Minute an der Bussole angegebenen Strom entspricht. Ferner sind die N_2 nicht einander gleich, sondern sie differiren umsomehr voneinander, je grösser die Stromdichte ist.

N_1 gibt mir nur den Niederschlag für die mittlere Stromdichte während der 5 Minuten, dagegen bei N_2 kommt ausserdem ein unvermeidlicher Verlust in Abzug, der mit der Stromdichte zunimmt. Bei sehr grosser Dichte ist der Niederschlag nicht mehr kupferroth, sondern es bildet sich eine schwammige braune Masse, das Kupferhydrat, das nur lose auf der Platte liegt und beim Abwaschen der Platte jedesmal verloren geht.

Würde ich den Niederschlag N_n für den Fall kennen, wenn der Strom constant geblieben wäre, so würde mir das Ver-

hältnis $\frac{V_1}{N_n}$ ein Mass für die Grösse der Polarisation und $\frac{N_2}{N_n}$ ein

Mass für die Grösse der Polarisation und des Verlustes geben.

Man lässt sich wenigstens annähernd aus den vorausgegangenen

Beobachtungen, bei welchen eben der Ausschlag constant geblieben

ist, berechnen, wie gross der Niederschlag N_n wäre, wenn der in

der ersten halben Minute an der Tangentenbussole angegebene

Ausschlag constant geblieben wäre, indem man die Proportionalität

zwischen dem Tangentenwinkel und der Grösse des Niederschlages vor-

aussetzt. Die Ableseung des Winkels an der Tangentenbussole

gibt kein genaues Mass für die Berechnung des Kupfer-

= 3.43 Ampère $E = 2.6$ Ctm.				$J = 2.805$ Ampère $E = 2.6$ Ctm.			
F	$D = J/F 100$	$\frac{N_1}{N_n}$	$\frac{N_2}{N_n}$	F	$D = J/F 100$	$\frac{N_1}{N_n}$	$\frac{N_2}{N_n}$
Ctm.				□ Ctm.			
4.1	2.09	100	100	97.0	2.89	100	100
7.0	4.91	100	100	56.2	4.988	100	100
2.1	5.52	100	100	44.2	6.346	100	100
5.0	6.23	100	100	35.2	7.968	100	99.63
5.3	7.566	100	100	27.6	10.14	100	98.94
1.3	8.325	100	99.06	20.1	13.97	96.46	94.09
5.5	9.66	98.82	97.52				
7.8	11.51	96.70	89.18				
3.8	14.41	95.73	76.70				
1.9	20.27	88.88	35.24				

= 2.251 Amp. $E = 2.6$ Ctm.				$J = 1.096$ Amp. $E = 2.6$ Ctm.			
	D	$\frac{N_1}{N_n}$	$\frac{N_2}{N_n}$	F	D	$\frac{N_1}{N_n}$	$\frac{N_2}{N_n}$
m.				□ Ctm.			
7	2.15	100	100	31.0	3.53	100	100
5	2.797	100	100	24.1	4.55	100	100
6	5.54	100	100	18.4	5.96	100	100
2	6.576	100	100	18.6	8.02	100	100
7	8.113	100	100	10.0	10.99	100	100
1	9.739	100	97.52	9.27	11.82	100	100
2	11.74	98.38	91.54	7.34	14.92	99.87	84.21
7	12.69	96.02	88.02	5.68	19.3	97.88	60.12
2	15.85	95.56	85.53	4.85	22.56	97.97	57.34
0	20.40	89.70	64.98	4.06	27.03	96.71	39.25
2	24.36	86.52	50.14				

lit einer Elektrode von etwa 100 □ Ctm. würde man bei obigen Stromstärken den denselben entsprechenden Nieder bekommen, ohne dass ein Polarisationsstrom eintritt. Ist die Dichte im Voltmeter II sehr gross, so ist der Wider für den Durchgang des Stromes ebenfalls sehr gross, es

muss daher die elektromotorische Kraft im ganzen Schliessungskreis bedeutend vermehrt werden, um die Nadel der Tangentenbussole wieder auf den gewünschten Grad zum Einspielen zu bringen. Diese Ströme von 6—10 Bunsen'schen Elementen sind leider nicht mehr vollständig während der Versuchsdauer constant, es ist daher nicht leicht, genau den Eintritt der Polarisation bei den verschiedenen Stromstärken angeben zu können.

Für noch grössere Stromstärken konnte ich die Versuche nicht durchführen, da dazu eine Dynamomaschine nothwendig ist, welche im hiesigen physikalischen Institut leider noch nicht angeschafft werden konnte.

V. Einfluss der Form und Grösse der Elektrode.

Die Brauchbarkeit eines Voltameters für eine gewisse Stromstärke hängt jedoch nicht blos von der Dichte des Stromes, d. h. von dem Flächeninhalt der Elektroden allein ab, sondern es kommt ausserdem noch die Form der Elektroden in Betracht. Bei den vorigen Versuchen waren die Elektroden 11·3 Ctm. breit und 15·5 Ctm. lang und dieselben waren nie vollständig in die Lösung eingetaucht, sondern die vierte obere Seite befand sich immer ausserhalb der Flüssigkeit. Es ist nun bekannt, dass sich der Niederschlag mit Vorliebe, besonders an den Ecken und Kanten ansetzt, je mehr davon vorhanden sind, desto mehr wird sich an denselben Kupfer ablagern und desto weniger wird sich auf der Oberfläche der Platte befinden. Bei sehr grosser Stromdichte kommt es daher auch auf die Form der Platte an, ob ein Verlust stattfindet, ja auch ob Polarisation eintritt.

Ist die Elektrode sehr schmal, z. B. nur 3·7 Ctm. breit, so muss sie 10 Ctm. tief eintauchen, damit die Oberfläche der Platte 37 Ctm. beträgt. — Die Länge der im Voltameter befindlichen Seiten der Platte beträgt dann $2 \times 10 + 3 \cdot 7 \text{ Ctm.} = 23 \cdot 7 \text{ Ctm.}$ Ist die Platte jedoch 11·3 Ctm. breit, so braucht sie nur 3·274 Ctm. einzutauchen, die Summe der Seiten, die sich in dem Elektrolyten befinden, beträgt dann aber nur 18·25 Ctm.; es wird daher bei der ersten schmalen Platte viel früher ein Verlust bei einer gewissen Stromstärke eintreten als bei der breiten Platte.

In dem Voltameter mit schmaler Elektrode ist die Flüssigkeit 10 Ctm. hoch, bei dem mit der breiten Platte jedoch nur

74 Ctm.; treten nun Dichtigkeitsänderungen der Flüssigkeitsschichten in Folge des Durchganges des Stromes auf, so werden dieselben bei dem Voltmeter mit schmaler Elektrode viel länger dauern als bei dem anderen Voltmeter, in welchem die Flüssigkeitssäule sehr nieder ist, daher eher eine Mischung der ungleichen Schichten wieder eintreten wird als bei dem Voltmeter mit schmaler Elektrode. Das Auftreten einer Polarisation wird auch in dem Voltmeter mit der schmalen Elektrode eher beobachtet, in dem anderen Voltmeter aber eher verzögert. Dass dies so sei, lässt sich aus der folgenden Versuchsreihe ersehen, welche mit einer Elektrode von 3·7 Ctm. Breite und 14·5 Ctm. Länge bei drei verschiedenen Stromstärken durchgeführt wurde. Die Platte war auf der Rückseite ebenfalls gefirnisset und befand sich in genau demselben Abstände von der +Elektrode wie die Elektrode in dem gleichzeitig eingeschalteten grossen Voltmeter.

$J, F, D, \frac{N_1}{N_n}$ und $\frac{N'_2}{N_n}$ haben dieselbe Bedeutung wie früher; D der Niederschlag auf der grossen breiten Platte in dem Voltmeter mit geringer Stromdichte und N'_2 der Niederschlag auf der schmalen Elektrode in dem Voltmeter, in welchem die Stromdichte verändert wurde.

J = 1·110 Ampère E = 2·6 Ctm.			J = 2·170 Ampère E = 2·6 Ctm.			
$\frac{D}{J/F100}$	$\frac{N_1}{N_n} \cdot 100$	$\frac{N'_2}{N_n} \cdot 100$	F	$\frac{D}{J/F100}$	$\frac{N_1}{N_n} \cdot 100$	$\frac{N'_2}{N_n} \cdot 100$
2·427	100	100	□ Ctm. 52·3	4·152	100	100
4·72	100	100	18·7	5·53	100	96·66
6·12	100	100	39·2	7·79	100	86·37
7·7	100	98·73	27·8	11·61	99·44	71·96
8·73	100	89·86	12·8	16·93	94·84	57·42
9·50	100	76·35	9·53	22·77	81·74	35·45
11·23	98·97	64·96	8·82	24·67	77·85	18·72
14·04	98·25	57·31				
21·73	78·70	39·14				
21·89	73·23	35·74				

$J = 3.406 \text{ Ampère} \quad E = 2.6 \text{ Ctm.}$			
F	$D = J/F \cdot 100$	$\frac{N_1}{N_n} \cdot 100$	$\frac{N'_2}{N_n} \cdot 100$
□ Ctm ²			
54.8	6.393	100	96.65
42.6	8.00	100	81.05
35.5	9.589	98.06	75.73
26.2	13.02	94.14	64.17
18.8	18.10	91.53	48.50
16.9	20.09	86.82	33.83
13.7	24.88	74.81	22.86

Die Versuche ergeben bedeutend grössere Verluste bei gleicher Stromstärke und Stromdichte, respective gleicher Oberfläche der Platte, auch die Polarisation tritt bei geringerer Dichte auf als bei den früheren Versuchen.

VI. Einfluss der Distanz der Elektroden.

Bei den vorausgegangenen Versuchen waren die Elektroden immer so weit von einander entfernt, als es das parallelepipedische Gefäss erlaubte, die Distanz betrug 2.6 Ctm. Ändert man bei derselben Stromstärke und Stromdichte die Distanz der Platten, so hat das natürlich auf das Eintreten der Polarisation einen Einfluss, je dünner die Flüssigkeitsschicht zwischen den beiden Elektroden ist, desto eher wird die an der —Elektrode befindliche Schicht verdünnt, desto früher tritt daher auch eine Polarisation auf.

Ich habe für zwei verschiedene Distanzen bei vier Stromstärken und verschiedenen Dichten den Grad der Polarisation bestimmt. Die Resultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt; E bezeichnet die Distanz der Platten, $\frac{N_1}{N_n}$ gibt den Grad der Polarisation an, es ist das Verhältniss des Nieder-

ages in dem gleichzeitig eingeschalteten Voltmeter mit constant geringer Dichte zu dem Normalniederschlag N_n , der gefunden hätte, wenn die Stromstärke constant geblieben wäre.

J bezeichnet die Stromstärke in Ampère, F den Flächeninhalt der Platte, D die Dichte des Stromes, nämlich $100 \cdot \frac{J}{F}$.

$E = 0.85 \text{ Ctm.}$			$E = 1.00 \text{ Ctm.}$				
F	$D = J/F \cdot 100$	$\frac{N_1}{N_n} \cdot 100$	J	F	$D = J/F \cdot 100$	$\frac{N_1}{N_n} \cdot 100$	
76	52.9	2.03	100	1.076	52.9	2.03	100
76	35.5	3.03	100	1.076	35.5	3.03	100
76	17.0	6.33	100	1.076	17.0	6.33	100
6	9.99	10.75	83.02	1.076	9.99	10.75	87.45
5	52.9	4.19	97.20	2.215	52.9	4.19	100
	52.9	6.46	89.25	2.215	35.5	6.24	100
	52.9	9.46	77.30	2.215	17.0	13.03	65.21
				3.42	52.9	6.46	100
				3.42	35.5	9.63	80.07
				5.00	52.9	9.46	82.52

VII. Übersicht der Resultate.

Die hier mitgetheilten Untersuchungen führten zu Resultaten, die wir in nachfolgende Punkte zusammenfassen:

Die materielle Beschaffenheit der Oberfläche der Kathode, d. h., ob sie mit einer blanken Kupferschichte bedeckt ist oder nicht, hat keinen Einfluss auf die Menge des Niederschlages.

Die durch den Strom herbeigeführten Concentrationsänderungen der Lösung im Kupfervoltmeter und die dadurch bedingte Polarisirung kann nicht durch Rühren genügend verhindert werden. Beim Kochen der Flüssigkeit oxydirt sich der Niederschlag fast vollständig zu CuO , theilweise schon zwischen $40-60^\circ \text{C}$.

III. Die höchste zulässige Stromstärke, bei welcher noch sicher die Menge des Kupferniederschlages als Mass der Stromstärke angenommen werden darf, beträgt ungefähr 7 Ampère per □Decmtr. der Kathodenoberfläche.

Dabei ist eine Distanz der Elektrodenplatten über 1·5 Ctm. vorausgesetzt. Bei geringerem Abstände derselben wird die zulässige Grenze erheblich früher überschritten. (Bei 0·35 Ctm. schon bei 4·19 Ampère.)

Bezüglich der Form der Platten hat sich ergeben, dass solche von langer und schmaler Dimension zu vermeiden und solche Formen vorzuziehen sind, welche sich der des Quadrates nähern.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden drei gesonderten Abtheilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

- I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.
- II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.
- III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesezt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften“ herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Ansätze enthält, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.



1817/1864

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

KADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVIII. BAND. II. HEFT.

Jahrgang 1883. — Juli.

(Mit 2 Tafeln, 4 Karten und 6 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

hält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie,
Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

1883.

I N H A L T

des 2. Heftes Juli 1883 des LXXXVIII. Bandes, II. Abtheilung der
Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

	Seite
XVII. Sitzung vom 5. Juli 1883: Übersicht	297
<i>Skraup</i> , Zur Constitution des Chinins und Chinidins	301
<i>Benedikt</i> u. <i>v. Schmidt</i> , Notizen über Halogenderivate	306
<i>Hazura</i> , Über Nitroresorcinsulfosäure	312
<i>Dafert</i> , Derivate des Amylbenzols	318
<i>Auer v. Welsbach</i> , Über die Erden des Gadolinit von Ytterby .	332
<i>Kachler</i> u. <i>Spitzer</i> , Über Oxycampher aus β -Bibromcampher . .	345
XVIII. Sitzung vom 12. Juli 1882: Übersicht	354
<i>Janovsky</i> , Über Amidoazobenzolparasulfosäure. (Mit 5 Holz- schnitten.)	358
<i>Fossek</i> , Über ein dem Hydrobenzoin analoges Derivat des Iso- butyraldehyds	366
— Darstellung acetonfreien Isobutyraldehyds	382
<i>Jahn</i> , Elektrolytische Studien. (Vorläufige Mittheilung.) (Mit 1 Holzschnitt.)	385
<i>Kotányi</i> , Zur Reduction hyperelliptischer Integrale. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.]	401
<i>Waelch</i> , Geometrische Darstellung der Theorie der Polar- gruppen. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	418
<i>Kohn</i> , Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	424
XIX. Sitzung vom 19. Juli 1883: Übersicht	432
<i>Weyr</i> , Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.]	436
<i>Barth</i> u. <i>Weidel</i> , Über die Oxydation des Morphins. (Vorläu- fige Mittheilung.)	483
<i>Goldschmidt</i> , Über Papaverin. (Vorläufige Mittheilung.) . . .	487
<i>Waage</i> , Einwirkung von Ammoniak auf Propionaldehyd. (Syn- thetische Darstellung des Parvolins	491

MAR 17 1884

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVIII. Band. II. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie,
Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

JULI 1884

XVII. SITZUNG VOM 5. JULI 1883.

Der Vicepräsident gibt Nachricht von dem am 26. Juni d. J. zu Richmond (England) erfolgten Ableben des ausländischen Ehrenmitgliedes dieser Classe, des königl. brit. Generallieutenants Sir Edward Sabine.

Die anwesenden Mitglieder erheben sich zum Zeichen des Beileides von ihren Sitzen.

Herr Prof. Dr. Karl Exner in Wien dankt für die Zuerkennung des A. Freiherr v. Baumgartner'schen Preises.

Herr Albert R. v. Miller-Hauenfels, emerit. Professor in Graz, übersendet sein Werk: „Theoretische Meteorologie. Ein Versuch, die Erscheinungen des Luftkreises auf Grundgesetze zurückzuführen.“

Herr Prof. J. V. Janovsky an der höheren Staatsgewerbeschule in Reichenberg übersendet eine Abhandlung: „Über Amidoazobenzolparasulfosäure“.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über gewisse mechanisch erzeugbare Curven und Flächen höherer Ordnung“, von Herrn Prof. Dr. A. Puchta an der deutschen Universität in Prag.
2. „Über die Bildung von Fett aus Kohlehydraten im Thierkörper“, von den Herren Dr. E. Meissl und F. Strohmänn an der landwirthschaftlich-chemischen Versuchsstation in Wien.
3. „Untersuchung über den Einfluss des Rindendruckes auf das Wachsthum und den Bau der Rinde“, Arbeit aus dem Laboratorium für Mikroskopie an der technischen Hochschule in Wien von Herrn Arthur Gehmacher.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Franz C. Lukas, Rechnungs-Assistent der Direction für administrative Statistik in Wien, vor. Dasselbe führt die Aufschrift: „Analytische Darstellung und Bedeutung mehrdimensionaler Räume.“

Das w. M. Herr Prof. L. v. Barth überreicht eine Mittheilung aus dem chemischen Universitätslaboratorium im Convictgebäude zu Wien unter dem Titel: „Derivate des Amylbenzols“, von Herrn F. W. Dafert.

Das w. M. Herr Prof. Wiesner überreicht eine gemeinschaftlich mit Herrn Rich. v. Wettstein ausgeführte Arbeit, betitelt: „Untersuchungen über die Wachstumsgesetze der Pflanzenorgane. Erste Reihe: Nutirende Internodien“.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. Dr. Carl Auer v. Welsbach. „Über die Erden des Gadolinits von Ytterby“.
2. J. Kachler und F. V. Spitzer. „Über Oxycampher aus β -Bibromcampher“.

Das w. M. Herr Hofrath Dr. Langer überreicht eine Arbeit aus dem anatomischen Institut der Wiener Universität: „Über den Schwund in der Sceletmuscultur“, von den Herren Lothar Frankl und Ernst Freund.

Das c. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. Alexander Lustig, d. Z. Assistent an der physiologischen Lehrkanzel der Universität in Innsbruck, betitelt: „Zur Kenntniss des Faserverlaufes im menschlichen Rückenmarke“.

Ferner überreicht Herr Prof. Exner eine Arbeit aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität, betitelt: „Zur Histogenese der menschlichen Grosshirnrinde“, von Herrn stud. med. Sigm. Fuchs.

Herr Prof. Dr. Ernst v. Fleischl überreicht die VII. Abhandlung seiner Untersuchung über die Gesetze der Nervenerregung, unter dem Titel: „Die Erregung stromloser Nerven“.

Herr Robert Schram, Observator der österreichischen Gradmessung in Wien überreicht eine Abhandlung „Über die

christliche Festrechnung und die in den Hilfstafeln für Chronologie mit Kalenderzahl bezeichnete Grösse“.

Herr F. K. Ginzel, Astronom in Wien, überreicht als Fortsetzung seiner im März 1882 vorgelegten Abhandlung eine Arbeit, betitelt „Grundlagen aus historischen Sonnenfinsternissen zur Ableitung empirischer Correctionen der Mondbahn“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin, 47^e année, 2^e série, tome XII. Nos. 22—26. Paris, 1883; 8^o.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 1883. Mai. Paris; 8^o.

Central-Station, königliche meteorologische: Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern. Jahrgang IV. Heft 4. München, 1882; 4^o.

— — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern während des December 1882, Januar, Februar, März, April & Mai 1883. Folio.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII. Nr. 46—49. Cöthen, 1883; 4^o.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. Nos. 24 et 25. Paris, 1883; 4^o.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift, IV. Jahrgang, 1883. Heft VI. Juni. Berlin; 4^o.

Erlangen, Universität: Akademische Schriften. 33 Stücke; 4^o und 8^o.

Gesellschaft, Deutsche chemische: Berichte. XVI. Jahrgang Nr. 10. Berlin, 1883; 8^o.

— deutsche geologische: Zeitschrift. XXXV. Band. 1. Heft, Januar bis März 1883. Berlin; 8^o.

— astronomische: Vierteljahrsschrift. XVIII. Jahrgang, 1. Heft. Leipzig, 1883; 8^o.

Helsingfors, Universität: Akademische Schriften pro 1881—82. 17 Stücke; 8^o u. 4^o.

Instituto y Observatorio de Marina de la ciudad de San Fernando: Almanaque náutico para 1884. Barcelona, 1882; 4^o.

- Journal, the American of science. Vol. XXV. Nr. 150, June, 1883. New Haven, 1883; 8°.
- the American chemical. Vol. V. Nr. 2. June, 1883. Baltimore; 8°.
- für praktische Chemie. N. F. Band XXVII. Nr. 10 u. 11. Leipzig, 1883; 8°.
- Kiew, Universität: Universitäts-Nachrichten. XXIII. Jahrgang, Nr. 1—4. Kiew, 1883; 8°.
- Laplace: Oeuvres complètes. Tome V. Paris, 1882; gr. 4°.
- Museum of comparative Zoology at Harvard College: Bulletin, Vol. X, Nrs. 5 and 6. Cambridge, 1883; 8°.
- Nature. Vol. XXVIII. Nrs. 712 and 713. London, 1883; 8°.
- Osservatorio centrale del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino mensile. Ser. II. Vol. III. No. 1. Gennaio, 1883. Torino, 1883; 4°.
- Peabody Institute of the city of Baltimore: 17th annual Report. June 1, 1883. Baltimore; 8°.
- Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Vol. XII. Disp. 4°. Roma, 1883; 4°.
- Société académique indo-chinoise: Bulletin, 2^e série, tome I. Année 1881. Paris, 1882; 8°. — L'Espagne et la Question de Bornéo et de Joló, interpellation de M. Francisco Cañamaque. Paris, 1882; 8°.
- mathématique de France: Bulletin. Tome XI, No. 2. Paris, 1883; 8°.
- Society the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XVIII. Nr. 7. May 1883. London; 8°.
- the royal microscopical: Journal. Ser. II, Vol. III. Part 3. June 1883. London and Edinburgh; 8°.
- Woldřich, Johann N.: Beiträge zur Urgeschichte Böhmens. Wien, 1883; 4°.
-

Zur Constitution des Chinins und Chinidins.

Von **Zd. H. Skraup.**

(Aus dem Laboratorium der Wiener Handelsakademie V.)

(Vorgelegt in einem versiegelten Couvert am 20 Juli 1882.)

Vor einem Jahre habe ich eine Untersuchung „Über Chinin und Chinidin“ veröffentlicht (Sitzungsber. LXXXIV. Bd. II. Abth. 622), deren wichtigste Resultate sich folgendermassen zusammenfassen lassen:

„Beide Alkaloide gehen mit Chromsäure oxydirt in Kohlensäure, eine syrupöse und in eine gut krystallisirte Säure über, welch' letztere Chininsäure genannt wurde.

Die Chininsäure hat die Zusammensetzung $C_{11}H_9NO_3$, ist einbasisch und einatomig; mit concentrirter Salzsäure erhitzt, liefert sie Chlormethyl und Xanthochinsäure der Formel $C_{10}H_7NO_3$.

Die Xanthochinsäure wird endlich beim starken Erhitzen in Kohlensäure und in einen phenolartigen Körper zerlegt, der seiner Entstehung halber als ein Oxychinolin anzusehen wäre.

Nachdem nun aber, wie ich in derselben Mittheilung nachwies, die Chininsäure mit Kaliumpermanganat oxydirt, dieselbe Tricarboxypyridinsäure liefert wie die Cinchoninsäure, ist es erstlich mehr als wahrscheinlich, dass sie ein Chinolinderivat ist, zweitens ist es dann aber auch sicher, dass ihre Methoxylgruppe im Benzolring des Chinolins sitzt. Als Consequenz dessen ergibt sich die Annahme, dass auch das aus der Xanthochinsäure entstehende Oxychinolin ein im Benzolrest hydroxyliertes Chinolin ist.“

Letzterer Körper ist damals nur sehr beiläufig charakterisirt worden, da Rücksichten auf die immerhin umständliche Beschaffung des so kostbaren Materials es räthlich erscheinen liessen, die Untersuchung erst dann vorzunehmen, wenn die synthetisch darstellbaren Oxychinoline genügend gekannt sind.

Nach unseren gegenwärtigen Vorstellungen sind nur vier im Benzolrest hydroxylierte Chinoline zu erwarten, es dürfte dann

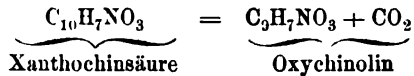
also nicht schwer fallen, das „Chinin—Oxychinolin“ mit einem der drei bereits bekannten Isomeren zu identificiren, oder es als das vierte Oxychinolin zu erkennen, dessen synthetische Darstellung bisher nicht gelungen ist.

Es sei vorausgeschickt, dass der Vergleich die Natur des Oxychinolins aus Chinin klarstellte; nachdem die Thatsache nicht ohne Wichtigkeit ist, erscheint es mir nothwendig, die dahin führenden Versuche detaillirt zu beschreiben.

Die Xantochinsäure wird erst bei hoher Temperatur zerlegt, bei 310° ist sie noch vollständig unzersetzt. Zur Darstellung des Oxychinolins wurden daher 2 Grm. reine Säure in einem mit Gasableitungsrohr versehenen Kölbchen im Eisenfeilbade bis zur beginnenden Gasentwicklung erhitzt, die Temperatur dann so regulirt, dass der Gasstrom gleichmässig blieb.

Die Xanthochinsäure schmolz zu einer schwärzlichen Flüssigkeit, in den oberen Theile des Kolbens sublimirten blendend weisse Prismen, denen eine sehr kleine Menge einer gelblichen Substanz beigemischt war, offenbar der Zersetzung entgangene Xanthochinsäure. Das entweichende Gas trübte in allen Stadien des Processes Barytwasser sehr stark.

Nach Beendigung der Gasentwicklung wog der erkaltete Kolbeninhalt 1·51 Grm., 2 Grm. Xanthochinsäure hatten demnach 24·5 Percent an Gewicht verloren, während die Gleichung



einen Verlust von 23·2 Percent erfordert.

Die sublimirten Krystalle erwiesen sich als leicht löslich in verdünnter Kalilauge und Salzsäure, nicht löslich in kaltem, sehr schwer löslich in heissem Wasser, aus der salzsauren Lösung wurden sie durch Sodalösung wieder gefällt, hesassen also die allgemeinen Eigenschaften der Oxychinoline. Nachdem nun aber die Substanz weder mit Wasserdampf flüchtig war, noch in verdünntem Alkohol gelöst und mit Eisenchlorid versetzt eine Grünfärbung, sondern eine röthliche zeigte, konnte sie mit dem synthetischen *o*-Oxychinolin nicht identisch sein.

Behufs weiterer Untersuchung vereinigte ich das Sublimat und den am Boden des Kolbens befindlichen krystallinischen

Kuchen, löste in verdünnter Salzsäure und liess bei gewöhnlicher Temperatur eindunsten.

Das wieder nun in Wasser aufgenommene Chlorhydrat, von harzigen Flocken abfiltrirt, war dunkelbraun gefärbt, es verlor den grössten Theil der färbenden Substanzen, indem es kochend mit einigen Tropfen Platinchlorid vermischte, die helle Lösung filtrirt und durch wiederholtes Einleiten von Schwefelwasserstoff das Platin ausgefällt wurde. Beim Eindampfen hinterblieben dann gelbe Prismen. Vorerst aus kochendem Alkohol krystallisirt, wurden sie dann in Wasser gelöst; durch Zusatz von etwas Zinnchlorür, Ausfällen mit Schwefelwasserstoff, entstand eine nahezu farblose Flüssigkeit, die sehr stark concentrirt und dann mit etwas Alkohol versetzt etwa 1 Grm. eines schwach gelblich gefärbten Salzes in hübschen Prismen lieferte.

Dasselbe gab nun in Wasser gelöst und mit Ätzkali, schliesslich mit Natriumcarbonat ausgefällt, schwach gelbliche Krystallkörner, die gewaschen und aus absolutem Alkohol umkrystallisirt, in fast weissen Prismen anschossen.

Ein Theil derselben wurde zur Darstellung der Platindoppelverbindung benützt, die röthlich gelbe Prismen, sehr schwer in kaltem, leichter in heissem Wasser löslich, bildet.

0.2606 Grm. verloren bei 100° getrocknet 0.0133 Grm. H₂O und hinterliessen 0.0682 Grm. Pt.

Berechnet für		
$(C_9H_7NO)_2H_2Cl_2Pt + 2H_2O$		Gefunden
Pt	26.49	26.17
H ₂ O . . .	4.89	5.10

Diese Zahlen bestätigen die erwartete Zusammensetzung.

Das Oxychinolin aus Chinin krystallisirt aus absolutem Alkohol in ziemlich derben, aus verdünntem Alkohol in zarten, feinen Prismen, Alkohol löst es ohne Färbung, auf Wasserzusatz zeigt sich lichtgelbe Farbe, die nach Zufügung von Alkohol wieder verschwindet; keine Lösung zeigt irgend welche Fluoreszenzerscheinung, es kann also auch das *m*-Oxychinolin, das insbesondere in verdünnt alkoholischer Lösung prächtig grün fluoreszirt, nicht vorliegen.

Der Schmelzpunkt ziemlich compacter Krystalle liegt aber bei 194° uncorr., also sehr nahe dem des *p*-Oxychinolins, der

mit 193—194° ermittelt worden ist. Folgende Angaben setzen ausser allen Zweifel, dass thatsächlich letzteres aus der Xantochinsäure entsteht.

Die alkoholische Lösung wird von Eisenchlorid um so schwächer und um so ausgesprochener gelb gefärbt, je reiner die gelöste Substanz ist.

Sie liefert nach Zufügung von Pikrinsäure alsbald zarte, gelbe Prismen, deren Schmelzpunkt glatt bei 235—235·5 uncorr. liegt.

Nach Zusatz von Kupferacetat entsteht unmittelbar eine schön blaugrüne Färbung, dann allmählig gut ausgebildete violet gefärbte Prismen, die von kochendem Alkohol mit schön laubgrüner Farbe aufgenommen werden, nach dem Verdunsten unverändert hinterbleiben.¹

Das Oxychinolin wird von etwa der vierfachen Menge concentrirter Salpetersäure in der Kälte nicht gelöst, leicht bei vorsichtigem Erwärmen. Die rasch mit Wasser wieder abgekühlte Flüssigkeit setzt nach vorsichtigem Verdünnen mit kaltem Wasser orangerothe Krystalle ab, die von kaltem Wasser schwer, von heissem leicht gelöst werden. Die Lösung, vorsichtig mit Ätzkali versetzt, lässt zarte, gelbliche Prismen fallen, die aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt bei 140—141° schmelzen, also bei derselben auffallend niedrigen Temperatur, wie das Nitroparaoxychinolin.

Ihre alkoholische Lösung wird nach Zusatz von Kupferacetat zuerst prächtig grün, und setzt dann einen kupferbraunen Niederschlag ab; wird aber gleichzeitig eine Spur Alkali zugefügt, einen grünen. Das Barytsalz der Nitroverbindung bildet orangerothe seidenglänzende Nadeln und ist schwer in kaltem, weit leichter in kochendem Wasser löslich.

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, dass obige Reactionen gleichzeitig mit dem synthetisch erhaltenen Oxychinolin ausgeführt wurden und sich dabei vollständigste Übereinstimmung ergab.

¹ Die Beschreibung der Kupferverbindung des synthetischen —p—Oxychinolins weicht, was die Färbungen betrifft, etwas ab. Sublimirte synthetische Substanz verhält sich aber genau so, wie oben beschrieben.

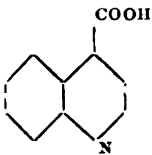
Dass die Schmelzpunkte nicht absolut übereinstimmen, kann bei so schwierig rein darstellbarer Substanz kaum Wunder nehmen, die Abweichung bei derselben ist überdies so gering, die sonstige Übereinstimmung so präcis, dass die Identität beider Körper ausser allem Zweifel steht.

Durch diese Thatsache wird die Constitution des von Königs als Chinolidin bezeichneten sogenannten Oxylepidin, wie es Butlerow und Wischnegradsky zuerst erhielten, aufgeklärt, es ist der Methyläther des *p*-Oxychinolins oder des *p*-Chinanisol, ebenso ist die Constitution der Xanthochin- und der Chininsäure bis auf die Stellung der Carboxylgruppe erkannt¹ und damit die eine Hälfte vom Molekül des Chinins und Chinidins.

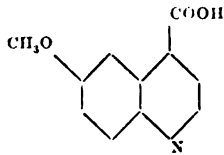
¹ (Zusatz, beigelegt am 19. Juli 1883.) Die Untersuchung über das α - und β -Naphthochinolin von A. Cobenzl und mir (Monatshefte IV, 436) hat gezeigt, dass die Stellung der Pyrichinmonocarbonsäuren und einiger Chinolincarbonsäuren thatsächlich so ist, wie ich es vor längerer Zeit (Monatshefte I, 800) vermuthungsweise ausgesprochen habe.

Damit ist nun auch die Stellung der Carboxylgruppen in der Chinchoninsäure, Chininsäure und Xanthochinsäure gegeben, die Constitution der Säuren durch folgende Formeln ausdrückbar:

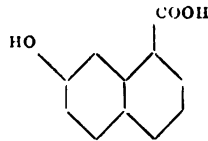
Cinchoninsäure



Chininsäure



Xanthochinsäure



Notizen über Halogenderivate.

Von R. Benedikt und M. v. Schmidt.

(Aus dem Laboratorium für analytische Chemie an der technischen Hochschule in Wien.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1883.)

1. Über die Verdrängung von Brom durch Chlor.

Behandelt man in Wasser suspendirtes Tribromresorcin mit Chlorgas, so bildet sich ein Derivat des Monochlordibromresorcins; es wird somit ein Theil des Broms durch Chlor verdrängt. Ganz ähnlich verhält sich Tribromphenol.¹ Es war uns nun für einige Versuche wichtig, zu wissen, ob diese Verdrängung unter Umständen eine vollständige sein könne.

Wir lösten vorerst 5 Grm. wasserfreies Tribromphenol in circa 30 CC. Chloroform auf und leiteten durch mehrere Stunden Chlorgas zuerst bei gewöhnlicher Temperatur, dann unter Kochen hindurch. Dabei trat keine Braunfärbung ein und beim Verdunsten des Chloroforms hinterblieb unverändertes chlorfreies Tribromphenol.

Stellt man den Versuch hingegen in eisessigsaurer Lösung an, so wird in der Siedehitze alles Brom ausgeschieden. Beim Erkalten scheidet sich eine geringe Menge von Chloranil in gelben Blättchen aus; die Mutterlauge gibt beim Verdunsten Krystalle, welche mit geringen Mengen eines zu Thränen reizenden Öles verunreinigt sind. Entfernt man das letztere durch Absaugen und krystallisirt aus kochendem Wasser um, so erhält man reines Trichlorphenol.

Somit ist nachgewiesen, dass Brom in organischen Verbindungen unter Umständen vollständig durch Chlor ersetzt werden kann.

¹ Benedikt. Monatshefte f. Ch. IV, 223.

2. Über die Einwirkung von Jodkalium auf Tribromphloroglucin.

Jodderivate der Fettreihe sind wiederholt durch Erwärmen der betreffenden Chlor- und Bromderivate mit alkoholischer Jodkaliumlösung erhalten worden. Die Reaction gelingt auch mit aromatischen Verbindungen, z. B. Benzylchlorid,¹ wenn sie in den Seitenketten und nicht im Kerne substituirt sind. Über das Verhalten der letzteren Classe von Verbindungen gegen Jodkalium haben wir keine Angaben gefunden. Wir haben nun gehofft, mit Hilfe dieser Reaction zu dem noch unbekanntem Trijodphloroglucin zu gelangen.

Vorversuche mit Tribromphenol und Tribromresorcin gaben ein wenig günstiges Resultat.

Tribromphenol verändert sich beim Kochen mit wässriger Jodkaliumlösung gar nicht, Tribromresorcin macht dabei etwas Jod frei, während sich die Lösung trübt, die Hauptmasse der Substanz bleibt aber unverändert.

Die Einwirkung von Jodkalium auf Tribromphloroglucin ist hingegen eine ziemlich energische, der Verlauf der Reaction ist von den Mengenverhältnissen abhängig.

Kocht man 1 Theil Tribromphloroglucin (1 Mol.) mit 15 Theilen Wasser und 0·8—1 Theil Jodkalium ($2-2\frac{1}{2}$ Mol.), so entweichen bald beträchtliche Mengen Jod und es bildet sich ein schwerer Niederschlag, welcher ein heftiges Stossen der Flüssigkeit bewirkt.

Er wurde abfiltrirt, aus Eisessig umkrystallisirt, bei 100° getrocknet und analysirt.

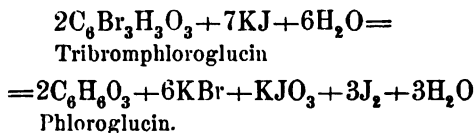
	Gefunden.	Berechnet für $C_6BrJ_2H_3O_3$
C	15·80	15·75
H	0·94	0·65
Br.	16·98	17·51
J	54·77	55·58
O	—	10·50.

Diese Verbindung ist somit Bromdijodphloroglucin $C_6BrJ_2(OH)_3$. Sie bildet bräunliche Nadeln, welche sich beim Erhitzen unter Jodabgabe zersetzen, ohne zu schmelzen.

Derselbe Körper entsteht in geringerer Menge, wenn man Tribromphloroglucin statt mit zwei, mit drei oder vier Molekülen Jodkalium kocht. Die Bildung eines Trijodphloroglucins wurde nie beobachtet, hingegen gehen mit der grösseren Menge des angewandten Jodkaliums stets auch grössere Mengen der Substanz in Form eines krystallisirbaren Körpers in Lösung.

Kocht man endlich mit 7 Molekülen Jodkalium, so entsteht ausschliesslich diese Verbindung; nach dem Erkalten bleibt Alles gelöst. Durch Ansäuern mit Schwefelsäure, Ausschütteln mit Äther und Abdunsten des letzteren wurde ein Rückstand gewonnen, welcher zur Entfernung des noch anhaftenden Jodes mit Schwefelkohlenstoff gewaschen und sodann zweimal aus Wasser umkrystallisirt wurde.

Die Krystalle erwiesen sich brom- und jodfrei und waren leicht mit Phloroglucin zu identificiren; dasselbe bildet sich wahrscheinlich nach der Gleichung:



3. Über die Einwirkung von Chlor auf Pentachlorphenol.

Darstellung von Pentachlorphenol. Merz und Weith¹ schmelzen zur Darstellung von Pentachlorphenol 3 Theile Phenol mit 1 Theil Antimonchlorür im Wasserbade und chloriren sodann im Kochsalzbade bis zur Erschöpfung. Wir haben nach diesem Verfahren nur geringe Ausbeuten erhalten und dasselbe deshalb in folgender Weise modificirt.

5 Theile käufliches Trichlorphenol werden mit 1 Theil Antimonchlorür im Paraffinbade bei 200—220° chlorirt. Der Kolben, in welchem die Operation ausgeführt wird, steht mit

¹ Berl. Ber. 5, 458.

einem durch die Luft gekühlten, weiten Rückflussrohre in Verbindung. Das schwarze Product wird in verdünnte Sodalösung eingegossen, gekocht, abfiltrirt und das Kochen mit sehr verdünnten Sodalösungen so oft wiederholt, als noch etwas in Lösung geht. Die Filtrate fällt man mit Salzsäure aus, der Niederschlag wird abgepresst und zuerst aus verdünntem Weingeist, dann am besten aus Chloroform umkrystallisirt. Das Umkrystallisiren aus siedendem Ligroïn ist für grössere Mengen Pentachlorphenol nicht zu empfehlen, weil die Löslichkeit eine zu geringe ist; das Pentachlorphenol wird aber auf diese Weise am reinsten und zwar in Form grösserer, messbarer Krystalle erhalten.

Die Ausbeute betrug im Mittel 30 Percent vom angewandten Trichlorphenol.

Einwirkung von Chlor auf Pentachlorphenol. Suspendirt man Pentachlorphenol in der für das Trichlorphenol beschriebenen Weise¹ in verdünnter Salzsäure und leitet Chlor ein, so bleibt das Pentachlorphenol sehr lange unverändert und erst nach mehrtägiger Einwirkung findet man es meist vollständig in ein dünnflüssiges, zu Thränen reizendes Öl verwandelt, welches auch bei längerem Stehen nicht erstarrt und nicht weiter untersucht wurde.

Nur einmal wurde an Stelle dieses Öles ein festes Product erhalten. Beim Umkrystallisiren aus siedendem Ligroïn schied sich zuerst unverändertes Pentachlorphenol aus, die Mutterlauge gab beim Verdunsten grosse, wohlausgebildete gelbe Krystalle, welche bei 46° schmolzen und beim Erhitzen Chlor abgaben.

Bei der Chlorbestimmung wurde gefunden:

Gefunden	Berechnet für
—	C_6Cl_6O
—	—
Cl. 70.68	70.77.

Erwärmt man diese Substanz mit Zinn und Salzsäure, so wird die anfangs geschmolzene, gelbe Masse bald fest und weiss, und zeigt nach dem Umkrystallisiren aus Chloroform den Schmelzpunkt und die Eigenschaften des Pentachlorphenols.

¹ Monatshefte f. Ch. IV, 233.

Somit müsste diese Verbindung als Pentachlorphenolchlor $C_6Cl_5.OCl$ angesprochen werden. Gegen diese Auffassung spricht aber der niedrige Schmelzpunkt, wie sich aus der Vergleichung mit den Schmelzpunkten der bereits bekannten Chlor- und Bromderivate des Phenols ergibt:

Tribromphenol	92°	Tribromphenolbrom	118°
Tetrabromphenol	120°	Tetrabromphenolbrom	121°
Pentabromphenol	222°	Pentabromphenolbrom	128°
Trichlorphenol	67—68°	Trichlorphenolchlor	119°
Pentachlorphenol	186—187°	Pentachlorphenolchlor	?

Zudem ist von Langer¹ durch Chloriren von Pentachloranilin in Eisessig ein Körper erhalten und als Hexachlorphenol $C_6H_5.OCl$ bezeichnet worden, welcher bei 106° schmilzt und somit weit besser in die obige Reihe hineinpasst.

Wir haben uns nun bemüht, Langer's Hexachlorphenol direct aus Phenol herzustellen und zu diesem Zwecke 20 Grm. Pentachlorphenol durch ganz gelindes Erwärmen in 150 CC. Eisessig gelöst, Chlor eingeleitet und hierauf in eine Schale ausgegossen. Nach 24 Stunden hatte sich der grösste Theil des Reactionsproductes ausgeschieden; es wurde aus Petroleumäther umkrystallisirt und sodann analysirt.

	Gefunden		Berechnet für C_6Cl_5O
C	19·26		19·35
H	0·20		—
Cl	76·33	76·85	76·34
O	—		4·31.

Dieser Körper ist somit nicht das gesuchte Hexachlorphenolchlor, sondern ein Additionsproduct desselben, Hexachlorphenolchlorid $C_6Cl_5O.Cl_2$. Es bildet zollgrosse, wohl ausgebildete, glänzende, farblose bis weingelbe Säulen, welche bei 102° schmelzen und bei vorsichtigem Erhitzen unzersetzt destilliren. Von warmer Kalilauge wird es unter Zersetzung

¹ Berl. Ber. 15. 1331.

gelöst, aus der gelben Flüssigkeit fällt Salzsäure einen weissen, voluminösen Niederschlag. Von Zinn und Salzsäure wird es zu Pentachlorphenol reducirt.

Die vom Hexachlorphenolchlor abgegossenen, eisessigsäuren Mutterlaugen wurden mit Wasser vermischt und mit Ligroïn ausgeschüttelt. Beim Abdestilliren des letzteren hinterblieb ein geringer Rückstand, welcher nach dem Umkrystallisiren einen Chlorgehalt von 70·03 Procenten besass, bei circa 100° schmolz und somit wahrscheinlich mit dem Hexachlorphenol Langer's identisch ist.

Sowohl der letztgenannte, als der bei 46° schmelzende Körper sind so schwer zu beschaffen, dass wir uns genöthigt sahen, von einer weiteren Verfolgung dieses Gegenstandes abzu- sehen, so interessant es auch wäre, diesen merkwürdigen Isomeriefall aufzuklären.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass sowohl das Trichlorphenolchlor als das Hexachlorphenolchlorid mit Benzol und Chloraluminium angenehm riechende Öle geben, wahrscheinlich Tri- und Pentachlorphenoläther $C_6Cl_3H_2 \cdot OC_6H_5$ und $C_6Cl_5 \cdot O \cdot C_6H_5$.

Über Nitroresorcinsulfosäure.

Von **K. Hazura.**

(Aus dem Laboratorium für analytische Chemie an der k. k. techn. Hochschule in Wien.)

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Juni 1883.)

Auf Veranlassung des Herrn Prof. Weselsky habe ich das Studium über das bei 115° schmelzende, nichtflüchtige Mononitroresorcin aufgenommen und bin zu folgenden Resultaten gelangt.

Erhitzt man Mononitroresorcin in Partien von 15 Grm. mit 13·7 CC. conc. Schwefelsäure auf eine Temperatur von $80-90^{\circ}$ C., so löst sich dasselbe in der Schwefelsäure mit rothbrauner Farbe auf. Gießt man das Reactionsproduct in kaltes Wasser, so scheidet sich in geringer Menge ein krystallinisches Nebenproduct aus, während die Nitroresorcinsulfosäure in der rothbraunen Lösung verbleibt. Die Temperatur von $80-90^{\circ}$ C. ist für die Reaction die günstigste. Erhitzt man über 100° C., so ist die Ausbeute an Nitroresorcinsulfosäure qualitativ und quantitativ eine schlechtere. Bei 110° C. tritt unter stürmischer Gasentwicklung vollständige Verkohlung ein.

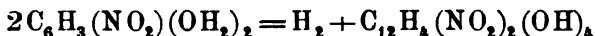
Im Ganzen erhielt ich nach wiederholten Versuchen aus 100 Grm. Mononitroresorcin beiläufig 2 Grm. dieses Nebenproductes. Dasselbe wurde durch Umkrystallisiren aus Wasser mit Thierkohle in warzenförmigen, lichtrothen Krystallen erhalten.

Die Analyse dieser Substanz gab folgende Zahlen in 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $C_{12}H_4(NO_2)_2(OH)_4$
	I.	II.	
C	46·46	46·76	46·75
H	3·01	3·10	2·60

Dieselben stimmen nahezu auf die Formel eines Dinitro-diresorcins.

Dasselbe ist in Wasser und Alkohol schwer löslich; leicht löslich in Ammoniak und aus dieser Lösung mit Essigsäure wieder fällbar. Es bräunt sich bei 170° und verkohlt bei stärkerem Erhitzen, ohne zu schmelzen. Es ist aus dem Mononitroresorcin durch Oxydation entstanden.



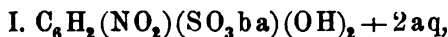
Das Filtrat von Dinitrodiresorcin wurde zur Gewinnung der Nitroresorcinsulfosäure bis zur Syrupdicke eingedampft und erkalten gelassen, wobei des Ganze zu einem dicklichen Brei erstarrte. Die Masse wurde, um sie von dem grössten Theile der überschüssigen Schwefelsäure zu befreien, auf Thonplatten aufgestrichen; nachdem sie trocken geworden, in möglichst wenig Wasser gelöst und unter der Pumpe krystallisirt.

Die Analyse der unter der Luftpumpe über Schwefelsäure getrockneten Substanz gab folgende Zahlen in 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für
	I	II	III	$C_6H_2(NO_2)(SO_3H)(OH)_2 + 1\frac{1}{2} aq$
C	27·23	—	—	27·48
H	2·30	—	—	1·90
S	—	12·12	12·25	12·21

Die Mononitroresorcinsulfosäure krystallisirt in gelblich weissen Schuppen, die sich fett anfühlen. Sie ist in Wasser und Alkohol sehr leicht löslich, löslich in Äther, unlöslich in Benzol und Chloroform. Ihr Schmelzpunkt liegt bei 124—125° C.

Barytsalze der Nitroresorcinsulfosäure.



Dieses Salz erhält man, wenn man zu einer wässerigen conc. Lösung der Sulfosäure so lange Ätzbaryt hinzufügt, als der krystallinische Niederschlag schwefelgelb und nicht citronengelb gefärbt ist. Derselbe wird aus siedendem Wasser umkrystallisirt und man erhält dann das Barytsalz in grossen Nadeln von schwefelgelber Farbe. Sie sind in Wasser leicht löslich.

Die Analyse des unter der Luftpumpe getrockneten Salzes ergab in 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für
				$C_6H_2(NO_2)(SO_3ba)(OH)_2 + 2aq$
	I	II	III	
Ba	20·03	20·40	—	20·24
H ₂ O	—	—	10·83	10·64

II. $C_6H_2(NO_2)(SO_3ba)(Oba)(OH) + 2aq$.

Fügt man zu der Lösung des schwefelgelben Salzes noch weiters Ätzbaryt hinzu, so erhält man eine Ausscheidung von citronengelben Schuppen. Diese sind in kaltem Wasser schwer löslich; löslich in siedendem. Sie ergaben aus Wasser umkrystallisirt und unter der Luftpumpe über Schwefelsäure getrocknet folgende Zahlen in 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für
				$C_6H_2(NO_2)(SO_3ba)(Oba)(OH) + 2aq$
	I	II	III	
Ba	34·07	33·75	—	33·74
H ₂ O	—	—	8·74	8·87

III. $C_6H_2(NO_2)(SO_3ba)(O_2Ba) + 5aq$.

Löst man das citronengelbe Salz in viel siedendem Wasser auf und fügt eine heisse Lösung von Ätzbaryt im Überschusse hinzu, so krystallisirt dieses Salz in Nadeln von blutrother Farbe heraus, in welchem alle drei ersetzbaren Wasserstoffe der Sulfo-säure durch Baryum vertreten sind.

Die Analyse des unter der Luftpumpe über Schwefelsäure getrockneten Salzes gab folgende Zahlen in 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für
			$C_6H_2(NO_2)(SO_3ba)(O_2Ba) + 5aq$
	I	II	
Ba	39·10	39·04	38·96

Dieses Salz ist fast unlöslich in Wasser.

Bemerkenswerth ist das Verhalten der Barytsalze beim Erhitzen. Während das schwefelgelbe Salz schon bei 125° verkohlt,

verträgt das citronengelbe eine Temperatur von 145° C. und das blutrothe von 180° C., ohne sich zu zersetzen.

Durch Zersetzung des ersten Barytsalzes mit in Wasser löslichen Sulfaten, so z. B. mit denen des Kalium, Kupfer, Kobalt und Nickel, lassen sich nitroresorcinsulfosaure Salze darstellen, welche in Wasser löslich sind. Das Kupfer, Kobalt und Nickel-salz krystallisiren in langen Nadeln. Aus dem Kalisalz kann man auch durch Zusatz von Ätzkali zwei, den Barytsalzen entsprechende Kalisalze darstellen.

Einwirkung von Brom auf die Mononitroresorcinsulfosäure.

Diese Säure gibt kein Bromderivat. Beim Bromüren, sowohl in essigsaurer, als auch in wässriger Lösung, wird die Sulfo-gruppe abgespalten und durch Brom ersetzt. Man erhält das bei 147° schmelzende, von Weselsky beschriebene Dibromnitroresorcin.¹

Behandlung der Mononitroresorcinsulfosäure mit Sn und HCl.

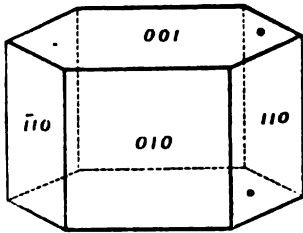
Beim Erhitzen dieser Säure mit Sn und HCl fällt das Reductionsproduct zum grössten Theile schon in der Hitze heraus, ein anderer Theil scheidet sich beim Erkalten der Flüssigkeit ab. Das Filtrat von demselben wurde neuerdings mit Sn und HCl behandelt, bis die Flüssigkeit von Ätzkali nicht mehr gelb gefärbt erscheint, somit keine unreducirte Nitroverbindung mehr vorhanden war. Der ausgeschiedene Körper ist dieAmidoresorcinsulfosäure. Sie wurde aus Wasser umkrystallisirt und gab bei der Analyse folgende Zahlen, in 100 Theilen:

	Gefunden				Berechnet für
	I	II	III	IV	$C_6(NH_2)(SO_3H)H_2(OH)_2$
C	34.98	—	—	—	35.12
H	3.70	—	—	—	3.41
S	—	15.33	15.36	—	15.61
N	—	—	—	6.75	6.83

¹ Annalen d. Chemie. 164. 7.

Die Amidosulfuresorcinsäure krystallisirt ohne Krystallwasser in röthlich weissen Krystallen, die sich beim Umkrystallisiren durch Oxydation grün färben.

Herr Prof. L. Ditscheiner hatte die Güte, die krystallographische Bestimmung derselben vorzunehmen. Er theilt darüber mit:



Krystallsystem: prismatisch.

$$a : b = 1 : 1.1674$$

beob. Flächen $001.010.110$

	beobachtet	berechnet
$010:001$	$= 90^\circ 0'$	—
$110:\bar{1}10$	$= 99^\circ 20'$	—
$110:010$	$= 49^\circ 25'$	$49^\circ 40'$

Da einige der Flächen gekrümmt auftreten, so sind die Messungsergebnisse nicht sehr genau.

Die Amidosorcinsulfosäure ist in kaltem Wasser fast unlöslich, schwer löslich in heissem Wasser. In Ätzkali lösen sich die Krystalle mit Leichtigkeit auf; die Lösung bleibt einige Augenblicke farblos, färbt sich dann blau, später grün und endlich schwarz. Eisenchlorid bewirkt einen braunen Niederschlag, der bei Zusatz von kohlenausem Natron braunviolett erscheint. Bleiessig gibt einen weissen Niederschlag, der an der Luft veilchenblau wird. Beim Erhitzen verkohlen die Krystalle, ohne zu schmelzen.

In die Mutterlauge der Amidosorcinsulfosäure wurde Schwefelwasserstoff eingeleitet, das Schwefelzinn abfiltrirt und das Filtrat im Kohlensäurestrom bis zur Krystallisation eingedampft. Die ausgeschiedenen, nadelförmigen Krystalle lassen sich nicht aus Wasser umkrystallisiren, hingegen erhält man den Körper aus conc. Salzsäure in kleinen, weissen, luftbeständigen Krystallen. Sie sind in Wasser löslich, und geben mit Ätzkali dieselben Farbenreactionen, wie die Amidosorcinsulfosäure. Bleiessig erzeugt eine veilchenblaue Lösung, aus der sich nach längerer Zeit ein blauer schwarz werdender Niederschlag ausscheidet. Silbernitrat fällt aus der Lösung Chlorsilber, die Flüssigkeit färbt sich dann gelb. Die Substanz ist schwefelfrei und chlorhaltig. Die Analyse ergab: C. 36.27, H. 3.80, Cl. 17.73 in

100 Theilen, mithin Zahlen, die mit jenen für ein salzsaures Amidoresorcín oder ein salzsaures Diamidoresorcín gerechneten übereinstimmen.

$C_6(NH_2)H_3(OH)_2 \cdot HCl + 2 a q$ verlangt: C. 36·46, H. 4·06, Cl. 17·98
 $C_{12}(NH_2)_2H_4(OH)_4 \cdot 2 HCl + 4 a q$ verlangt: C. 36·64, H. 3·56, Cl. 18·07.

Vom salzsauren Amidoresorcín unterscheidet sich jedoch diese Substanz durch ihre physikalischen Eigenschaften und das Verhalten gegen Silbernitrat.

Ob sie durch Reduction des der rohen Nitroresorcinsulfosäure anhängenden Dinitrodiresorcíns entstanden ist, konnte ich wegen Mangel an Materiale vorläufig nicht entscheiden.

Die Amidoresorcinsulfosäure gibt beim andauernden Behandeln mit Sn und HCl einen schwefelfreien Körper, der aber mit KHO eine, von der soeben erwähnten analysirten Substanz verschiedene Reaction gibt.

Über die beiden, noch unaufgeklärten, schwefelfreien Substanzen werde ich nächstens berichten.

Derivate des Amylbenzols.

Von F. W. Dafert.

(Mittheilung aus dem chem. Universitäts-Laboratorium im Convictgebäude.)

Das Amylbenzol $C_6H_5CH(C_2H_5)_2$ wurde 1867 von Lippmann und Luginin¹ aus Benzylidenchlorid und Zinkäthyl erhalten und habe ich vor kurzem² seine Bildungsweise aus Benzotrìchlorid mitgetheilt.

Ich gebe im Folgenden die Beschreibung einiger Derivate dieses Kohlenwasserstoffes, die ich bis jetzt näher untersucht habe.

Bereitung des Amylbenzols.

Zur Darstellung dieser Substanz wurde in Zinkäthyl im geringen Überschusse und mit dem gleichen Volum Benzol verdünn, Benzylidenchlorid (S. P. 203°—206° C.) eingetragen. Beide Präparate waren chemisch rein, ersteres nach Gladstone und Tribe,³ letzteres aus Benzaldehyd und Chlorphosphor bereitet. Der Eintritt der Reaction, der sich durch Zischen und, wenn die Temperatur steigt, durch heftige Dampfentwicklung bemerkbar macht, erfolgt bei starker Abkühlung erst nach längerer Zeit, wesshalb es gerathen erscheint, entweder bei gewöhnlicher Temperatur die Operation zu beginnen oder sogar durch Vorwärmen auf etwa 40° C. die Reaction einzuleiten. Dieselbe geht dann ruhig und regelmässig von statten, wenn man das Chlorid tropfenweise zusetzt und bei starkem Auftreten von Dämpfen wieder auf die gewöhnliche Temperatur abkühlt.

Der Zutritt von Luft in den wegen des Zinkäthyls immer mit Kohlensäure gefüllten Kolben verursacht das Auftreten von

¹ Lippmann, Luginin. Z. 1867, p. 666.

² Dafert. Sitzb. d. k. Acad. 1883, Jänn.-Heft p. 460.

³ Gladstone, Tribe. Bd. 6, p. 473.

braunen, harzigen Massen, die sich in dem im Gefässe befindlichen Zinkäthyl ohne Braunfärbung lösen, wenn dasselbe bereits durch Umsetzung entstandenes Zinkchlorid enthält. Das Auftreten dieses secundären Processes beeinträchtigt die Ausbeute bedeutend und ist daher sorgfältig zu vermeiden. Nach beendigter Reaction wurde der erhaltene Brei in salzsäurehaltiges Wasser eingetragen und das oben schwimmende blassgelbe Öl mit kohlensaurer Natriumlösung und Wasser gewaschen, filtrirt, getrocknet und nachdem das Benzol am Wasserbade der Hauptmenge nach abdestillirt worden war, fractionirt. Die von 170° bis 190° C., 190° bis 210° C. und von 210° C. bis ausserhalb der Thermometergrenze übergelenden Partien wurden gesondert aufgefangen.

Fraction I von 170° bis 190° C. siedend, eine trübe, gelbe leicht bewegliche Flüssigkeit, enthielt noch chlorhaltige Producte, die durch Fractioniren nicht zu entfernen waren, wesshalb sie mit dem doppelten Volum einer concentrirten Lösung von salpetersaurem Blei im zugeschmolzenen Rohre auf 160° C. erhitzt wurde. Nach zwölfstündigem Erhitzen erwies sich die nun vollständig klare, oben schwimmende Flüssigkeitsschicht als chlorfrei und wurde zur Entfernung von gebildetem Benzaldehyd mit saurer schwefeligsaurer Natriumlösung geschüttelt. Das nunmehr entchlorte Product wurde nach dem Trocknen mehrmals fractionirt und ging der Hauptmenge nach zwischen 178° bis 180° C. über. Es war das reine Amylbenzol, eine stark lichtbrechende, farblose, aromatisch riechende Flüssigkeit, deren Dichte bei 21° C. 0.8731 beträgt. Es ist gegen Reagentien sehr widerstandsfähig und löst sich nur in geringer Menge in Schwefelsäure und Salpetersäure. Chromsäuregemisch ist ohne Wirkung. Chromsäure in essigsaurer Lösung oxydirt schwach.

Es entsteht hiebei im ersten Falle immer die Monosulfosäure $C_{11}H_{15}SO_3H$, deren Bariumsalz sich durch Fällen der überschüssigen Schwefelsäure aus der Lösung des Amylbenzols in eben diesem Reagens mit Bariumcarbonat und durch Eindampfen des Filtrats in Gestalt von grossen, perlmutterglänzenden Blättchen erhielt, welche mit $1\frac{1}{2}$ aq. krystallisiren und in Wasser und Alkohol schwer löslich sind. Beim Erhitzen zersetzen sich dieselben.

- I. 0·4417 Grm. des Bariumsalzes gaben 0·1662 Grm. SO_4Ba .
 II. 0·4645 Grm. gaben beim Erhitzen auf 105°C . 0·0197 Grm. Wasser ab.
 III. 0·2814 Grm. gaben im Luftstrome verbrannt 0·4432 Grm. CO_2 und 0·1291 Grm. H_2O .
 IV. 0·3214 Grm. gaben 0·1200 Grm. SO_4Ba .
 V. 0·2651 Grm. gaben 0·0114 Grm. Wasser ab.

In 100 Theilen

	Gefunden					Berechnet
	I	II	III	IV	V	für $\text{C}_{44}\text{H}_{60}\text{S}_4\text{O}_{12}\text{Ba}_2 + 3\text{aq}$.
Ba	22·16	—	—	21·99	—	22·16 $\frac{0}{0}$
C	—	—	42·90	—	—	42·71 $\frac{0}{0}$
H	—	—	5·18	—	—	5·34 $\frac{0}{0}$
aq.	—	4·25	—	—	4·30	4·36 $\frac{0}{0}$

Die Analysen I—III sind aus einem Salze, das durch Auflösen von $\text{C}_{11}\text{H}_{16}$ in einem grossen Überschusse von englischer Schwefelsäure dargestellt wurde, während das zu den Analysen IV—V verwendete Präparat aus rauchender Schwefelsäure und dem Kohlenwasserstoff erhalten wurde.

Bei Einwirkung von Salpetersäure auf das Amylbenzol entstehen mit Wasserdampf flüchtige, theils ölige, theils feste, eigenthümlich und lang anhaftend riechende Nitroproducte, welche mit Zinkstaub in essigsaurer Lösung reducirt als Reducionsproducte, eine Base (deren salzsaures Salz seidenglänzende, weisse Nadeln vorstellt) und einen intensiv purpurrothen Farbstoff liefern, welche noch nicht näher studirt wurden.

Die Ausbeute an Amylbenzol betrug im günstigsten Falle 40 $\frac{0}{0}$ des angewandten Benzylidenchlorids.

Fraction II von 190° bis 210°C . siedend, enthielt der Hauptmenge nach Benzylidenchlorid, welches trotz des überschüssigen Zinkäthyls unverändert geblieben war. Die Umsetzung ist also keine vollständige, sondern bleiben circa zwei Procente des angewandten Chlorids unverändert.

Fraction III von 210°C . an übergehend, war ein dickes rothes Öl mit dem charakteristischen Geruch der Paraffine. Da ich jedoch bei der Einwirkung von rauchender Schwefelsäure eine

partielle Zerstörung wahrnahm und das Rückbleiben eines aromatisch-riechenden Öls beobachtete, unterzog ich die ganze der Menge nach ziemlich bedeutende Fraction der Behandlung mit rauchender Schwefelsäure. Bei anhaltendem, schwachem Erwärmen blieb ein gelbes Öl zurück, das erst bei stärkerem Erhitzen angegriffen wurde. Ich zog es daher von der unten befindlichen Schwefelsäure ab, löste es in Alkohol und fällte es mit Wasser, um es wenigstens theilweise zu entfärben. Nach dem Trocknen wurde es destillirt, u. zw. in der Retorte und ohne Thermometer, da die Quecksilbersäule rapid an die Thermometergrenze stieg. Das erhaltene Destillat ging wiederholt, derselben Behandlung unterzogen, fast ohne Rückstand über.

- I. 0·1100 Grm. gaben im Luftstrome verbrannt 0·3621 Grm. CO_2 und 0·1021 Grm. H_2O .
 II. 0·2014 Grm. gaben im Sauerstoffstrome verbrannt 0·6647 Grm. CO_2 und 0·1813 Grm. H_2O .

In 100 Theilen

	Gefunden		Berechnet für $\text{C}_{22}\text{H}_{30}$
	I	II	
C	89·73 $\frac{0}{10}$	90·01 $\frac{0}{10}$	89·79 $\frac{0}{10}$
H	10·30 $\frac{0}{10}$	10·00 $\frac{0}{10}$	10·21 $\frac{0}{10}$

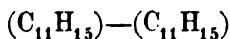
Die beiden Verbrennungen wurden mit verschiedenen Fractionen ausgeführt.

Die Dampfdichte nach Meyer im Bleibade ausgeführt, ergab kein Resultat, da die Substanz unter Abscheidung von Kohle zerlegt wurde.

Die Bestimmungen der Analyse sprechen für einen Kohlenwasserstoff $\text{C}_{22}\text{H}_{30}$, dessen Auftreten und vermuthliche Constitution sich aus dem Folgenden erklären lässt.

Wenn die Menge der oben erwähnten braunen Krusten, welche durch Einfluss von Sauerstoff bei der Darstellung von $\text{C}_{11}\text{H}_{16}$ entstehen, zunimmt, so vermehrt sich, wie ich häufig beobachten konnte, das auftretende Quantum des mit der Formel $\text{C}_{22}\text{H}_{30}$ bezeichneten Körpers, u. zw. auf Kosten des Amylbenzols. Aus dieser Thatsache verbunden mit der Löslichkeit der beobachteten braunen Kruste in zinkchloridhaltigem Zinkalkyl, gewinnt

die Annahme an Wahrscheinlichkeit, dass dieser Kohlenwasserstoff $C_{22}H_{30}$ die Constitutionsformel



besitzt, d. h. entstanden ist, durch Condensation eines sauerstoffhaltigen Derivates des Amylbenzols (eben der in Rede stehende braune Körper) durch Zinkchlorid, also vielleicht ein Diamylphenyl ist.

Dasselbe ist ein blassgelbes, eigenthümlich riechendes Öl, das sich mit Alkohol und Äther, nicht aber mit Wasser mischt, über $360^{\circ} C.$ siedet und bei $0^{\circ} C.$ nicht erstarrt. Schwefelsäure und Salpetersäure lösen es in der Hitze auf, Brom und Jod, letzteres beim Erwärmen, wirken substituierend.

Einwirkung von Brom auf $C_{11}H_{16}$.

Um ein Atom Brom in die Seitenkette des Amylbenzols zu substituieren, wurde in den kochenden Kohlenwasserstoff die entsprechende Menge Brom eingetragen. Die Reaction ist sehr lebhaft und geht ohne Verkohlung vor sich. Die früher farblose Flüssigkeit verwandelt sich in ein schweres, dunkelbraunes, aber trotzdem durchsichtiges Öl, während reichlich Bromwasserstoffsäure entweicht. Nach vollendeter Einwirkung wurde das erhaltene Product mit kohlensaurer Natriumlösung und Wasser gewaschen, filtrirt und getrocknet. Da es unter gewöhnlichen Umständen nicht unzersetzt flüchtig war (sein Destillations- und Zersetzungspunkt liegt bei $188-190^{\circ} C.$), wurde es im Vacuum destillirt. Obgleich das zu Beginn übergehende Öl klar und farblos war, machte sich doch auch hier bald Zersetzung und Abspaltung von Bromwasserstoffsäure bemerkbar, verbunden mit Undurchsichtig- und Braunwerden des Destillats gegen Schluss der Operation. Daher wurden bei Wiederholung der Destillation die ersten klaren Übergänge gesondert aufgefangen und nach dem Waschen und Trocknen der Analyse unterzogen.

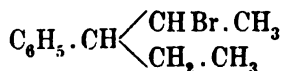
0·2076 Grm. gaben 0·1757 Grm. Br Ag.

In 100 Theilen:

Gefunden
 $36 \cdot 02\%$

Berechnet für $C_{11}H_{15}Br$
 $35 \cdot 24\%$

Bedenkt man die partielle Zersetzung der Substanz unter Bromwasserstoffsäureabspaltung, so erscheint trotz des um 0·8% zu hohen Ergebnisses der Analyse die Identität mit dem erwarteten Produkt: $C_{11}H_{15}Br$ fast sicher erwiesen. Nach den bis jetzt bekannten Thatsachen¹ ist die Constitution des Bromids der Formel

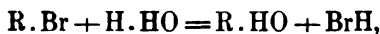


entsprechend, also β Bromamylbenzol.

Es ist ein schwach gelb gefärbtes, an der Luft rauchendes, die Augen heftig angreifendes Öl, welches bei 21° C. eine Dichte von 1·2834 besitzt und im Vacuum bei 40 Mm. Druck zwischen 77°—80° C. unter theilweiser Veränderung übergeht. Es spaltet, wie aus den folgenden Versuchen hervorgehen wird, sehr leicht Bromwasserstoffsäure ab.

Einwirkung von H_2O auf $C_{11}H_{15}Br$.

Schon beim blossen Stehen der Halogenverbindung mit Wasser konnte ich eine stattfindende Veränderung wahrnehmen, da sich immer neue Mengen Bromwasserstoffsäure abspalteten und die früher am Boden befindliche Bromidschichte specifisch leichter wurde. Bevor ich diese Beobachtung machte, hatte ich bereits in der Absicht, nach der Methode von Niederist² einen Alkohol darzustellen, die anhaltende Einwirkung von kochendem Wasser auf das vorliegende Bromproduct studirt. Bekanntlich fand Niederist, dass derartig behandelte Bromide ihr Brom gegen die Hydroxylgruppe austauschen im Sinne der Gleichung:



also in meinem Falle ein Amylbenzylalkohol entstehen müsste.

¹ Man vergleiche Fittig und Kiesow A. 144, p. 282. Das substituirte Chlor tritt in die endständige Methylgruppe, das Brom dagegen gelangt unter sonst gleichen Verhältnissen in ein früheres Glied der Seitenkette (z. B. bei Athylbenzol $C_6H_5CH_2CH_3$ kommt dem Chlorproducte die Formel $C_6H_5CH_2CH_2Cl$, dem Bromproducte aber $C_6H_5CHBrCH_3$, zu). Dass in unserem Falle das Brom den am schwersten zu substituierenden dritten Wasserstoff der direct an den Kern gelagerten Methylgruppe vertritt, ist mehr als unwahrscheinlich. Siehe übrigens p. 328.

² Niederist A. 196. p. 353.

In einem geräumigen Kolben wurden zwei Liter Wasser zum Kochen erhitzt und nach dem Verbinden mit dem Rückflusskühler 20 Grm. Bromid tropfenweise eingetragen und immer mit der neuerlichen Zugabe gewartet, bis der zuerst am Boden befindliche Tropfen an die Oberfläche gestiegen. Setzt man die ganze zu verarbeitende Menge auf einmal zu, so bedeckt sie den Boden des Gefäßes und es werden in Folge plötzlicher, stürmischer Reaction, sowie Auftreten von Siedeverzug die Kolben leicht zertrümmert. Nach beendigter Operation erhitzte ich noch circa 12 Stunden und wurde dann die oben schwimmende Schichte, ein gelbes, angenehm riechendes Öl vorsichtig abgehoben, während der rückbleibenden Flüssigkeit die in geringer Menge gelösten Bestandtheile durch Äther extrahirt werden können. Nach dem Waschen und Trocknen wurde die, wie sich ergab, noch bromhältige Flüssigkeit mit Natrium im Rohre tagelang auf 170° bis 180° C. erhitzt und ging dann vollständig entbromt zwischen 175°—180° C. der Hauptmenge nach über. Diese Thatsache erschien mir bei Vergleichung der Siedepunkte der isomeren Alkohole, die alle bedeutend höher liegen, mit der Vermuthung nicht in Einklang zu bringen, dass ich es hier mit dem gesuchten Amylbenzylalkohol zu thun habe. Die mit dem Producte ausgeführte Verbrennung bestätigte die Berechtigung meiner Zweifel.

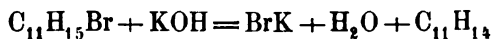
0·2006 Grm. gaben im Sauerstoffstrome verbrannt 0·6625 Grm. CO₂ und 0·1746 Grm. H₂O.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für C ₁₁ H ₁₄
C	90·09 ₁₀ ⁰	90·41 ₁₀ ⁰
H	9·70 ₁₀ ⁰	9·59 ₁₀ ⁰

Sonach hatte ich es hier mit einem der Styrolreihe angehörigen Kohlenwasserstoff C₁₁H₁₄ oder vielleicht mit einem polymeren desselben (C₁₁H₁₄)_x zu thun.

Derselbe musste auch aus dem Bromid auf dem gewöhnlichen Wege:



zu erhalten sein und untersuchte ich daher, um durch Vergleichung die Identität der beiden Producte zu constatiren, die

Einwirkung von KOH auf das Bromid des Amylbenzols.

Ich erhitzte dasselbe mit dem doppelten Volum alkoholischer Kalilösung im zugeschmolzenen Rohre am Wasserbade und war die Reaction nach circa 4 Stunden beendigt. Aus dem schweren Bromid war eine leicht bewegliche, oben schwimmende Schichte geworden und reiche Ausscheidung von Bromkalium bemerkbar. Die gewaschene und getrocknete Flüssigkeit wurde mittelst Natrium durch Erhitzen im Rohre auf circa 200° C. entbromt und ging bei dem darauffolgenden wiederholten Fractioniren fast vollständig in zwei Partien über, die eine von 173°—177° C., die zweite von 208°—212° C. siedend. Anfangs ging das ganze Product bei circa 180°—185° C. über und bei jedem neuen Destilliren konnte eine ziemlich bedeutende Menge des niedrig siedenden Antheils dem höher siedenden zugetheilt werden, was auf Rechnung einer beim Siedepunkte stattfindenden Polymerisation zu setzen ist, wie sich später ergeben wird.¹ Der grösste Theil des Amenylnbenzols, wie ich den neuen Kohlenwasserstoff benennen will,² geht jedenfalls schon bei der Behandlung mit Natrium im zugeschmolzenen Rohr in das Diamenylnbenzol über.

Amenylnbenzol und Diamenylnbenzol.

Sowohl das durch Einwirkung von Wasser, als von alkoholischer Kalilauge auf das Bromid $C_6H_5C_5H_{10}Br$ erhaltene Präparat ist ein im reinen Zustande stark lichtbrechendes Liquidum von angenehmem, aromatischen, lange anhaftenden Geruche, dessen Siedepunkt bei 173° C. liegt, das sich aber sehr leicht polymerisirt und dann als Gemenge von 173° bis 208° C. übergeht, während die, wie die nachfolgenden Bestimmungen ergeben werden, von 208°—212° C. destillirenden Mengen mit der Modification $C_{22}H_{28}$ Diamenylnbenzol identisch sind.

I. 0·1539 Grm. der von 175°—177° C. siedenden Fraction ergaben im Sauerstoffstrome verbrannt 0·5120 Grm. CO_2 und 0·1300 Grm. H_2O .

¹ Vgl. auch Perkins Vinylisopropylbenzol. J. of the chem. S. 1877, p. 660.

² Der in Beilsteins Handbuch eingeführten Nomenclatur entsprechend. Ebendort p. 1193.

II. 0·1901 Grm. der von 208°—212° C. siedenden Fraction gaben 0·6288 Grm. CO₂ und 1675 Grm. H₂O.

III. 0·1560 Grm. eben derselben Substanz gaben 0·5166 Grm. CO₂ und 0·1368 Grm. H₂O.

In 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für
	I	II	III	C ₁₁ H ₁₄
C	90·73	90·21	90·30	90·41% ₀
H	9·37	9·78	9·76	9·59% ₀ .

Die Dampfdichten wurden nach Meyer bestimmt und folgende Resultate erhalten:

I. 0·1392 Grm. der von 173°—177° C. siedenden Substanz gaben bei einem Barometerstande von 718·8 Mm. (corr. und auf 0° red.) 14·5 Ctm. Luft von der Temperatur $t = 17^\circ$, als sie im Naphtalindampf erhitzt wurden.

II. 0·1392 Grm. desselben Körpers im Naphtalindampf erhitzt gaben bei einem Barometerstande von 717·4 Mm. (corr. und auf 0° reducirt) 14·6 Ctm. Luft von 16° C.

III. 0·1728 Grm. der von 208°—210° siedenden Flüssigkeit gaben im Dampf des Acetanilids erhitzt 15·3 Ctm. Luft, wobei $B_0 = 717·7$ Mm. und $t = 18^\circ$ war.

IV. 0·1724 Grm. eben dieser Substanz verdrängten im Dampfe des Acetanilids 11·9 Ctm., wobei $B_0 = 718·4$ Mm. und $t = 16^\circ$ war.

V. 0·1355 Grm. des von 173°—177° C. übergehenden Kohlenwasserstoffes verdrängten im Bleibade erhitzt 30·3 Ctm. Luft. $B_0 = 711·2$ Mm., $t = 16^\circ$. Zersetzung sichtbar.

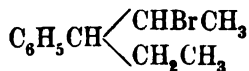
VI. 0·1728 Grm. des von 208°—210° siedenden Productes gaben bei der Temperatur des schmelzenden Bleis und bei $B_0 = 711·3$ Mm. und $t = 16^\circ$ 27·2 Ctm. verdrängte Luft. Zersetzung sichtbar.

Sonach gefunden:

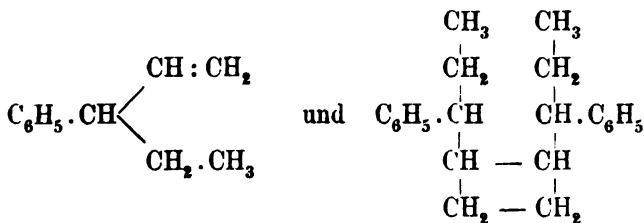
Fraction S.P.	Gefundene Dampfdichten			Berechnete D.D.
	bei 218° C.	bei 295° C.	bei ca. 325° C.	
173°—177° C. (C ₁₁ H ₁₄)	I. 8·505 II. 8·528 ¹		V. 3·952(?)	5·057
208°—212° C. (C ₂₂ H ₂₈)		III. 10·152 IV. 10·215	IV. 3·990(?)	10·114

Die ungesättigte Verbindung C₁₁H₁₄ konnte ich aus den oben angeführten Gründen nicht rein erhalten, wohl aber die von 208° bis 210° übergehende, gesättigte. Die von 173°—200° destillierenden Gemenge absorbirten unter Verschwinden der Bromfarbe mit Zunahme des Siedepunktes abnehmende Mengen Brom und addiren es wohl dem Charakter der Verbindung entsprechend zu C₁₁H₁₄Br₂. Dieses Bibromid stellt ein die Augen heftig angreifendes Öl vor, welches ich bis jetzt nicht in analysenfähigem Zustande erhalten konnte und dem Kalilauge Brom entzieht. Auf Diamenylbenzol ist Brom in ätherischer Lösung ohne Wirkung, während es beim Erhitzen substituierend wirkt. Der Kohlenwasserstoff ist leicht in Alkohol und Äther löslich und hat die von 173—177° C. siedende Fraction eine Dichte $D = 0·8458$ bei 23° C. und die von 208°—212° C. übergehende Partie eine solche $D = 0·9601$ bei 23° C.

Nach seiner Synthese aus dem Bromid



kommen dem Amylbenzol und seinem Polymeren die folgenden Constitutionsformeln zu:



¹ Also ein Gemenge aus C₁₁H₁₄ und C₂₂H₂₈.

Die beobachtete Polymerisationsfähigkeit dieses Kohlenwasserstoffes bestätigt die Perkin'sche Ansicht,¹ dass nur diejenigen Kohlenwasserstoffe die Eigenschaft des leichten Polymerisirens besitzen, welche die Gruppe $-\text{CH}:\text{CH}_2$ enthalten. Jedenfalls spricht auch diese Thatsache gegen die schon an und für sich unwahrscheinliche Annahme, dass das Brom in der dem Kerne nächststehenden Methylgruppe den 3. Wasserstoff substituirt habe.

Die Ausbeute an Amenylbenzol und Diamenylbenzol beträgt höchstens 20% des angewandten Amylbenzols.

Oxydation des Amenyl- und Diamenylbenzols.

Schwefelsäure und chromsaures Kalium, sowie Chromsäure in wässriger Lösung wirken auf den vorliegenden Kohlenwasserstoff nur sehr schwach ein.

5 Grm. der von 173°—177° C. siedenden Fraction wurden in Eisessig gelöst und CrO_3 zugesetzt, bis die Flüssigkeit sich auf Wasserzusatz nicht mehr trübte. Die Reaction verlief stürmisch und ergab als Oxydationsproduct der Hauptmenge nach Benzoëssäure, welche durch ihren Schmelzpunkt (120° C.) und ihr Verhalten gegen Reagentien identificirt wurde. Äther hatte ausserdem noch ziemlich viel Essigsäure extrahirt, welche letztere mit Ammoniak abgesättigt wurde. Das gebildete Gemenge von Ammoniumverbindungen war geruchlos und wurde im Wasser gelöst durch wenig Salzsäure zersetzt, worauf sich reichliche Ausscheidung von Benzoëssäure bemerkbar machte. Das geringe Auftreten eines zu Thränen reizenden Geruches konnte ich bei dieser Operation bis zur Zugabe von Ammoniak constatiren, ohne aber denselben irgend wie verfolgen zu können, wesshalb ich ihn auch nicht weiter beachtete.

Als dagegen 5 Grm. Diamenylbenzol (S. P. 208°—212° C.) der gleichen Behandlung unterzogen wurden, extrahirte Äther nach vollendeter Einwirkung neben Essigsäure und Benzoëssäure der Hauptmenge nach eine grünlich gefärbte, krystallinische Substanz, die schon bei gewöhnlicher Temperatur einen furchtbaren, die Augen aufs heftigste und anhaltend angreifenden

¹ Perkin. Chem. News 1877, p. 271.

Geruch verbreitet und in Wasser ganz unlöslich, in Alkohol schwer, in Äther leicht löslich ist. Sie wurde mit Wasser längere Zeit gekocht, heiss filtrirt, um etwa noch vorhandene Benzoesäure zu entfernen und in Alkohol gelöst. Auf Zusatz von wenig Wasser wurden fast weisse Flocken gefällt, welche getrocknet bei 164°C . (uncorr.) schmelzen und den heftigen Geruch der direct erhaltenen Substanz aufweisen. Mit wässerigem Ammoniak verschwindet der Geruch und löst sich die Substanz unter Abscheidung einer weissen, krystallinischen Masse, beim Eindampfen mit Salzsäure am Wasserbade entstehen farblose Nadeln.

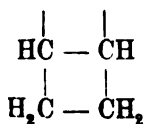
0·1098 Grm. gaben im Sauerstoffstrome verbrannt 0·1827 Grm. CO_2 und 0·0423 Grm. H_2O . Schwacher, chromhaltender Rückstand im Schiffchen.

In 100 Theilen

	Gefunden
C	$45\cdot39\%$
H	$4\cdot25\%$

Wegen des bevorstehenden Semesterschlusses bin ich jetzt nicht in der Lage, die Untersuchung über die Natur dieses Körpers weiter fortzusetzen und muss ich es vorläufig dahingestellt bleiben lassen, welcher Reihe von Verbindungen derselbe angehört.

In Anbetracht der grossen Neigung des vorliegenden Kohlenwasserstoffes sich zu polymerisiren und der Beständigkeit des entstehenden Diamenylbenzols, erscheint selbst die Möglichkeit nicht ganz ausgeschlossen, dass das Kohlenstoffviereck



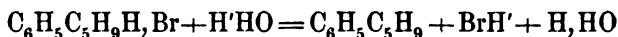
intact bleibt und wir bei der Oxidation zu Derivaten des Tetrols gelangen.

Schlussbetrachtung.

1. Amylbenzol: $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$ ist eine gegen Schwefel-, Salpeter- und Chromsäure sehr beständige Verbindung, welche

nach erfolgtem Eintritte von Brom in die Seitenkette sehr leicht unter Bildung eines ungesättigten Kohlenwasserstoffes BrH abspaltet. Daher auch

2. die Niederist'sche Reaction in diesem Falle nicht der Regel entsprechend verläuft, sondern das Wasser hier die Rolle der alkoholischen Kalilauge spielt:



und die Existenz eines Alkohols fraglich erscheint.

3. Das Verhalten des Kohlenwasserstoffs gegen Brom und weiters gegen Wasser resp. alkoholische Kalilösung hat die Entstehung folgender Derivate zu Folge:

- a) Monobromamylbenzol, flüssig, S. P. $77^\circ - 80^\circ \text{C}$. bei 40 Mm. Druck.
- b) Ameylbenzol, flüssig, S. P. 173°C . (wobei es polymerisirt wird).
- c) Diameylbenzol, flüssig, S. P. $208^\circ - 212^\circ \text{C}$.
- d) Das Bibromid: $\text{C}_{11}\text{H}_{14}\text{Br}_2$, flüssig (noch nicht rein erhalten). Ausserdem sind Derivate untersucht:
 - a) Eine Monosulfosäure identificirt durch ihr Bariumsalz, mit $1\frac{1}{2}$ aq kristallisirend.
 - b) Ein Kohlenwasserstoff $\text{C}_{22}\text{H}_{30}$ (?) flüssig. S. P. über 365°C .

4. Die dem Ameylbenzol zukommende Eigenschaft des leichten Polymerisirens ist ein neuerlicher Beweis für die Existenz eines, wie schon erwähnt von Perkin zuerst ausgesprochenen¹ Gesetzes: „Die die Gruppe $-\text{CH} : \text{CH}_2$ enthaltenden ungesättigten Kohlenwasserstoffe $\text{C}_n\text{H}_{2n-14}$ haben die Fähigkeit sich zu polymerisiren.“

5. Die Oxydation unter sonst gleichen Bedingungen verläuft höchst wahrscheinlich bei der ungesättigten Modification $\text{C}_{11}\text{H}_{14}$, anders, als bei der gesättigten $\text{C}_{22}\text{H}_{28}$.

Ich werde die Untersuchungen über diesen Gegenstand ehe baldigst wieder aufnehmen und meine Aufmerksamkeit in erster Linie auf den Verlauf der Oxydation beim Diameylbenzol richten.

¹ Perkin. Chem. News 1877, p. 211.

Mit Freuden ergreife ich die Gelegenheit, Herrn Prof. Dr. E. Lippmann, meinem hochverehrten Lehrer, nicht nur den herzlichsten Dank für die mir erwiesene Theilnahme und Unterstützung bei der Ausführung dieser Arbeit, sondern auch für die lebenswürdige Aufnahme in sein Laboratorium zu sagen. ¹⁾

Wien, im Juni 1883.

¹ Nach Abschluss der vorliegenden Arbeit kommt mir Schramm's Abhandlung: „Über die Einwirkung von Brom auf Kohlenwasserstoffe mit einer gesättigten Seitenkette“ (A. Ch. Ph. 218, p. 383) zu Gesichte. Meine Untersuchungen bestätigen bezüglich des Diaethyltoluols Schramm's Resultate und wird der beim Monobromamylbenzol um 0·8% zu hohe Bromgehalt wohl auf Rechnung einer Beimengung von Bibromid zu setzen sein, wie ich an der betreffenden Stelle angedeutet habe. Da Schramm keine Dampfdichten angibt und nie eine Polymerisation erwähnt, scheinen seine ungesättigten Kohlenwasserstoffe, welchen in keinem Falle die Gruppe $-\text{CH} : \text{CH}_2$ zukommt, nicht die Fähigkeit zu haben Polymere, zu bilden und ist dies — vorausgesetzt, dass nicht nachträgliche Versuche das Gegentheil beweisen — eine neuerliche Unterstützung für die in der Schlussbetrachtung diesbezüglich entwickelte Ansicht.

Über die Erden des Gadolinitz von Ytterby.

Von Dr. Carl Auer von Welsbach.

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. A. Lieben.)

Die vorliegende Arbeit ist die erste Publication über Untersuchungen, die den Zweck verfolgen, einen Beitrag zur Kenntniss der Erden dieses so interessanten Minerals zu liefern und schliesslich die Möglichkeit bieten sollen, in einer vortheilhaften Weise die darin enthaltenen Elemente in reinen Verbindungen und in reichlicher Menge zu gewinnen, um zuletzt die Darstellung der Elemente selbst realisiren zu können.

Für diesmal beschränke ich mich auf die Darlegung derjenigen Methoden, welche zur Trennung im Allgemeinen angewendet wurden, um die Elemente in bestimmte Gruppen zu bringen. Über die Reindarstellung dieser, die Bestimmung ihrer Äquivalentgewichte und das als Grundlage der Untersuchungen angewendete Spectralverfahren werde ich später berichten.

Bei der Kostbarkeit einerseits, die heute das Rohmaterial besitzt, und der Schwierigkeit, mit der es selbst zu hohen Preisen in grösserer Menge zu erhalten ist, bei dem heutigen Stande der Wissenschaft andererseits, der ein schon in bestimmte Gruppen gebrachtes Material von bedeutender Quantität voraussetzt, wenn neue Beziehungen zu Tage gefördert werden sollen, namentlich aber in Bezug auf den zweiten Punkt meines Programmes kann nur dasjenige Trennungsverfahren als geeignet erscheinen, welches ein rasches, fast müheloses Scheiden der Erden erreichen lässt, denn nur dadurch wird es möglich gemacht, gar kein Material preiszugeben, während man sonst geradezu jahrelang währende Operationen durchzumachen hat.

Bevor ich die von mir angewendete Methode selbst beschreibe, wird es zweckmässig sein, über die bisher üblich gewe-

senen Trennungsprocesse und die diesen in Bezug auf Verarbeitung grösserer Mengen anhaftenden Nachtheile Einiges anzuführen.

In der Natur der Sache liegt es, dass die durch ein paar charakteristische Reactionen unterschiedenen Cerit- und Yttererden in allen Verfahren vorerst getrennt werden.

Die jüngsten Ergebnisse der Forschung zeigen jedoch, dass diese Unterschiede nur für die Mehrzahl der Erden der beiden Gruppen strenge gelten.

Cer, Didym, Lanthan und einige andere vor wenigen Jahren gefundene Elemente bilden in Form ihrer Sulfate Doppelverbindungen mit Kaliumsulfat. Letztere bilden sich bei Zusatz von festem Kaliumsulfat zu der nicht zu concentrirten Lösung der Nitrate der Gadoliniterden und scheiden sich aus, weil sie in der concentrirten Lösung des Kaliumsulfates sehr schwer löslich sind. Die so erhaltene Mutterlauge ist fast frei von den Ceriterden, enthält aber nur einen Theil der Yttererden.

Man kann nun allerdings, wie ich gefunden habe, diese Doppelsulfate, wenn sie in fein vertheilter Form mit Oxalsäure in geringem Überschusse versetzt und mit Wasser anhaltend gekocht werden, leicht in Oxalate, diese in Oxyde und dann in die Nitrate verwandeln, und nun neuerdings mit Kaliumsulfat behandeln, wodurch wiederum eine an Yttererden reiche Mutterlauge gewonnen werden kann. Durch mehrfache Wiederholung, aber auch nur dadurch gelingt es diese Erden zu trennen.

Eine weitere Umständlichkeit dieses Verfahrens ist darin gelegen, dass die Ceriterden sich in den das Yttrium als Hauptbestandtheil enthaltenden Mutterlaugen immer wieder finden und so eine öftere Wiederholung des Fällungsprocesses auch hier nöthig machen.

Was nun die weitere Trennung in der Yttererdegruppe selbst anbelangt, so ist diese noch viel mühsamer durchzuführen, als die eben beschriebene Scheidung.

Durch Erhitzen der geschmolzenen Nitrate bis zum Auftreten der ersten Blasen von Stickstofftrioxyd und nachheriges Auflösen in kochendem Wasser bilden sich die basisch salpetersauren Salze dieser Erden, die aus der Lösung während des Erkaltens sich ausscheiden. Der gewonnene Krystallbrei ist reicher an

Erbin als die Mutterlauge. Diese wird wieder eingedampft und die gewonnenen Nitrate werden derselben Operation unterzogen und das sofort, bis die Kryställchen farblos werden. Die gewonnenen Fractionen werden vereinigt, und die Nitrate abermals nach demselben Principe getrennt. Um eine grössere Menge Erbin aus dem ursprünglichen Gemenge abzuscheiden, ist es nöthig, wohl hundertmal denselben Process zu wiederholen, wobei man noch genau darauf zu achten hat, dass die Zersetzung der Nitrate nicht weiter schreitet, als oben angegeben wurde, weil sich sonst überbasische Salze bilden, die eine noch langsamere Trennung bedingen würden, und in Folge ihrer Löslichkeit in verdünnter Salpetersäure von den mit ausgeschiedenen Spuren basischer Cerverbindungen sich nicht trennen lassen würden.

Das eben besprochene Trennungsverfahren ist, was das Resultat betrifft, das Beste, das bis heute in Bezug auf Scheidung der Hauptmenge des Erbin von Yttrium gefunden wurde. Ich habe später noch darauf zurückzukommen.

Dieses Verfahren kann aber nicht verwendet werden zur Trennung der letzten Spuren des Erbin von der Hauptmenge des Yttrium.

Um diese zu erreichen, müssen die geschmolzenen Nitrate noch weiter zersetzt werden, als früher, so weit das ein Theil sich als Erden abzuscheiden beginnt. Man kocht die Schmelze später aus und wiederholt diese ganze Operation, bis sich in der concentrirten Lösung kein Erbinspectrum mehr erkennen lässt. Die Ausbeute ist gering. Auf Einzelheiten und eine genaue Beschreibung der Prozesse einzugehen, fehlt an dieser Stelle selbstverständlich der Raum und ich verweise desshalb auf die so überaus werthvolle Arbeit Bahr und Bunsen's, die namentlich in Bezug auf die zur Anwendung gebrachten Untersuchungsmethoden für alle Forschungen auf unserem Gebiete bahnbrechend geworden ist.¹

Zu einer weiteren Trennung der so gewonnenen Körper lassen sich die eben angeführten Methoden nicht verwenden. Die einfache Variante, das Erhitzen der Nitrate weiter fortzusetzen als es bei der Erbingewinnung angegeben wurde, nämlich so weit, bis die geschmolzene Masse dickflüssig geworden ist, gab

¹ Bahr und Bunsen. Ann. Chem. Pharm. 135,

diesem Verfahren eine neue Grundlage. Es bilden sich nämlich beim Auskochen der Schmelze mit Wasser überbasische Salze und zwar, wie ich weiter unten zeigen werde, entstehen die von Ytterbium und Scandium leichter, wie die des Erbiums.

Wird das Verfahren so durchgeführt, wie es ursprünglich von Marignac angegeben wurde,¹ so muss diese Operation sehr oft mit den jeweilig erhaltenen Rückständen wiederholt werden, bis endlich das Erbiumppectrum in der concentrirten Lösung nicht mehr zu erkennen ist. Durch weitere Fortsetzung des Verfahrens wurde schliesslich auch das Scandium gefunden.

Es lag nahe, diese eben besprochenen Methoden direct auf das Gemenge der Nitate der Gadoliniterden anzuwenden, umso mehr, als schon seit Bunsen's Arbeit festgestellt war, dass bei der Krystallisation der basisch salpetersauren Salze Didym und die übrigen Ceriterden — jene kleinen Mengen, welche in der ersten Lösung noch enthalten sind — sich in der Mutterlauge anhäufen.

Was in dieser Beziehung für die basischen Salze gilt, gilt, mit Ausnahme des Cers, auch für die überbasischen.

Auch dieses Verfahren sei in Kürze besprochen.² Man erhitzt die gemengten Nitate der Gadoliniterden in der schon öfter besprochenen Weise. Cerinitrat ist der erste Körper, der sich zersetzt. Durch Auskochen mit Wasser bleibt es als basisches Salz zurück. Die davon abfiltrirte Mutterlauge enthält nun die übrigen Erden. Durch Fortsetzung desselben Verfahrens wird die Mutterlauge immer reicher an den noch vorhandenen Ceriterden und nach 7—8maliger Wiederholung enthält sie keine Ytterit-erden mehr.

Das Erhitzen wird auch bei diesen Operationen so weit getrieben, bis die geschmolzenen Salze dickflüssig zu werden beginnen. Man nennt eine solche Reihe von Fractionen eine Hauptreihe.

Die Fractionen einer Hauptreihe werden vereinigt, worauf man von Neuem fractionirt. Nach sieben solchen Hauptreihen enthielt die Hauptlösung kein Didym mehr. Die Reihen 8—30

¹ Marignac. Compt. rend. LXXXVII, 578.

² Nilson. Berl. Berichte 1880. B. II. pag. 1430.

enthielten fast den ganzen Gehalt an Yttererden, die durch Absorptionsbänder ausgezeichnet sind. Nach 68 Reihen zeigte die syrupdicke Nitratlösung keine Absorptionsstreifen mehr. Die rückständige Erde enthielt nur mehr Ytterbium und Scandium.

Man musste also fünfhundertmal die immer gewonnene Lösung abdampfen, den Rückstand erhitzen bis zum bestimmten Punkt u. s. f., um einen Theil des Ytterbiums und Scandiums zu erhalten.

Als theoretische Grundlage dieser Methoden gab man die verschiedene Widerstandsfähigkeit der Nitate bei Temperaturerhöhung an. Es ist ja immerhin möglich, dass eine verschiedene Zersetzbarkeit dieser Verbindungen unter den Umständen, wie ich sie wiederholt zu besprechen hatte, besteht. Für die betreffenden Cerverbindungen ist sie sogar ausser Frage gestellt.

So lange sich jedoch die Trennung auf das Verhalten der basisch salpetersauren Salze stützt, kommt ein solches Verhalten gewiss nicht in Betracht.

In Bezug auf die überbasischen Salze ist ein Schluss nicht so leicht gemacht, doch werde ich zeigen, dass auch ohne Erhitzen der geschmolzenen Nitate eine mindestens eben so gute, wenn nicht noch viel bessere Trennung sich erzielen lässt.

Die endgiltige Lösung dieser Frage kann nur durch directe Temperaturbestimmung des Zersetzungsbeginnes der verschiedenen Nitate herbeigeführt werden. Eine solche Bestimmung hat aber (experimentelle) Schwierigkeiten, da sich der Moment des Auftretens der ersten Blasen von Stickstofftrioxyd nicht genau feststellen lässt. Eine wesentliche Temperaturdifferenz scheint nach den in dieser Richtung angestellten Versuchen ausgeschlossen.

Bei höherer Temperatur, in dem Stadium stürmischer Zersetzung, treten aber eigenthümliche Erscheinungen auf, die ich bisher nicht verfolgen konnte.

Ich erwähnte früher schon, dass sich die basisch salpetersauren Salze am vortheilhaftesten zur Trennung eignen, so lange es sich um die Scheidung der Hauptmenge des Erbin etc. von der des Yttrium handelt.

Dabei ist es aber gar nicht nöthig, die Lösung der Nitrats abzdampfen etc., es genügt, sie basisch zu machen, um die ganz gleichen Resultate, wie beim Bunsen'schen Verfahren zu erreichen. Das bewirkt man am leichtesten durch Zusatz der aufgeschlemmten Oxyde zur kochenden Lösung. In wenigen Secunden ist die Reaction vollendet. Es fällt sofort beim Erkalten ein reichlicher Niederschlag von yttriumhaltigem, basisch salpetersaurem Erbium heraus.

Damit ist das Princip des neuen Verfahrens gegeben.

Es ist eben so gut anwendbar auf ein Gemenge aller Gadoliniterden.

Ich wende mich nun zur genauen Beschreibung der einzelnen Operationen.

Die im wesentlichen nach Bunsen's Methode aus dem Rohmaterial gewonnenen Oxyde bilden auch hier den Ausgangspunkt.

Hat man eine bedeutende Quantität davon zu verarbeiten, so empfiehlt es sich vorerst, wie folgt, vorzugehen. Die Oxyde, wie sie unmittelbar nach dem Rösten der Oxalate erhalten werden, werden mit Wasser zu einem Brei angertührt und mit Salpetersäure versetzt, umgeschüttelt, wobei ein lebhaftes Aufbrausen stattfindet, von unzersetzten Carbonaten herrührend. Man gibt nun abermals von dem Oxydbrei zu und dann Salpetersäure, wobei die Salpetersäure nicht hinreichen darf, eine vollständige Lösung zu erzielen. Man muss nach jedesmaligem Zusatz gut umschütteln. Hat man die ganze Operation mehrmals wiederholt und sind zum Schlusse in der nun kochend heiss gewordenen syrupartigen Flüssigkeit überschüssige Oxyde in reichlicher Menge vertheilt, so beginnt das Gemenge nach kurzer Zeit breiartig zu werden und die ursprünglich gelbe Farbe wird grau-röthlich.

Man lässt nun längere Zeit mindestens bis zum vollständigen Erkalten stehen. Der grösste Theil des Erbiums und ein grosser des Yttriums ist nun in der Masse als basisch-salpetersaures Salz enthalten. Man versetzt nun successive mit soviel concentrirter Salpetersäure, als eben nöthig ist, damit die Farbe in eine röthliche übergehe; dass hiebei gut umgerührt werden muss, ist selbstverständlich. Die Salpetersäure löst dabei überschüssige Oxyde, Carbonate, basische Cerverbindungen, auch die Spuren des Eisens auf und es

setzt sich nun ein mächtiger rosafarbener Niederschlag, auf den die schwach salpetersaure Lösung ohne jeden Einfluss ist, ab. Nach einiger Zeit bildet er eine fast compacte Masse, von welcher sich die Mutterlauge leicht fast ganz abgiessen lässt.

Man setzt nun Alkohol, in welchem sich die Nitrate leicht, die basischen salpetersauren Salze nicht lösen, zu, rührt auf – bringt auf das Saugfilter und wäscht mit Alkohol aus. Von den grösseren Concretionen, die, wenn das Verfahren nicht ganz gut angewendet wurde, in der Krystallmasse vertheilt sein können, und durch das Zusammenballen von Oxyden und nachheriger theilweisen Umwandlung in basische Salze erhärtet sind, muss das basisch-salpetersaure Erbium-Yttrium von seiner Lösung getrennt werden. Es geschieht dies am besten durch Abschlämmen mit Alkohol.

Es ist unbedingt nothwendig, genau nach diesen Angaben die Operation zu leiten, da sonst zweifelsohne der Process ohne besonderen Erfolg verläuft. Auch ist es vortheilhaft, nach dieser ersten, reichlichsten Abscheidung der Erden der Yttergruppe die gewonnene Mutterlange vom Cer zu befreien.

Erhitzt man die in einer Platinschale befindlichen Nitrate so lange, bis die entstandene Trübung keine weitere Zunahme erkennen lässt, lässt dann unter Umschwenken und Eintauchen in kaltem Wasser rasch erkalten, übergiesst mit kochendem Wasser, kocht endlich, bis die grösseren Theile gelöst sind, so ist fast die Gesammtmenge als unlöslicher Niederschlag in der Flüssigkeit enthalten. Derselbe enthält auch die ganz kleine Menge Eisen als basische Verbindungen, die den Erden selbst durch wiederholte Füllung mit Oxalsäure aus saurer Lösung nicht entzogen werden kann.

Der auf diese Weise gewonnene Niederschlag darf keine kleinen nadelförmigen Kryställchen enthalten; wenn dies der Fall ist, so hat man das Erhitzen zu lange fortgesetzt.

In Bezug auf die weitere Abscheidung der Yttererden kann ich mich nach dem bisher Gesagten kurz fassen.

Die ziemlich concentrirte Lösung wird in der Platinschale bis zum Kochpunkte erhitzt, nun die Flamme weggenommen, der in der Achatreischale gut verriebene, nicht zu dickflüssige Brei wird eingegossen und sofort lebhaft umgerührt; hat die von

den Oxyden gelb gefärbte Flüssigkeit ihre ursprüngliche Farbe wieder angenommen, so ist die Reaction zu Ende.

In Bezug der weiteren Behandlung des Niederschlages verweise ich auf das schon Erwähnte.

So verläuft der Process, wenn etwa der zehnte Theil der in der Flüssigkeit enthaltenen Nitate in Form der Oxyde zugesetzt wurde.

Man kann aber auch zwei-, ja dreimal soviel nehmen, nur hat man in Betreff des Erhitzens eine kleine Modification anzuwenden.

Nach dem Zusetzen der Oxyde wird die Flüssigkeit nicht mehr klar und man muss, nachdem die Gelbfärbung wieder in die röthliche übergegangen ist, den Verlauf der Reaction durch kurzes Aufkochen unterstützen. In keinem Falle jedoch darf das Zugeben zur kochenden Flüssigkeit stattfinden, es wäre sonst wohl unvermeidlich, dass die Oxyde am Boden der Schale sich in Krusten absetzten und so der Einwirkung sich entzögen.

Die Herstellung der Oxyde findet in gewöhnlicher Weise statt und man kann unbeschadet der Abscheidung bei den späteren Fällungen, gleich für drei oder vier Operationen vorbereiten, also etwa den fünften Theil der vorhandenen Nitate mit Oxalsäure fällen.

Das Glühen der Oxalate geschieht in der Platinschale.

Nach fünf, höchstens sechs Operationen sind die Yttererden so gut wie vollständig der Mutterlauge entzogen. Die Scheidung von Didym etc. ist dabei so vollständig, dass die concentrirte Lösung der basisch-salpetersauren Salze kaum mehr eine Spur des Didymspectrums erkennen lässt.

Die so erhaltenen Fractionen sind von einander verschieden. Die zuerst gewonnenen, schwach rosafarben, die zuletzt dargestellten rein weiss. Erstere enthalten die Hauptmenge des Erbin, Ytterbin und Scandiu, letztere die des Yttrium und Terbium.

Die Fractionen werden nicht vereinigt, wie es bisher üblich gewesen ist.

Die rasche Durchführung der weiteren Operationen macht dies unnöthig und es lässt sich dadurch das zuerst erhaltene Product nach 5—6 Operationen so rein erhalten, als man es überhaupt mit Hilfe der basisch-salpetersauren Salze vortheilhaft

erreicht. Das erhaltene Präparat ist gewissermassen als Leitsubstanz für die folgende Reinigung der übrigen zu betrachten. Ungefähr die Hälfte der ersten Fraction wird in verdünnter Salpetersäure gelöst und successive die andere Hälfte aus der gewonnenen Lösung umkrystallisirt. Man erhitzt auch hier, wie bei allen diesen Operationen die Lösung zuerst zum Kochen und gibt die basischen Salze dann zu. Je reicher die Lösung an Erbinerde ist, desto leichter löst sie bei Kochtemperatur die erbinerdereicheren Fällungen auf; beim folgenden Erkalten lässt sie fast die ganze Menge basischer Salze wieder fallen. Man beschleunigt die Krystallisation durch lebhaftes Umrühren.

Das Sättigen nimmt man bequem in einer Platinschale vor, und giesst in ein Becherglas ab. Man hat nach kurzer Zeit die Lösung zu einer Operation bereit, da der Niederschlag sich fest zusammensetzt.

Hat man die andere Hälfte umkrystallisirt, was nach ein paar Operationen geschehen ist, so wird der vollständig erkaltete Gesamtniederschlag unter Zusatz von wenigen Tropfen Salpetersäure mit einem kleinen Theilchen Mutterlauge aufgeführt und auf das Saugfilter gebracht und mit Alkohol gewaschen. Die so gewonnene ganze Menge wird der Mutterlauge der nun in ganz gleicher Weise zu behandelnden zweiten Fraction zugesetzt und so fort bis die schliesslich erhaltene Lösung nur mehr schwach rosa gefärbt ist, also der Hauptmenge nach aus Yttriumnitrat besteht.

Man wendet nun wieder das Oxydverfahren, wie ich es kurz nennen will, an, vornehmlich desswegen, weil das Lösungsvermögen der Mutterlauge für basische Salze geringer wird und aber dieses gerade bei diesem Verfahren irrelevant und die Menge der abgeschiedenen Salze rein nur von der Menge der zugesetzten Oxyde abhängt.

Die nöthigen Oxyde stellt man sich dabei zweckmässig aus dem Waschkohol oder durch Glühen der basischen Salze der betreffenden Fraction dar. Beides ist in ganz kurzer Zeit durchführbar und gibt wieder Material für eine Reihe von Fällungen.

Nach der Durchführung dieser Operationen hat man eine Reihe von Producten erhalten, deren Erstes schön rosafarben, deren Letztes rein weiss ist und die kleine Menge Mutterlauge,

die nun das Absorptionsspectrum des Didyms deutlich zeigt. Die Ytterterden sind nach dieser zweiten Reihe als frei von allen Körpern der Cergruppe zu betrachten.

Die Fällungen von ungefähr gleichem Gehalte werden vereinigt; man erhält so etwa sechs erbinerdereiche Fractionen.

Zur weiteren Trennung wendet man am bequemsten und besten das Oxydverfahren wieder an.

Nach vier bis fünf Reihen ist ein Unterschied im Erbinhalte der ersten Fractionen mit dem Auge nicht mehr zu erkennen, sie sind gleich gefärbt. Das Äquivalent des ersten Präparates ist auf 129.5 gestiegen. Das Funkenspectrum zeigt keine Spur der Yttriumlinien mehr, dafür treten umso glänzender die Linien des Ytterbiums und Scandiums auf. Das Absorptionsspectrum ist das des gewöhnlichen Erbinspectrums. Nach weiteren vier bis fünf Reihen ist die Hauptmenge des Erbin in eben diesem Zustande der Reinheit.

Bei dieser Trennung leitete mich ausschliesslich die Intensität des Absorptionsspectrums des Erbium und das Emissionspectrum der betreffenden Substanz, indem anfangs fortwährend ein glänzendes Yttriumspectrum etc. neben mehreren Linien des Ytterbiums sichtbar waren. Letztere wurden, je weiter die Trennung fortschritt, immer intensiver.

Das für Farbenunterschiede so empfindliche Auge kann bis zu jener Grenze, wo eine Zunahme der Rosafärbung mit der weiteren Scheidung nicht mehr eintritt, den Gehalt einer Fraction mit ziemlicher Genauigkeit angeben, wenn Vergleichssubstanzen von bekanntem Gehalte zur Anwendung kommen.

Tritt dieser Punkt ein, dann unterscheidet sich das durch Glühen des basisch-salpetersauren Salzes hergestellte Oxyd am deutlichsten.

Das ursprünglich gelb mit einem schwachen rosafarbenen Ton aussehende Oxyd beginnt nämlich von hier an immer schöner rosafarben zu werden.

Als Grundlage für die Beurtheilung der verschiedenen Fractionen hat man bisher ausschliesslich die Äquivalent-Gewichtsbestimmung benutzt. Bahr und Bunsen¹ haben diese Methode

¹ Ann. Chem. Pharm. 135. pag. 5 u. f.

zuerst angewendet und dieselbe ist unter der Voraussetzung, dass nur zwei Körper in der zu untersuchenden Substanz vorhanden sind, wohl begründet. Mit der Zunahme der Anzahl der Körper wird sie natürlich immer problematischer. Einerseits aus diesem Grunde, andererseits weil der Trennungsprocess in Bezug auf die in grösserer Menge vorkommenden Elemente mit den von Bahr und Bunsen eingeschlagenen, was das Endresultat betrifft, identisch ist, unterliess ich diese Bestimmungen. Erst mit der weiter schreitenden Trennung gewinnt diese Untersuchungsmethode an Werth. Und selbst da müssen bedeutende Differenzen der Eigenschaften auftreten, um den richtigen Weg finden zu lassen. Die farblosen Ytterbiumverbindungen unterscheiden sich von den gefärbten, ein glänzendes Absorptionsspectrum gebenden Erbiumverbindungen deutlich genug; ferner unterscheidet sich das Äquivalent des Scandiums ausserordentlich von dem des Ytterbiums. Wären diese Umstände nicht so günstig, so ist es sehr die Frage, ob man auf diesem Wege je zur Entdeckung dieser Körper gekommen wäre. Wäre den betreffenden Forschern die Spectralanalyse zur Seite gewesen, so wären sie viel früher zur Überzeugung gekommen, dass sie ein neues Element unter Händen haben. Lässt doch das immer glänzender auftretende Ytterbiumspectrum neben dem an Intensität viel weniger abnehmenden Erbiumabsorptionsspectrum der betreffenden Fractionen einen sicheren Schluss ziehen. Das Yttriumspectrum wird dabei vom Ytterbiumspectrum förmlich verdrängt.

Diese Gründe haben mich geleitet, als Basis der Untersuchungen die Spectralanalyse zu wählen; freilich mit einer Modification in der Art der Funkenerzeugung, die sie zur Erkennung kleiner Mengen fremder Substanz neben selbst glänzende Spectren gebenden Substanzen brauchbar macht. Grosse Nebenapparate oder starke Ströme u. s. f. fanden dabei keine Anwendung.

Ich erwähnte Eingangs schon, dass ich die vollständige Darlegung dieses Verfahrens einer späteren Publication vorbehalte und beschränke mich jetzt darauf, ein paar Versuche kurz anzuführen, die die ausserordentliche Empfindlichkeit dieser Methode darthun. Von einer Lösung, die $\frac{1}{10}$ Procent Yttriumchlorid

enthielt, wurde ein Tropfen zur Untersuchung verwendet. Es zeigte sich ein sehr deutliches Yttriumspectrum. Da aber das Emissions-spectrum im Körper durch die Gegenwart anderer, ebenfalls schöne Spectralerscheinungen gebenden Substanzen sehr beeinflusst werden kann, so muss ich auch die diesbezüglichen Versuche angeben. Eine Erde, deren Äquivalent bei 130 lag und die im Funken als Chlorid verflüchtigt das glänzende Spectrum des Ytterbiums gab (die Yttriumlinien waren längst verschwunden), wurde mit 1 Procent Yttererde gemengt. Das Resultat war, wie ich voraussah, dass die Yttriumlinien wieder sehr deutlich hervortraten.

Damit ist der Beweis erbracht, dass durch diese Art von Untersuchung kleinere Mengen fremder Substanz nachgewiesen werden können, als durch die gewichts-analytische Bestimmung, ferner, dass das betreffende Präparat von ausserordentlicher Reinheit war.

Ich habe nur noch jene Trennungsmethode zu besprechen, die sich auf die verschiedene Tendenz der Nitate, in überbasische Salze überzugehen, gründet.

Sie wird angewendet, um die kleinen Mengen von Erbin, die bei der Scheidung durch die basisch-salpetersauren Salze hartnäckig dem Yttrium anhaften, wegzubringen, und dann, wenn es sich darum handelt, das Erbium von seinen Begleitern, Ytterbium und Scandium, zu befreien.

In Bezug auf die erstere Trennung ist besondere Vorsicht bei der Durchführung nicht nöthig, in Bezug auf die letztere von grosser Wichtigkeit.

Die wenig Erbin enthaltende Yttriumlösung wird wie früher mit den Oxyden versetzt. Ist die Reaction beendet, so versetzt man die nun klare Lösung unter beständigem Aufkochen mit Wasser, so lange bis ein reichlicher weisser Niederschlag ausfällt. Man filtrirt ab, wäscht mit Wasser aus und engt die erhaltene Mutterlauge ein.

Eine nochmalige Wiederholung der ganzen Operation ist meist nöthig; dann aber lässt die Lösung keine Spur eines Absorptionsspectrum des Erbiums mehr erkennen.

Auf ähnliche Weise gelingt die Trennung des Yttriums vom Terbium; übrigens ist gerade dieses kein besonders vortheilhaftes Verfahren.

Interessanter gestaltet sich die Trennung des Ytterbiums und Scandiums vom Erbium. Die ziemlich concentrirte Lösung wird in bekannter Weise basisch gemacht und nun vorsichtig mit Wasser verdünnt; man setzt das Erhitzen fort, am besten nicht ganz bis zum Kochpunkte, gibt, wenn nach kurzer Zeit keine Veränderung eingetreten, wieder etwas Wasser zu, so lange, bis die Flüssigkeit sich zu trüben beginnt; die Flamme wird jetzt noch kleiner gemacht. Nach einiger Zeit ist die Ausscheidung zu Ende. Das Resultat dieses Verfahrens ist, dass fast die ganze Menge des Erbin in der Mutterlauge zurückgeblieben und der Niederschlag aus den leichter zersetzbaren Körpern besteht. Nach mehrmaliger Wiederholung ist die Ytterbinlösung farblos. Man bildet auch hier wieder eine Reihe und verwendet als jeweiligen Zusatz die geglühten Niederschläge der früheren Operation vom gleichen Gehalte als die zu fällende Lösung.

Namentlich die letzterwähnte Methode gab auffallende Resultate; diese sowie eine ganze Reihe von Beobachtungen, die während dieser Untersuchungen insbesondere in Bezug auf Emissions- und Absorptionsspectren gemacht wurden, führe ich nicht schon jetzt an, da ich vorläufig nur mehr oder weniger berechnigte Conjecturen daran knüpfen könnte; doch hoffe ich, dass die weiteren Arbeiten Licht über diese Erscheinungen verbreiten werden und ich dann die Darlegung in Form eines abgerundeten Ganzen geben können werde.

Zum Schlusse sei mir noch gestattet, dem Herrn Prof. Dr. A. Lieben und seinem Assistenten Herrn Dr. Zeisel für die lebenswürdige Unterstützung, die sie mir während der Ausführung meiner Arbeit angedeihen liessen, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Über Oxycampher aus β -Bibromcampher.

Von J. Kachler und F. V. Spletzer.

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. A. Lieben.)

Die Darstellung dieser Verbindung haben wir bereits gelegentlich der Beschreibung der Eigenschaften des β -Bibromcamphers mitgeteilt.¹

Wenn man nämlich letztere Verbindung in alkoholischer Lösung mit Natriumamalgam behandelt, so entsteht Oxycampher $C_{10}H_{16}O_2$ und geringe Mengen von Campher.

Der Oxycampher ist eine schwach gelblich gefärbte, öartige Flüssigkeit von terpeninölartigem Geruche und brennendem Geschmacke, die in Alkohol und Äther leicht, in Wasser nicht löslich ist; er besitzt bei 20° C. dieselbe Dichte wie Wasser von gleicher Temperatur und zeigt bei dem auf 0° reducirten Barometerstande von 753·5 Mm. den Siedepunkt von 265° C. (Correctur für den Quecksilberfaden inbegriffen).

In Alkalien löst sich der Oxycampher unter Bildung der entsprechenden Salze zu einer klaren Flüssigkeit. Wir haben das Natrium und Baryumsalz dargestellt und untersucht.

Natriumsalz $C_{10}H_{15}NaO_2$. Wenn man die Lösung von Oxycampher in wässrigem Ätznatron eindampft, so scheidet sich die Natriumverbindung in Form einer weissen, in Wasser leicht löslichen, krystallinischen Masse aus. In reinem Zustande kann man jedoch das Salz leicht erhalten, wenn man den Oxycampher in trockenem Äther löst, Natrium zufügt und einige Zeit am

¹ Sitzb. d. k. Akad. 85 Bd., II. Abth., 596.
Monatshefte, 1882, 205.

Rückflusskühler erhitzt; dabei scheidet sich Oxycampher-Natrium in Form von blendend weissen Flocken ab, die auf einem Leinwandfilter gesammelt mit Äther gewaschen und von letzterem schliesslich durch längeres Stehen über Schwefelsäure, im Vacuum befreit wurden. Man erhält so eine weisse, spröde Krystallmasse, die an der Luft allmählig feucht wird und sich in Wasser mit grosser Leichtigkeit löst.

0·5140 Grm. der im Vacuum getrockneten Substanz gaben 0·1898 Grm. Na_2SO_4 .

Gefunden	Berechnet für $\text{C}_{10}\text{H}_{15}\text{NaO}_2$
Na — 11·96	12·10 ⁰ / ₀

Baryumsalz $(\text{C}_{10}\text{H}_{15}\text{O}_2)_2\text{Bä} + 4\text{H}_2\text{O}$. Wird Oxycampher mit einem Überschusse von Atzbaryt gekocht, dann Kohlensäure eingeleitet, der abgeschiedene kohlensaure Baryt abfiltrirt und das klare Filtrat im Vacuum abgedunstet, so bleibt eine weisse, harte Krystallmasse zurück, die sich in kaltem Wasser schwer, jedoch in heissem Wasser und Alkohol leicht löst. Aus einer verdünnten alkoholischen Lösung krystallisirt die Baryumverbindung in kleinen, sternförmig gruppirten Krystallen.

0·3024 Grm. gaben über Schwefelsäure im Vacuum 0·0399 Grm H_2O ab und lieferten beim Glühen 0·1088 Grm. BaCO_3 .

Gefunden	Berechnet für $(\text{C}_{10}\text{H}_{15}\text{O}_2)_2\text{Bä} + 4\text{H}_2\text{O}$.
Ba — 25·02	25·23 ⁰ / ₀
H_2O — 13·19	13·25 „ .

Es wurden noch weiterhin Versuche unternommen, das Vorhandensein einer Hydroxylgruppe im Oxycampher zu beweisen; es verlief jedoch keiner derselben so glatt, um die entstehenden Producte isoliren zu können.

Acetylchlorid wirkt auf Oxycampher in der Kälte nicht merklich ein; wird jedoch mit einem Überschusse des ersteren am Rückflusskühler erhitzt, so spaltet sich Salzsäure ab und nach dem Abdestilliren des überschüssigen Acetylchlorides bilden sich im Rückstande farblose Krystalle, die jedoch bei dem Versuche, sie von der Mutterlauge zu trennen, rasch zerflossen.

Rauchende Bromwasserstoffsäure mit Oxycampher im geschlossenen Rohr durch 20 Stunden auf 100° C. erhitzt, gibt ein braunes, zähes Öl.

Phosphorpentachlorid wirkt lebhaft unter Entwicklung von Salzsäure ein; lässt man unter Abkühlung mit einem Überschusse an Phosphorchlorid durch mehrere Tage stehen und giesst dann die Flüssigkeit in Wasser, so scheidet sich eine gelbbraun gefärbte Schichte ab, die selbst nach längerer Zeit nicht fest wird. Wird letztere in ätherischer Lösung mit Wasser gewaschen und mit Chlorcalcium getrocknet, so bleibt nach dem Abdunsten des Äthers eine gelbliche Substanz zurück, die ebenfalls flüssig bleibt. Eine damit ausgeführte Chlorbestimmung ergab 13.15% Cl; für $C_{10}H_{15}ClO$ berechnet sich 18.93% Cl.

Offenbar werden aus einem Theile des Oxycamphers durch die bei dieser Reaction freiwerdende Salzsäure Condensationsproducte gebildet, von welchen das entstandene Chlorid nicht leicht getrennt werden kann.

Wenn auch diese Versuche kein positives Resultat lieferten, so halten wir uns doch für berechtigt, aus deren Verlaufe und im Zusammenhange mit der Existenz der oben beschriebenen Natriumverbindung, insbesondere der leichten Bildungsweise des Baryumsalzes, den Schluss zu ziehen, dass im Oxycampher eine Hydroxylgruppe enthalten ist, deren Wasserstoff durch Metalle leicht ersetzbar ist. Die Zusammensetzung des Oxycamphers muss demnach durch die Formel $C_{10}H_{15}(OH)O$ ausgedrückt werden.

Einwirkung von Oxydationsmitteln auf Oxycampher. Wir haben bereits darüber Mittheilung gemacht,¹ dass der Oxycampher beim Erhitzen mit Chromsäuremischung nahezu vollständig zu Kohlensäure und Essigsäure oxydirt wird, dagegen durch Einwirkung von Salpetersäure ein Nitrosstitutionsproduct entsteht.

Einwirkung von Chromsäure. Wird Oxycampher mit saurem chromsauren Kali und verdünnter Schwefelsäure in einem zugeschmolzenen Rohre durch 8 Stunden auf 96° C. erhitzt, so ist beim Öffnen des Rohres ein bedeutender Druck bemerkbar, der von entstandener Kohlensäure herrührt. Den Inhalt bildet

¹ Ber. d. d. chem. Ges. XV, 2336.

eine dunkelgrüne Flüssigkeit neben einer festen Substanz, welche abfiltrirt und nach dem Waschen mit Wasser getrocknet wurde. Sie bestand nur aus Chromoxyden, da beim Auskochen mit Äther nichts gelöst wurde. Das wässrige Filtrat wurde destillirt, wobei eine sauer reagirende Flüssigkeit übergieng.

Wird der Destillationsrückstand mit Äther ausgeschüttelt, so bilden sich beim Verdunsten der ätherischen Lösung farblose Krystalle, die von einer nicht krystallinischen, dicken Masse durchzogen sind. Das Ganze in Wasser gelöst, mit Ammoniak versetzt und abgedampft, gab mit Ätzbaryt gekocht keine Fällung; mit essigsauerm Kupfer jedoch entstand in der Kälte ein geringer, beim Kochen ein bedeutender blaugrüner Niederschlag von hydrooxycamphoronsauerm Kupfer.

Das sauer reagirende Destillat mit Silberoxyd gekocht und abgedampft ergab farblose Krystalle von essigsauerm Silber.

0.2200 Grm. lie erten 0.1417 Grm. Ag.

Gefunden	Berechnet für $C_2H_3AgO_2$
Ag — 64.41	64.66 ⁰ / ₀ .

Unter den angeführten Bedingungen ist demnach aus dem Oxycampher durch Einwirkung der Chromsäure Kohlensäure, Essigsäure und Hydrooxycamphoronsäure gebildet worden.

Wenn man aber Oxycampher mit chromsauerm Kali und verdünnter Schwefelsäure am Rückflusskühler durch mehrere Tage im Kochen erhält, so wird die Chromsäure ziemlich rasch reducirt, wobei Kohlensäure entweicht; allein im Kühlrohre sind noch Öltröpfchen zu bemerken, die nach dem Geruche zu schliessen von einer höheren Fettsäure herrühren. Wird das Product destillirt, so erhält man ein klares, sauer reagirendes Destillat, das mit Silberoxyd gekocht und eingedampft wurde; beim fractionirten Krystallisiren wurde nur essigsaueres Silber erhalten.

I. 0.1839 Grm. der ersten Fraction gaben 0.1190 Grm. Ag;

II. 0.1388 „ „ zweiten „ „ 0.0883 „ „

Gefunden		Berechnet für $C_2H_3AgO_2$
I.	II.	
Ag — 64.71	63.62	64.66 ⁰ / ₀ .

Die etwa bei der Reaction entstandene höhere Fettsäure konnte somit nicht nachgewiesen werden und ist wohl schliesslich weiter oxydirt worden.

Der Destillationsrückstand enthält keine in Äther lösliche Substanz.

Aus diesem Versuche ergibt sich, dass bei andauernder Einwirkung von Chromsäure, der Oxycampher vollständig zu Kohlensäure und Essigsäure oxydirt wird.

Übermangansaurer Kali, einer Lösung von Oxycampher in wässrigen Ätzalkalien zugefügt, verändert bereits bei gewöhnlicher Temperatur rasch seine Farbe.

Oxycampher und Salpetersäure. Den über diese Reaction gemachten kurzen Angaben haben wir noch Folgendes beizufügen:

Wenn man Oxycampher mit etwa der vierfachen Menge rauchender Salpetersäure zusammenbringt, so tritt heftige Reaction ein, wobei viel rothe Dämpfe und Kohlensäure entweichen. Lässt man nach längerem Kochen abkühlen und verdünnt mit Wasser, so scheidet sich eine unlösliche bald fest werdende Masse aus, welche nach dem Umkrystallisiren aus Alkohol, den in der früher erwähnten Abhandlung schon kurz beschriebenen Nitrooxycampher $C_{10}H_{15}(NO_2)O_2$ liefert. Die von der festen Substanz abfiltrirte saure Flüssigkeit wurde mit Wasser mehrmals abgedampft und gab zuletzt eine unbedeutende Menge eines sauren Syrupes, in welchem sich nach einziger Zeit farblose Krystalle bilden. Dieselben durch Umkrystallisiren aus Wasser gereinigt, schmelzen bei $100-102^\circ C.$ und sind Oxalsäure. Durch Fällen einer wässrigen ammoniakalischen Lösung mit Chlorcalcium und Ansäuern mit Essigsäure, wurde ein weisses unlösliches Calciumsalz erhalten, das zur Analyse bei 200° getrocknet wurde.

0.1208 Grm. gaben 0.0525 Grm. Ca O.

Gefunden	Berechnet
<u>Ca — 31.04</u>	<u>für C_2O_4Ca.</u>
	31.25 $\frac{0}{0}$.

Unter diesen Umständen wird ein grosser Theil des angewandten Oxycamphers oxydirt. Zur Darstellung grösserer Mengen von Nitrooxycampher haben wir folgendes Verfahren angewandt: 20 Grm. Oxycampher wurden in zwei Partien mit je 20 Grm. concentrirter Salpetersäure und 10 Grm. Wasser zusammengebracht, wobei sich derselbe nach einiger Zeit dunkel färbt. Wird dann auf dem Wasserbade gelinde erwärmt, so erfolgt eine heftige Einwirkung, die durch Abkühlung zu mässigen ist; erst dann wird noch zur vollständigen Beendigung der Reaction während einer halben Stunde auf dem Wasserbade erwärmt. Nach mehrstündigem Stehen wird das aus zwei Schichten bestehende, manchmal auch krystallisirende Reactionsproduct mit Wasser versetzt, wobei sich eine gelbe krystallinische Substanz ausscheidet, die nach einiger Zeit erhärtet. Die davon abfiltrirte wässrige Lösung wurde, um die Salpetersäure möglichst zu entfernen, wiederholt mit Wasser abgedampft; es bleibt schliesslich ein krystallinischer Rückstand, der sich in Wasser sehr leicht löst. Die Lösung gibt mit Ätzbaryt bei gewöhnlicher Temperatur keine Fällung, enthält somit keine Oxalsäure; selbst beim Kochen mit überschüssigem Ätzbaryt entsteht nur ein sehr geringer Niederschlag. Die davon abfiltrirte Lösung mit Kohlensäure behandelt und vom abgeschiedenen kohlen-sauren Baryt befreit, gibt beim Kochen mit essigsauerm Kupfer einen reichlichen blaugrünen Niederschlag, der filtrirt und mit heissem Wasser gewaschen wurde. Das Filtrat gab, nachdem es mit Salzsäure angesäuert und Äther geschüttelt wurde, an diesen nur geringe Mengen einer braunen syrupartigen Substanz ab.

Nachdem der mit essigsauerm Kupfer erhaltene Niederschlag unter heissem Wasser durch Schwefelwasserstoff zerlegt war, wurde die vom Schwefelkupfer abfiltrirte Lösung mit Ammoniak versetzt und abgedampft, hierauf wieder mit essigsauerm Kupfer gefällt und der entstandene Niederschlag ebenfalls mittelst Schwefelwasserstoff zerlegt. Die wässrige Lösung sammt dem Schwefelkupfer stark eingedampft und dann filtrirt, gab nach dem Abdunsten circa 4 Grm. schöner, farbloser Krystalle, die bei 165—166° C. schmelzen und sich als Hydrooxycamphoronsäure $C_9H_{14}O_6$ erwiesen.

0.2124 Grm. gaben 0.3828 Grm. CO_2 und 0.1180 Grm. H_2O ;

Gefunden	Berechnet für $\text{C}_9\text{H}_{14}\text{O}_6$
C — 49.15	49.54 $\frac{0}{10}$
H — 6.17	6.42 $\frac{0}{10}$

Ein Theil dieser Substanz wurde in Wasser gelöst, der dritte Theil der Lösung mit Ammoniak versetzt und von einem Überschusse desselben durch Abdampfen auf dem Wasserbade befreit, darauf mit der restlichen Menge der ursprünglichen Lösung vereinigt, etwas concentrirt und dann unter eine Glocke über Schwefelsäure gestellt.

In der Lösung bildeten sich nach längerem Stehen weisse strahlenförmig gruppirte Nadeln, die nochmals aus Wasser umkrystallisirt, den für das saure Ammonsalz der Hydrooxycamphorsäure charakteristischen Schmelzpunkt von 170°C . zeigten.

Die aus dem Reactionsproducte des Oxycamphers mit Salpetersäure beim Versetzen mit Wasser abgeschiedene krystallinische Masse aus Alkohol umkrystallisirt lieferte 5 Grm. farbloser, theilweise schön ausgebildeter Krystalle von Nitrooxycampher und circa. 1 Grm. weniger reiner Substanz; die letzte Fraction bestand aus einem gefärbten nicht krystallinischen Producte.

Der Nitrooxycampher bildet, wenn er aus wässrigem Alkohol krystallisirt, weisse, wollige Nadeln; beim langsamen Verdunsten einer alkoholischen Lösung entstehen jedoch farblose Säulen, die bei 170°C . schmelzen und, wie es scheint, auch destillirbar sind. Sie lösen sich nicht in Wasser, dagegen leicht in kochendem Alkohol und in Äther. Auch von Alkalien werden sie gelöst, jedoch unter Abspaltung von salpetriger Säure, wesshalb auch Salze nicht dargestellt werden konnten.

Über die krystallographischen Verhältnisse stellte uns Herr Oberbergrath v. Zepharovich folgende Angaben zur Verfügung:

„Die anscheinend rhombischen Nadeln erweisen sich stets als Zwillinge des monosymmetrischen Systems, dessen Elemente einer rhombischen Form nahe stehen.

$$a:b:c=0.7617:1:0.4310$$

$$(ac)=\beta=89^{\circ} 18\frac{1}{2}'.$$

Beobachtete Formen :

$$\infty P2. P\infty > \infty P\infty. \infty P. \infty P\infty. 2P\infty. - P\infty.$$

Zwillingsenebene $\infty P\infty$.“

Die analytischen Daten sind folgende:

- I. 0.2776 Grm. gaben 0.5745 Grm. CO₂ und 0.1750 Grm. H₂O;
 II. 0.2573 „ „ 0.5354 „ „ „ 0.1682 „ „
 III. 0.3903 „ „ 25 C. C. Stickstoff bei 22° C. und
 754.2 Mm. Druck
 IV. 0.4375 Grm. gaben 27.5 C. C. Stickstoff bei 23° C. u. 753.3 Mm.
 Druck

	Gefunden				Berechnet für
	I	II	III	IV	C ₁₀ H ₁₅ (NO ₂)O ₂
C —	56.44	56.75	—	—	56.34 %
H —	7.00	7.27	—	—	7.04 „
N —	—	—	7.19	7.01	6.57 „

Um einen Nachweis zu geben, dass die beschriebene Substanz eine Nitroverbindung ist, haben wir dieselbe in eine Amidoverbindung übergeführt. Zu diesem Behufe wurde Nitrooxycampher in Eisessig gelöst und mit Zinn am Rückflusskühler längere Zeit gekocht, darauf mit Wasser verdünnt, Schwefelwasserstoff eingeleitet und das entstandene Schwefelzinn abfiltrirt. Die wässrige Lösung gab beim Eindampfen einen gummiartigen Rückstand, der nochmals in Wasser gelöst, mit Salzsäure versetzt und auf dem Wasserbade abgedunstet wurde. Dabei blieb eine Salzmasse zurück, die aus Wasser umkrystallisirt und mit Thierkohle entfärbt, farblose, im Wasser leicht lösliche Blätter lieferte, die bei 250° C. unter Zersetzung schmelzen. Dieselben erwiesen sich als salzsaurer Amidooxycampher.

0.2103 Grm. gaben beim Fällern mit salpetersaurem Silber 0.1391 Grm. Ag Cl.

Gefunden	Berechnet für
	C ₁₀ H ₁₅ (NH ₂)O ₂ . HCl.
Cl — 16.43	16.17 %

Diese salzsaure Verbindung gibt mit Platinechlorid gelbe, deutlich ausgebildete Krystalle oder Blättchen eines Platindoppelsalzes, das in Wasser schwer löslich ist.

I. 0.0839 Grm. Doppelsalz gaben 0.0209 Grm. Pt;

II. 0.1256 " " " 0.0316 " "

Gefunden

I. II.

Pt — 24.91 25.15

Berechnet für:

$2[C_{10}H_{15}(NH_2)O_2 \cdot HCl] \cdot PtCl_4^1$

25.06 %.

Während der Oxycampher beim andauernden Erhitzen mit concentrirter Salpetersäure neben seinem Nitrosubstitutionsproducte ausser Kohlensäure Oxalsäure liefert, entsteht bei kürzerer Einwirkungsdauer von weniger concentrirter Säure die Nitroverbindung und Hydrooxycamphoronsäure neben Producten einer vollständigen Oxydation.

¹ Pt = 194.3.

XVIII. SITZUNG VOM 12. JULI 1883.

Herr Marquis Anatole de Caligny in Versailles übermittle ein Exemplar des von ihm herausgegebenen Werkes: „Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes liquides oscillantes.“ (Paris. 1883. 2 Bände.)

Das c. M. Herr Oberbergrath D. Stur in Wien übersendet die Abhandlung: „Zur Morphologie und Systematik der Culm- und Carbon-Farne,“ deren Inhalt schon in der Sitzung vom 10. Mai d. J. mitgetheilt wurde.

Das c. M. Herr Prof. E. Ludwig übersendet eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit unter dem Titel: „Elektrolytische Studien“, vorläufige Mittheilung von Herrn Dr. Hans Jahn.

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz an der Universität zu Krakau übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Die Lehre vom Hirndruck und die Pathologie der Hirncompression. II. Theil: Die Pathologie der Hirncompression“.

Von dem Secretär wird eine eingesendete Abhandlung des Herrn Reinhard Mildner, Professor an der Landes-Unterrichtsschule in Römerstadt: „Beitrag zur Auswerthung unendlicher Producte und Reihen“ vorgelegt.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Wilhelm du Nord, k. k. Hauptmann des Ruhestandes in Wien, vor, dessen Inhalt angeblich eine naturwissenschaftliche Entdeckung betrifft.

Das w. M. Herr Regierungsrath Professor v. Oppolzer zeigt der kais. Akademie der Wissenschaften den Abschluss

einer von ihm angestellten Beobachtungsreihe zur absoluten Bestimmung der Schwerkraft in Wien an.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten von Herrn Dr. Wilhelm Fossek:

1. „Über ein dem Hydrobenzoin analoges Derivat des Isobutyraldehyds“.
2. „Darstellung acetonfreien Isobutyraldehyds“.

Herr Dr. Hans Molisch, Assistent am pflanzenphysiologischen Institute der Wiener-Universität, überreicht eine im genannten Institute ausgeführte Arbeit: „Untersuchungen über den Hydrotropismus“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

- Accademia, R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XVIII, Disp. 5^a (Aprile 1883). Torino, 8^o.
- Apotheker-Verein, allgem. österr. nebst Anzeigen-Blatt. XXI. Jahrgang. Nr. 18 u. 19. Wien, 1883; 8^o.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVL No. 26. Paris, 1883; 4^o.
- Gesellschaft, deutsche für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mittheilungen. 28. Heft. Februar 1883. Berlin Yokohama, 1883; 8^o.
- naturforschende in Bern: Mittheilungen aus dem Jahre 1882. I. Heft. Nr. 1030—1039. Bern, 1882; 8^o.
- Schweizerische naturforschende in Linthal: Verhandlungen. 65. Jahresversammlung. Jahresbericht 1881/82. Glarus 1882; 8^o.
- naturforschende in Emden: LXVII. Jahresbericht, 1881/82 Emden, 1883; 8^o.
- österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XVIII. Band. Juli-Heft 1883. Wien; 8^o.
- physikalisch-ökonomische zu Königsberg. Schriften. XXIII. Jahrgang, 1882. I u. II. Abtheilung. Königsberg, 1882 bis 1883; 4^o.

- Gesellschaft, physikalisch-ökonomische zu Königsberg:** Die Ameisen des baltischen Bernsteins von Dr. Gustav L. Mayr. Königsberg, 1882; 4°. — Miocene baltische Flora von Dr. Oswald Heer. Königsberg, 1869; 4°. — Die bis jetzt in preuss. Geschieben gefundenen Trilobiten von E. Th. G. Steinhardt. Königsberg, 1874; 4°. — Catalog der Preussischen Käfer von Professor Dr. Lentz. Königsberg, 1879; 4°. Der Bernsteinschmuck der Steinzeit von Dr. Rich. Klebs. Königsberg, 1882; 4°.
- Jena, Universität:** Akademische Schriften pro 1882. 54 Stücke; 4°.
- Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann.** XXIX. Band, 1883. VII. Gotha; 4°.
- Moniteur scientifique du Docteur Quesneville:** Journal mensuel. 27^e année, 3^e série, tome XIII, 499^e livraison. — Juillet 1883. Paris; 8°.
- Museo publico de Buenos Aires:** Anales. Entrega trecena, primera del Tomo III. Buenos Aires, Halle, Paris, 1883; Folio.
- Nature.** Vol. XXVIII, Nr. 714, London, 1883; 8°.
- Observatory, The:** A monthly review of Astronomy. Nr. 75. July 2, 1883. London; 8°.
- Società Italiana di Antropologia, Etnologia e Psicologia comparata:** Archivio per l'Antropologia e la Etnologia. XIII. Volume, fascicolo 1°. Firenze, 1883; 8°.
- Société des Ingénieurs civils:** Mémoires et Compte rendu des travaux. 36^e année, 4^e série, 3^e cahier. Paris, 1883; 8°.
- helvétique des sciences naturelles: Compte rendu des travaux. Genève, Lausanne. Paris, 1882; 8°.
- philomatique de Paris: Bulletin. 7^e série. Tome VII. Nr. 2. 1882—83. Paris, 1883; 8°.
- Society, the royal Dublin:** The scientific Transactions. Vol. II. (Series II.) Dublin, 1882; gr. 4°. Vol. I. (Ser II.) XV—XIX. Dublin, 1882; 4°.
- — The scientific Proceedings. (N. S.) Vol. III. Part. V. Dublin, 1882; 8°.
- the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. V. Nr. 6. June 1883. London; 8°.

Society the seismological of Japan: Transactions. Vol. I. — Parts I u. II. April—June, 1880. Tokio, 1880; 8°. — Vol. II. — July to December, 1880. Tokio, 1880; 8°. — Vol. III. January to December 1881. — Tokio, 1881; 8°. — Vol. IV. January to June 1882. Tokio, 1882; 8°. Vol. V. 1882. May—December. Tokio, 1883; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang. Nr. 25 bis 27. Wien, 1883; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. IV. Jahrgang. Nr. 9. Wien, 1883; 4°.

Zahnärztlicher Almanach. I.—V. Jahrgang. Frankfurt a/M., 1877—1881; 12°.

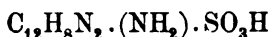
Über Amidoazobenzolparasulfosäure.

Von Prof. J. V. Janovsky.

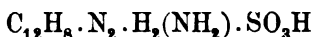
(Mit 5 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1883.)

In der letzten Arbeit über die Substitutionsproducte der Azobenzolparasulfosäure beschrieb ich ein Derivat, welches durch Reduction der Paranitroazobenzolparasulfosäure mit Zinnchlorür erhalten wurde und dessen Analyse auf die Formel



beziehungsweise¹



deutete.

Ich behielt mir vor, die Reactionen dieser Säure ausführlich zu studieren, da ja die Analyse allein in dem Falle gar keinen Aufschluss geben konnte, wie aus folgenden Zahlen erhellt. Die Elementaranalyse beider Substanzen ergibt:

für Amidoazobenzol- sulfosäure	für Amidohydroazo- benzolsulfosäure
C = 51·94 ²	C = 51·58
H = 3·98	H = 3·94
N = 15·15	N = 15·08
S = 11·57	S = 11·48

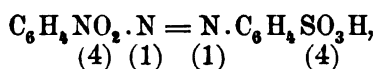
Die Differenzen fallen mit Ausnahme der des Kohlenstoffs innerhalb der Fehlerquellen der Methoden selbst. Eingehende Untersuchungen ergaben, dass die von mir in der oben citirten Abhandlung durch Reduction erhaltene Säure eine Hydroazoverbindung ist, und zwar einer Säure, welche sowohl bei Behandlung

¹ Siehe diese Berichte p. 714. 1883.

² Für C = 11·97, N = 14·01, S = 31·98.

der Paranitrosäure mit Zinnchlorür, als auch mit Amonsulfhydrat erhalten wird. Behandelt man die oben erwähnte Hydrazosäure mit Kaliumnitrit, so oxydirt sich dieselbe zuerst zu einer im Nachfolgenden genau beschriebenen Amidoazosäure, welche letztere erst dann sich diazotiren lässt. Ob durch Zinnchlorür Azo- oder Hydroazoverbindungen entstehen, hängt wesentlich von der Zeitdauer ab; es scheint jedoch, dass vorwiegend leicht in der sauren Zinnchlorürlösung Hydroazoverbindungen entstehen. Da es sich, wie bei meiner Arbeit, darum gehandelt hat, zu erforschen, ob die directen Substitutionsproducte der Azobenzolsulfosäure identisch wären mit der durch Diazotirung und nachherige Umlagerung erhaltenen, so musste ich zwei wohlcharakterisirte Substanzen wählen, deren Salze in Bezug auf Löslichkeit, Färbung etc. einen Aufschluss geben konnten.

Es ist mir nun gelungen, die Amidoazobenzolsulfosäure zu isoliren, und zwar sowohl durch reservirten Abbau der Nitroverbindung:



durch Zinnchlorür als durch Amonsulfhydrat; letztere Methode ist zur Bereitung der Amidosäure vorzuziehen, während die erste eine fast theoretische Ausbeute an Hydorazoamidosäure liefert.

Behandelt man die Paranitroazobenzolparasulfosäure in alkoholischer Lösung am Wasserbade mit der theoretisch berechneten Menge von Ammonhydrosulfid, so resultirt eine dunkle braunrothe Lösung, welche bei Zusatz von Salzsäure fast alle Amidosäure nebst Schwefel fallen lässt. Die Säure lässt sich am besten durch Kochen mit kohlen-saurem Baryum, umkrystallisiren des Barytsalzes und Zersetzen derselben mit Salzsäure rein darstellen. Das Rohproduct selbst kann nicht Umkrystallisirt werden, da es in Wasser sehr schwer löslich ist, sowohl in kaltem, als in heissem.

100 CC. Wasser lösen bei 22° C. 0·0196 Grm. Säure.

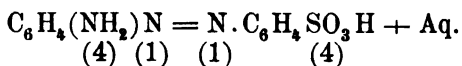
Mit Salzsäure gefällt bildet sie einen lachsfarbigen, krystallinischen Niederschlag, der in mikroskopischen Schuppen krystallisirt. Beim Trocknen wird die Säure ähnlich dem Benzidin, jedoch etwas heller.

Die Salze der Säure krystallisiren leicht und sehr schön. Die Analyse der Säure ergab:

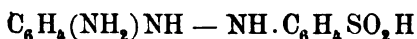
$$\begin{aligned} \text{in 100 Theilen S} &= 15.61 \text{ im Mittel und} \\ \text{N} &= 15.43\text{—}15.28. \end{aligned}$$

Die Wasserbestimmung ergab 6.404 Aq., was auf 1 Molekül Krystallwasser (berechnet = 6.102) deutet; da die Säure aus der Paranitrosäure entsteht, da sie ferner auch als Zwischenproduct bei der Bildung der Hydroazosäure auftritt, und bei völligem Abbau Paraphenyldiamin (Siedetemperatur 140° C.) und Sulfanilsäure (1.4) liefert, so muss diese Säure als das richtige Amidoderivat der Azobenzolparasulfosäure angesehen werden.

Die Formel der Säure ist demnach



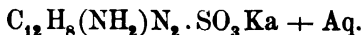
Die Formel der in der vorigen Arbeit beschriebenen Säure ist zu



zu berichtigen.

Die Lösungen der Amidosäure sind schwach gelb gefärbt, die der Salze aber intensiv gelb.

Das Kaliumsalz der Säure hat die Formel



Die Analyse ergab

$$\text{Ka} = 12.58 \text{ statt } 12.37 - \text{Wasser} = 5.70 \text{ statt } 5.31.$$

Das Salz krystallisirt in schönen goldglänzenden Platten von beistehender Form, rhombisch ($\bar{P}\infty$, $\infty\bar{P}\infty$, $\infty\bar{P}\infty$), ist in Wasser

Fig. 1.

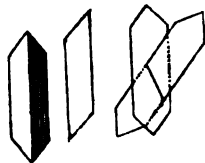
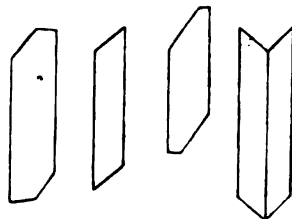


Fig. 2.



leicht löslich, besonders in warmem und sehr hygroskopisch.

Das Natriumsalz ist leicht löslich, undeutlich krystallisierbar.

Das Baryumsalz ist sehr charakteristisch, krystallisirt in centimeterlangen feuerfarbigen Nadeln, aus heissen Lösungen rasch gekühlt in kleineren schwachen Nadeln; die Krystalle der ersteren Form sind wie in Fig. 2, die kleineren unter der Loupe, wie in Fig. 3 und geben sehr schöne Polarisationserscheinungen. Die Löslichkeit in Wasser von 24° C. ist in 100 CC. = 0·064 Grm. Barytsalz; in heissem Wasser ist es beträchtlich leichter löslich; die Lösungen sind satt orange und erinnern in der Farbe an verdünnte Lösungen von Echtgelb;¹ mit Säuren wird die freie Säure selbst aus verdünnten Lösungen abgeschieden, wobei eine schwache Röthung erfolgt. Die Analyse ergab Ba = 19·77—19·79 statt 19·82 — Wasser = 13·92 statt 13·51 theoretisch. Das hygroskopische Wasser ist sehr schwer zu entfernen.

Die Formel = $(C_{12}H_9(NH_2)N_2 \cdot SO_3)^2Ba + 6Aq.$

Ebenso charakteristisch ist das Kalksalz, welches in heissem Wasser leicht löslich, in kaltem aber sehr schwer löslich

Fig. 3.

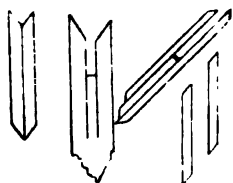


Fig. 4.



ist, es krystallisirt in gelben, perlmutterglänzenden Blättern beim Erkalten der Lösungen heraus, der Calciumgehalt = 6·62 statt 6·75, der Wassergehalt = 10·59—10·71 statt 10·84, an der Luft verwittert das Salz.

Die Formel derselben ist $(C_{12}H_9(NH_2)N_2 \cdot SO_3)^2Ca + 4Aq.$

Die Löslichkeit des Salzes ist in 100 CC. Wasser = 0·258 bei 20° C.

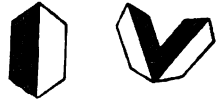
Aus verdünnten Lösungen krystallisirt das Kalksalz in grossen rhombischen Platten, die entweder ein Prisma mit einem Pinakoid oder auch in Formen von P mit $\infty \bar{P} \infty$ oder in sehr flachen Pyramiden auftreten.

Das Strontiumsalz krystallisirt in sehr schönen, langen, biegsamen Nadeln, die ähnlich denen des Barytsalzes sind, mit 2 Mol. Krystallwasser.

¹ Dem Natron-(oder Ca, Ba)Salz der Sulfosäuren des Amidoazobenzols.

Schliesslich wurde noch das Bleisalz gemacht. Dieses krystallisirt in kleinen Plättchen, die unter dem Mikroskope im polarisirten Licht eine auffallende Streifung zeigen und die zur Hälfte dunkel, zur anderen licht erscheinen. Die Löslichkeit des Bleisalzes bestimmte ich in 100 Theilen = 0·064 bei 20° und 0·066 bei 24° C., also nahezu dieselbe wie beim Barytsalze.

Fig. 5.



Die Analyse ergab Wasser: 0·2 Procent, es krystallisirt somit wasserfrei. Blei wurde gefunden 27·41 — berechnet 27·34.

Ich bestimmte die Löslichkeitsverhältnisse so vieler Salze deshalb, weil gerade diese Säure einen Aufschluss über die Natur der Substitutionsproducte der Azoverbindungen versprach. Wenn die Eigenschaften der Amidoazobenzolparasulfosäure identisch wären mit denen der Säure, welche durch Diazotirung der Sulfanilsäure und nachherige Condensation mit Anilin entsteht, so wäre hiedurch der directe Beweis geliefert, dass die aus Diazokörpern, wie auch aus Azokörpern dargestellten Producte identisch sind.

Es wurden nun behufs Vergleichung die Salze der Echtgelbsäure dargestellt, und zwar wurde dieselbe nicht durch Sulfirung des Amidoazobenzols, sondern aus Sulfanilsäure in salzsaurer Lösung durch vorsichtiges Einträufeln von Kaliumnitrat und nachherigem Zusatz von Anilin, wie auch aus Sulfanilsäure in essigsaurer Lösung, Diazotirung derselben und Condensation mit Anilinchlorhydrat dargestellt.

Die freie Säure färbt sich mit Salzsäure roth, bildet aber ebenso beim Eintrocknen Schuppen, die Benzidin ähnlich sind; sie krystallisirt aber mit $1\frac{1}{2}$ Aq, während weisse Säure mit 1 Aq sich abscheidet.

Die Löslichkeit der Säuren ist auch verschieden; von der Säure aus

	Azobenzolsulfos	Diazobenzolsulfos
lösen 100 Theile Wasser	0·0196 Grm.	0·0144 Grm. bei 22° C·

Die Verschiedenheit beider Säuren tritt aber noch auffallender in den Salzen hervor. Die letzteren, welche Herr H. Schwitter untersuchte, erweisen sich bezüglich der Löslichkeit verschieden. Auch die Krystallform und Krystallisationsfähigkeit ist verschieden. Bei der Untersuchung machten wir die Beob-

achtung, dass bei der Condensation der Diazobenzolparasulfosäure mit Anilin oder Salzen jeweilig zweierlei Säuren entstehen, die in der Löslichkeit verschieden und deren Salze auffallend ungleich löslich sind.

Wird nämlich die rein dargestellte Säure des Echtgelbs mit Baryum oder Calciumcarbonat behandelt, so scheidet sich beim Erkalten ein schwer lösliches Barytsalz und Kalksalz aus, während die Hauptmasse der Salze in einer dunkelroth gefärbten Mutterlauge zurückbleibt. Wir gedenken diese leicht löslichen Salze, welche den Hauptbestandtheil ausmachen, später eingehend zu untersuchen. Sie werden mit Säuren tiefroth, wie das Echtgelb (Natronsalt) des Handels und scheiden nur in concentrirter Lösung eine Säure ab, mit Salzsäure oder Essigsäure behandelt. Aber auch die schwerer löslichen Salze, die vorerst in Parallele mit den der isomeren Amidazobenzolsulfosäure gebracht werden mussten, sind in der Form und Löslichkeit sehr verschieden von den Salzen der direct substituirten Säure.

Das Baryumsalz der Säure aus:

Azobenzolparasulfosäure	Diazobenzolparasulfosäure
krystallisirt monoklin	rhombisch.
Die Löslichkeit ist 0·064	0·052 bei 20° C.

Formel



Das Calciumsalz

krystallisirt in kleinen Warzen oder Plättchen mikroskopisch.

krystallisirt in grossen Platten.

Die Löslichkeit ist 0·258 0·1672.

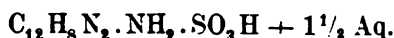
Formel



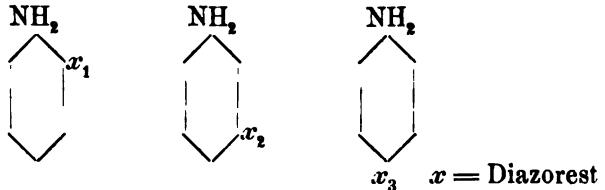
Gefunden wurde von Herrn Schwitzer der Wassergehalt

des Barymsalzes	13·50	statt	13·55	Aq.
Baryum	19·81	"	19·82	Ba.
im Kalksalze Wasser	5·25	"	5·73	Aq.
Calcium	6·63	"	6·75	Ca.

Die von mir aufgestellte Formel der Säure bezieht sich auf die schwer lösliche Säure



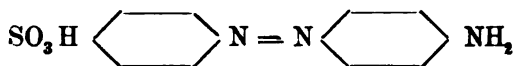
Wie gesagt, treten diese Salze nur in geringer Menge auf, die Hauptmasse des Productes sind leicht lösliche Salze — die die bekannten Eigenschaften des Echtgelbes besitzen, stark färben, mit Säuren roth werden und nur schwierig gross krystallisiren, während die Salze meiner Säure ungemein leicht krystallisiren und gleich bei der ersten Krystallisation rein erhalten werden. Aus obigem geht hervor, dass die Salze der Echtgelbsäure nicht identisch sind mit denen meiner Säure, beziehungsweise dass das Product, welches durch Diazotirung der Sulfanilsäure und Condensirung mit Anilin erhalten wird, nicht identisch mit der aus Azobenzolparasulfosäure erzeugten Amidosäure ist, obzwar beide bei völligem Abbau Sulfanilsäure und Paraphenylendiamin geben. Für meine Säure ist das zweifellos, weil sowohl die Nitrosäure, als auch die Hydroazosäure und die Amidosäure abgebaut wurden und immer das gleiche Resultat gaben, so dass ich sicher sein konnte, dass während der Nitrirung und Amidirung keine Umlagerung stattgefunden hat. Ob die Echtgelbsäure völlig abgebaut wurde, ist mir nicht bekannt, aber das Amidoazobenzol ergab nach G. Schmidt¹ (siehe auch Kolbe, Bd. III, a. pag. 376) Anilin und Paraphenylendiamin. Da nur das Echtgelb des Handels entweder aus Sulfanilsäure oder Amidoazobenzol erzeugt wird, so muss man annehmen, dass in beiden Producten die Amidogruppe zur Stickstoffgruppe in der Stellung 1 : 4 steht. Ich selbst hatte bis jetzt nicht Zeit, den völligen Abbau zu wiederholen, will es aber umso mehr thun, als doch nach obigem bei der Condensation zweierlei Salze entstehen, deren Isomerie sich durch die Stellung



des Diazoestes gegen die Amidogruppe erklären liesse, somit auch neben Paraphenylendiamin noch ein anderes Diamin beim

¹ Ber. der deutschen chem. Gesellsch. V. pag. 480.

Abbau entstehen müsste. Jedenfalls kommt meinen Substitutionsproducten die Formel



zu, wenn die Formel des Azobenzols, wie jetzt üblich, mit den Stickstoffatomen zusammenhängend bezeichnet wird.

Ob sich die Verschiedenheit auch bei anderen Substitutionsproducten, namentlich der Hydroxyl, ferner Diaamido- und Dioxyverbindungen, welche Isomere der Chrysoidine und Tropaëline sein müssen, zeigt, kann nur durch sehr eingehende Experimente constatirt werden, die eben im Gange sind. Ich erlaube mir deshalb noch nicht den allgemeinen Schluss zu ziehen, wengleich das ganze Verhalten der directen Substitutionsproducte des Azobenzols, wie besonders ihre Beständigkeit, darauf hindeutet, dass sie nicht identisch sind mit den sogenannten Azokörpern, die durch Diazotirung und Umlagerung erhalten werden. Ich behalte mir vor, nach den Ferien die weiteren Untersuchungen zu publiciren.

Über ein dem Hydrobenzoin analoges Derivat des Isobutyraldehyds.

Von Dr. Wilhelm Fossek.

(Aus dem chemischen Universitäts-Laboratorium des Professor Lieben.)

In meiner letzten Mittheilung¹ habe ich unter den Producten, welche durch Einwirkung von wässeriger Kalilauge auf Isobutyraldehyd entstehen, zweier krystallinischer Körper Erwähnung gethan, welche den Pinakonen ähnliche Eigenschaften zeigen, und welchen beiden die empirische Formel $C_8H_{18}O_2$ zukommt. Bei ähnlichem chemischen Verhalten sind ihre Krystallgestalten, die Löslichkeitsverhältnisse und Schmelzpunkte verschieden. Der eine, der in grösserer Menge entstanden war, krystallisirt in Tafeln, löst sich nicht allzu schwer in Wasser und schmilzt bei 51° , während der bei der erwähnten Einwirkung nur in sehr geringer Menge entstandene isomere in nadelförmigen Drüsen krystallisirt, sich schwer in Wasser löst und erst bei 91° schmilzt. Diese beiden Körper waren bei der Destillation der durch Einwirkung von wässerigem Kali auf Isobutyraldehyd entstandenen Producte mit Wasserdampf, als mit diesem nicht flüchtig, in einem dicken, gelben Öl gelöst im Rückstand geblieben. Aus diesem wurde der niederer schmelzende Körper durch Schütteln mit heissem Wasser ausgezogen; der mit dem höher liegenden Schmelzpunkt fiel in feinen Nadeln aus seiner öligen Lösung, wenn diese mit Petroleumäther versetzt wurde. Eine eingehendere Untersuchung des letzteren Productes konnte ich bis nun wegen allzu geringer Ausbeute nicht unternehmen; meine Untersuchungen mussten daher auf das Studium der bei 51° schmel-

¹ Monatshefte für Chemie. III, 622.

zenden krystallinischen Substanz beschränkt bleiben. Da aber auch dieser Körper nur als Nebenproduct bei der Einwirkung von wässerigem Kali auf Isobutyraldehyd aufgetreten war, so zielten der Untersuchung dieser Substanz vorausgegangene Versuche, die mit veränderter Concentration der wässerigen Kalilauge unternommen wurden, dahin ab, günstigere Ausbeuten herbeizuführen. Bei dieser Gelegenheit glaubte ich die Wahrnehmung gemacht zu haben, dass nicht so sehr die Concentration der wässerigen Kalilauge Einfluss nimmt auf die Menge und Beschaffenheit der aus Isobutyraldehyd entstehenden Producte, sondern dass es namentlich die dem Aldehyd aus der Bereitung anhängenden Verunreinigungen sind, die die Entstehung gewisser Producte bald beeinflussen, bald ganz aufheben.

Indem ich nun schliesslich aber auch statt der bisher angewandten wässerigen Lösung des Kaliumhydroxyds eine alkoholische in Verwendung nahm und nur reinen acetonfreien Isobutyraldehyd¹ in Anwendung brachte, gelang es mir eine Methode mit sehr guter Ausbeute an dem gesuchten krystallinischen Körper zu finden. Durch die Einwirkung alkoholischer Kalilauge auf reinen acetonfreien Isobutyraldehyd entsteht neben Isobuttersäure und einer Oxyssäure einerseits, als Hauptproduct die angeführte krystallinische Substanz anderseits. Diese hat sich im Verlaufe der Untersuchung als ein Diisopropylglycol erwiesen.

Darstellung und Eigenschaften des Diisopropylglycols.

In 400 Grm. einer 13·5 % alkoholischen Kalilösung wurden 200 Grm. reinen Isobutyraldehyds eingetragen. Diesen hatte ich kurz vorher, um ihn von der während längeren Aufbewahrens etwa entstandenen und in Lösung befindlichen trimolekularen Modification zu befreien, nochmals destillirt. Die beiden Flüssigkeiten mischen sich unter Erwärmen bis über 50°. Der Aldehydgeruch verschwindet allmählig und es tritt eine gelbliche Färbung ein. Nach 12stündigem Stehen erscheint die Reaction vollendet. Nun wird der Alkohol fast vollständig abdestillirt und die im Kolben verbleibenden Reactionsproducte nach Zusatz von Wasser

¹ Nachstehende Abhandlung.

mit Äther ausgeschüttelt. Dieser enthält nun das krystallinische Product, während die gleichzeitig entstandenen Säuren an Kali gebunden in der wässerigen Lösung bleiben.

Nach Entfernung des Äthers wird das nun dickflüssige gelbliche Öl im evacuirten Raum durch Erhitzen auf 100° und Durchstreichen von Luft vom anhängenden Äther, Alkohol und Wasser befreit und dann destillirt. Unter einem Druck von circa 25 Mm. geht zwischen 150–151° die ganze Menge des Öles als eine wasserklare, dicke Flüssigkeit über, die in wenigen Minuten zu einem compacten weissen Krystallkuchen erstarrt. In der Destillationsblase bleibt nur ein unmerklicher Harzrückstand. Der auf diese Weise erhaltene krystallinische Körper stellt reines Disopropylglycol dar.

Dieses Product löst sich leicht in Alkohol und Äther, etwas schwerer in Wasser — leichter in warmem als kaltem — und scheidet sich beim raschen Verdampfen der wässerigen Lösung als ein obenauf schwimmendes Öl ab, das bei Berührung mit einem festen Körper zu einem Kuchen erstarrt. Bei sehr langsamem Verdunsten der wässerigen oder der wässerig-alkoholischen Lösung bei einer dem Nullpunkte naheliegenden Temperatur scheidet es sich aber in Form grosser tafelförmiger Krystalle ab.

Herr Professor v. Lang hatte die Güte, mir folgende krystallographische Daten über diese mitzuthemen:

„Krystallsystem: Monoklinisch,

Elemente: $a : b : c = 0.8223 : 1 : 1.9086$

$ac = 97^\circ 30'$.

Beobachtete Formen: 100, 001, 111, $\bar{1}11$.

Habitus: Plattenförmig durch Vorherrschen der Flächen 100; auch kommen Zwillinge nach dieser Fläche vor.“ Diese Substanz hat einen schwachen eigenthümlichen Geruch und pfeffermünzartig kühlenden Geschmack. Sie schmilzt bei 51.5° und destillirt unter Luftdruck bei 222–223° unzersetzt über. Sie gibt mit Wasser kein Hydrat. Wird einer concentrirten alkoholischen Lösung Chlorcalcium zugesetzt, so löst sich dieses darin und es krystallisirt in Säulen- und Plattenform eine Verbindung heraus, welche durch Äther unter Herausfallen des Chlorcalciums, durch Wasser unter Abscheidung des öligen Productes zersetzt wird. Mit Wasserdampf ist sie in sehr geringer Menge flüchtig.

Die Elementaranalyse gab folgende Zahlen:

- I. 0·3504 Grm. Substanz gaben 0·3819 Grm. H₂O und 0·8442 Grm. CO₂.
 II. 0·3066 Grm. Substanz gaben 0·3347 Grm. H₂O und 0·7412 Grm. CO₂.

Auf 100 Theile:

	Berechnet	Gefunden	
		I.	II.
H.	= 12·32	12·11	12·13
C.	= 65·75	65·70	65·93

Zur Feststellung der Moleculargrösse bestimmte ich die Dichte der im luftleeren Raum bei der Temperatur des siedenden Anilins vergasten Substanz nach der Hofmann'schen Methode:

- I. Gewicht der Substanz = 0·0715 Grm.
 Volum des Dampfes = 138·01 Cm.
 Temperatur des Dampfes = 181·5°
 Temperatur der Luft = 20°
 Barometerstand = 760·5 Mm.
 Reducirter Druck = 108·2 "
 Gewicht des Quecksilbers, welches
 das Dampfvolum erfüllte = 1869·7 Mm. bei 20°
 Höhe der Quecksilbersäule =

$$646·5 \text{ Mm. } \left\{ \begin{array}{l} 440 \text{ Mm. bei } 20^\circ \\ 206 \text{ " " } 181·5^\circ \end{array} \right.$$

Spannkraft des Quecksilbers bei
 180° = 11 Mm.

- II. Gewicht der Substanz = 0·0705 Grm.
 Volum des Dampfes = 137·7 Cm.
 Temperatur des Dampfes = 182°
 Temperatur der Luft = 24°
 Barometerstand = 757·5 Mm.
 Reducirter Druck = 103·4 "
 Höhe der Quecksilbersäule =

$$648 \text{ Mm. } \left\{ \begin{array}{l} 198 \text{ Mm. bei } 182^\circ \\ 450 \text{ " " } 24^\circ \end{array} \right.$$

Gewicht des das Dampfvolum ein-
 nehmenden Quecksilbers = 1864.

Spannkraft des Quecksilbers bei

180° = 11 Mm.

Daraus ergibt sich die Dampfdichte für $H = 1$:

Berechnet	Gefunden	
	I.	II.
73·00	67·71	70·03
Moleculargewicht = 146	135·42	140·06

Die empirische Formel für die untersuchte Substanz ist demnach $C_8H_{18}O_2$.

Diacetylverbindung.

Da der oben beschriebene Körper $C_8H_{18}O_2$ weder saure Eigenschaften besass noch in irgend einer Weise Aldehydnatur manifestirte, war es naheliegend, in ihm einen zweiwerthigen Alkohol zu vermuthen. Bestätigte sich diese Voraussetzung, so musste bei der Behandlung mit Acetylchlorid ein Diacetat entstehen. Um dieses darzustellen, löste ich die gepulverte Substanz in etwas mehr als der berechneten Menge Chloracetyl auf und kochte diese Lösung am Rückflusskühler, bis keine Chlorwasserstoffsäure Abspaltung mehr bemerkbar war. Nach etwa zwei-stündigem Kochen schied sich auf Wasserzusatz eine ölige Schichte ab. Durch Ausschütteln mit Äther entfernte ich das entstandene Product von der chlorwasserstoffsäurehaltigen Flüssigkeit, wusch die ätherische Lösung zur Entfernung des noch anhaftenden Chlorwasserstoffs mit Wasser, dem ich etwas kohlen-sauren Kalk zusetzte, bis diese Lakmuspapier nicht mehr röthete, destillirte dann den Äther ab und trocknete das zurückgebliebene Öl mit frischgeschmolzenem Chlorcalcium.

Dieses destillirte bei 235° unzersetzt mit Hinterlassung eines ganz geringen Rückstandes. Das Destillat war ein farbloses Öl von schwach esterartigem Geruch und gab bei der vorgenommenen Elementaranalyse folgende Zahlen:

0·2734 Grm. Substanz gaben 0·6278 Grm. CO_2 und
0·2341 Grm. H_2O .

Dem entsprechen in 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet auf das Diacetat $C_{16}H_{22}O_4$
C	= 62·62	62·61
H	= 9·52	9·56

Es war also in glatter Reaction das Diacetat entstanden und dadurch die vorliegende Substanz als ein zweiwerthiger Alkohol charakterisirt.

Oxydation.

Zur Ermittlung der Stellung der beiden im Molekül des zweiwerthigen Alkohols enthaltenen Hydroxylgruppen schien mir die Oxydation der geeignetste Weg. War die Lagerung der OH-Gruppen eine dem Hydrobenzoin analoge, so sollten, sowie dieses in zwei Moleküle Benzoesäure zerfällt, bei der Oxydation aus einem Molekül $C_8H_{10}O_2$ zwei Moleküle einer Säure entstehen, welche die halbe Anzahl C Atome enthalten. Um dies zu ermitteln führte ich zwei Oxydationsversuche, einen mit Salpetersäure, den anderen mit Kaliumpermanganat in neutraler Lösung durch.

Oxydation mit HNO_3 . 20 Grm. Substanz wurden in 80 Grm. mit Kältemischung gekühlter, rauchender Salpetersäure in kleinen Partien eingetragen. Es fand trotzdem eine heftige Reaction, Entwicklung rothbrauner Dämpfe und Entweichen von Kohlensäure statt. Das Gemisch liess ich sechs Tage, so lange ich Kohlensäureentwicklung bemerkte, bei Zimmertemperatur stehen, nach welcher Zeit eine Abtrennung zweier Schichten bemerkbar war. Nun versetzte ich es mit Wasser und schüttelte mit Äther aus. In der wässerigen, stark salpetersauren Flüssigkeit war nur Oxalsäure nachzuweisen. Die ätherische Lösung, in welcher auch kleine Mengen Salpetersäure enthalten waren, sättigte ich nach Verdampfen des Äthers zur Fixirung sämtlicher vorhandener Säuren mit in Wasser suspendirtem Calciumcarbonat ab, um die bei der Oxydation entstandenen neutralen Producte, welche die ätherische Lösung ebenfalls enthielt, von den Säuren zu trennen.

Die entstandenen neutralen Producte, welche nach dem Geruch zu urtheilen salpeter und salpetrige Säure Äther waren, untersuchte ich nicht weiter.

Die erhaltenen Calciumsalze, welche auch etwas oxalsauren Kalk enthielten, zersetzte ich mit Schwefelsäure und unterwarf die frei gewordenen Säuren der Destillation mit Wasserdampf. So erhielt ich als Destillat eine wässerige Lösung der mit Wasserdampf flüchtigen Säuren und konnte daran gehen, durch fractionirte partielle Absättigung die etwa entstandenen Säuren unter einander und von der Salpetersäure zu trennen.

Ich erhielt auf diesem Wege vier Fractionen. Die Analysen der I. und III. Fraction gaben folgende, genügend genau auf isobuttersaures Calcium stimmende Zahlen, während die der IV. Fraction einen höheren Kalkgehalt, welcher auf eine Verunreinigung mit salpetersaurem Kalk hinweist, ergab. Die zur Analyse verwendeten Salze waren sämmtlich erst im Vacuum über Schwefelsäure und dann im Trockenschrank auf 120° bis zum constanten Gewicht getrocknet.

I. Fraction 0·2875 Grm. Substanz gaben nach dem Glühen 0·0745 CaO, welches 0·0532 Ca enthält.

III. Fraction 0·3864 Grm. Substanz gaben 0·1009 CaO = 0·07208 Ca.

IV. Fraction 0·4208 Grm. Substanz gaben 0·1147 CaO = 0·0819 Ca.

In 100 Theilen:

	Berechnet für isobuttersaures Calcium	Gefunden
Ca	= 18·69	I. Fract. 18·51
		III. „ 18·66
		IV. „ 19·45

Die Bestimmung des für das isobuttersaure Calcium charakteristischen Krystallwassergehaltes (5 Mol. H₂O) liess ferner keinen Zweifel offen, dass als Oxydationsproduct nicht Buttersäure, sondern Isobuttersäure entstanden war.

Oxydation mit Kaliumpermanganat in neutraler Lösung. Die Oxydation in neutraler Lösung schien mir geboten durch das Verhalten des vorliegenden Körpers sich mit verdünnter Schwefelsäure zu verändern. Ich wandte Kaliumpermanganat in etwas geringerer Menge an, als der Berechnung zur Entstehung zweier Moleküle Säure entspricht, ohne aber damit zu erreichen, dass die als erste Oxydationsproducte durch den

Zerfall des Moleküls $C_9H_{18}O_2$ entstandenen Säuren weiter oxydirt wurden. Nach dem Verbrauch des Oxydationsmittels erhielt ich neben nicht angegriffener Substanz Producte, welche darauf schliessen lassen, dass die zuerst entstandene Isobuttersäure weiter oxydirt wurde. Ich erhielt Essigsäure und Kohlensäure.

Die Oxydation führte ich in der Weise aus, dass ich zu einer Lösung von 43 Grm. Kaliumpermanganat in $1\frac{1}{2}$ Liter Wasser 23 Grm. der zu oxydirenden Substanz setzte und die Mischung in einer Stöpselflasche fünf Tage bei Zimmertemperatur stehen liess. Nach dieser Zeit war die wässrige Flüssigkeit unter Abscheidung eines braunen Niederschlages vollkommen entfärbt. Öl hatte sich keines abgeschieden; auch der Geruch nach Isobutyraldehyd war niemals bemerkbar.

Die Flüssigkeit, die alkalisch reagirte, wurde vom braunen Niederschlag durch Filtration getrennt und zur Abscheidung der mit Wasserdampf flüchtigen neutralen Producte mit diesem destillirt. Der Rückstand enthielt nun die unangegriffene Substanz und die entstandenen Säuren an Kali gebunden. Nach Entfernung der unangegriffenen Substanz durch Ausschütteln mit Äther, und nachdem ich die alkalisch reagirende wässrige Flüssigkeit mit Schwefelsäure versetzt hatte, wobei eine starke Kohlensäureentwicklung bemerkbar war, destillirte ich die freien Säuren mit Wasserdampf über und stellte aus dem sauren Destillat durch partielle Absättigung drei Salzfractionen dar. Die Kalkbestimmung wurde in allen Fractionen vorgenommen.

- I. Fraction 0·3986 Grm. Substanz ergaben $CaO = 0·1428$, dies entspricht $Ca = 0·1020$.
 II. Fraction 0·4924 Grm. Substanz ergaben $CaO = 0·1602$, dies entspricht $Ca = 0·1144$.
 III. Fraction 0·3695 Grm. Substanz ergaben $CaO = 0·1134$, dies entspricht $Ca = 0·0810$.
 In 100 Theilen:

Berechnet auf essigsäures Calcium	Gefunden
Ca = 25·31	I. Fraction = 25·58
	II. Fraction = 23·23
	III. Fraction = 21·91.

Während die I. Fraction genau auf Essigsäure stimmt, weisen die beiden nächsten einen etwas niedrigeren Ca-Gehalt auf. Dass dieser durch das Auftreten der Isobuttersäure bedingt ist, welche der Zerstörung entgangen war, und nicht dem propionsauren Salz entspricht, für welches er stimmt, wird dadurch wahrscheinlich gemacht, dass diese beiden Fractionen bei qualitativ angestellten Untersuchungen deutliche Essigsäurereactionen gaben.

Da nach Erlmayer und Grünzweig¹ Isobuttersäure bei der Oxydation in Kohlensäure und Essigsäure zerfällt, stehen auch die Resultate dieser Oxydation im Einklang mit dem vorigen Oxydationsversuche.

Mit der Untersuchung des neutralen, mit Wasser übergegangenen Oxydationsproductes, welches nach Kampher riecht und bei 122—124° siedet, bin ich gegenwärtig noch beschäftigt.

Behandlung mit verdünnter Schwefelsäure.

Die Ähnlichkeit des Diisopropylglycols mit dem Hydrobenzoin und den Pinakonen tritt sehr deutlich hervor in der Bildung analoger, um ein H₂O im Molekül ärmerer und kampherartig riechender Substanzen bei der Behandlung mit verdünnter Schwefelsäure.

Die erwähnte Substanz (4 Theile) einer Mischung von gleichen Theilen Wasser und Schwefelsäure (12 Theile) zugesetzt, löst sich in dieser. Nach einiger Zeit aber, oder wenn die Mischung am Rückflusskühler erwärmt wird nach wenigen Minuten, scheidet sich ein kampherartig riechendes Öl an deren Oberfläche ab. Wird nach halbstündigem Kochen dieses mit Äther von der schwefelsäurehaltigen Flüssigkeit getrennt, die ätherische Lösung bis zum Verschwinden der sauren Reaction mit sodahaltigem Wasser gewaschen und nach dem Verdampfen des Äthers mit CaCl₂ getrocknet, so lässt es sich nach fractionirter Destillation in zwei Körper trennen.

Beide sind farblose Flüssigkeiten. Die eine, die in geringerer, Menge entstanden war, riecht betäubend nach Kampher und

¹ Berliner Bericht. 3, 898.

siedet bei 120—122°, während die andere in grösserer Menge entstandene dickflüssig ist, beinahe keinen Geruch besitzt und hauptsächlich zwischen 260—262° überdestillirt.

Der Elementaranalyse unterworfen, gaben:

0·1278 Grm. der bei 120—122° siedenden Substanz

0·1418 Grm. H₂O und 0·3540 Grm. CO₂

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet auf C ₈ H ₁₆ O
C	= 75·53	75·00
H	= 12·33	12·50

I. 0·2763 Grm. des bei 260—262° siedenden Körpers ergaben 0·3022 Grm. H₂O und 0·7618 Grm. CO₂.

II. 0·1991 Grm. derselben Substanz gaben 0·5512 Grm. CO₂ und 0·2261 Grm. H₂O.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für C ₈ H ₁₆ O ₂
	I.	II.	
C	= 75·19	75·50	75·00
H	= 12·55	12·11	12·50

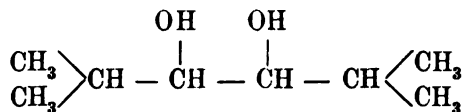
Demnach kommt beiden Körpern die empirische Formel C₈H₁₆O zu.

Da sie mit NaHSO₃-Lösung zusammengebracht keine Verbindung geben, Silbernitrat nicht reduciren und durch Oxydationsmittel (ich wendete Kaliumdichromat und Schwefelsäure an) selbst in der Hitze nur schwer angegriffen werden, so ist wohl anzunehmen, dass die vorliegenden Substanzen keine Aldehyd-structur besitzen. Es wird in ihnen der Sauerstoff also wahrscheinlich in Oxyd oder Ketonbindung vorhanden sein.

Versuche zur Ermittlung ihrer Structur sind im Gange. Vielleicht gibt auch hier die V. Mayer'sche Hydroxylaminreaction Aufschluss.

Nach den bis nun angeführten Ergebnissen, nach welchen die Natur des vorliegenden Körpers, als ein zweiwerthiger Alkohol

erwiesen erscheint, nach der Art seiner Entstehung durch Anlagerung zweier H-Atome an zwei Moleküle Isobutyraldehyd, sowie ferner nach der überall hervortretenden Analogie mit dem Hydrobenzoin und den Pinakonen und endlich nach dem Resultate der Oxydation mit Salpetersäure, die mir nur Isobuttersäure und Oxalsäure lieferte, lässt sich wohl mit grosser Sicherheit schliessen, dass dem untersuchten Körper die folgende Structur eines Diisopropylglycols zukommt:



Einwirkung wässriger Jodwasserstoffsäure auf Diisopropylglycol. Bildung eines ungesättigten Kohlenwasserstoffes C₈H₁₆.

Mit dem zehnfachen Gewicht bei Zimmertemperatur rauchender Jodwasserstoffsäure in ein Rohr eingeschlossen und durch 6—8 Stunden im Luftbad auf 140° erhitzt, verwandelt sich das Diisopropylglycol in ein Jodid, das bei der Zersetzung mit alkoholischem Kali den ungesättigten Kohlenwasserstoff gibt.

Das Jodid scheidet sich nach Versetzen des Röhreninhaltes mit wässriger Kalilauge bis zur Entfärbung und nachheriger Destillation mit Wasserdampf als eine schwere ölige, durch freies Jod dunkelgefärbte Flüssigkeit am Boden der Vorlage ab. Auf eine Reindarstellung des Jodids, welches mit Zersetzungsproducten — darunter Jodoform — verunreinigt war und sich nicht unzersetzt destilliren liess, verzichtete ich und ging gleich daran, das mit Chlorcalcium getrocknete Product mit alkoholischer Kalilauge zu verseifen.

Nach vierstündigem Kochen am Rückflusskühler war die Umwandlung vollendet. Bei der nachherigen Destillation ging mit den ersten Partien des Alkohols und in diesem gelöst der Kohlenwasserstoff über und konnte aus diesem durch Versetzen mit einer concentrirten Chlorcalciumlösung abgeschieden werden.

Er stellt eine leicht bewegliche, stark nach Petroleumäther riechende farblose Flüssigkeit dar, die der Destillation unter-

worfen, der Hauptmenge nach bei 116—120° übergeht. Brom addirt er mit Heftigkeit und auch in der zur Auflösung der doppelten Bindung berechneten Menge. Das entstandene Bromaditionsproduct ist sehr leicht zersetzlich.

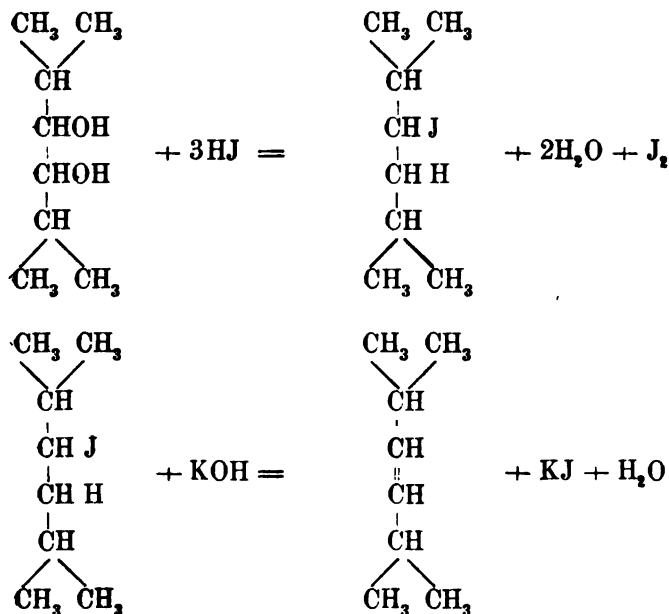
Die Elementaranalyse gab die Zahlen:

0·2226 Grm. Substanz gaben 0·2842 Grm. H_2O u. 0·6826 CO_2

Das ist in 100 Theilen:

	Berechnet auf C_8H_{16} .	Gefunden
H	14·28	14·19
C	85·71	86·29.

Nach diesen Daten ist der untersuchte Körper ein Kohlenwasserstoff der Äthylenreihe mit der empirischen Formel C_8H_{16} . Nach seiner Entstehung aus dem Diisopropylglycol wird er an Stelle der beiden OH-Gruppen die doppelte Bindung enthalten. Seine Constitution, sowie seine Entstehung durch das Jodid findet Ausdruck durch folgendes Schema:



Durch alkoholisches Kali neben Diisopropylglycol entstandene Säuren.

Bei der Einwirkung von alkoholischem Kali auf Isobutyraldehyd waren neben dem bereits behandelten Diisopropylglycol auch Säuren entstanden, und zwar in solcher Menge, dass das angewandte Kaliumhydroxyd nach der Reaction beinahe gesättigt erschien. Die Bestimmung der entstandenen Säuren hielt ich für nothwendig, um einen Einblick in den Mechanismus der Reaction zu erhalten.

Zu ihrer Gewinnung versetzte ich die durch Äther von dem neutralen Producte befreite wässerige Lösung der Kalisalze mit einer überschüssigen Menge Schwefelsäure und destillirte die frei gewordenen organischen Säuren, die mit Wasserdampf flüchtig waren, mit diesem über. Dadurch erhielt ich im Destillat eine wässerige Lösung der mit Wasserdampf flüchtigen Säuren, während die mit diesem nicht oder nur wenig flüchtigen im Kolbenrückstand verblieben.

Aus dem erhaltenen sauren Destillate stellte ich durch partielle Absättigung mit Calciumcarbonat und jeweiliges Abdestilliren des ungesättigt gebliebenen Theiles der Lösung acht Fractionen Kalksalze dar. Sämmtliche Fractionen bestanden nach dem Eindampfen der Lösung aus langen Krystallnadeln, waren alle von durchaus gleichem Aussehen und wie sich bei der Analyse herausstellte, auch gleicher Zusammensetzung. Ich gebe nachfolgend nur die Zahlen, die ich bei der Ca-Bestimmung der I. und VIII. Fraction erhielt.

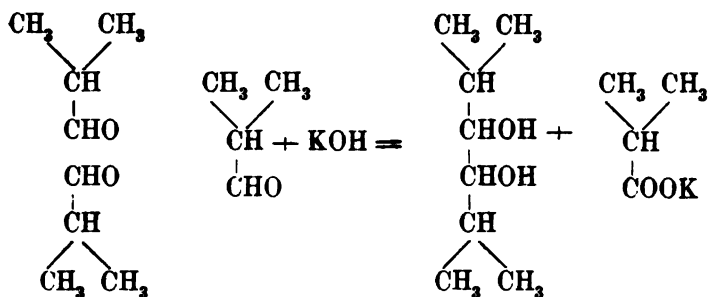
I. Fraction 0·1368 Grm. nach dem Waschen mit Wasser durch Abpressen zwischen Filterpapier getrockneter Krystalle gaben nach dem Glühen 0·0261 CaO, welchem 0·0186 Ca entsprechen.

VIII. Fraction 0·1181 Grm. einer ebenso behandelten Substanz gaben beim Trocknen bis zum constanten Gewicht bei 110° 0·0352 H₂O ab, und lieferten nach dem Glühen 0·0223 CaO, demgemäss 0·0159 Ca.

In 100 Theilen:

	Berechnet für isobuttersaures Calcium + 5H ₂ O	Gefunden	
		I. Fract.	VIII. Fract.
Ca	= 13·12	13·62	13·48
H ₂ O	= 29·60	—	29·63

Hiermit erscheint als constatirt, dass die Einwirkung von alkoholischem Kali auf Isobutyraldehyd unter den oben angeführten Verhältnissen fast glatt (es entstehen noch kleine Mengen einer weiter unten beschriebenen Oxysäure) nach folgender Gleichung verläuft:



Bei der quantitativen Ausführung eines Versuches, zu dem ich 200 Grm. Isobutyraldehyd in Verwendung nahm, erhielt ich statt der berechneten 134 Grm. C₈H₁₈O₂ 129 Grm. dieses Körpers und statt der berechneten 81 Grm. Isobuttersäure 78 Grm.

Oxysäure C₈H₁₆O₃.

Diese Säure erhielt ich, indem ich den durch Destillation mit Wasserdampf von den flüchtigen Säuren befreiten, mit Schwefelsäure angesäuerten Rückstand mit Äther wiederholt ausschüttelte. Nach Verjagung dieses blieb ein dickes Öl zurück, das bald in fächerförmig ausgebreiteten Krystallen erstarrte.

Ich stellte aus dieser Säure ein Kalksalz dar, indem ich ihre wässrige Lösung mit frisch gefälltem kohlensaurem Kalk sättigte, nach längerem Erhitzen im Wasserbade vom überschüssigen Kalkcarbonat abfiltrirte und das Filtrat im Vacuum einengte.

Das resultirende Salz sah kaum krystallinisch aus, war etwas gelblich gefärbt und in Wasser und Alkohol löslich. Eine

vorgenommene Elementaranalyse, mit welcher ich, nach der von Lieben und Zeisl angewandten Methode ¹ eine Kalkbestimmung verband, gab folgende Resultate,

0·4048 Grm. Substanz gaben 0·2994 H₂O
 0·7843 Grm. CO₂ davon waren erhalten:
 { 0·7569 durch Zunahme des Kaliapparates
 { 0·0274 durch Glühen des Kalkrückstandes und 0·0624 CaO
 welchem 0·0445 Ca entsprechen.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für (C ₈ H ₁₅ O ₃) ₂ Ca
C	= 52·85	53·63
H	= 8·22	8·37
Ca	= 11·01	11·16

dem analysirten Salz kommt also die Formel (C₈H₁₅O₃)₂ Ca zu und der Säure demnach C₈H₁₆O₃.

Mit dieser Formel sind auch folgende Zahlen, welche ich durch die Elementaranalyse der freien Säure erhielt, in Übereinstimmung:

0·2439 Substanz gaben 0·5395 CO₂ und 0·2167 H₂O.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für C ₈ H ₁₆ O ₃
C	= 60·32	60·00
H	= 9·86	10·00

Die freie Säure stellt zerrieben ein weisses, krystallinisches Pulver dar, welches in Wasser und Äther ziemlich schwer löslich ist, das sich aber in Alkohol leicht auflöst. Sie ist mit Wasserdämpfen nicht flüchtig, krystallisirt ohne Krystallwasser und schmilzt im reinen Zustand bei 92°. Ihr Silbersalz ist amorph, das Barytsalz zersetzt sich beim Erhitzen auf 120°. In einem Röhrchen erhitzt, zersetzt sie sich nicht und destillirt erst bei hoher Temperatur.

Da sie nur in sehr geringer Menge als Nebenproduct bei der beschriebenen Einwirkung von alkoholischem Kali auf Isobu-

¹ Monatshefte für Chemie. IV, 27.

tyraldehyd entsteht, war mir bis nun eine weitere Untersuchung zur Aufklärung ihrer Constitution nicht möglich. Da sie aber nach der dem Diisopropylglycol zukommenden Structur durch Oxydation dieses nicht entstanden sein kann, so lässt sich vermuthen, dass sie entweder durch Oxydation eines in geringer Menge entstandenen condensirten Oxyaldehydes hervorging oder dass sie vielleicht das Oxydationsproduct des Eingangs dieser Mittheilung erwähnten mit dem Diisopropylglycol isomeren körpers $C_8H_{18}O_2$ ist.

Im Anschluss an die vorliegende Arbeit mache ich die Mittheilung, dass Untersuchungen darüber im Gange sind, ob diese bei Isobutyraldehyd in so glatter Weise verlaufende Reaction auch bei anderen Aldehyden stattfindet. Darüber hoffe ich demnächst berichten zu können.

Darstellung acetonfreien Isobutyraldehyds.

Von Dr. Wilhelm Fossek.

(Aus dem chemischen Universitäts-Laboratorium des Professor Lieben.)

Im Verlaufe der vorstehenden Arbeit hat sich mir die Nothwendigkeit ergeben, nur reinen acetonfreien Isobutyraldehyd in Verwendung zu nehmen, um so eine Einwirkung des Acetons und anderer Nebenproducte, welche bei der Bereitung des Isobutyraldehyds entstanden sein könnten, auf die durch den Einfluss des Kalihydroxyds entstehenden Producte im Vorhinein auszuschliessen. Aber weder durch Waschen des Isobutyraldehyds mit Wasser noch durch fractionirte Destillation kann (bei den nahe liegenden Siedepunkten) eine Trennung vom Aceton erreicht werden und auch andere vorgeschlagene Methoden führen nicht zum Ziel.

Die Reindarstellung des Isobutyraldehyds durch Zersetzen der leicht entstehenden trimolecularen polymeren Modification konnte aber bis nun nicht getübt werden, da die Eigenschaft der krystallisirten Modification, sich mit Schwefelsäure versetzt, in Isobutyraldehyd umzusetzen, bis nun nicht bekannt war.

Indem es mir nun gelungen ist, diese Umsetzung der leicht rein zu erhaltenden krystallinischen Modification in Isobutyraldehyd durch Versetzen mit etwas Schwefelsäure und Erwärmen im Wasserbade zu bewerkstelligen, hat sich zugleich eine einfache Methode zur vollkommenen Reindarstellung des Isobutyraldehyds ergeben.

Zur Rohdarstellung des Aldehyds benützte ich das von mir schon früher veröffentlichte Verfahren,¹ nur brachte ich in der Technik der Ausführung insoferne eine Vereinfachung an, als ich

¹ Monatshefte für Chemie II, 614.

durch Einschaltung eines den Dephlegmatoren nachgebildeten Apparates zwischen Entwicklungsgefäss und Kühler, mit der Darstellung gleichzeitig die Fractionirung verband. Ich erhielt so in einer Operation einen Aldehyd als Product, der beim Versetzen mit Schwefelsäure und nachherigem Stehenlassen an einem kühlen Ort nach einigen Tagen krystallinisch erstarrte.

Den Apparat zu seiner Erzeugung stellte ich nun in der Weise zusammen, dass ich im Verschlusskork des Entwicklungskolbens, der mit Isobutylalkohol beschickt war, drei Bohrungen anbrachte. Durch zwei dieser Bohrungen wurde ein Kohlensäurestrom und das erwärmte Oxydationsgemisch eingeführt; in die dritte Bohrung war eine Röhre eingepasst, welche zur Wegführung der entstandenen Oxydationsproducte diente und bis nahe an den Boden eines zweiten Kolbens führte, der in einem Wasserbad auf 70—80° erwärmt wurde. Dieser Kolben war nun vermittelt einer Henningerischen oder ähnlichen Destillationsröhre mit dem Kühler in Verbindung.

Durch die angegebene Einschaltung des zweiten Kolbens wurde erreicht, dass sich die durch den ziemlich raschen Dampfstrom in grosser Menge mitgerissenen höher siedenden Producte — wie Wasser, unveränderter Alkohol, Isobuttersaures Isobutyl u. a. — darin ansammelten, während die unter der Temperatur des Wasserbades siedenden weggeführt wurden. Die sich in dem im Wasserbade befindlichen Kolben ansammelnden Flüssigkeiten leisteten aber zugleich auch als Waschflüssigkeit einen erheblichen Dienst, indem die im Entwicklungskolben erzeugten Dämpfe gezwungen werden beim Austritt aus der bis an den Boden dieses Gefässes reichenden Verbindungsröhre sich einen Weg durch die kühlere Flüssigkeit zu bahnen.

Haben die Dämpfe den zweiten Kolben passirt, so sind sie schon von dem grössten Theil der mitgerissenen Verunreinigungen befreit und gelangen durch die aufsteigende Destillirröhre, in welcher sie noch einen weiteren Theil der höher siedenden Producte verlieren, in Kühler und Vorlage.

Der in der Vorlage angesammelte Aldehyd ist schon genügend rein, um sich ohne weitere Fractionirung durch Versetzen mit etwas concentrirter Schwefelsäure (circa 1 Grm. auf 100 Aldehyd)

oder auch Chlorwasserstoffsäure zu polymerisiren. Abkühlen beschleunigt das Entstehen der Krystalle.

Die erhaltenen Krystalle wurden am Filter gesammelt, abgesaugt, mit Wasser gewaschen, zwischen Filterpapier getrocknet und so aufbewahrt.

Bei Bedarf an Isobutyraldehyd wurden die Krystalle im Wasserbade geschmolzen, mit wenigen Tropfen concentrirter Schwefelsäure versetzt und im Wasserbad am Rückflusskühler erwärmt. Nach circa einstündigem Kochen der Flüssigkeit war stets die ganze Meuge des Polymeren in Isobutyraldehyd umgesetzt, welcher bei vorgenommener Destillation mit constantem Siedepunkt überging.

Der auf diese Weise gewonnene Isobutyraldehyd zeigte einen Siedepunkt von 63° (741 Mm. bei 0°) und hatte die Dichte 0.8057 bei 0° , 0.7898 bei 20° , bezogen auf Wasser von derselben Temperatur. Seine Dämpfe eingeathmet, verursachen Übeligkeiten und Kopfschmerzen.

Elektrolytische Studien.

Von Dr. Hans Jahn.

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Aus dem Laboratorium des Prof. E. Ludwig.)

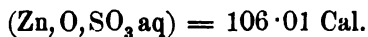
Voriünge Mittheilung.

Die Frage nach den Vorgängen in einer Lösung, während der elektrische Strom dieselbe durchfließt, ist eine für die theoretische Chemie so überaus wichtige, dass dieselbe Gegenstand vielfältiger Erörterungen und experimenteller Untersuchungen geworden ist. Wenn nun auch unsere Kenntnisse über den letzten Grund der Erscheinungen noch äusserst lückenhafte sind und vielleicht noch längere Zeit bleiben werden, da ja das Wesen der Kraft, die bei diesen Erscheinungen ins Spiel kommt, noch in dichtes Dunkel gehüllt ist, so haben doch die zahlreichen Untersuchungen über die thermische Seite der Frage manche Punkte in früher ungeahnter Weise aufgeklärt und unsere Kenntnisse wesentlich gefördert.

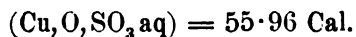
Der einzige ruhende Punkt, den die Wissenschaft gewonnen hat, und von dem alle Theorien der Elektrolyse ausgehen müssen, ist das Faraday'sche elektrolytische Gesetz, welches in der neueren Fassung bekanntlich aussagt, dass gleich grosse Elektrizitätsmengen gleich viele Valenzen zu lösen im Stande sind, woraus dann unmittelbar folgt, dass Ströme von gleicher Intensität chemisch äquivalente Mengen der beiden Ionen an den Elektroden abscheiden müssen, dass mithin die Arbeitsleistung des Stromes bei der Zersetzung chemisch äquivalenter Mengen der Elektrolyte dieselbe ist für sämtliche Elektrolyte, ganz unabhängig von der chemischen Natur der in denselben enthaltenen Ionen.

In diesem Satze liegen nun aber auch die Hauptschwierigkeiten für eine einheitliche Beschreibung der Phänomene. Die Mehrzahl der Chemiker hält, wie mir scheint mit gutem Grunde, an der Vorstellung fest, dass die Atome oder Atomcomplexe, aus denen die Elektrolyte bestehen, durch eine bestimmte, ihrem Wesen nach unerforschte Kraft, die Affinität, an einander gekettet sind, und zwar ist diese Affinität in erster Linie von der chemischen Natur der in Frage kommenden Theilmolekeln abhängig. Acceptiren wir diese Vorstellung, für deren Aufhebung, wie gesagt, zwingende Gründe nicht vorliegen, so bietet die Erklärung der elektrolytischen Erscheinungen im Sinne des Faraday'schen Gesetzes ganz unerwartete Schwierigkeiten dar.

Kupfersulfat und Zinksulfat, um ein concretes Beispiel zu betrachten, sind Elektrolyte, und zwar scheiden Ströme von gleicher Intensität aus den Lösungen dieser beiden Salze gleich grosse Mengen von Sauerstoff und Schwefelsäure an dem positiven Pole ab, während an dem negativen Pole chemisch äquivalente Mengen von Kupfer, beziehlich Zink ausgeschieden werden. Damit sich nun aber die beiden Salze in die besprochenen Theilmolekeln, Metall, Sauerstoff und Schwefelsäure zerlegen können, sind seitens des Stromes ganz verschiedene Arbeitsleistungen nöthig und zwar für das Zinksulfat nahezu die doppelte Arbeitsleistung wie für das Kupfersulfat. Bei der Bildung des ersteren Salzes aus Zink, Sauerstoff und Schwefelsäure beobachtete J. Thomsen die Wärmeentwicklung:



während bei der Bildung des Kupfersulfates unter denselben Umständen ungefähr nur halb so viel Wärme entwickelt wird, nämlich:



Man mag nun über die Bedeutung derartiger thermochemischer Daten urtheilen, wie man will, man mag sie als relatives Mass der bei der Bildung der betreffenden Salze in Betracht kommenden Affinitätskräfte anerkennen oder nicht, das beweisen sie ohne Zweifel, dass bei der Bildung des Zinksulfates mehr lebendige Kraft der Theilmolekeln in Wärme umgesetzt wird als

bei der Bildung des Kupfersulfates, dass mithin eine verschiedene Menge von Wärme oder, was principiell auf dasselbe hinausläuft, von Electricität umgekehrt wieder in lebendige Kraft der Theilmolekeln verwandelt werden muss, um den letzteren denselben Bewegungszustand wieder zurückzugeben, der ihnen vor ihrer Vereinigung zu den betreffenden Salzmolekeln eigenthümlich war. Nun kann aber, wenn man das Bestehen von Affinitätskräften zugibt, eine Zersetzung der Salze in der Weise, wie sie der Strom nachweislich bewirkt, doch nur dann eintreten, wenn der Strom vorher diese Affinitätskräfte lockert, insoferne er den ursprünglichen Bewegungszustand der Theilmolekeln restituiert. Da nun aber zu der Zerlegung des Zinksulfates nahezu die doppelte Menge an lebendiger Kraft nothwendig ist, als zur Zerlegung des Kupfersulfates, so sollte man zunächst erwarten, dass gleich grosse Electricitätsmengen von dem letzteren Salze noch einmal so viel zerlegen als von dem ersteren — was mit dem Faraday'schen Gesetze in Widerspruch steht.

Es müssen also bei der Elektrolyse dieser Salze noch Factoren in Betracht kommen, die in umgekehrter Weise als die zur Zersetzung nöthige lebendige Kraft von der Affinität der Theilmolekeln bedingt werden, der Strom muss ausser der Zersetzung eine Arbeit leisten, die der Affinität der Theilmolekeln umgekehrt proportional ist. Dieser Schluss, den bekanntlich schon Faraday in seinen classischen Auseinandersetzungen über die Elektrolyse gezogen hat, scheint mir noch heute unabweislich zu sein, vorausgesetzt, dass man das Bestehen einer bestimmten Affinität überhaupt zugibt.

Mit Hilfe der Faraday'schen Voraussetzung lassen sich sämtliche Erscheinungen vollkommen ungezwungen erklären. Es würde zur Zersetzung äquivalenter Salzmengen ein Theil der Electricität durch die rein chemische Arbeit der Paralysisirung der Affinitätskräfte, ein zweiter durch die secundären dem Strome durch den Leitungswiderstand und derartige Factoren auferlegten Arbeitsleistungen verbraucht werden. Da der erstere Summand der Affinität der Ionen direct, der letztere dagegen indirect proportional wäre, so würde für alle Elektrolyte die Summe der beiden Componenten constant bleiben, es würden mithin, ganz wie das Faraday'sche Gesetz es verlangt, bei der Zersetzung

chemisch äquivalenter Mengen sämtlicher Elektrolyte gleiche Elektrizitätsmengen verbraucht werden.

Ich habe schon an anderer Stelle (Die Elektrolyse, Wien 1883 bei Alfred Hölder, pag. 111) auf eine Versuchsreihe von Favre hingewiesen, die mir einer derartigen Auffassung der Erscheinungen nicht gerade zu widersprechen scheint. Favre fand nämlich, dass bei der Zersetzung äquivalenter Mengen von Schwefelsäure, Salpetersäure, Kupfersulfat und Kupfernitrat der Kette in der That gleiche Wärme — mithin auch gleiche Elektrizitätsmengen entzogen wurden, nämlich:

Für Schwefelsäure	59·895	} Cal.
„ Salpetersäure	55·330	
„ Kupfersulfat	56·905	
„ Kupfernitrat	57·650	

Trotzdem der Strom in allen vier Voltametern verschiedene chemische Arbeit leistete, erlitt die Kette doch bei allen vier Elektrolysen dieselbe Einbusse an lebendiger Kraft.

Seine weiteren Versuche für die Ermittlung der Wärmetönungen innerhalb der Elektrolyte waren für die uns beschäftigende Frage nicht verwendbar, da er durch die Einschaltung eines bedeutenden Widerstandes, der sich in demselben Calorimeter befand, wie die Batterie, den Einfluss des Leitungswiderstandes der Elektrolyte absichtlich eliminirte.

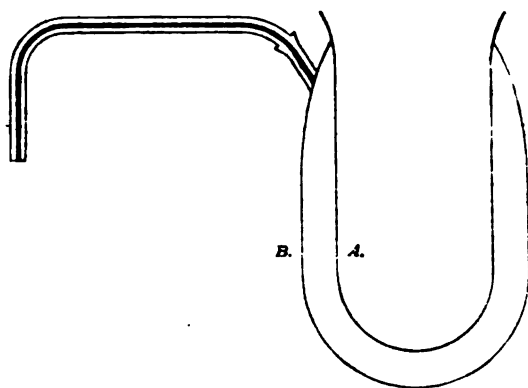
Diese und ähnliche Überlegungen veranlassten mich, eine Untersuchung in Angriff zu nehmen, deren erste Resultate ich mir erlaube in diesen Zeilen vorzulegen. Ich kann und will für meine bisherigen Versuche nur den Titel vorläufiger Orientierungsversuche in Anspruch nehmen. Ich glaube aber, dass die Werthe, welche ich erhalten habe, die Richtung, in welcher die Resultate fernerer, genauerer Versuche ausfallen werden, ziemlich unzweideutig andeuten und ich nehme um so weniger Anstand, sie der Öffentlichkeit zu übergeben, als ich mir zugleich das ungestörte Fortarbeiten in der eingeschlagenen Richtung durch diese Publication sichern möchte.

Da die mir zu Gebote stehenden Mittel die Anwendung eines genaueren Mischuncalorimeter nicht gestatteten und die Jahreszeit die Benützung des Bunsen'schen Eiscalorimeter ausschloss,

so musste ich auf ein anderes Auskunftsmittel bedacht sein. Ich fand dasselbe in einem gewöhnlichen Gewichtsthermometer, welches mir in vorzüglicher Qualität von Herrn Franz Müller in Bonn hergestellt wurde.

Mein Calorimeter bestand, wie aus der untenstehenden Skizze ersichtlich ist, aus einer Eprouvette (*A*), welche aus möglichst dünnem Glase hergestellt wurde, und um welche ein im Glas ziemlich starker Mantel (*B*) geschmolzen war.

Der letztere war mit einem seitlichen Tubulus versehen, in welchen ein zweimal gebogenes Thermometerrohr luftdicht eingeschlossen war. Der Raum zwischen *A* und *B* wurde mit ge-



reinigtem und sorgfältig getrocknetem Quecksilber angefüllt, und einige Stunden mit dem Vacuum einer Quecksilberluftpumpe in Verbindung gelassen. Hierauf wurde das Thermometerrohr in den Tubulus eingesetzt, so dass sich die Capillare desselben vollkommen mit Quecksilber anfüllte. Der ganze Apparat wurde, um Wärmeabgaben thunlichst zu verhüten, in einen dickwandigen, aus hartem Holz gedrechselten Klotz gesenkt, so dass noch ein Zwischenraum zwischen Glas und Holz blieb, welcher mit Baumwolle ausgefüllt wurde.

Die Auswerthung des Apparates wurde auf empirischem Wege durchgeführt. Ein mit einer Öse versehener massiver Cylinder aus chemisch reinem Silber, dessen Gewicht:

46·2775 Gramm

betrug, wurde mittelst eines dünnen Seidenfadens in einem Glas-

rohr aufgehängt, welches mit einem Glasmantel umgeben war, so dass es mittelst hindurchgeleiteten Dampfes auf 100° C. erwärmt werden konnte. Die Temperatur in dem Erwärmungsrohr wurde durch ein eingehängtes Thermometer controlirt: dieselbe betrug constant 100° C. Nachdem man den Dampf zwei Stunden lang durch den Apparat geleitet hatte, so dass man sicher annehmen konnte, dass der Silbereylinder die Temperatur von hundert Graden angenommen habe, wurde derselbe schnell in die Eprouvette des Calorimeter gesenkt. In der letzteren befand sich eine abgewogene Menge von destillirtem Wasser, und dieselbe wurde verschlossen durch einen Gummistopfen, durch dessen Bohrung ein Geisslerisches Thermometer geführt war, an welchem die Zehntel eines Grades genau abgelesen, die Hundertstel mit ziemlicher Sicherheit geschätzt werden konnten. Das Capillarrohr des Calorimeter ragte in ein leeres, vorher gewogenes Fläschchen.

Der ganze Apparat befand sich in einem Local des Laboratorium souterrain, welches zu keinen weiteren Versuchen verwendet wurde, so dass äussere Störungen ausgeschlossen waren. Das in dem Calorimeter befindliche Thermometer wurde mittelst eines Fernrohres abgelesen.

Drei derartige Versuche ergaben folgende Resultate:

I. Versuch.

Gewicht des in dem Calorimeter befindlichen	
Wassers	44·112 Gramm.
Temperatur vor dem Einsenken des Silber-	
cylinders	12·0° C.
Temperatur nach dem Einsenken des Silber-	
cylinders	13·2° C.
Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers .	0·5334 Gramm.

Es entsprechen mithin der Temperaturerhöhung um einen Grad der hunderttheiligen Scala:

0·4445 Gramm

ausgeflossenen Quecksilbers.

II. Versuch.

Gewicht des in dem Calorimeter befindlichen	
Wassers	51·8525 Gramm.

Temperatur vor dem Einsenken des Silber-
cylinders 10·0° C.
 Temperatur nach dem Einsenken des Silber-
cylinders 11·2° C.
 Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers 0·5285 Gramm.
 Der Temperaturerhöhung um einen Grad entsprechen mithin
 0·4404 Gramm
 ausgeflossenen Quecksilbers.

III. Versuch.

Gewicht des in dem Calorimeter befindlichen
 Wassers 48·243 Gramm.
 Temperatur vor dem Einsenken des Silber-
cylinders 10·57° C.
 Temperatur nach dem Einsenken des Silber-
cylinders 11·80° C.
 Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers 0·5467 Gramm.
 Es entsprechen also einem Grad Temperaturerhöhung
 0·4444 Gramm
 ausgeflossenen Quecksilbers.

Diese drei Versuche ergeben also, dass, wenn der Apparat
 um einen Grad Celsius erwärmt wird:

I. 0·4445
II. 0·4404
III. 0·4444
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
Mittel 0·4424

Gramm Quecksilber ausfliessen. Die Übereinstimmung zwischen
 den drei Versuchen ist eine ganz befriedigende; die Abweichung
 der drei Einzelwerthe von dem mittlerem Werthe beträgt nicht
 mehr als ein halbes Procent desselben. Ich will noch erwähnen,
 dass das in dem Calorimeter eingetauchte Thermometer unmittel-
 bar nach dem Einsenken des Silbercylinders sehr schnell um
 einige Grad stieg, um dann ebenso schnell zu sinken und einen
 Stand einzunehmen, der sich während der Beobachtungszeit von
 30 bis 45 Minuten nicht merklich änderte. Es beweist diese
 Beobachtung einerseits, dass die Wärmeabgabe an das Queck-
 silber, also die Herstellung des thermischen Gleichgewichtes

innerhalb des Apparates sehr schnell erfolgt, und dass andererseits der Wärmeverlust nach aussen ein zu vernachlässigender ist.

Da nun bei diesen Versuchen das Gewicht des Wassers sowohl als des eingesenkten Silbers genau bekannt war, da ferner die Temperatur des Silbers vor dem Einsenken genau bestimmt war, so lässt sich die calorische Masse des leeren Apparates — Glas, Quecksilber, Thermometer — aus der beobachteten Temperaturerhöhung unschwer berechnen. Dieselbe beträgt im Mittel der drei Versuche, bezogen auf ein Kilogramm Wasser als Einheit:

0.16417.

Ich schritt nun zu den elektrolytischen Versuchen. Der Gang derselben war folgender: In das Calorimeter wurde eine abgewogene Menge der Lösung von bekannter Concentration eingefüllt, und die vorher ausgeglühten und abgewogenen Platinelektroden eingehängt. Nachdem man den Apparat, damit sich das thermische Gleichgewicht zwischen allen Theilen desselben herstellen könne, längere Zeit hindurch sich selber überlassen hatte, wurde die Temperatur abgelesen und der Strom von zwei Bunsen'schen Chromsäureelementen hindurch geleitet. Das Ende des Capillarrohres ragte wie bei den oben besprochenen Auswerthungsversuchen in ein leeres, vorher gewogenes Glasfläschchen. Nachdem der Strom eine Zeit lang — gewöhnlich 25 bis 30 Minuten — durch die Lösung geleitet worden war, wurde er unterbrochen, die Elektroden wurden mit destillirtem Wasser abgespült, durch Abpressen zwischen Fliesspapier getrocknet und gewogen. Das Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers ergab die während der Abscheidung der gefundenen Metallmenge eingetretene Temperaturerhöhung, woraus die eingetretene Wärmeentwicklung unschwer berechnet werden konnte, da die calorische Masse der ganzen Vorrichtung bekannt war.

A

Versuche mit der Lösung $\text{Cu SO}_4 + 200 \text{ H}_2 \text{ O}$.

Specifische Wärme der Lösung nach J. Thomsen 0.953.

I. Gewicht des an der Kathode ausgeschiedenen

Kupfers 0.0727 Gramm.

Entwickelte Wärmemenge 0.13245 Cal.

II. Gewicht des an der Kathode ausgeschiedenen

Kupfers 0·0904 Gramm.

Entwickelte Wärmemenge 0·17201 Cal.

III. Gewicht des an der Kathode ausgeschiedenen

Kupfers 0·0892 Gramm. .

Entwickelte Wärmemenge 0·15457 Cal.

Diese drei Versuche ergeben also, dass während der Abscheidung eines Gramm Kupfers aus der Lösung eine Wärmemenge von:

$$\begin{array}{r} \text{I. } 1\cdot822 \\ \text{II. } 1\cdot902 \\ \text{III. } 1\cdot733 \\ \hline \text{Mittel } 1\cdot807 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \text{I. } 1\cdot822 \\ \text{II. } 1\cdot902 \\ \text{III. } 1\cdot733 \\ \hline \text{Mittel } 1\cdot807 \end{array}} \right\} \text{ Cal.}$$

entwickelt wird.

B.

Versuche mit der Lösung $\text{Zn SO}_4 + 200 \text{ H}_2\text{O}$

Specifiche Wärme der Lösung nach J. Thomsen 0·952.

I. Gewicht des an der Kathode ausgeschiedenen

Zink 0·0611 Gramm.

Entwickelte Wärmemenge 0·059712 Cal.

II. Gewicht des an der Kathode ausgeschiedenen

Zink 0·0667 Gramm

Entwickelte Wärmemenge 0·059582 Cal.

III. Gewicht des an der Kathode ausgeschiedenen

Zink 0·0486 Gramm.

Entwickelte Wärmemenge 0·051664 Cal.

Es beträgt also die während der Abscheidung von einem Gramm Zink entwickelte Wärmemenge:

$$\begin{array}{r} \text{I. } 0\cdot977 \\ \text{II. } 0\cdot893 \\ \text{III. } 1\cdot060 \\ \hline \text{Mittel } 0\cdot977 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \text{I. } 0\cdot977 \\ \text{II. } 0\cdot893 \\ \text{III. } 1\cdot060 \\ \hline \text{Mittel } 0\cdot977 \end{array}} \right\} \text{ Cal.}$$

Diese beiden Versuchsreihen lehren, dass während der Abscheidung eines Äquivalentgewichtes Kupfer, beziehlich Zink aus den Sulfaten die Wärmemengen:

57.372 Cal.

beziehungsweise:

$$31 \cdot 608 \text{ Cal.}$$

entwickelt werden. Es verhalten sich nun aber diese beiden Wärmetönungen zu einander, wie:

$$1 : 1 \cdot 81$$

während sich die betreffenden Affinitäten

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} (\text{Zn, O, SO}_3 \text{ aq}) = 53 \cdot 005 \\ \frac{1}{2} (\text{Cu, O, SO}_3 \text{ aq}) = 27 \cdot 98 \end{array} \right\} \text{ Cal.}$$

zu einander umgekehrt verhalten wie:

$$1 : 1 \cdot 89$$

Es geht also daraus hervor, dass die durch den Leitungswiderstand oder sonstige secundäre Einflüsse zerstörten oder besser gesagt, in Wärme umgesetzten Elektrizitätsmengen sich zu einander umgekehrt verhalten wie die Affinitäten der in Betracht kommenden Ionen.

Nehmen wir ferner an, die gesammten, der Batterie bei den besprochenen Zersetzungen entzogenen Elektrizitätsmengen würden in äquivalente Wärmemengen umgesetzt, so würden dieselben betragen:

$$\text{für Zn SO}_4 : 31 \cdot 608 + 53 \cdot 005 = 84 \cdot 613 \text{ Cal.}$$

$$\text{„ Cu SO}_4 : 57 \cdot 372 + 27 \cdot 98 = 85 \cdot 352 \text{ „}$$

Es wäre also trotz der Verschiedenheit der durch den Strom zu leistenden chemischen Arbeit der gesammte Energieverlust der Kette in beiden Fällen derselbe, das Faraday'sche Gesetz wäre also auch unter der Annahme einer bestimmten durch den Strom zu überwindenden Affinität zwischen den Ionen vollkommen verständlich.

Ich habe dieses Resultat noch einer weiteren Prüfung unterzogen. Wenn die in dem Elektrolyt durch den Leitungswiderstand, secundäre Prozesse u. dgl. m. in Wärme umgesetzte Elektrizitätsmenge in der That um so geringer ist, eine je grössere Affinität die betreffenden Ionen zu einander haben, so muss nothwendiger Weise bei der Elektrolyse des Kupfersulfates und des Zinksulfates zwischen Kupfer-, beziehlich Zinkelektroden die entwickelte Wärmemenge für beide Salze gleich gross sein. Denn es ist ja klar, dass, wenn die durch die Auflösung der Anode unter Zurück-

bildung des ursprünglichen Salzes bedingte Wärmetönung in demselben Masse steigt, als die durch den Leitungswiderstand bedingte Wärmeentwicklung fällt, die Gesamtwärmeentwicklung in allen Fällen dieselbe bleiben muss.

Die Versuche wurden ganz in der früher beschriebenen Weise ausgeführt, nur verwendete ich statt der Platinelektroden Kupfer-, beziehlich Zinkelektroden. Um ein Urtheil darüber zu gewinnen, in welcher Ausdehnung die Voraussetzung von der unveränderten Zusammensetzung der Lösung erfüllt wurde, bestimmte ich bei jedem Versuche sowohl die Gewichtszunahme der Kathode als auch die Gewichtsabnahme der Anode. Beide waren in allen Fällen sehr angenähert gleich gross.

So fand ich, um ein Beispiel anzuführen, bei der Elektrolyse der Lösung:

$$\text{Zn SO}_4 + 200 \text{ H}_2 \text{ O}$$

Gewichtszunahme der Kathode	0·1030	}	Gramm
Gewichtsabnahme der Anode	0·1020		

und bei der Elektrolyse der Lösung:

$$\text{Cu SO}_4 + 200 \text{ H}_2 \text{ O}$$

Gewichtszunahme der Kathode	0·1032	}	Gramm.
Gewichtsabnahme der Anode	0·1044		

Als Elektrizitätsquelle diente ein Bunsen'sches Chromsäureelement. Ich führe, um das Detail nicht unnöthig zu häufen, von den zahlreichen Versuchen dieser Art, die ich ausgeführt habe, nur einige wenige an.

A.

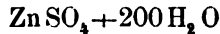
Versuche mit der Lösung $\text{Cu SO}_4 + 200 \text{ H}_2 \text{ O}$.

- | | |
|--|---------------|
| I. Gewicht des abgeschiedenen Kupfer . . . | 0·1038 Gramm. |
| Entwickelte Wärmemenge | 0·13100 Cal. |
| II. Gewicht des abgeschiedenen Kupfer . . . | 0·1115 Gramm. |
| Entwickelte Wärmemenge | 0·13944 Cal. |
| III. Gewicht des abgeschiedenen Kupfer . . . | 0·1135 Gramm. |
| Entwickelte Wärmemenge | 0·13852 Cal. |

Es werden also während der Abscheidung eines Gramm Kupfer aus der besagten Kupfersulfatlösung:

I. 1·262	}	Cal.
II. 1·251		
III. 1·222		
<hr style="width: 100%; border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 0;"/> Mittel 1·244		

entwickelt. Drei ganz analoge Versuche mit der Lösung:



ergaben folgende Resultate:

I. Gewicht des abgeschiedenen Zink . . .	0·1025	Gramm.
Entwickelte Wärmemenge	0·12647	Cal.
II. Gewicht des abgeschiedenen Zink . . .	0·1254	Gramm.
Entwickelte Wärmemenge	0·15577	Cal.
III. Gewicht des abgeschiedenen Zink . . .	0·1025	Gramm
Entwickelte Wärmemenge	0·12742	Cal.

Es ergeben sich daraus für die während der Abscheidung eines Gramm Zink entwickelte Wärmemenge folgende Werthe:

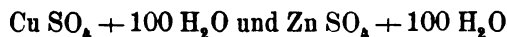
I. 1·234	}	Cal.
II. 1·242		
III. 1·243		
<hr style="width: 100%; border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 0;"/> Mittel 1·239		

Berechnet man daraus die Wärmemengen, welche während der Abscheidung eines Äquivalentgewichtes der beiden Metalle frei werden würden, so erhält man:

für Cu SO ₄	39·497	}	Cal.
„ Zn SO ₄	39·958		

also vollständig unserer Voraussetzung gemäss ergeben sich für beide Salze dieselben Werthe.

Es mag nicht unerwähnt bleiben, dass sich diese Wärmemengen mit der Concentration der Lösung wenig ändern. Ich führte je zwei Versuche mit den Lösungen:



aus und zwar fand ich für die Wärmetönung während der Abscheidung eines Gramm des betreffenden Metalles:

für Cu SO₄:

I. 1·189	}	Cal.
II. 1·189		
<hr style="width: 100%; border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 0;"/> Mittel 1·189		

für Zn SO_4 :

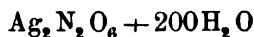
$$\left. \begin{array}{r} \text{I. } 1\cdot209 \\ \text{II. } 1\cdot216 \\ \hline \text{Mittel } 1\cdot212 \end{array} \right\} \text{Cal.}$$

Es berechnet sich also für die während der Abscheidung eines Äquivalentgewichtes des betreffenden Metalles entwickelte Wärmemenge:

$$\left. \begin{array}{r} \text{für } \text{Cu SO}_4 \quad 37\cdot75 \\ \text{„ } \text{Zn SO}_4 \quad 39\cdot39 \end{array} \right\} \text{Cal.}$$

also im Wesentlichen dieselben Werthe wie bei den früheren Versuchen.

Ich habe endlich noch eine Versuchsreihe mit einer Silbernitratlösung von der Concentration:



ausgeführt. Es waren diese Versuche mit einigen Schwierigkeiten verbunden, da das Silber an der Kathode sich nicht in dichten Schichten, sondern in feinen Blättchen abschied, welche herabfielen, so dass die Bestimmung des metallisch ausgeschiedenen Silber nicht genau durchführbar war. Ich benutzte daher zur Bestimmung der während des Versuches zersetzten Salzmenge nur den Gewichtsverlust der Anode.

Die Resultate der drei von mir ausgeführten Versuche waren folgende:

I. Gewichtsverlust der Anode	. .	0·4488	Gramm.
Entwickelte Wärmemenge	. .	0·13707	Cal.
II. Gewichtsverlust der Anode	. .	0·5566	Gramm.
Entwickelte Wärmemenge	. .	0·18053	Cal.
III. Gewichtsverlust der Anode	. .	0·5443	Gramm.
Entwickelte Wärmemenge	. .	0·17316	Cal.

Die Versuche ergeben mithin für die während der Abscheidung eines Gramm Silber entwickelte Wärmemenge:

$$\left. \begin{array}{r} \text{I. } 0\cdot305 \\ \text{II. } 0\cdot324 \\ \text{III. } 0\cdot318 \\ \hline \text{Mittel } 0\cdot316 \end{array} \right\} \text{Cal.}$$

Es berechnet sich also für die während der Abscheidung eines Äquivalentgewichtes Silber entwickelte Wärmemenge der Werth:

34·03 Cal.

Der Werth kommt dem für das Zink- und Kupfersulfat erhaltenen ziemlich nahe. Dass er etwas geringer ausfällt, könnte, ausser durch die Ungenauigkeit der Methode, noch durch folgenden Umstand erklärt werden.

Nach den Versuchen von Hittorff über die Wanderung der Ionen wird bei der Elektrolyse des Kupfersulfates und des Zinksulfates ein gleicher Antheil der lebendigen Kraft in kinetische Energie der Ionen verwandelt: es wandern gleiche Mengen von Kupfer und von Zink zu der Kathode, nämlich:

für Kupfer 0·356	}	Theile des Äquivalentes.
„ Zink 0·364		

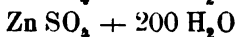
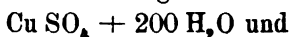
Für das Silber trifft das aber nicht zu. Bei der Elektrolyse des Silbernitrates wandern

0·474 Theile des Äquivalentes

zu der Kathode, es wird mithin ein grösserer Antheil der in Gestalt von Elektrizität der Lösung zugeführten lebendigen Kraft in kinetische Energie der Theilmolekeln verwandelt, es kann mithin nur ein geringerer Antheil derselben in Wärme umgesetzt werden.

Ich habe endlich im Anschluss an die bisher besprochenen Versuchsreihen einige Versuche über die Elektrolyse gemischter Lösungen ausgeführt.

Es wurden die beiden Lösungen



zu gleichen Theilen mit einander gemischt und eine abgewogene Menge dieser Lösung innerhalb des Calorimeter zwischen Platinelektroden durch den Strom von zwei Bunsen'schen Chromsäureelementen elektrolysirt.

Ein Vorversuch ergab in vollständiger Übereinstimmung mit den älteren Beobachtungen von Poggendorf und Magnus, dass die Metallabscheidung an der Kathode aus reinem Kupfer bestand, während Zink in derselben nicht nachgewiesen werden konnte. Es ergab sich ferner der Unterschied, dass während aus der reinen Kupfersulfatlösung das Metall vollkommen dicht abge-

schieden wurde, der Metallniederschlag bei der Elektrolyse der gemischten Lösung nur zum Theil aus dichtem Kupfer bestand, während ein anderer Theil der Kupfers sich in lockerer, schwammiger Gestalt abgeschieden hatte. Es musste daher die Gewichtsbestimmung des abgeschiedenen Kupfer in der Weise ausgeführt werden, dass man den Metallniederschlag in verdünnter Salpetersäure auflöste und die Menge des aus dieser Lösung durch Kaliumhydroxyd gefällten Kupferoxydes wog.

Ich fand, dass während der Abscheidung eines Gramm Kupfer aus der gemischten Lösung:

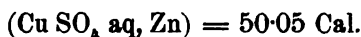
1.736 Cal.

entwickelt wurden.

Die Abscheidung des reinen Kupfer an der Kathode kann in zweifacher Weise gedeutet werden. Entweder man nimmt mit Favre an, der Strom zerlege zunächst das leichter zersetzliche Kupfersulfat und lasse das Zinksulfat intact, oder man deutet mit Hittorff den Vorgang in der Weise, dass man annimmt, beide Salze würden zu gleichen Theilen zerlegt, das Zink löse sich aber an der Kathode in der Kupfersulfatlösung unter Abscheidung einer äquivalenten Menge Kupfer wieder auf. Abgesehen davon, dass die letztere Deutung dem Faraday'schen Gesetze besser entspricht, scheint mir auch das Aussehen des abgeschiedenen Kupfer den Gedanken an eine secundäre Abscheidung eines Theiles desselben sehr nahe zu legen.

Eine thermochemische Entscheidung über die Zulässigkeit der einen oder der anderen Deutung des Vorganges ist wegen einer sonderbaren Eigenschaft der aufzulösenden Gleichung nicht zu erbringen.

Nehmen wir an, von dem einen Gramm Kupfer, welches aus der gemischten Lösung abgeschieden wurde, seien x Theile durch den Strom direct abgeschieden worden, $(1-x)$ Theile dagegen durch die secundäre Auflösung des zunächst abgeschiedenen Zink in der Kupfersulfatlösung. Da nach Thomsen die Wärmetönung:



ist, so entspricht der Ausfällung eines Gramm Kupfer durch metallisches Zink aus der Sulfatlösung die Wärmetönung:

0.788 Cal.

Wir erhalten mithin die Gleichung:

$$1.807x + (1-x)0.788 + (1-x)\frac{65}{63.5}0.977 = 1.736.$$

Der dritte Summand entspricht der Wärmetönung, welche durch die ursprüngliche Abscheidung des Zink durch den Strom bedingt ist. Lösen wir diese Gleichung in Bezug auf x auf, so erhalten wir:

$$0.02x = -0.051$$

d. h. sehr angenähert:

$$x = \frac{0}{0}.$$

Die Gleichung besitzt also unendlich viele Wurzeln, woraus das merkwürdige Resultat folgen würde, dass bei der Elektrolyse eines Gemenges von Zinksulfat und Kupfersulfat stets dieselbe Wärmemenge entwickelt wird, unabhängig von dem Verhältniss, nach welchem die beiden Lösungen mit einander gemischt werden, nach welchem also auch die beiden Metalle sich aller Wahrscheinlichkeit nach zunächst an der Kathode abscheiden. Eine unerlässliche Voraussetzung ist natürlich, dass sich noch genügend viel Kupfersulfat in der Lösung befindet, damit der besprochene secundäre Process vor sich gehen kann.

Ich mischte, um diese Folgerung einer experimentellen Prüfung zu unterziehen, die beiden Sulfatlösungen in dem Verhältniss, dass die Zinklösung zwei Drittel der Mischung ausmachte, und elektrolysirte dieselbe zwischen Platinelektroden. Auch hier schied sich an der Kathode reines Kupfer ab, während Zink nicht nachgewiesen werden konnte. Die während der Abscheidung eines Gramm Kupfer beobachtete Wärmeentwicklung betrug:

$$1.832 \text{ Cal.}$$

ein Werth, der mit dem, bei dem ersten Versuche erhaltenen merklich übereinstimmt.

Zur Reduction hyperelliptischer Integrale.

Von Ludwig Kotányi.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1883.)

Wenn ein zur Irrationalität $\sqrt{R(z)}$ gehöriges hyperelliptische Integral, wo $R(z)$ eine ganze Function vom Grade $(2p+1)$ ist, sich mittelst einer algebraischen Substitution auf ein hyperelliptisches Integral mit der Irrationalität $\sqrt{R_1(y)}$ reduciren lässt, worin $R_1(y)$ eine ganze Function vom Grade $(2\sigma+1)$ in y bedeutet, $\sigma \leq p$, so findet bekanntlich,¹ wenn man unter $F(z)$ ganze Functionen $(p-1)$ -sten Grades versteht, auch folgendes System von hyperelliptischen Differentialgleichungen statt.

$$\frac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{2F_0(z) dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$\frac{y_1 dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2 dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{y_\sigma dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{2F_1(z) dz}{\sqrt{R(z)}}$$

1)

$$\frac{y_1^k dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^k dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{y_\sigma^k dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{2F_k(z) dz}{\sqrt{R(z)}}$$

.

$$\frac{y_1^{\sigma-1} dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^{\sigma-1} dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \dots + \frac{y_\sigma^{\sigma-1} dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{2F_{\sigma-1}(z) dz}{\sqrt{R(z)}}$$

In diesen Gleichungen bedeuten

$$y_1, y_2, \dots, y_\sigma$$

¹ Königsberger: „Vorl. über die Theorie der hyperell. Integrale.“
7. Vorl.

die Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$2) \quad y^\sigma + \chi_1(z)y^{\sigma-1} + \dots + \chi_\sigma(z) = 0,$$

deren Coefficienten rational aus z zusammengesetzt sind. Ausserdem lassen sich dann

$$\sqrt{R_1(y_1)}, \quad \sqrt{R_1(y_2)}, \quad \dots \sqrt{R_1(y_\alpha)} \dots \sqrt{R_1(y_\sigma)}$$

als rationale Functionen von z und der zugehörigen y -Grösse, multiplicirt mit $\sqrt{R(z)}$ ausdrücken, so dass

$$3) \quad \sqrt{R_1(y_\alpha)} = f(z_1, y_\alpha) \sqrt{R(z)},$$

worin $f(z_1, y_\alpha)$ eine rationale Function von z und y_α bedeutet. Umgekehrt ist ersichtlich, dass die Existenz der Gleichungen 2) und 3) ein Gleichungssystem von der Form 1) nach sich zieht. Denn aus 2) folgt, unter φ eine rationale Function verstanden,

$$dy_\alpha = \varphi(z_1, y_\alpha) dz$$

oder

$$y_\alpha^k dy_\alpha = y_\alpha^k \varphi(z_1, y_\alpha) dz$$

und es sei $k \leq (\sigma - 1)$. Diese Gleichung durch 3) dividirt, gibt

$$\frac{y_\alpha^k dy_\alpha}{\sqrt{R_1(y_\alpha)}} = \frac{\psi(z_1, y_\alpha) dz}{\sqrt{R(z)}},$$

und wieder ist ψ eine rationale Function der Argumente.

Durch Summation nach α von 1 bis σ erhält man

$$4) \quad \sum_1^\sigma \frac{y_\alpha^k dy_\alpha}{\sqrt{R_1(y_\alpha)}} = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \sum_1^\sigma \psi(z_1, y_\alpha).$$

Da aber

$$\sum_1^\sigma \psi(z_1, y_\alpha) = \Phi(z)$$

als rationale symmetrische Function der Lösungen von 2) sich als rationale Function $\Phi(z)$ von z darstellen lässt, so ist 4) eine der Gleichungen aus 1), da man ja auf der linken, also auch auf der rechten Seite Integrale erster Gattung erhält.

Um also hyperelliptische Integrale von der Ordnung $(p-1)$ zu finden, welche sich auf niedere, also auf hyperelliptische Integrale von der Ordnung $(\sigma-1)$ reducieren lassen, muss man $R(z)$ so wählen, dass man die Coëfficienten von 2) so bestimmen kann, dass die Gleichung 3) stattfindet, oder dass der Quotient

$$\frac{\sqrt{R_1(y)}}{\sqrt{R(z)}} = f(z_1, y)$$

eine rationale Function von z und y wird, oder dass er mit y gleichverzweigt ist, wobei die Coëfficienten von $R_1(y)$ auch erst zu bestimmen sein werden.

Zuerst soll die Frage nach der Reduction auf elliptische Integrale erledigt werden.¹

Es sei also

$$R(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \dots (z-\alpha_{2p+1})$$

$$R_1(y) = y(y-1)(y-\mu).$$

Dann ist zu untersuchen, wann sich die Coëfficienten in

$$5) \quad y = \frac{U}{V},$$

worin U und V ganze Functionen vom Grade m seien und die Grösse μ so bestimmen lassen, dass

$$6) \quad \frac{\sqrt{y(y-1)(y-\mu)}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \dots (z-\alpha_{2p+1})}}$$

eine rationale Function von z wird.

Bezeichnet man nun die Werthe

$$0, 1, \mu, \infty$$

¹ Vgl. Königsberger: „Allgem. Untersuchungen a. d. Theorie der Differentialgleichungen,“ §. 12.

in irgend einer Reihenfolge mit

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4,$$

und wählt m als ungerade Zahl so, dass

$$2m < 2p+1 < 3m,$$

dann wird der Quotient 6) eine rationale Function von z , wenn man nach 5) entsprechen lässt

den Werthen $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ den Werth $y = \beta_1$,

$n \quad n \quad z = \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_{2m} \quad n \quad n \quad y = \beta_2$,

$n \quad n \quad z = \alpha_{2m+1}, \alpha_{2m+2}, \dots, \alpha_{2p+1} \quad n \quad n \quad y = \beta_3$,

dem Werthe $z = \infty \quad n \quad n \quad y = \beta_4$,

wenn man ausserdem festsetzt, dass die anderen, dem Werthe $y = \beta_3$ entsprechenden z -Werthe, deren Anzahl

$$3m - (2p+1)$$

ist, zu je zwei einander gleich sind, wenn ebenso die dem $y = \beta_4$ ausser $z = \infty$ entsprechenden

$$m - 1$$

z -Werthe zu je zwei einander gleich werden.

Diese Zuordnung gibt für die $(2m+1)$ Constanten in 5) und die Grösse μ

$$2p+2 + \frac{3m - (2p+1)}{2} + \frac{m-1}{2}$$

Bedingungsgleichungen, so dass sich für die Grössen α

$$p - 1$$

Bedingungen ergeben.

Ähnlich trifft man die Zuordnung, wenn m einer anderen Ungleichung genügt, oder wenn m eine gerade Zahl ist. Man kommt immer zu derselben Zahl von Bedingungen für die Grössen α . Man hat nur stets m Verzweigungen des Nenners von 6) einem Verzweigungspunkte des Zählers zuzuordnen.

Da aber die Anzahl der letzteren nur vier ist, so darf nicht $2p+2 > 4m$; es muss vielmehr

$$4m \geq 2p+2 \qquad m \geq \frac{p+1}{2}.$$

Der niedrigste Transformationsgrad ist also für ein

$$\text{gerades } p: \frac{p}{2} + 1 \qquad \text{ungerades } p: \frac{p+1}{2}.$$

Nimmt man nun in der oben stehenden Zuordnung

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = \infty, \beta_3 = 1, \beta_4 = \mu,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} U &= \mu (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_m), \\ V &= (z - \alpha_{m+1})(z - \alpha_{m+2}) \dots (z - \alpha_{2m}), \\ \mu &= \frac{(\alpha_{2m+1} - \alpha_{m+1})(\alpha_{2m+1} - \alpha_{m+2}) \dots (\alpha_{2m+1} - \alpha_{2m})}{(\alpha_{2m+1} - \alpha_1)(\alpha_{2m+1} - \alpha_2) \dots (\alpha_{2m+1} - \alpha_m)} = \\ &= \frac{(\alpha_{2m+2} - \alpha_{m+1})(\alpha_{2m+2} - \alpha_{m+2}) \dots (\alpha_{2m+2} - \alpha_{2m})}{(\alpha_{2m+2} - \alpha_1)(\alpha_{2m+2} - \alpha_2) \dots (\alpha_{2m+2} - \alpha_m)} = \\ &= \dots = \frac{(\alpha_{2p+1} - \alpha_{m+1})(\alpha_{2m+2} - \alpha_{m+2}) \dots (\alpha_{2p+1} - \alpha_{2m})}{(\alpha_{2p+1} - \alpha_1)(\alpha_{2p+1} - \alpha_2) \dots (\alpha_{2p+1} - \alpha_m)} \end{aligned}$$

Diese $(2p-2m)$ Bedingungen für die Grössen α hängen nur von Differenzen der α ab. Dies ist eine Eigenschaft der Bedingungsgleichungen für jede Transformation und Reduction hyperelliptischer Integrale. Denn substituirt man für z den Ausdruck $(z-h)$, wo h eine beliebige Grösse ist, so müssen die neuen α -Grössen — diese sind jetzt $(\alpha+h)$ — wieder denselben Bedingungsgleichungen genügen, da der Charakter des Integrals nicht verändert wurde; also hängen die Bedingungsgleichungen nur von den Differenzen der α -Grössen ab.

Genügen nun die Grössen den Bedingungen, und sind die Coefficienten in 5) der Zuordnung gemäss bestimmt, dann sieht man auch umgekehrt, dass zu der gegebenen Irrationalität gehörige

hyperelliptische Integrale erster Gattung vorhanden sind, welche sich auf elliptische Integrale reducieren. Denn es ist dann

$$\frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu)}} = \frac{V \frac{dU}{dz} - U \frac{dV}{dz}}{\sqrt{UV}(V-U)(\mu V-U)} dz = \frac{V \frac{dU}{dz} - U \frac{dV}{dz}}{V-U} \frac{dV}{dz}$$

$$= \frac{\sqrt{\mu(z-\alpha_1) \dots (z-\alpha_{3m})(z-\alpha_1)^2 \dots (z-\alpha_{m-1})^2 (z-\alpha_{3m+1}) \dots (z-\alpha_{2p+1})(z-d_1) \dots (z-d_{3m-(2p+1)})^2}}{V-U} \frac{dV}{dz}$$

Kotányi.

worin

$$(z-c_p)^2 \quad p = 1, 2, \dots, \frac{(m-1)}{2}$$

die in

$$\mu V-U,$$

$$(z-d_\sigma)^2 \quad \sigma = 1, 2, \dots, \frac{3m-(2p+1)}{2}$$

die in

$$V-U$$

in Folge der Zuordnung enthaltenen Doppelfactoren sind. Ihre ersten Potenzen treten vor die Wurzel und sind bekanntlich im Zähler enthalten, der also den Grad

$$2m-2-\frac{m-1}{2}-\frac{3m-(2p+1)}{2}=p-1$$

erhält und deren Coëfficienten sich auch als Functionen der Grösse α ergeben. Soll aber der Zähler nur eine ganze Function vom Grade k sein, so müssen die Coëfficienten der

$$p-1-k$$

höchsten Potenzen verschwinden, was eben so viele Bedingungen für die α ergibt. Für diese hat man also im Ganzen

$$p-1+p-1-k=2(p-1)-k$$

Bedingungen. Unter der Wurzel befinden sich wesentlich nur $(2p-1)$ von einander unabhängige Grössen, da durch eine lineare Substitution

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 1$$

gemacht werden kann, was im Folgenden immer als geschehen vorausgesetzt werden soll. Diese willkürlichen Grössen kann man so wählen, dass sie den Bedingungen genügen, und es bleiben noch

$$2p-1-2(p-1)+k=k+1$$

Grössen willkürlich. Für

$$k = p-1$$

erhält man den Satz:

In einem hyperelliptischen Integrale von der Ordnung $(p-1)$ und dem Grade $(p-1)$ kann man p Grössen willkürlich wählen und die anderen so bestimmen, dass das hyperelliptische Integral sich auf ein elliptisches Integral reduciert.

Es sei nun p eine gerade Zahl, und nehme man die Transformation niedrigsten Grades

$$y = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_{\frac{p}{2}+1} z^{\frac{p}{2}+1}}{1 + b_1 z + \dots + b_{\frac{p}{2}+1} z^{\frac{p}{2}+1}}$$

und bestimme die Zuordnung so, dass

den Werthen $z = 0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\frac{p}{2}+1}$ entspricht $y = 0,$

$$n \quad n \quad z = \alpha_{\frac{p}{2}+2}, \alpha_{\frac{p}{2}+3}, \dots, \alpha_{p+2} \quad n \quad y = 1,$$

$$n \quad n \quad z = \infty, \alpha_{p+3}, \dots, \alpha_{\frac{3p}{2}+2} \quad n \quad y = \infty,$$

$$n \quad n \quad z = \alpha_{\frac{3p}{2}+3}, \dots, \alpha_{2p+1} \quad n \quad y = \mu,$$

dass ferner die zwei anderen dem $y = \mu$ entsprechenden Werthe von z einander gleich seien, so hat y in Folge der zwei ersten Bedingungen und der Bedingung $y = \infty$ für $z = \infty$ die Form

$$7) \quad y = \frac{z(z-1)(c_0 + c_1 + \dots + c_{\frac{p}{2}-1} z^{\frac{p}{2}-1})}{1 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots + d_{\frac{p}{2}} z^{\frac{p}{2}}}$$

und man kann die p Transformations-Coëfficienten als die willkürlichen ansehen. Dann bestimmen sich die Grössen α bis zu $\alpha_{\frac{3p}{2}+2}$ eindeutig durch diese Constanten. Da für $y = \mu$ die

Gleichung zwei gleiche Lösungen haben soll, μ aber in der Discriminante in der p -ten Potenz vorkommt, so erhält man für μ , also auch für

$$\alpha_{\frac{3p}{2}+3}, \alpha_{\frac{3p}{2}+4}, \dots, \alpha_{2p+1}$$

p verschiedene Werthe, so dass mit Hilfe derselben Transformationsgleichung 7), wo alle Constanten willkürlich sind, folgende Reductionen statthaben:

$$\int \frac{(A_1 + B_1 z + \dots + N_1 z^{p-1}) dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_s)(z-\alpha_n) \dots (z-\alpha_{\frac{3p}{2}+3})} \dots (z-\alpha_{\frac{1}{2}})^{s+3}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_1)}}$$

$$\int \frac{(A_2 + B_2 z + \dots + N_2 z^{p-1}) dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_s)(z-\alpha_n) \dots (z-\alpha_{\frac{3p}{2}+3})} \dots (z-\alpha_{\frac{1}{2}})^{s+3}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_2)}}$$

.....

$$\int \frac{(A_p + B_p z + \dots + N_p z^{p-1}) dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_s)(z-\alpha_n) \dots (z-\alpha_{\frac{3p}{2}+3})} \dots (z-\alpha_{\frac{1}{2}})^{s+3}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_p)}}$$

Will man unter den Wurzeln der hyperelliptischen Integrale dieselben Ausdrücke haben, so muss man die Coefficienten in 7) so bestimmen, dass

$$\alpha_{\frac{3p}{2}+v}^{(1)} = \alpha_{\frac{3p}{2}+v}^{(s)} \quad s = 2, 3, \dots, p \quad v = 3, 4, \dots, \left(\frac{p}{2} - 1\right).$$

Diese Bestimmung ist im Allgemeinen nur möglich, wenn

$$\left(\frac{p}{2} - 1\right)(p-1) \leq p$$

was nur für $p = 2$ und $p = 4$ erfüllt ist, in welchem Falle noch zwei, beziehungsweise nur eine Constante willkürlich bleiben. Also: Für hyperelliptische Integrale, deren Geschlecht eine gerade Zahl ist, existieren im Allgemeinen nur für hyperelliptische Integrale erster und dritter Ordnung so viel Integrale, als das Geschlecht anzeigt, welche sich mit Hilfe derselben Transformation vom niedrigsten Grade auf elliptische Integrale reducieren.

Ist aber p eine ungerade Zahl, so sieht man unmittelbar, dass für den niedrigsten Transformationsgrad ein ähnlicher Satz nicht existiert. Wählt man aber den nächst höheren Grad, also

$$y = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_{\frac{p+3}{2}} z^{\frac{p+3}{2}}}{1 + b_1 z + \dots + b_{\frac{p+3}{2}} z^{\frac{p+3}{2}}}$$

und trifft die Zuordnung, dass

den Werthen $z = 0, 1, \alpha_3 \dots \alpha_{\frac{p+3}{2}}$ entspricht $y = 0,$

$$n \quad n \quad z = \alpha_{\frac{p+5}{2}} \dots \alpha_{p+1} \quad n \quad y = 1,$$

$$n \quad n \quad z = \infty, \alpha_{p+2} \dots \alpha_{\frac{3p+3}{2}} \quad n \quad y = \infty,$$

$$n \quad n \quad z = \alpha_{\frac{3p+5}{2}} \dots \alpha_{2p+1} \quad n \quad y = \mu,$$

dass ferner die zwei anderen, dem $y = 1$ entsprechenden z -Werthe einander gleich seien, und dasselbe für $y = \mu$, so hat dann die Transformationsgleichung in Folge der zwei ersten Bedingungen die Form

$$y = \frac{z(z-1)(c_0 + c_1 z + \dots + c_{\frac{p-1}{2}} z^{\frac{p-1}{2}})}{1 + d_1 z + \dots + d_{\frac{p+1}{2}} z^{\frac{p+1}{2}}}$$

worin sich durch die für $y = 1$ angenommene Verzweigung noch eine Constante bestimmt, so dass man die übrig bleibenden

p Constanten als die willkürlichen ansehen kann. Für μ erhält man $(p+1)$ Werthe, unter denen aber $\mu = 1$ enthalten ist, so dass wieder nur folgende p Reductionen stattfinden:

$$\int \frac{(A_1 + B_1 z + \dots + N_1 z^{p-1}) dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_3) \dots (z-\alpha_{\frac{3p+3}{2}})(z-\alpha_{\frac{3p+5}{2}}) \dots (z-\alpha_{\frac{2p+1}{2}}^{(1)})}} =$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_1)}},$$

$$\int \frac{(A_2 + B_2 z + \dots + N_2 z^{p-1}) dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_3) \dots (z-\alpha_{\frac{3p+3}{2}})(z-\alpha_{\frac{3p+5}{2}}^{(2)}) \dots (z-\alpha_{\frac{2p+1}{2}}^{(2)})}} =$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_2)}},$$

.....

$$\int \frac{(A_p + B_p z + \dots + N_p z^{p-1}) dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_3) \dots (z-\alpha_{\frac{3p+3}{2}})(z-\alpha_{\frac{3p+5}{2}}^{(p)}) \dots (z-\alpha_{\frac{2p+1}{2}}^{(p)})}} =$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-\mu_p)}}.$$

Gleiche Ausdrücke unter den Wurzeln der hyperelliptischen Integrale kann man im Allgemeinen wieder nur dann herstellen, wenn

$$\frac{p-1}{2} (p-1) \leq p,$$

was für $p = 1$ und $p = 3$ erfüllt ist, in welchen Fällen noch eine Constante willkürlich bleibt. Wir haben also den Satz:

Für hyperelliptische Integrale, deren Geschlecht eine ungerade Zahl ist, existieren nur für elliptische Integrale und hyperelliptische Integrale zweiter

Ordnung so viel Integrale erster Gattung, als das Geschlecht anzeigt, welche mit Hilfe derselben Transformation, deren Grad den niedrigsten um 1 übersteigt, auf je ein elliptisches Integral reducierbar sind.

Als Beispiel diene der Fall $p = 2$. Dann ist

$$y = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z + z^2}$$

und die Zuordnung so, dass

$$\begin{array}{llll} \text{den Werthen } z = 0, \infty & \text{entspricht } y = 0, \\ n & n & z = \alpha_1, \alpha_2 & n & y = \infty, \\ n & n & z = 1, \alpha_3 & n & y = 1 \end{array}$$

und dass für $y = \mu$ die beiden z -Werthe gleich seien.

Es ergibt sich

$$y = \frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)z}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2$$

und μ aus der Discriminante der quadratischen Gleichung

$$\mu z^2 - [\mu(\alpha_1 + \alpha_2) + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)]z + \mu \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

$$\mu_1 = -\frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{(\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2})^2} \quad \mu_2 = -\frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}{(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})^2},$$

so dass man mit Hilfe derselben Gleichung die zwei Reductionen hat:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{(z + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}) dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_1 \alpha_2)}} &= \\ = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y) \left[1 + \frac{(\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2})^2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} y \right]}}; \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{(x - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}) dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_1 \alpha_2)}} =$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y) \left[1 + \frac{(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})^2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} y \right]}}.$$

Durch die Substitution

$$k = - \frac{1}{\alpha_1} \qquad \lambda = - \frac{1}{\alpha_2}$$

erhält man die bekannten Jacobi'schen Integrale.

Ein Beispiel für den ersten Satz bilde die Reduction eines hyperelliptischen Integrals zweiter Ordnung auf elliptische Integrale mittelst der Transformation zweiten Grades. Es sei also

$$y = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2}{b_0 + b_1 z + z^2}$$

und es entspreche

	den Werthen	$z = 0, \infty$	der Werth	$y = 0,$
"	"	$z = 1, \alpha_1$	"	$y = 1,$
"	"	$z = \alpha_2, \alpha_3$	"	$y = \mu,$
"	"	$z = \alpha_4, \alpha_5$	"	$y = \infty,$

so ist

$$y = \frac{(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)z}{(z-\alpha_4)(z-\alpha_5)}$$

$$\mu = \frac{(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)}$$

und es muss

$$\alpha_1 = \alpha_2 \alpha_3 = \alpha_4 \alpha_5;$$

dann ist

$$\int \frac{(\alpha_1 - z^2) dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)(z-\alpha_5)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)}}{(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)\sqrt{\alpha_2}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y(1-y) \left[\frac{(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)}{\alpha_2(1-\alpha_4)(1-\alpha_5)} y \right]}}.$$

Wählt man aber die Transformation dritten Grades, also

$$y = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3}$$

und ordnet zu

den Werthen $z = 0$	den Werth $y = 0,$
$n \quad n \quad z = 1, \alpha_1, \alpha_2$	$n \quad n \quad y = 1,$
$n \quad n \quad z = \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$	$n \quad n \quad y = \mu,$
$n \quad n \quad z = \infty$	$n \quad n \quad y = \infty,$

so dass die dem $y = 0$ entsprechenden zwei anderen z -Werthe einander gleich seien, und dasselbe für $y = \infty$, so erhält man

$$a_3 = 0 \quad a_2 = \frac{\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 1 - \alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_2}$$

$$a_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4 - \alpha_3 \alpha_5 - \alpha_4 \alpha_5}{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_1 \alpha_2}$$

$$b_3 = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \quad b_2 = \frac{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 a_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5}{\alpha_1 \alpha_2}$$

$$b_1 = \frac{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 a_1 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_5}{\alpha_1 \alpha_2}$$

und die Bedingungsgleichungen zwischen den Lösungen sind

$$b_2^2 - 4b_1 b_3 = 0 \quad a_1^2 - 4a_2 = 0.$$

Um nun das allgemeine Reductionsproblem zu behandeln,¹ sei zuerst das Geschlecht σ des hyperelliptischen Integrals, auf welches reducirt werden soll, eine gerade Zahl

$$\sigma = 2\pi.$$

Dann sind in

$$8) \quad \chi_0(z)y^{2\pi} + \chi_1(z)y^{2\pi-1} + \dots + \chi_{2\pi}(z) = 0$$

die Coëfficienten der rationalen ganzen Functionen

$$\chi_0(z), \chi_1(z), \dots, \chi_{2\pi}(z),$$

¹ Vgl. Königsberger: „Über die Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips.“ Crelle's Journal, Bd. 87.

und in dem Ausdrucke

$$9) \quad \frac{\sqrt{(y-\beta_1)(y-\beta_2)\dots(y-\beta_{4\pi+1})}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{2p+1})}}$$

die Grössen

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{4\pi+1}$$

so zu bestimmen, dass 9) eine rationale Function von z und y wird.

Nun lautet die Entwicklung des Nenners von 9) um einen Punkt α

$$(z-\alpha_p)^{1/2} [1 + a_1(z-\alpha_p) + a_2(z-\alpha_p)^2 + \dots];$$

also muss

$$10) \quad y - \beta_p = b_1(z-\alpha_p) + b_2(z-\alpha_p)^2 + \dots$$

oder

$$11) \quad y - c_0 = c_1(z-\alpha_p)^{1/2} + c_2(z-\alpha_p)^{3/2} + \dots$$

worin c_0 mit keinem der β zusammenfällt. In beiden Fällen sieht man unmittelbar, dass dann der Quotient 9) in dem Bereiche von α_p thatsächlich wie y selbst verzweigt ist.

Da aber einem α -Werthe 2π Werthe von y entsprechen, welche, wenn nicht $y = \beta_p$ ist, nach Gleichung 11) paarweise einander gleich sein müssen, so kann die Zuordnung 10) nicht bestehen; es sei denn, dass einem α -Werthe zwei Werthe β entsprechen, in welchem Falle man noch einem α dieselben zwei β entsprechen lässt.

Die Zuordnung 11) für jedes α_p durchgeführt, liefert

$$\pi(2p+1)$$

Bedingungen. Dieselbe Zuordnung gilt für $z = \infty$, was weitere

π

Bedingungen gibt.

Nun ist der Zähler von 9) in β_p verzweigt. Da ihm kein α_p entsprechen kann, so muss

$$12) \quad y - \beta_p = d_2(z-\gamma_p)^2 + d_3(z-\gamma_p)^3 + \dots$$

worin γ_p verschieden ist von allen α -Werthen. Diese Zuordnung verlangt, dass die nach 8) den β -Werthen entsprechenden Werthe

z paarweise einander gleich seien; es muss also r , der Grad von 8) bezüglich z , eine gerade Zahl sein. Wählt man die β -Werthe aus den Lösungen der Discriminante von 8), so hat man nur noch die Bedingung aufzustellen, dass für eben diese Werthe die übrig bleibenden Gleichungen vom Grade $(r-2)$ nur Paare gleicher Lösungen enthalten. Die Anzahl dieser Bedingungen ist

$$\frac{r-2}{2} (4\pi+1).$$

Ebenso müssen die dem Werthe $y = \infty$ entsprechenden z -Werthe paarweise gleich sein, was weitere

$$\frac{r}{2}$$

Bedingungen gibt.

Im Übrigen wird der Quotient 9) so verzweigt sein, wie y . Da man

$$(r+1)(2\pi+1)-1$$

Constante hat, welche

$$\pi(2p+1) + \frac{r-2}{2} (4\pi+1) + \frac{r}{2} + \pi$$

Bedingungen genügen sollen, so ergeben sich

$$2\pi(p-2)-1$$

Bedingungsgleichungen für die Grösse α .

Aus dieser Anzahl folgt, dass für ein gerades Geschlecht nur für hyperelliptische Integrale erster Ordnung eine allgemeine Transformation existiert.

Ist aber σ eine ungerade Zahl

$$\sigma = 2\pi - 1$$

so hat man in der Gleichung

$$13) \quad \varphi_0(z)y^{2\pi-1} + \varphi_1(z)y^{2\pi-2} + \dots + \varphi_{2\pi-1}(z) = 0$$

die Coëfficienten der ganzen Functionen $\varphi(z)$ so zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(y-\beta_1)(y-\beta_2)\dots(y-\beta_{4\pi-1})}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{2\pi+1})}}$$

eine rationale Function von z und y wird.

Hier kann man den $z = \alpha_p$ den Werth $y = \beta_p$ entsprechen lassen, so dass die anderen $(2\pi - 2)$ Werthe von y paarweise gleich sind. So ordnet man zu für

$$z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2\pi-1}.$$

Ferner soll je zweien von den Werthen

$$z = \alpha_{4\pi}, \alpha_{4\pi+1}, \dots, \alpha_{2p+1}.$$

ein $y = \beta_p$ entsprechen. Die dem $y = \beta_r$ entsprechenden, noch nicht fixierten z -Werthe sollen paarweise gleich sein, woraus folgt, dass r , der Grad von \mathcal{B}) bezüglich z , eine ungerade Zahl sein muss. Für $z = \infty$ soll $y = \infty$ und die übrigen Werthe paarweise gleich sein, und ebenso die z -Werthe für $y = \infty$.

Für die α -Grössen erhält man

$$2\pi(p-2) - p + 1$$

Bedingungen. Daraus ergibt sich, dass bei ungeradem Geschlecht nur elliptische Integrale eine allgemeine Transformation besitzen.

Mit Hilfe der so bestimmten Anzahlen für die Bedingungengleichungen der Grössen α kann man die im Allgemeinen löslichen Reductionsprobleme angeben und wirklich ausführen, womit die aufgeworfene Frage erledigt ist.

Man kann noch schliesslich leicht bemerken, dass auf der linken Seite der Gleichungen im Systeme 1) auch weniger als σ Integrale vorkommen können. Dies wird immer eintreten, wenn Gleichung 2) reductibel ist, in welchem Falle jeder irreductible Factor ein System von der Form 1) gibt.

Geometrische Darstellung der Theorie der Polargruppen.

Von Emil Waelsch,

ord. Hörer an der deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1883.)

1. Definition der Polargruppen. Es gibt immer eine Curve n -ter Ordnung \mathfrak{C}_n , welche n durch einen Punkt s gehende Strahlen in ihren Schnittpunkten (a) mit einer Geraden T berührt und in einem Punkte v des Strahles, der von s nach einem Punkte o von T geht, einen $(n-1)$ -fachen Punkt hat. Die Tangenten (t) dieses Punktes schneiden T in $(n-1)$ Punkten (m) , welche, wie leicht gezeigt werden kann, nur von dem Punktsystem (a) und der Lage von o abhängen; sie werden erste Polargruppe des Poles o in Bezug auf (a) genannt und sollen mit $(a)_1^o$ bezeichnet werden.¹ (Die durch diese Construction entstehende Figur wird im Folgenden „Grundfigur“ genannt.)

Die Punkte $(m)_1^o$ sind die zweite Polargruppe, $(a)_2^o$, und man gelangt, dies fortgesetzt, zur Definition der r -ten Polargruppe, $(a)_r^o$, eines Poles o , bezüglich des Punktsystems (a) . Zugleich ergibt sich:

$$\text{Satz 1. } ((a)_r^o)^o = (a)_{r+1}^o.$$

Für ein zweipunktiges System (a) kann leicht gezeigt werden, dass die Punkte o , (a) , $(a)_1^o$ vier harmonische sind.

2. Unveränderlichkeit der polaren Beziehung durch Centralprojection. Ändert sich in der Grundfigur die Gerade T in eine beliebige T' und gleichzeitig der Punkt v in einen Punkt v' auf sv , so übergeht \mathfrak{C}_n in eine \mathfrak{C}'_n , welche ihr in einer Perspectivität entspricht, die s zum Centrum v, v' ; T, T' zu

¹ Die Identität derselben mit der bekannten Polargruppe wird in 7. bewiesen werden.

entsprechenden Gebilden hat. Die entsprechenden Punktgruppen $(t)T$; $(t')T'$ liegen auf Strahlen durch s , und man hat daher mit Hilfe von Satz 1.

Satz 2. Die polare Beziehung ändert sich durch Centralprojection nicht.

Mit Hilfe des vollständigen Vierseits kann nun, was später nützlich sein wird, bewiesen werden, dass für ein zweipunktiges System (a) gilt: Ist $m = (a)_p^0$, so ist auch $o = (a)_m^n$.

3. Zusammenfallen der Fundamentalpunkte.

a) Fallen σ der Punkte (a) in einen α aber nicht mit dem Pole o zusammen, so hat die \mathfrak{C}_n in α einen σ -fachen Selbstberührungspunkt mit der Tangente $s\alpha$ und enthält also, da sie in v einen $(n-1)$ -fachen Punkt hat, die $(\sigma-1)$ -mal gezählte Gerade als Theil. Man hat daher für die gemachten Voraussetzungen einen Satz für die erste Polargruppe, welcher sich durch Satz 1. verallgemeinert in:

Satz 3. Fallen σ der Punkte (a) in einen α zusammen, so fallen in α auch $(\sigma-i)$ Punkte der i -ten Polargruppe für jeden beliebigen Pol.

b) Fallen σ der Punkte (a) mit dem Pole o zusammen, so zerfällt die \mathfrak{C}_n in die σ -mal gezählte Gerade vs und eine $\mathfrak{C}_{n-\sigma}$, welche für die übrigen einfachen Punkte von (a) die erste Polargruppe von o liefert. Dies giebt mit Hilfe von Satz 1.:

Satz 4. Fallen σ der Punkte (a) mit dem Pole o zusammen, so fallen in o σ Punkte einer beliebigen, der $(n-i)$ -ten, seiner Polargruppen (mit der Einschränkung $i \leq \sigma$). Die übrigen Punkte dieser Gruppe sind die $(n-i)$ -te Polargruppe für denselben Pol bezüglich der $n-\sigma$ nicht mit o zusammenfallenden Punkten von (a) .

Ist $\sigma = i$, so hat die \mathfrak{C}_{i+1} , welche schliesslich zur Construction der $(n-i)$ -ten Polargruppe verwendet wurde, die $\sigma = i$ -mal gezählte Gerade ov als Tangentencomplex ihres i -fachen Punktes v .

Ist $\sigma = i+1$, so hat diese \mathfrak{C}_{i+1} in v einen $(i+1)$ -fachen Punkt, und es kann daher jede durch diesen Punkt gehende Gerade als Tangente des obigen i -fachen Punktes angesehen werden. Es ist also in dem letzten Falle die $(n-i)$ -te und also jede höhere Polare unbestimmt.

c) Bewegt sich in der Grundfigur s auf einer Geraden, so bilden die entstehenden \mathfrak{C}_n ein Büschel, welches durch die Tangenten (t) seiner Curven alle ersten Polargruppen auf T liefert. Eine Gerade durch v kann nun, des Curvenbüschels wegen, nur einmal als eine Gruppe (t) bildend, also jeder Punkt von T nur einmal als einer ersten Polargruppe angehörend, auftreten. Da aber ein Punkt von (a) nach b) seiner ersten Polargruppe angehört, so kann er nicht mehr Theil einer anderen ersten Polargruppe sein und es folgt:

Satz 5. Soll ein Pol mit einem Punkte einer seiner Polargruppen zusammenfallen, so muss er zu (a) gehören.

4. Polargruppen für verschiedene Pole. Es sei die Definition der ersten Polaren eines Punktes o in Bezug auf eine Curve n -ter Ordnung C_n mit Hilfe der definirten Polargruppen gegeben worden, und man bezeichne sie durch $(C_n)_1^o$.

Hilfssatz 1. Berühren sich zwei Curven C_n und C'_n in n Punkten (a) einer Geraden, die durch o geht, so berühren sich die Curven $(C_n)_1^o$ und $(C'_n)_1^o$ in den Punkten $(a)_1^o$.

Hilfssatz 2. Hat eine C_n einen $(n-1)$ -fachen Punkt v mit den Tangenten (t), so hat für einen beliebigen Pol o die Curve $(C_n)_1^o$ in v einen $(n-2)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die Geraden $(t)_1^o$ sind.

Diese Sätze lassen sich mit dem Bisherigen leicht beweisen.

Satz 6. $(a)_1^{o' o} \equiv (a)_1^{o' o}$.

Beweis. In der Grundfigur bestimme man für einen Punkt o' der Geraden T die Curve $(\mathfrak{C}_n)_1^{o'}$; nach Hilfssatz 1. berührt sie die Geraden s ; $(a)_1^{o'}$, in den Punkten $(a)_1^{o'}$ und nach Hilfssatz 2. hat sie in ihrem $(n-2)$ -fachen Punkte v die Geraden v ; $(a)_1^{o' o}$ zu Tangenten.

Zur Construction der Punkte $(a)_1^{o' o}$ wird eine \mathfrak{C}_{n-1} verwendet, welche die Geraden s ; $(a)_1^{o'}$ in den Punkten $(a)_1^{o'}$ berührt und in v einen $(n-2)$ -fachen Punkt hat, dessen Tangenten die Geraden v ; $(a)_1^{o' o}$ sind.

$(\mathfrak{C}_n)_1^{o'}$ und \mathfrak{C}_{n-1} haben $(n-2)^2 + 2(n-1) = (n-1)^2 + 1$ Punkte gemein, sind daher identisch und die Tangenten ihrer $(n-2)$ -fachen Punkte dieselben, womit Satz 6. bewiesen.

Nach diesem Satze ist $(a)_{11 \dots 11}^{00 \dots 00} \dots (a)_{11 \dots 11}^{0'0' \dots 0'0'} = (a)_{11 \dots 11}^{0'0' \dots 0'0'0'0' \dots 0'0'}$,
 (wo r -mal o und r' -mal o' nebeneinander steht), und man hat daher:

Satz 7. $(a)_{rr'}^{0'0'} = (a)_{r'r}^{0'o}$.

5. Reciprocität der Polargruppen. Man bestimme die zwei Punkte $(\alpha) \equiv (a)_{n-2}^0$, den Punkt $m \equiv (a)_{n-1}^0 \equiv (\alpha)_1^0$, und dann die Punkte $(\beta) \equiv (\alpha)_1^m$; dann ist nach dem letzten Satze $(\alpha)_1^m \equiv (\beta)_{n-2}^0$ und dies $= o$, weil nach 2., wenn $m \equiv (\alpha)_1^0$, auch $o \equiv (\alpha)_1^m$. Da also $(\beta)_{n-2}^0 = o$ ist, so muss nach Satz 5. o einer der Punkte (β) sein, und man hat:

Satz 8. Ist $m \equiv (a)_{n-1}^0$, so ist o einer der Punkte $(a)_1^m$.

Bestimmt man die Gruppe $(m) \equiv (a)_r^0$ und für einen Punkt m derselben die Gruppe $(p) \equiv (a)_{n-r-1}^m$, so ist nach Satz 7. der Punkt $(p)_r^0 \equiv (m)_{n-r-1}^m$, nach Satz 4., $\equiv m$. Nach Satz 8. ist jetzt o einer der Punkte $(p)_1^m$ und folglich nach Satz 1. o einer der Punkte $(a)_{n-r}^m$, also hat man:

Satz 9. Ist m ein Punkt der Gruppe $(a)_r^0$, so ist o ein Punkt der Gruppe $(a)_{n-r}^m$.

6. Fundamentalpunkte in Polargruppen. Die letzten $(n-1)$ Punkte von $(a) = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ sollen mit (a') bezeichnet werden. Ist $a_1 \equiv (a')_{v-1}^o$, so ist nach Satz 8. o einer der Punkte $(a')_{n-r}^{a_1}$ und nach Satz 4. einer der Punkte $(a)_{n-r}^{a_1}$; also folgt nach Satz 9.:

Satz 10. Ist a_1 ein Punkt der $(r-1)$ -ten Polargruppe bezüglich des Punktsystems $a_2 a_3 \dots a_n$ für den Pol o , so ist a_1 auch ein Punkt der r -ten Polargruppe für das Punktsystem $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ und denselben Pol.

7.¹ Über die erste Polare und Polargruppe. Construiert man eine Curve \mathfrak{C}_n , welche in einem Punkte v der Ebene einen $(n-1)$ -fachen Punkt hat und eine C_n in n Punkten, die auf einer Geraden T liegen, berührt, so schneiden die Tangenten (t) des Punktes v die T in $(n-1)$ Punkten (p) , die der ersten Polaren $(C_n)_1^0$ angehören. Denn nach dem Satze von Mac-Laurin (Cremona, ebene Curven, S. 108) fällt die gerade Polare eines Punktes von (p) bezüglich \mathfrak{C}_n mit der geraden Polare dieses Punktes bezüglich \mathfrak{C}_n zusammen. Letztere geht durch v , also ist die Behauptung erwiesen.

¹ Als Anhang.

Besteht C_n aus n durch einen Punkt s gehenden Geraden so erhält man die Grundfigur in 1. und erkennt in den dort bestimmten Punkten (m) die bekannte erste Polargruppe.

Ferner folgt: Die ersten Polaren eines Punktes v in Bezug auf alle Curven, welche in n Punkten (a) einer Geraden T die nämlichen Tangenten (A) haben, gehen durch dieselben $(n-1)$ festen Punkte von T .

Wird eine der Tangenten (A) z. B. A um ihren Punkt a gedreht, so bilden für ein festgehaltenes v die Punkte (p) eine Involution I_{n-1} , weil es ja immer ein Curvenbüschel unter den möglichen C_n geben muss. Schneiden sich die festen Geraden (A) in einem Punkte s , so tritt entsprechend der durch s gehenden Lage von A in der Involution I_{n-1} , wenn vs ; $T \equiv o$ ist, die Gruppe $(a)_1^0$ auf.

Geht A durch v , so besteht die entsprechende \mathfrak{G}_n , da auf va $(n+1)$ ihrer Punkte liegen, aus va und einer \mathfrak{G}_{n-1} , welche wenn man die um a verminderte Gruppe (a) mit (a') bezeichnet, die Punkte $(a')_1^0$ liefert. a und $(a')_1^0$ bilden also eine zweite Gruppe der I_{n-1} .

Fällt A mit T zusammen, so besteht die entsprechende \mathfrak{G}_n aus T , da sie $(n+1)$ Punkte dieser Geraden enthält und aus $(n-1)$ Geraden die durch v gehen; diese müssen, da \mathfrak{G}_n die Geraden (A) in den Punkten (a) berühren muss, durch die Punkte (a') gehen. (a') ist daher eine dritte Gruppe der I_{n-1} . Hieraus folgt:

Theilt man die n -punktige Gruppe (a) in einen Punkt a und eine $(n-1)$ -punktige Gruppe (a'), so sind die Gruppen 1. $(a)_1^0$, 2. (a'), 3. $(a')_1^0$ und a Gruppen einer Involution.

Dieser Satz beweist wieder die Sätze 3. und 4. und giebt auch die Lage der nicht mit den (a) zusammenfallenden Punkte der Polargruppen an.

Der letzte Satz soll angewendet werden zur Lösung der Aufgabe: In Bezug auf drei auf einem Kegelschnitte gelegene Punkte $a_1 a_2 a_3$ für einen Punkt o desselben, die erste Polargruppe bestehend aus den Punkten $m_1 m_2$ zu bestimmen.

Die Ecken des durch die Tangenten $A_1 A_2 A_3$ des Kegelschnitts in den Punkten $a_1 a_2 a_3$ gebildeten Dreiecks, die diesen Punkten gegenüberliegen, seien respective $b_1 b_2 b_3$. Nach dem letzten

Satz ist das zu suchende Paar $m_1 m_2$ ein Paar der drei quadratischen Involutionen, welche bestimmt sind durch die Paare 1. $a_2 a_3$ und $a_1 d_1$, 2. $a_3 a_1$ und $a_2 d_2$, 3. $a_1 a_2$ und $a_3 d_3$, wo $d_1 d_2 d_3$ von o harmonisch getrennt sind bezüglich durch die Paare $a_2 a_3$, $a_3 a_1$, $a_1 a_2$, also ein Dreieck bilden, das zu $b_1 b_2 b_3$ für das Centrum o perspectivisch liegt.

Die Pole $\alpha\beta\gamma$ dieser drei Involutionen liegen auf der Geraden $m_1 m_2$. $\alpha\beta$ schneidet A_3 in einem Punkte, der nach dem Satze von Pascal für das Fünfeck $d_1 a_1 a_3 a_2 d_2$ auch auf der Geraden $d_1 d_2$ liegt; man hat daher:

Die Verbindungslinie der Punkte $m_1 m_2$ ist die Perspectivitätsaxe der Dreiecke $b_1 b_2 b_3$ und $d_1 d_2 d_3$.



Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte.

Von Dr. Gustav Kohn in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juni 1883.)

Die ganze Theorie der harmonischen Mittelpunkte kann auf Betrachtung von Involutionen gegründet werden und die wichtigsten Sätze der Theorie ergeben sich dabei in überraschend einfacher und naturgemässer Weise, ohne jede Rechnung.

Als Ausgangspunkt dient die folgende Definition:

1. Ein Punkt m ist harmonischer Mittelpunkt vom Grade r in Bezug auf das Punktsystem a_1, a_2, \dots, a_n und den Punkt o als Pol, sobald für eine Involution n -ten Grades (erster Stufe), für welche die Punkte a_1, a_2, \dots, a_n eine Gruppe bilden, der Punkt o ein $(r+1)$ -faches, der Punkt m ein $(n-r+1)$ -faches Element ist.¹

Alle Punkte, von denen hier und im Folgenden die Rede ist, werden als auf demselben rationalen Träger liegend vorausgesetzt.

2. Bei der so eben für die harmonischen Mittelpunkte gegebenen Definition springt der projective Charakter derselben in die Augen.

Unmittelbar ersichtlich ist auch die Richtigkeit des folgenden Satzes:

3. „Ist m harmonischer Mittelpunkt vom Grade r in Bezug auf ein Punktsystem a_1, a_2, \dots, a_n und den Pol o , so ist o harmonischer Mittelpunkt vom Grade $n-r$ in Bezug auf dasselbe Punktsystem und den Punkt m als Pol.“

¹ In dieser Notiz wird die Kenntniss der Theorie der Involutionen, wie sie Herr Professor Emil Weyr in den Sitzb. d. k. Akad. der Wissensch. 1879 und in seiner Schrift „Beiträge zur Curvenlehre“, Wien, 1880, dargelegt hat, vorausgesetzt.

Wir beschäftigen uns einen Augenblick mit den harmonischen Mittelpunkten $(n-1)$ -ten Grades besonders.

Ihrer Definition nach sind dieselben die Doppelpunkte der Involution n -ten Grades, erster Stufe, welche durch die beiden Gruppen, das Punktsystem $a_1, a_2 \dots, a_n$ als eine, und den n -fach gelegten Punkt o als zweite Gruppe, bestimmt ist. Daraus folgt:

4. „Es gibt $n-1$ harmonische Mittelpunkte vom Grade $n-1$ in Bezug auf ein Punktsystem $a_1, a_2 \dots, a_n$ und einen Pol o .“

Es hat nämlich eine Involution n -ten Grades bekanntlich im Allgemeinen $2(n-1)$ Doppellelemente. Unsere Involution besitzt einen n -fachen Punkt o und in diesen fallen $n-1$ Doppelpunkte hinein.

5. „Fallen von den Punkten $a_1, a_2 \dots, a_n$ s mit dem Punkte a zusammen, so fallen $s-1$ harmonische Mittelpunkte $(n-1)$ -ten Grades für einen beliebigen Pol in den Punkt a hinein.“

Denn der Punkt a ist dann ein s -faches Element der Involution, welche durch ihre Doppelpunkte die harmonischen Mittelpunkte vom Grade $n-1$ liefert, und absorbiert also $s-1$ Doppellelemente dieser Involution.

6. „Fällt der Pol o mit dem Punkte a zusammen, in welchem die s Punkte $a_1, a_2 \dots, a_s$ vereinigt liegen, so bestehen die $n-1$ harmonischen Mittelpunkte vom Grade $n-1$ in Bezug auf das Punktsystem $a_1, a_2 \dots, a_n$ und den Pol o aus den s zusammenfallenden Punkten $a_1, a_2 \dots, a_s$ und den $n-s-1$ harmonischen Mittelpunkten $(n-s-1)$ -ten Grades von o in Bezug auf die Punkte $a_{s+1}, a_{s+2}, \dots, a_n$.“

Da nämlich zwei Gruppen der in Frage kommenden Involution, nämlich das Punktsystem $a_1, a_2 \dots, a_n$ und der n -fache Punkt o , den Punkt o s -fach enthalten, so wird jede Gruppe derselben diesen Punkt s -fach enthalten und die Involution also ausserdem nur aus einer Involution $(n-s)$ -ten Grades bestehen, für welche o als $(n-s)$ -facher Punkt eine, das Punktsystem $a_{s+1}, a_{s+2} \dots, a_n$ eine zweite Gruppe bildet.

7. „Ist $s = n$, so ist nur eine Gruppe für die Involution gegeben, also sowohl diese selbst, als auch ihre Doppellelemente sind unbestimmt und man kann $n-1$ beliebige Punkte als harmonische Mittelpunkte $(n-1)$ -ten Grades wählen.“

Das Letztere folgt daraus, dass eine Gruppe mit $n-1$ Elementenpaaren zusammen im Allgemeinen eine Involution n -ten Grades bestimmt.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir unserer Definition für die harmonischen Mittelpunkte r -ten Grades eine andere Form geben.

Dieser Definition zu Folge haben wir die Gesammtheit aller Involutionen n -ten Grades erster Stufe aufzufassen, für welche o ein $(r+1)$ -faches Element ist und die Punkte a_1, a_2, \dots, a_n eine Gruppe bilden, dann sind die $(n-r+1)$ -fachen Punkte, die in irgend welchen dieser Gruppen vorkommen, die harmonischen Mittelpunkte vom Grade r in Bezug auf das Punktsystem a_1, a_2, \dots, a_n und den Pol o . Die Gesammtheit dieser Involutionen n -ten Grades erster Stufe ist aber, wie man leicht übersieht, nichts anderes als eine Involution n -ten Grades, $(n-r)$ -ter Stufe, welche die Involution n -ten Grades $(n-r-1)$ -ter Stufe in sich enthält, deren Gruppen aus dem $(r+1)$ -fach gelegten Punkt o und aus $n-r-1$ beliebigen Punkten bestehen, und welche durch diese Involution $(n-r-1)$ -ter Stufe und die Gruppe a_1, a_2, \dots, a_n bestimmt ist.

Wir finden also:

8. Die harmonischen Mittelpunkte r -ten Grades für den Pol o und das Punktsystem a_1, a_2, \dots, a_n sind die $(n-r+1)$ -fachen Elemente der Involution n -ten Grades, $(n-r)$ -ter Stufe, für welche die Punkte a_1, a_2, \dots, a_n eine Gruppe bilden und für welche der $(r+1)$ -fach gelegte Punkt o mit je $(n-r-1)$ ganz beliebigen Punkten eine Gruppe darstellt.¹

9. Wir heben als Folgerung hieraus besonders hervor, dass alle Gruppen dieser Involution n -ten Grades, $(n-r)$ -ter Stufe die-

¹ Hieraus ergibt sich z. B. der Satz:

Nimmt man auf einer Curve dritter Ordnung, dritter Classe die Spitze als Pol an, so ist der Inflexionspunkt harmonischer Mittelpunkt ersten Grades für jede gerade Gruppe und zweiten Grades für jedes Tripel von Punkten, deren Tangenten in demselben Punkt der Ebene zusammenlaufen.

selben harmonischen Mittelpunkte r -ten Grades für den Pol o haben. ¹

Um die harmonischen Mittelpunkte $(n-2)$ -ten Grades in Bezug auf ein Punktsystem a_1, a_2, \dots, a_n und den Pol o zu finden, haben wir die dreifachen Elemente der Involution J_n^2 n -ten Grades, zweiter Stufe aufzusuchen, für die a_1, a_2, \dots, a_n eine Gruppe ist und der $(n-1)$ -fache Punkt o mit einem beliebigen Punkt zusammen eine Gruppe bildet.

¹ Frägt man nach allen Systemen von n Punkten, welche dieselben harmonischen Mittelpunkte r -ten Grades in Bezug auf den Pol $x_1 = o$ haben, wie die durch die homogene Gleichung n -ten Grades $f_n(x_1, x_2) = 0$ dargestellte Gruppe, so gelangt man mit Leichtigkeit zur Definition 8.

Die harmonischen Mittelpunkte r -ten Grades in Bezug auf die Gruppe $f_n = 0$ für den Pol $x_1 = o$, sind bekanntlich gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\partial^{n-r} f_n(x_1, x_2)}{\partial x_2^{n-r}} = 0$$

Durch Integration kommt:

$$f \equiv f_n(x_1, x_2) + x_1^{r+1} \varphi_{n-r-1}(x_1, x_2) = 0$$

als Gesamtheit aller Gruppen, für welche diese harmonischen Mittelpunkte dieselben sind. Darin bedeutet φ_{n-r-1} eine homogene Function $(n-r-1)$ -ten Grades mit unbestimmten Coëfficienten. Es ist klar, dass durch diese Gleichung (1) die Involution n -ten Grades $(n-r)$ -ter Stufe in 8. repräsentirt wird. Für einen beliebigen Punkt x'_1, x'_2 können wir nun durch Wahl der $n-r$ Constanten von φ bewirken, dass die Gleichung (1) x'_1, x'_2 zur $(n-r)$ -fachen Lösung hat. Wir haben nur die $n-r$ Gleichungen zu befriedigen:

$$f = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \dots = \frac{\partial^{n-r-1} f}{\partial x_2^{n-r-1}} = 0$$

für $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2$, und x'_1, x'_2 wird dann und nur dann eine $(n-r+1)$ -fache Lösung von $f = 0$ sein, wenn für diese Werthe auch noch die Gleichung befriedigt wird

$$\frac{\partial^{n-r} f}{\partial x_2^{n-r}} = \frac{\partial^{n-r} f_n}{\partial x_2^{n-r}} = 0.$$

Hiermit ist auch der unerlässliche Beweis für die Identität der von uns definirten harmonischen Mittelpunkte mit denen der Polarentheorie erbracht.

Zu diesem Zwecke wollen wir die zweifachen Elemente der Involution J_n^2 in Gruppen ordnen. Wir wählen einen beliebigen Punkt p als zweifaches Element. Dadurch ist eine Gruppe der Involution J_n^2 bestimmt. Diese Gruppe bestimmt mit dem n -fach gelegten Punkte o zusammen eine Involution J_n^1 n -ten Grades erster Stufe, welche ganz in der ursprünglichen Involution J_n^2 enthalten ist, weil die sie bestimmenden Gruppen dieser Involution angehören.

Die Involution J_n^1 hat $n-1$ Doppelpunkte, zu welchen auch der angenommene Punkt p gehört. Diese $n-1$ Doppelpunkte sind nach 9. die harmonischen Mittelpunkte $(n-1)$ -ten Grades in Bezug auf alle Gruppen der Involution J_n^1 für den Pol o .

Es ist klar, dass wenn wir statt vom Punkte p von irgend einem andern der $n-1$ Doppelpunkte ausgegangen wären, wir dieselbe Involution J_n^1 und also auch dieselbe Gruppe von $n-1$ Doppelpunkten erhalten hätten. Dies genügt für den Nachweis, dass die Gruppen von Doppelpunkten, die wir so erlangen, eine Involution J_{n-1}^1 bilden und zwar sind diese Gruppen, wie aus der oben gemachten Bemerkung ersichtlich ist, nichts anderes als die Systeme von harmonischen Mittelpunkten in Bezug auf die sämtlichen Gruppen der ursprünglichen Involution J_n^2 für den Pol o . Hieraus ist aber zu entnehmen, dass für die Involution J_{n-1}^1 der $(n-1)$ -fache Punkt o eine Gruppe darstellt. Denn aus 6. folgt, dass für diejenigen Gruppen von J_n^2 , welche in den n -fachen Punkt o und einen beliebigen andern Punkt zerfallen, dieser Punkt $(n-1)$ -fach gelegt, das System der harmonischen Mittelpunkte $(n-1)$ -ten Grades bildet.

Man bemerkt nun sofort, dass, wenn der Punkt p ein dreifaches Element der Involution J_n^2 ist, derselbe zwei Doppelpunkte der Involution J_n^1 absorbiert, also auch für J_{n-1}^1 ein Doppelpunkt bildet und es ist umgekehrt jedes Doppelpunkt der Involution J_{n-1}^1 dreifaches Element für die Involution J_n^2 (5).

Es ergeben sich also die dreifachen Elemente der Involution J_n^2 , d. h. die harmonischen Mittelpunkte vom Grade $n-2$, als Doppelpunkte der Involution J_{n-1}^1 , deren Gruppen aus den Systemen der harmonischen Mittelpunkte $(n-1)$ -ten Grades in Bezug auf die Gruppen von J_n^2 gebildet sind. Da für die Involution J_{n-1}^1 der $(n-1)$ -fache Punkt o eine Gruppe bildet, so finden wir:

10. Man bekommt die harmonischen Mittelpunkte $(n-2)$ -ten Grades in Bezug auf ein gegebenes Punktsystem und den Pol o , wenn man in Bezug auf die harmonischen Mittelpunkte $(n-1)$ -ten Grades für dasselbe Punktsystem und denselben Pol die harmonischen Mittelpunkte $(n-2)$ -ten Grades für den Pol o aufsucht.

Die Zahl dieser harmonischen Mittelpunkte beträgt also $n-2$.

Jetzt kann man sofort die den Sätzen, 4, 5, 6, 7 entsprechenden für harmonische Mittelpunkte $(n-2)$ -ten Grades herleiten.

Wir wollen die Schlussweise für die harmonischen Mittelpunkte $(n-3)$ -ten Grades noch andeuten.

Hier lassen sich wieder die dreifachen Elemente der Involution J_n^3 , als deren vierfache Punkte die harmonischen Mittelpunkte $(n-3)$ -ten Grades nach (8) erhalten werden, in eine Involution anordnen, dadurch dass man die dreifachen Elemente einer Involution J_n^2 , die in der ursprünglichen enthalten ist, in eine Gruppe wirft.

Die Involution J_n^2 ist hier so beschaffen, dass sie jede Gruppe enthält, die aus dem $(n-1)$ -fach genommenen Punkte o und einem beliebigen Punkte besteht. Man erkennt ebenso wie oben, dass die Involution dieser dreifachen Elemente nichts anderes ist, als der Inbegriff der harmonischen Mittelpunkte $(n-2)$ -ten Grades in Bezug auf alle Gruppen der ursprünglichen Involution J_n^3 für den Pol o . Es ist wieder zu sehen, dass die Involution J_{n-2}^1 in o einen $(n-2)$ -fachen Punkt hat und man kommt also zu dem Resultat, welches wir gleich für harmonische Mittelpunkte s -ten Grades ansprechen.

11. „Die harmonischen Mittelpunkte s -ten Grades für ein gegebenes Punktsystem und den Pol o erhält man, indem man in Bezug auf die harmonischen Mittelpunkte $(s+1)$ -ten Grades für dieselbe Punktgruppe und denselben Pol die harmonischen Mittelpunkte s -ten Grades des Pols o aufsucht.“

Der sich sofort hieraus ergebende allgemeinere Satz braucht wohl nicht besonders ausgesprochen zu werden.

12. „Construirt man in Bezug auf die harmonischen Mittelpunkte $(n-1)$ -ten Grades eines Punktsystems a_1, a_2, \dots, a_n für den Pol o , die harmonischen Mittelpunkte $(n-2)$ -ten Grades für

den Pol o' , so bleibt das resultierende Punktsystem ungeändert, wenn man o mit o' vertauscht, denn dieses resultierende Punktsystem ist nichts anderes als das System der dreifachen Elemente der Involution J_n^2 n -ten Grades, zweiter Stufe, welche durch die 3 Gruppen bestimmt ist, nämlich 1. die Gruppe $a_1, a_2 \dots, a_n$, 2. den n -fachen Punkt o , 3. den n -fachen Punkt o' .“

Man kann zum Beweise dieses Satzes die Doppelpunkte der Involution J_n^2 ganz ähnlich in Gruppen ordnen, wie dies im Vorhergehenden geschehen ist. Nimmt man nämlich einen Punkt p als zweifaches Element für die Involution J_n^2 beliebig an, so ist durch p eine Gruppe der Involution J_n^2 fixirt und diese Gruppe bestimmt mit dem n -fach gelegten Punkt o zusammen eine Involution J_n^1 , welche ganz in J_n^2 enthalten ist, da die sie definirenden Gruppen dieser Involution angehören. Diese Involution hat $n-1$ Doppelpunkte, von denen p einer ist und diese $n-1$ Doppelpunkte sind nach unserer Definition die harmonischen Mittelpunkte $(n-1)$ -ten Grades aller Gruppen, welche der Involution J_n^1 angehören, für den Punkt o als Pol. Man übersieht wie oben, dass diese Systeme von $n-1$ Doppelpunkten eine Involution $(n-1)$ -ten Grades, erster Stufe J_{n-1}^1 bilden und weil sie nichts anderes sind als die Systeme der harmonischen Mittelpunkte $(n-1)$ -ten Grades aller Gruppen von J_n^2 für o als Pol, so erkennt man, dass der Punkt o' , welcher ein n -facher Punkt der Involution J_n^2 ist, ein $(n-1)$ -facher Punkt der Involution J_{n-1}^1 sein wird. Die dreifachen Elemente der Involution J_n^2 ergeben sich wieder als Doppelpunkte der Involution J_{n-1}^1 , und da diese durch die Systeme der harmonischen Mittelpunkte vom Grade $n-1$ in Bezug auf die Gruppen von J_n^2 für den Pol o gebildet werden und da für diese Involution der $(n-1)$ -fache Punkt o' eine Gruppe darstellt, so sind die Doppelpunkte dieser Involution J_{n-1}^1 nichts anderes als die harmonischen Mittelpunkte des Pols o' vom Grade $n-2$ in Bezug auf die harmonischen Mittelpunkte des Grades $n-1$ für die Punkte $a_1, a_2 \dots, a_n$ und den Pol o .

Es ist kaum nöthig den allgemeinen Satz, der durch Combination und wiederholte Anwendung der Sätze 11 und 12 sich ergibt, hier anzuführen.

Damit sind alle Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte, welche Cremona in seinem berühmten Werke über ebene Curven

durch Rechnung bewiesen hat, ohne jede Rechnung begründet. Allein nicht nur die bekannten Sätze ergeben sich von unserem Gesichtspunkt fast von selbst, man erhält auch eine Reihe neuer Sätze,¹ besonders, wenn man sich nicht, wie wir es hier gethan haben, auf das Gebiet des einstufigen rationalen Trägers beschränkt. Die speciellen Involutionen, als deren vielfache Punkte wir die harmonischen Mittelpunkte erkannt haben, verdienen ein eingehendes Studium, insbesondere wird man zur genaueren Untersuchung der singulären Elemente, welche sie ausser den vielfachen Punkten noch besitzen, so zu sagen, gedrängt.

Diese Fragen gehen über den Rahmen dieser vorläufigen Notiz heraus. Ich denke demnächst auf dieselben in einer Arbeit zurückzukommen, welche sich mit der Polarentheorie der Curven und Flächen beschäftigt.

¹ Wir machen hier auf die algebraische Bedeutung unserer Resultate (Verallgemeinerung des Satzes 12) aufmerksam:

Es sei $a_x^n \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n$ in der bekannten symbolischen Schreibweise eine beliebige Form n -ten Grades. Dann ist für jedes Lösungssystem $y=\eta, z=\zeta, \dots, t=\tau$ der symbolischen Gleichung

$$1) \dots a_1^k a_2^l \dots a_t^r = 0 \quad (k+l+\dots+r=n)$$

a_x^n darstellbar in der Form

$$2) \dots a_x^n \equiv a_{1x}^{k-1} (x\eta)^{n-k+1} + a_{2x}^{l-1} (x\zeta)^{n-l+1} + \dots + a_{tx}^{r-1} (x\tau)^{n-r+1}$$

und umgekehrt, wenn die Identität 2) statt hat, so bilden η, ζ, \dots, τ ein Lösungssystem der Gleichung 1). In dem speciellen Falle $k=l=\dots=r=1$ haben wir eine Darstellung von a_x^n als Summe von n -ten Potenzen vor uns (cf. Rosanes, Crelle, Bd. 75, 76) und damit den Satz, dass jeder Punkt einer conjugirten Gruppe harmonischer Mittelpunkt für die übrigen in Bezug auf die ursprüngliche Gruppe $a_x^n=0$ ist, ein Resultat, welches sofort zur Reye'schen Polarentheorie im binären Gebiet führt. (cf. Reye, Crelle, Bd. 72, 82.)

XIX. SITZUNG VOM 19. JULI 1883.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Zur Tertiärflora Japans“.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Friedrich Brauer in Wien übersendet eine Abhandlung: „Über zwei Parasiten des Juni-Käfers (*Rhizotrogus solstitialis*); 1. *Hirmoneura obscura* Mg., 2. *Phorostoma lata* Egg.“

Das c. M. Herr Prof. Sigmund Exner übersendet eine Notiz über die von Dr. B. Mandelstamm unter seiner Leitung ausgeführten „Studien über Innervation und Atrophie von Kehlkopfmuskeln“. (Sitzb. Bd. LXXXV.)

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet eine Abhandlung von Herrn Dr. J. Korteweg in Amsterdam, welche die Frage behandelt: „Ob die Schwankungen in Länge und Höhe der einzelnen Perioden der Sonnenfleckenhäufigkeit durch Interferenz zweier Perioden von ungleicher, aber unveränderlicher Länge und Höhe entstehen“.

Ferner übersendet Herr Prof. Boltzmann eine Abhandlung von Herrn Victor Hausmanning, Assistent am physiologischen Institute der Universität zu Graz, in welcher neue Beobachtungen über den Stoss cylindrischer Kautschukstäbe mitgetheilt werden.

Herr Dr. M. Löwit, Privatdocent und Assistent am Institut für experimentelle Pathologie an der deutschen Universität in Prag, übersendet eine Abhandlung: „Über die Bildung rother und weisser Blutkörperchen“.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung, betitelt: „Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins“.

Das w. M. Herr Prof. L. v. Barth überreicht zwei vorläufige Mittheilungen aus seinem Laboratorium, und zwar:

1. „Über die Oxydation des Morphins“, eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. H. Weidel ausgeführte Arbeit.
2. „Über Papaverin“, von Herrn Dr. G. Goldschmiedt.

Ferner überreicht Herr Prof. v. Barth folgende vier Arbeiten aus dem Laboratorium für allgemeine Chemie an der technischen Hochschule in Brunn:

1. „Über einige basische Sulfate“ (vorläufige Mittheilung) und
2. „Über das Arbutin“, beide Arbeiten von Herrn Prof. Dr. J. Habermann.
3. „Zur directen Bestimmung der Kohlensäure bei Gegenwart von Sulfiden, Sulfiten und Thiosulfaten“ und
4. „Über die Einwirkung von Kaliumpermanganat auf einige Schwefelverbindungen“, letztere beiden Arbeiten von den Herren M. Hönig und E. Zatzek.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium von Herrn Dr. Alfred Waage ausgeführte Arbeit, betitelt: „Einwirkung von Ammoniak auf Propionaldehyd“.

Herr Prof. Dr. E. Lippmann in Wien überreicht die dritte Mittheilung über eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn F. Fleissner ausgeführte Arbeit: „Zur Kenntniss der Azyline“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 227. Tomo XX. Junio 15. Habana, 1883; 8°.

Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Bulletin. 52^e année, 3^e série, tome 5. Nr. 5. Bruxelles, 1883; 8°.

— de Médecine: Bulletin. 2^e série, 47^e année. Tome XII, Nos. 27 & 28. Paris, 1883; 8°.

Accademia pontificia de Nuovi Lincei: Atti. Anno XXXIV. Sessione VI^a del 12 Giugno 1881. Roma, 1881; 4°.

— R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XVIII. Disp. 6^a (Maggio 1883). Torino; 8°.

- Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche, der Naturforscher: Leopoldina.** Heft XIX. Nrs. 11—12. Halle a. S., 1883; 4°.
- **der Wissenschaften, königlich schwedische: Bihang till Handlingar.** VII. Band 2. Heft. Stockholm, 1882—83; 8°.
- Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents.** 5° série, 3° année, 6° cahier. Paris, 1883; 8°.
- Central-Commission, k. k. statistische: Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1880.** X. Heft. Sanitätswesen und Wohlthätigkeitsanstalten, Viehseuchen, Brandstatistik, Hagelschäden. Wien, 1883; 8°. — Für das Jahr 1881. IX. Heft, Sparcassen. Wien, 1883; 8°.
- Chemiker-Zeitung: Central-Organ.** Jahrgang VII, Nr. 50. Cöthen, 1883; 4°.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.** Tome XCVII. Nr. 1. Paris, 1883; 4°.
- Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte,** XVI. Jahrgang: Nr. 11. Berlin, 1883; 8°.
- **österreichische, zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte.** V. Jahrgang. Nr. 2. Prag, 1883; 4°.
- **physikalisch-chemische: Bulletin.** Tome XV. Nr. 6. St. Petersburg, 1883; 8°.
- **Wetterauische für die gesammte Naturkunde zu Hanau: Bericht.** Hanau, 1883; 8°.
- Giessen, Universität: Akademische Schriften pro 1880/81;** 10 Stücke; 4° u. 8°.
- Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift.** XLIV. Jahrgang Nr. 25—28. Wien, 1883; 4°.
- Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens.** Vol. XI. Nr. 5 u. 6. 12. Jahrgang 1883; 8°. Pola, 1883; 8°.
- genieur- und Architekten-Verein, österreichischer: Wochenschrift** VIII. Jahrgang. Nr. 25—28. Wien, 1883; 4°.
- hns Hopkins University-Circulars.** Vol. II. Nr. 24. June, 1883. Baltimore; 4°.
- Journal, the American of Science.** Vol. XXVI. Nr. 151. July, 1883. New Haven; 8°.

- Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1883. Heft 4. Pola, 1883; 8°.
- Landbote, der steirische: Organ für Landwirthschaft und Landescultur. XVI. Jahrgang. Nr. 1—14. Graz, 1883; 4°.
- Listy cukrovarnické. Ročník I., Číslo, 1, 3—9. V Praze, 1882—1883; 8°.
- Nature. Vol. XXVIII. Nr. 715. London, 1883; 8°.
- Osservatorio centrale del real collegio Carlo Alberto in Moncalieri. Ser. II. Vol. III. Nr. 2. Febbraio 1883. Torino, 1883; 4°.
- Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1883. XXXIII. Band. Nr. 2 u. 3. Mai—September. Wien, 1883; 4°.
- — Verhandlungen. Nr. 7—9. Wien, 1883; 8°.
- Repertorium für Physik. XIX. Band, 6. Heft. München und Leipzig, 1883; 8°.
- Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Vol. XII. Dispensa 5ª Maggio, 1883; 4°.
- Société Impériale des Amis d'histoire naturelle, d'Anthropologie et d'Ethnographie. Tomes XXXII, livraison 4ª et tome XLII. Livraison 2. Moscou, 1882; gr. 4°.
- Verein der čechischen Chemiker: Listy chemické. VII. Ročník. Číslo 4—10. V Praze, 1883; 8°.
- physikalischer zu Frankfurt am Main: Jahresbericht für das Rechnungsjahr 1881—82. Frankfurt a. M. 1883; 8°.
- militär-wissenschaftlicher in Wien: Organ. XXVI. Band. Separat-Beilage zum 3. u. 4. Heft. 1883. Wien; 8°.
- zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien: Schriften. XXIII. Bd. Vereinsjahr 1882/83. Wien, 1883; 8°.
- Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang. Nr. 28. Wien, 1883; 4°.
- Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. III. Jahrg. 1883, 6. Heft: Juni. Berlin, 1883; 4°.

Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins.

Von Emil Weyr.

1. Wir setzen auf einer ebenen allgemeinen Curve dritter Ordnung C_3 in irgend einer Art eine doppelte Mannigfaltigkeit von Punkttripeln $x_1x_2x_3$ fest, und zwar so, dass jedes der Tripel als in sich abgeschlossen und durch zwei seiner Punkte vollkommen und unzweideutig bestimmt erscheint; die Gesammtheit aller solcher Tripel soll als eine cubische Punktinvolution zweiter Stufe auf C_3 oder als Tripelinvolution zweiter Stufe auf C_3 mit J_2^3 bezeichnet werden.

Die Gesammtheit aller Tripel, von denen jedes aus drei in gerader Linie gelegenen Punkten der C_3 besteht, bildet offenbar eine solche (besondere) Tripelinvolution zweiter Stufe, welche als die Involution gerader Tripel bezeichnet werden soll; sie ist durch die Curve selbst gegeben und muss daher als eine fundamentale betrachtet werden.

2. Betrachten wir nun irgend eine J_2^3 auf C_3 . Wählt man auf C_3 irgend zwei Punkte x_1x_2 , so ist vermöge der J_2^3 durch x_1 und x_2 ein dritter Punkt x_3 bestimmt, wodurch das Tripel $x_1x_2x_3$ geschlossen erscheint, so zwar, dass jeder der drei Punkte durch die beiden anderen bestimmt erscheint. Jeder der drei Punkte eines Tripels begleitet in der J_2^3 das Paar der beiden anderen. Wird auf C_3 ein Punkt x_1 angenommen, so gibt es einfach unendlich viele Paare x_2x_3 , welche mit x_1 ein Tripel der J_2^3 bilden; jedes dieser Paare ist bestimmt, wenn man einen seiner Punkte (x_2 oder x_3) wählt.

Die sämmtlichen Paare x_2x_3 bilden somit eine Paarinvolution (erster Stufe) und es müssen somit die Geraden

x_2, x_3 durch einen festen Punkt o_1 von C_3 hindurchgehen.¹ Durch die J_2^3 ist in dieser Art auf C_3 eine eindeutige Beziehung von Punkten $E(xo)$ gegeben;² denn es wird jedem Punkte x_1 ein ganz bestimmter Punkt o_1 als entsprechender zugewiesen sein, aber auch jedem o_1 entspricht nur ein Punkt x_1 , den man erhält, wenn man durch o_1 eine Gerade beliebig hindurchlegt und zu ihren Schnittpunkten x_2, x_3 mit C_3 den begleitenden Punkt x_1 aufsucht.

„Jede auf der C_3 auftretende Tripelinvolution zweiter Stufe J_2^3 gibt Veranlassung zu einer eindeutigen (nicht centralen) Punktbeziehung $E(xo)$, wobei einem Punkte x jener Punkt o zugeordnet erscheint, durch welchen die Verbindungsgeraden der Punktepaare, welche mit x Tripel der J_2^3 bilden, hindurchgehen.“ Hieraus folgt unmittelbar: „Eine Tripelinvolution zweiter Stufe J_2^3 auf C_3 ist durch eines ihrer Tripel vollkommen und unzweideutig bestimmt.“ Wählt man nämlich drei beliebige Punkte x_1, x_2, x_3 von C_3 und setzt fest, dass diese Punkte ein Tripel einer J_2^3 auf C_3 bilden sollen, so ist die J_2^3 dadurch vollkommen gegeben, d. h. man wird zu irgend zwei anderen beliebig gewählten Punkten x'_1, x'_2 den dieses Paar zu einem Tripel ergänzenden Punkt x'_3 in eindeutiger Weise bestimmen können. Die Seiten des Dreieckes x_1, x_2, x_3 schneiden C_3 , respective in den Punkten o_1, o_2, o_3 zum dritten Male; dann entspricht dem x_1 der auf x_2, x_3 gelegene Punkt o_1 , dem x_2 ebenso der auf x_3, x_1 gelegene Punkt o_2 und dem x_3 endlich der Punkt o_3 . In der That gehören diese drei Punktepaare $x_1, o_1, x_2, o_2, x_3, o_3$ immer als Paare einer und derselben eindeutigen Beziehung $E(xo)$ auf C_3 an (l. c. Art. 6). Eine solche eindeutige Punktbeziehung auf C_3 ist bekanntlich durch ein Paar entsprechender Punkte vollkommen bestimmt. Um nun das Paar x'_1, x'_2 zu einem Tripel zu ergänzen, schneiden wir C_3 mit der Geraden x'_1, x'_2 im Punkte o'_3 und bemerken, dass o'_3 eindeutig nach der $E(xo)$ dem x'_3 entspricht; man hat also (l. c. Art. 6) nur o'_3 mit x_1 zu ver-

¹ Vgl. „Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung. Sitzg. v. 19. April 1883, Art. 5.

² l. c. Art. 6.

binden und C_3 mit der Verbindungsgeraden in m etwa zum dritten Durchschnitte zu bringen, dann wird die Gerade mo_1 die Curve C_3 in x'_3 schneiden. Ebenso kann das Paar x_2o_2 , respective x_3o_3 , anstatt von x_1o_1 in die Construction eintreten.

3. Jeder durch o_1 hindurchgehende Strahl schneidet C_3 in einem Punktepaare x_2x_3 , welches mit x_1 ein Tripel der J_2^3 constituirt; da man durch o_1 vier Tangenten an C_3 legen kann, so kommt jeder Punkt x_1 viermal mit je einem doppelt zu zählenden Punkte in Tripeln der J_2^3 vor. Dagegen kommt jeder Punkt der C_3 doppelt gezählt in einem Tripel der J_2^3 vor. Fällt nämlich x_3 mit x_1 zusammen, so ist x_2 der dritte Schnittpunkt von C_3 mit der Geraden $\overline{o_1x_1}$. Nun geschieht es aber neunmal, dass der Punkt o_1 der Tangentialpunkt von x_1 wird (l. c. Art. 11); lässt man in einen solchen Punkt x_1 auch den Punkt x_2 fallen, so wird nach Obigem der Punkt x_3 ebenfalls mit x_1 und x_2 zusammenfallen und wir haben dann in x_1 drei unendlich nahe, ein Tripel constituirende Punkte oder einen dreifachen Punkt der J_2^3 .

„Jede J_2^3 besitzt neun dreifache Elemente; dieselben bilden eine Inflexionsgruppe der C_3 “ (l. c. Art. 11). Da eine J_2^3 durch ein Tripel von Punkten bestimmt ist, so wird die J_2^3 auch durch Angabe eines der dreifachen Punkte vollkommen bestimmt erscheinen; die übrigen acht dreifachen Punkte erhält man, wenn man den gegebenen mit einem der neun Inflexionspunkte verbindet, die erhaltene Gerade mit C_3 zum dritten Durchschnitte gebracht wird, und wenn dann aus diesem Schnittpunkte die übrigen acht Inflexionspunkte auf C_3 projicirt werden.

Die Inflexionspunkte von C_3 sind die dreifachen Punkte der fundamentalen J_2^3 , welche die geraden Punktetripel der C_3 bilden.

4. Es sei $x_1x_2x_3$ irgend ein Tripel einer J_2^3 . Durch dasselbe ist die J_2^3 vollkommen bestimmt. Wir wählen auf C_3 zwei beliebige Punkte x' x'' und legen durch die fünf Punkte x' x'' x_1 x_2 x_3 den Kegelschnitt K_x , welcher C_3 noch in einem Punkte x''' schneiden wird. Betrachtet man nun die durch die drei Punkte x' x'' x''' hindurchgehenden Kegelschnitte, so ist zunächst sofort klar, dass die noch auftretenden Tripel der übrigen Schnittpunkte derselben mit C_3 , auf dieser eine J_2^3 bilden, da ein solches Tripel

durch Angabe zweier seiner Punkte vollkommen bestimmt ist. Weiter erkennt man aber, dass diese J_2^3 mit der auf C_3 vorliegenden identisch sein muss, da unter ihren Tripeln auch das Tripel $x_1 x_2 x_3$ dem K_x entsprechend vorkommt. Da man die drei Punkte $x' x'' x'''$ als die weiteren drei Schnittpunkte der C_3 mit irgend einem durch $x_1 x_2 x_3$ gelegten Kegelschnitt K_x betrachten kann, so bilden die sämtlichen Tripel $x' x'' x'''$ eine zweite Tripelinvolution J_2^3 . Da jedes Tripel der gegebenen J_2^3 mit dem Tripel $x' x'' x'''$ auf einem Kegelschnitte gelegen ist, so kann das Tripel $x_1 x_2 x_3$ durch irgend ein anderes derselben J_2^3 ersetzt werden und die zweite J_2^3 wird immer dieselbe bleiben. In dieser Art erscheinen die sämtlichen, auf C_3 auftretenden Tripelinvolutionen zweiter Stufe in Paare geordnet; mit jeder Involution J_2^3 ist eine zweite J_2^3 so gepaart, dass jedes Tripel der einen mit jedem Tripel der anderen in einem und demselben Kegelschnitte gelegen ist. Wir wollen zwei solche cubische Tripelinvolutionen zweiter Stufe als zwei residuale Tripelinvolutionen bezeichnen.

Die Involution der geraden Tripel ist offenbar residual zu sich selbst.

5. Wir haben gesehen, dass jede Tripelinvolution zweiter Stufe J_2^3 zu einer eindeutigen, nicht centralen Beziehung E Veranlassung gibt. „Diese Beziehung ist für zwei residuale Involutionen eine und dieselbe, nur dass je zwei entsprechende Punkte beim Übergange von einer zur anderen Tripelinvolution ihre Bedeutung vertauschen.“

Ist nämlich $x_1 x_2 x_3$ irgend ein Tripel der J_2^3 , so entspricht dem Punkte x_1 nach jener eindeutigen Beziehung der dritte Schnittpunkt o_1 von C_3 mit der Geraden $x_2 x_3$; diese Gerade stellt mit irgend einer durch x_1 gehenden Geraden, welche C_3 in x'' , x''' schneiden möge, einen durch die drei Punkte $x_1 x_2 x_3$ hindurchgehenden Kegelschnitt dar. Wenn wir also den Punkt o_1 mit x' bezeichnen, so ist $x' x'' x'''$ ein Tripel der zur J_2^3 residualen Involution J_2^3 ; und es wird dem Punkte x' nach der mit dieser J_2^3 verbundenen eindeutigen Beziehung der dritte Schnittpunkt o' von C_3 mit der Geraden $x'' x'''$ entsprechen. Nun ist offenbar o' identisch mit x_1 und x' identisch mit o_1 . Da aber eine E -Beziehung durch ein Paar entsprechender Punkte bestimmt ist, so erscheint der ausgesprochene Satz bewiesen.

„Durch eine eindeutige nicht centrale Beziehung $E(xo)$ auf C_3 sind zwei residuale Tripelinvolutionen zweiter Stufe bestimmt.“

In der einen Tripelinvolution bildet jeder Punkt x mit den zwei Schnittpunkten von C_3 und irgend einer durch o gehenden Geraden ein Tripel und in der residualen Tripelinvolution bildet jeder Punkt o mit den zwei Schnittpunkten von C_3 und irgend einer durch x gehenden Geraden ein Tripel.

6. Ist die $E(x, o)$ eine vertauschungsfähige, so wird jedes Tripel der J_2^2 auch ein Tripel des residualen J_2^3 sein, so dass beide Tripelinvolutionen identisch werden; wir haben es dann mit einer sich selbst residualen Tripelinvolution zu thun, welche wir als eine fundamentale bezeichnen können. Den vier fundamentalen vertauschungsfähigen eindeutigen Beziehungen auf der Curve C_3 (vergl. l. c. Art. 10) entsprechen somit vier fundamentale Tripelinvolutionen. Die eine fundamentale E -Beziehung ordnet jeden Punkt x sich selbst als entsprechend zu; also $o \equiv x$. Jede durch x gegebene Gerade schneidet C_3 in einem Punktepaare, welches mit x ein Tripel der fundamentalen J_2^3 bildet; dieselbe ist somit die Involution der geraden Punktetripel.

Die drei übrigen fundamentalen E Beziehungen sind dargestellt durch die drei Systeme correspondirender Punkte von C_3 ; sind also x und o zwei correspondirende Punkte eines der drei Systeme, so bildet jeder von ihnen mit den zwei Schnittpunkten der Curve C_3 und irgend einer durch den anderen hindurchgehenden Geraden ein Tripel der entsprechenden fundamentalen Tripelinvolution.

Aus dem über residuale Involutionen Gesagten folgt unmittelbar, dass je zwei Tripel einer fundamentalen Tripelinvolution auf einem und demselben Kegelschnitte gelegen sind und dass somit die Curve C_3 in den drei Punkten eines Tripels von einer Curve zweiter Ordnung berührt wird.

Jede der vier fundamentalen Tripelinvolutionen liefert somit ein System die Curve dreifach berührender Kegelschnitte. Die Involution der geraden Tripel führt zu den doppelt gezählten Geraden in der Ebene der Curve C_3 , während die drei fundamentalen Tripelinvolutionen, welche sich aus den drei Systemen

conjugirter Punkte der C_3 ergeben, die drei Systeme eigentlicher dreifach berührender Kegelschnitte liefern. So ist die Theorie dieser Kegelschnittsysteme identisch mit der Theorie der fundamentalen Tripelinvolutionen.

7. Da zwei residuale Tripelinvolutionen mit einer und derselben E -Beziehung in Verbindung stehen, so folgt aus den, im 11. Artikel der schon mehrmals angezogenen Arbeit: „Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung“ enthaltenen Auseinandersetzungen, dass die neun dreifachen Punkte einer Tripelinvolution und die neun dreifachen Punkte der residualen Tripelinvolution zwei connexe Inflexionsgruppen sind. Die neun dreifachen Punkte einer fundamentalen Tripelinvolution (und das sind nach früherem entweder die neun Inflexionspunkte oder die Berührungspunkte der C_3 mit den neun, einem System angehörigen sechspunktigen Kegelschnitte) bilden somit eine zu sich selbst connexe Inflexionsgruppe, so dass also die Curventangente in jedem dieser neun Punkte und die Verbindungsgerade je zweier derselben durch einen Inflexionspunkt der Curve hindurchgehen muss.

Je zwei residuale Tripelinvolutionen liefern 81 Kegelschnitte, welche die Curve in zwei Punkten osculiren, nämlich in einem dreifachen Punkte der einen und in einem dreifachen Punkte der anderen Involution.

8. „Werden die einzelnen Tripel x_1, x_2, x_3 einer J_2^3 aus einem Punkte p der Curve C_3 auf die Curve projectirt, so erhält man die Tripel y_1, y_2, y_3 einer zweiten Involution J_2^2 ; lässt man den Punkt p auf C_3 fortücken, so ergeben sich in dieser Art aus der Involution J_2^2 alle übrigen Tripelinvolutionen zweiter Stufe auf C_3 .“

Der erste Theil des Satzes ist unmittelbar klar; bezüglich des zweiten Theiles verweisen wir auf den folgenden Satz:

„Je zwei Tripelinvolutionen zweiter Stufe können auf neunfache Art durch Projection in einander überführt werden; die neun Projectionscentren sind die dreifachen Punkte einer dritten Tripelinvolution und die drei Tripelinvolutionen stehen in vertauschungsfähiger Beziehung, so dass man die neun dreifachen

Punkte, jeder von ihnen als Projectionscentren zur Ineinandertüberführung der beiden anderen Involutionsen verwenden kann.“

Es seien J_2^3, J_2^3 zwei Tripelinvolutionen auf C_3 , d einer der neun dreifachen Punkte von J_2^3 und d' ein solcher Punkt von J_2^3 . Die Gerade dd' wird C_3 in einem Punkte d'' schneiden, aus welchem offenbar jede der beiden Involutionsen durch Projection in die andere übergeführt wird; denn sowie durch Projection eines Tripels der J_2^3 ein Tripel der abgeleiteten Involution hervorgeht, so wird ein dreifacher Punkt von J_2^3 einen dreifachen Punkt der abgeleiteten Involution liefern; nun geht aber d durch Projection aus d'' in d' über und ein dreifacher Punkt genügt, sowie ein Tripel zur Bestimmung einer Tripelinvolution zweiter Stufe. Die aus der J_2^3 durch Projection aus d'' abgeleitete Involution hat somit d' zum dreifachen Punkt und ist daher mit J_2^3 identisch. Die J_2^3 hat ausser d noch acht dreifache Punkte, welche mit d'' verbunden Strahlen liefern, die C_3 in den ausser d' auftretenden acht dreifachen Punkten der J_2^3 schneiden müssen; so erhält man neun, durch d'' gehende Gerade, von denen jede einen dreifachen Punkt der J_2^3 und der J_2^3 enthält. Die neun Punkten d , verbunden mit den neun Punkten d' , liefern 81 Gerade, von denen je neun durch einen Punkt d'' hindurchgehen; wir erhalten somit neun Punkte d'' auf C_3 , von denen jeder als Projectionscentrum zur Überführung der J_2^3 und J_2^3 in einander benützt werden kann. Da man die neun Punkte d'' erhält, wenn man die neun Punkte d aus einem der neun-Punkte d' auf C_3 projicirt, so sind die neun Punkte d'' die dreifachen Punkte einer dritten Tripelinvolution zweiter Stufe, welche man durch Projection der J_2^3 aus irgend einem der Punkte d' oder durch Projection der J_2^3 aus irgend einem der Punkte d erhält.

Man erhält somit die Gruppen der dreifachen Punkte aller auf C_3 auftretenden Tripelinvolutionen, wenn man eine solche Gruppe (also zum Beispiel die Gruppe der neun Inflexionspunkte) aus den einzelnen Punkten von C_3 auf die Curve projicirt.

Die neun dreifachen Punkte einer J_2^3 bilden somit eine Inflexionsgruppe; sie ordnen sich zu je dreien in derselben Art, wie die neun Inflexionspunkte zu Tripeln und jeder der dreifachen Punkte kommt in vier solchen Tripeln vor.

Lässt man die J_2^3 mit der J_2^3 zusammenfallen, so werden die neun Punkte d' die Tangentialpunkte der d sein; es bilden somit die Tangentialpunkte einer Inflexionsgruppe wieder eine Inflexionsgruppe. Durch jeden dieser Tangentialpunkte d' gehen vier von den $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ Verbindungsgeraden der neun Punkte d .

9. Wir zeigen in diesem Artikel, wie sich aus der Theorie der Tripelinvolutionen zweiter Stufe die Haupttheoreme über die Schnittpunktsysteme der Curve C_3 mit Curven zweiter und dritter Ordnung ergeben. Sind $x_1, x_2, x_3, x', x'', x'''$ die sechs Schnittpunkte der C_3 mit einer Curve zweiter Ordnung, so sind x_1, x_2, x_3 und x', x'', x''' zwei Tripel zweier residualen Tripelinvolutionen. Diese geben zu einer und derselben Beziehung $E(x_0)$ Veranlassung, und zwar entspricht dem Punkte x_1 der dritte Schnittpunkt o_1 von C_3 mit $\overline{x_2 x_3}$, und dem dritten Schnittpunkte o' von C_3 mit $\overline{x'' x'''}$ entspricht der Punkt x' (vergl. Art. 2). Es müssen sich somit die wechselweisen Verbindungslinien, also hier die Geraden $\overline{x_1 x_2}$, $\overline{o_1 o'}$ in einem Punkte p von C_3 schneiden. Hält man nun x_2, x_3, x', x'' fest und verändert den durch diese vier Punkte gehenden Kegelschnitt, so wird die Gerade $\overline{x_1 x_2}$, welche die beiden übrigen Schnittpunkte der beiden Curven verbindet, durch den festen Curvenpunkt p hindurchgehen (Satz vom Gegenpunkte).

Betrachten wir nun die sämtlichen Curven dritter Ordnung, welche durch irgend sechs Punkte p_1, p_2, \dots, p_6 unserer Curve C_3 hindurchgehen und von denen somit jede die Curve C_3 in noch weiteren drei Punkten x_1, x_2, x_3 schneiden wird; indem wir zeigen, dass die sämtlichen Tripel x_1, x_2, x_3 eine J_2^3 bilden, beweisen wir den bekannten Satz, dass alle Curven dritter Ordnung, welche durch irgend acht Punkte hindurchgehen, auch noch einen neunten Punkt gemeinsam haben.

Es ist klar, dass alle Curven dritter Ordnung, welche durch die sechs Punkte p_1, \dots, p_6 und durch einen ausserhalb C_3 gelegenen siebenten Punkt q hindurchgehen, die C_3 in Tripeln eines J_2^3 schneiden; von dieser J_2^3 zeigt man leicht, dass sie von der Lage des Punktes q ganz unabhängig ist. Der durch p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 bestimmte Kegelschnitt, welcher C_3 in p' zum sechsten Male schneiden möge, stellt mit der Geraden $\overline{p_1 q}$ auch eine durch jene sieben Punkte gehende cubische Curve dar. Sind nun

$p'' p'''$ die weiteren zwei Schnitte von C_3 mit $\overline{p_1 q}$, so ist $p' p'' p'''$ ein Tripel jener J_2^3 und daher sind p_1 und p' zwei einander entsprechende Punkte der mit der J_2^3 verbundenen E -Beziehung. Nun ist aber durch ein Punktepaar die E -Beziehung und durch diese die zugehörige J_2^3 vollkommen und unzweideutig gegeben, da wir ja auch wissen, dass der Punkt p' mit den auf Strahlen durch p_1 gelegenen Punktepaaren Tripel der J_2^3 bildet. Es ist folglich bewiesen: „Dass die durch irgend sechs Punkte der C_3 hindurchgehenden Curven dritter Ordnung auf C_3 Tripel einer J_2^3 bestimmen“ (Satz über die neun Schnittpunkte zweier Curven dritter Ordnung).

Vertauscht man in der letzten Betrachtung den Punkt p_1 der Reihe nach mit jedem der übrigen fünf p -Punkte, so ergibt sich der Satz:

„Sind $p_1 p_2 \dots p_6$ irgend sechs Punkte einer ebenen Curve dritter Ordnung und legt man durch je fünf von ihnen einen Kegelschnitt, und sind $p' p'' p''' \dots$ die sechsten Schnittpunkte der Curve mit den sich ergebenden sechs Kegelschnitten, so gehören die sechs Punktepaare $p_1 p'$; $p_2 p''$; $p_3 p'''$; \dots einer und derselben eindeutigen nicht centralen Beziehung an.“

Wenn die sechs Punkte $p_1 p_2 \dots p_6$ auf einem Kegelschnitte gelegen sind, so fällt jeder mit dem ihm entsprechenden $p' p'' \dots$ zusammen; die eindeutige Bezeichnung weist lauter sich selbst entsprechende Punkte auf, und die obige J_2^3 wird die fundamentale Involution der geraden Tripel.

10. Eine dreifache Unendlichkeit von Punktquadrupeln der Curve C_3 , von denen jedes durch beliebige Wahl dreier von seinen Punkten vollkommen und eindeutig bestimmt ist, soll als eine „Quadrupelinvolution dritter Stufe mit J_3^3 bezeichnet werden.

Aus der Definition folgt sofort, dass die sämtlichen Tripel $x_1 x_2 x_3$, welche mit einem Punkte x_4 Quadrupel constituiren eine J_2^3 bilden, und dass alle Paare $x_1 x_2$, welche mit einem Paar $x_3 x_4$ Quadrupel constituiren, eine J_1^2 bilden müssen. Hält man also in einem Quadrupel $x_1 x_2 x_3 x_4$ zwei Punkte $x_3 x_4$ fest, so gehen die Geraden $\overline{x_1 x_2}$ durch einen festen Punkt ξ_{12} von C_3 ; aus demselben Grunde wird die Gerade $\overline{x_3 x_4}$, wenn man eines

der Paare x_1, x_2 festhält, durch einen festen Punkt ξ_{34} von C_3 hindurchgehen. Nun ist offenbar das Punktepaar ξ_{12}, ξ_{34} durch Annahme eines seiner Punkte bestimmt, so dass alle diese Paare eine J_1^2 bilden und die Geraden $\overline{\xi_{12}\xi_{34}}$ durch einen festen Curvenpunkt o hindurchgehen müssen.

Um nun irgend ein Quadrupel der J_3^2 zu erhalten, lege man durch o eine beliebige Gerade, welche C_3 in zwei Punkten ξ_{12}, ξ_{34} schneidet; durch jeden dieser Punkte ziehe man eine beliebige Gerade; die zwei Schnittpunktepaare x_1, x_2, x_3, x_4 von C_3 mit diesen Geraden bilden ein Quadrupel der J_3^2 . Der Punkt o ist offenbar der Gegenpunkt des Quadrupels x_1, x_2, x_3, x_4 und wir erkennen somit: „Eine Quadrupelinvolution dritter Stufe J_3^2 besteht aus den sämtlichen Quadrupeln, welche einen gemeinschaftlichen Gegenpunkt besitzen.“

„Es ist somit eine J_3^2 vollkommen bestimmt entweder durch Angabe eines Quadrupels oder durch Angabe des Gegenpunktes.“

Ist o der Gegenpunkt der J_3^2 und soll das Tripel x_1, x_2, x_3 zu einem Quadrupel ergänzt werden, so hat man nur $\overline{x_1, x_2}$ zu ziehen bis zum Durchschnitte ξ_{12} mit C_3 , ferner die Gerade $\overline{o\xi_{12}}$ zu ziehen bis zum Durchschnitte ξ_{34} mit C_3 , so wird die Gerade $\overline{x_3\xi_{34}}$ die C_3 in dem gesuchten Punkte x_4 schneiden.

Die sämtlichen Quadrupel der J_3^2 kann man offenbar auch erhalten, wenn man durch die sämtlichen Paare der J_1^2 , welche das Strahlenbüschel o auf C_3 bestimmt, alle möglichen Kegelschnitte legt und dieselben mit C_3 zum Durchschnitte bringt.

Ist auf C_3 eine J_3^2 gegeben und hält man einen Punkt x_4 auf C_3 fest, so bilden die Tripel x_1, x_2, x_3 , welche x_4 zu einem Quadrupel der J_3^2 ergänzen, offenbar eine J_2^3 ; umgekehrt werden alle Tripel einer neben der J_3^2 auf C_3 auftretenden J_2^3 durch denselben Punkt von C_3 zu Quadrupeln der J_3^2 ergänzt. Denn ergänzt man irgend ein Tripel x_1, x_2, x_3 der J_2^3 und hält man dann den ergänzenden Punkt x_4 fest, so muss jene J_2^3 zum Vorschein kommen, weil eine Tripelinvolution zweiter Stufe durch ein Tripel x_1, x_2, x_3 vollkommen bestimmt ist. „Alle geraden Tripel erscheinen durch den Gegenpunkt o zu Quadrupeln der J^2 ergänzt.“

Denn liegen x_1, x_2, x_3 in gerader Linie, so fällt ξ_{12} mit x_3 zusammen, ξ_{34} wird der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{o x_3}$ und x_4 fällt somit in den Punkt o .

11. Jeden Punkt x_1 von C_3 kann man als dreifachen Punkt für die J_3^4 betrachten, indem man x_2 und x_3 mit $\overline{x_1}$ zusammenfallen lässt, ξ_{12} wird der Tangentialpunkt von x_1 , $\overline{o \xi_{12}}$ schneidet C_3 in ξ_{34} und $\overline{x_1 \xi_{34}}$ schneidet C_3 in x_4 , welcher Punkt mit dem dreifachen Punkte x_1 ein Quadrupel der J_3^4 constituirte. Hält man x_4 fest, so bilden die x_1, x_2, x_3 eine J_2^3 , welche neun dreifache Punkte besitzt. Es kommt also jeder Punkt x_4 von C_3 in neun Quadrupeln vor, von denen jedes aus x_4 und einem dreifachen Punkte zusammengesetzt erscheint.

„Es gibt vier centrale Paarinvolutionen, deren Paare, als aus Doppelpunkten bestehend betrachtet, Quadrupel einer J_3^4 bilden.“

Legt man nämlich aus o an C_3 die vier Tangenten, deren Berührungspunkte o_1, o_2, o_3, o_4 sein mögen, so schneidet jede durch einen dieser Punkte hindurchgehende Gerade C_3 in zwei Punkten, welche als Doppelpunkte ein Quadrupel der J_3^4 constituiren; je zwei solche Punktepaare, deren Verbindungsgeraden durch einen der vier Punkte o_1, o_2, o_3, o_4 hindurchgehen, stellen ebenfalls ein Quadrupel der J_3^4 dar.

„Eine J_3^4 besitzt sechzehn vierfache Elemente, nämlich jene sechzehn Punkte, für welche der Gegenpunkt o zweiter Tangentialpunkt ist.“

Dies folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Ebenso leicht erkennt man:

„Projicirt man die einzelnen Quadrupel einer J_3^4 aus einem Punkte von C_3 auf die Curve, so erhält man Quadrupel einer zweiten J_3^4 ; wenn das Projectionscentrum auf C_3 fortschreitet, so erhält man aus einer J_3^4 alle übrigen. Je zwei Quadrupelinvolutionen $J_3^4 J_3^4$ können auf sechzehnfache Art durch Projection in einander überführt werden; ist v ein vierfacher Punkt von J_3^4 und v' ein solcher von J_3^4 , so ist der dritte Schnittpunkt v'' von C_3 mit der Geraden $\overline{v v'}$ ein Projectionscentrum. Solcher Geraden gibt es 16×16 , d. i. 256, welche zu je sechzehn durch sechzehn

Punkte v'' hindurchgehen. Die sechzehn Punkte v'' sind vierfache Punkte einer dritten J_3^4 . Die Gegenpunkte $oo'o''$ von J_3^3, J_3^4, J_3^4 liegen in gerader Linie.“

12. Durch jede auf C_3 auftretende J_3^3 erscheinen die Punkte von C_3 zu einer centralen Involution gepaart. Betrachtet man nämlich irgend eine J_2^3 , so werden alle ihre Tripel durch einen und denselben Punkt x_4 von C_3 zu Quadrupeln der J_3^3 ergänzt und die Tripel der zu J_2^3 residualen J_2^3 werden durch einen und denselben Punkt x'''' zu Quadrupeln ergänzt. Man sieht sofort, dass zwischen den Punkten x_4, x'''' eine eindeutige vertauschungsfähige Beziehung stattfindet, und in der That kann man direct zeigen, dass die Gerade $\overline{x_4 x''''}$ durch den Tangentialpunkt t von o hindurchgeht, wenn o der Gegenpunkt der J_3^3 ist.

Wir denken uns die J_2^3 durch einen dreifachen Punkt $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3$ bestimmt; ist nun x' der Tangentialpunkt von x_1 und x'' der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{o x''}$, so wird $\overline{x_1 x''}$ die C_3 in dem Punkte x_4 schneiden, welcher mit dem dreifachen Punkte x_1 ein Quadrupel der J_3^3 bildet, denn die vier Punkte $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3, x_4$ bilden offenbar ein Quadrupel, welches o zum Gegenpunkte hat. Da man die Tangente von C_3 und die Gerade $\overline{x x_4}$ als einen durch die Punkte x_1, x_2, x_3 hindurchgehenden Kegelschnitt betrachten kann, so bilden die Punkte x', x'', x_4 ein Tripel der zur J_2^3 residualen Tripelinvolution J_2^3 . Es möge daher x_4 zugleich mit x'''' bezeichnet, und der Punkt x'''' gesucht werden, welcher mit x', x'', x'''' ein Quadrupel der J_3^3 bildet. Man erhält ihn offenbar, wenn man den Tangentialpunkt t von o mit $x'''' \equiv x_4$ verbindet und den dritten Schnittpunkt x'''' von C_3 mit $\overline{t x''''} \equiv \overline{t x_4}$ aufsucht. In der That bilden x', x'', x''', x'''' ein Quadrupel, welches o zum Gegenpunkte hat. Hiermit ist das oben Gesagte erwiesen.

Es werden also je zwei mit t in gerader Linie liegende Punkte durch die Tripel residualer Involutionen zu Quadrupeln der J_3^3 ergänzt; die Berührungspunkte o, o_1, o_2, o_3 der vier durch t gehenden Tangenten werden somit durch sich selbst residuale Involutionen ergänzt. Die Tripel, welche o ergänzen, haben wir als die Tripel der in gerader Linie liegenden Curvenpunkte erkannt. Die Tripel, welche o_1, o_2, o_3 , respective zu Quadrupeln ergänzen, sind somit die Tripel der Berührungspunkte der drei Systeme dreifach berührender Kegelschnitte.

13. „Alle Curven vierter Ordnung, welche durch acht Punkte der Curve C_3 hindurchgehen, bestimmen auf C_3 eine Quadrupelinvolution dritter Stufe. Der Gegenpunkt dieser Involution ist der neunte Schnittpunkt der durch jene acht Punkte hindurchgehenden Curven dritter Ordnung.“

Mit anderen Worten: „Alle Curven vierter Ordnung, welche durch elf Punkte der C_3 hindurchgehen, schneiden diese Curve noch in einem und demselben zwölften Punkte (Restsatz). Je vier von den zwölf Punkten bilden ein Quadrupel, dessen Gegenpunkt mit den acht anderen Punkten ein System von neun Schnittpunkten von Curven dritter Ordnung bildet.“

Wir betrachten alle Curven vierter Ordnung C_4 , welche durch acht feste Punkte $p_1 p_2 \dots p_8$ von C_3 und durch drei beliebige Punkte $q_1 q_2 q_3$ hindurchgehen. Sie bestimmen offenbar auf C_3 eine J_3^4 . Die durch die acht Punkte p und durch q_1 gehende Curve dritter Ordnung, welche C_3 in einem von q_1 unabhängigen neunten Punkte p_9 schneidet, stellt mit der Geraden $\overline{q_2 q_3}$ auch eine von den Curven C_4 dar und es bildet daher der Punkt p_9 mit den drei Schnittpunkten von C_3 und $\overline{q_2 q_3}$ ein Quadrupel der J_3^4 und somit ist der Punkt p_9 der Gegenpunkt von J_3^4 (Art. 10). Da nun dieser Gegenpunkt, welcher die J_3^4 vollkommen bestimmt, von den Punkten $q_1 q_2 q_3$ unabhängig ist, so erscheint der obige Satz bewiesen.

14. Wir definiren, in analoger Weise fortschreitend, eine vierfache Unendlichkeit von Punktquintupeln auf C_3 , von denen jedes durch vier seiner Punkte vollkommen bestimmt erscheint, als eine Quintupelinvolution vierter Stufe J_3^5 . Es gilt nun der Satz:

„Die durch die einzelnen Quintupel einer J_3^5 hindurchgehenden Kegelschnitte schneiden C_3 in einem und demselben festen Punkte, dem Centrum der Involution.“

Aus der Definition der J_3^5 folgt sofort, dass ein Punkt von C_3 durch die Quadrupel einer J_3^4 , jedes Punktetripel einer J_3^3 durch die Punktepaare einer J_3^2 und umgekehrt zu Quintupeln der J_3^5 ergänzt erscheinen. Es ist so durch die J_3^5 eine eindeutige Punkt-

beziehung, die wir überdies als eine centrale erkennen, auf C_3 gegeben.

Hält man einen Punkt x_5 auf C_3 fest, so werden die mit ihm Quintupel der J_4^1 bildenden Quadrupel $x_1 x_2 x_3 x_4$ eine J_3^2 darstellen, welcher ein Gegenpunkt von o_5 zukommt. Jedem Punkte x_5 entspricht somit ein Punkt o_5 und umgekehrt; denn, wird o_5 angenommen, so ist die J_3^2 , welcher er als Gegenpunkt zukommt, durch ihn vollständig bestimmt und alle Quadrupel dieser J_3^2 werden von einem und demselben x_5 zu Quintupeln der J_4^1 ergänzt. Die Beziehung zwischen x_5 und o_5 ist jedoch auch vertauschungsfähig; denn, wenn wir ein Quadrupel $x_1 x_2 x_3 x_4$, in welchem die drei Punkte $x_1 x_2 x_3$ in gerader Linie liegen, durch x_5 zu einem Quintupel der J_4^1 ergänzen, so fällt o_5 mit x_4 zusammen und o_4 mit x_5 ,¹ sodass die Gerade $o_5 x_5$ durch einen festen Punkt o von C_3 hindurchgehen wird. Da nun in jedem Quintupel der Punkt o_5 der Gegenpunkt der vier Punkte $x_1 x_2 x_3 x_4$ ist, so liegen die sechs Punkte $o x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ in einem und demselben Kegelschnitte.

„Eine Quintupelinvolution vierter Stufe ist durch ein Quintupel oder das Centrum o vollkommen bestimmt.

Der durch das Quintupel gelegte Kegelschnitt schneidet C_3 im Punkte o , und irgend ein Quadrupel $x_1 x_2 x_3 x_4$ wird durch den sechsten Schnittpunkt x_5 von C_3 mit dem durch $x_1 x_2 x_3 x_4 o$ hindurchgehenden Kegelschnitt ergänzt. Alle geraden Tripel werden durch alle Paare der J_1^2 ergänzt, deren Centrum o ist. Die Tripel irgend einer J_2^3 werden ergänzt durch die Paare, welche mit dem Centrum o Tripel der residualen Involution bilden u. s. w.

15. „Alle Curven fünfter Ordnung, welche durch zehn feste Punkte von C_3 hindurchgehen, bestimmen auf C_3 eine J_4^1 , d. h. alle Curven fünfter Ordnung, welche durch vierzehn Punkte von C_3 hindurchgehen, schneiden C_3 in einem und demselben fünfzehnten

¹ Hält man nämlich hier x_5 fest, so wird das gerade Tripel $x_1 x_2 x_3$ durch den Punkt x_4 zu einem Quadrupel der J_3^2 ergänzt, und es ist somit x_4 der Gegenpunkt o_5 dieser J_3^2 .

Punkte (Restsatz). Das Centrum jener J_4^2 ist das Centrum der J_1^2 , welche auf C_3 durch die Curven vierter Ordnung bestimmt wird, welche durch jene zehn Punkte hindurchgehen.“

Nachdem alle durch acht Punkte von C_3 hindurchgehenden Curven vierter Ordnung auf C_3 eine J_3^2 bestimmen, werden die durch zehn Punkte von C_3 gehenden Curven vierter Ordnung auf C_3 eine J_1^2 bestimmen. Wir betrachten nun die durch die zehn Punkte $p_1 p_2 \dots p_{10}$ von C_3 und durch die beliebigen sechs Punkte $q_1 q_2 \dots q_6$ hindurchgehenden Curven fünfter Ordnung C_5 ; sie bestimmen auf C_3 offenbar eine J_3^2 , welche jedoch, wie gleich gezeigt werden wird, von den Punkten q ganz unabhängig ist. Die C_4 , welche durch die zehn Punkte p und durch vier Punkte $q_1 q_2 q_3 q_4$ bestimmt ist, schneidet C_3 in einem Punktepaare $s' s''$ jener J_1^2 , welche auf C_3 durch die, durch $p_1 p_2 \dots p_{10}$ hindurchgehenden C_4 bestimmt wird; ihr Centrum, d. h. der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{s's''}$ sei o . Jene Curve C_4 mit der Geraden $\overline{q_5 q_6}$, welche C_3 in $r' r'' r'''$ schneiden möge, stellt eine C_5 unseres Systemes dar und somit ist $s' s'' r' r'' r'''$ ein Quintupel, und folglich o das Centrum der J_4^2 (Art. 14). Es ist somit das Centrum o und also auch die J_4^2 nur von den Punkten $p_1 \dots p_{10}$ abhängig, und obiger Satz bewiesen.

16. Wir verstehen allgemein unter einer Involution n -ten Grades ($n-1$)-ter Stufe J_{n-1}^n auf C_3 eine ($n-1$)-fache Unendlichkeit von n -punktigen Gruppen, von denen jede durch ($n-1$) ihrer Punkte vollkommen und unzweideutig bestimmt ist.

Tritt auf C_3 eine Sextupelinvolution fünfter Stufe J_5^3 auf, und hält man einen Punkt x_6 eines Sextupels $x_1 x_2 \dots x_5 x_6$ fest, so bilden die ihn ergänzenden Quintupel $x_1 x_2 \dots x_5$, der Definition gemäss, eine J_4^2 und die, durch die Quintupel $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ bestimmten Kegelschnitte werden C_3 in einem festen Punkte o schneiden. In dieser Art ist durch eine J_5^3 jedem Punkte x_6 ein Punkt o_6 zugeordnet; aber auch umgekehrt wird durch o_6 der Punkt x_6 vollkommen bestimmt. Denn die durch o_6 gehenden Kegelschnitte bestimmen auf C_3 eine J_4^2 , und wenn der Punkt x_6 ein Quintupel dieser J_4^2 auf ein Sextupel der J_5^3 ergänzt, so muss er Früherem gemäss alle Quintupel dieser J_4^2 ergänzen. Die Beziehung zwischen x_6 und o_6 ist somit eine eindeutige E -Beziehung.

„Eine Sextupelinvolution fünfter Stufe ist durch ein Sextupel vollkommen bestimmt.“

Wählt man nämlich irgend sechs Punkte $x_1 \dots x_6$ auf C_3 als ein Sextupel bildend, so ist die E -Beziehung vollkommen gegeben, da einem der sechs Punkte, zum Beispiel x_6 der sechste Schnittpunkt o_6 von C_3 mit dem durch die übrigen fünf Punkte $x_1 \dots x_5$ gehenden Kegelschnitte entspricht, und durch ein Paar entsprechender Punkte die E -Beziehung gegeben ist. Hieraus zugleich der Satz: „Sind x_i ($i=1 \dots 6$) irgend sechs Punkte einer ebenen Curve dritter Ordnung und ist o_i der sechste Schnittpunkt von C_3 mit dem Kegelschnitte, welcher jene Punkte mit Ausnahme von x_i enthält, so gehören die sechs Punktepaare x_i, o_i ($i=1 \dots 6$) einer und derselben eindeutigen Beziehung an (d. h. die Geraden $\overline{x_i o_i}, \overline{x_i o_i}$ werden sich in Punkten von C_3 schneiden.)“

Soll irgend ein Quintupel $x'_1 x'_2 \dots x'_5$ zu einem Sextupel der J_3^6 ergänzt werden, so hat man durch dasselbe einen Kegelschnitt zu legen, welcher C_3 noch in o'_6 schneiden mag, hat ferner $\overline{o'_6 x'_i}$ mit C_3 in p etwa zum dritten Durchschnitte zu bringen, so wird die Gerade $\overline{p o'_i}$ die Curve C_3 in x'_6 zum dritten Male schneiden.

Wenn wir sechs Punkte von C_3 , welche auf einem und demselben Kegelschnitte gelegen sind, als ein conisches Sextupel bezeichnen, so gilt der Satz:

„Wenn ein Sextupel einer J_3^6 conisch ist, so sind es alle.“

Denn liegen $x_1 \dots x_6$ auf einem Kegelschnitte, so fällt o_6 mit x_6 zusammen, die E -Beziehung weist dann lauter sich selbst entsprechende Punkte auf, sodass immer x_i mit o_i zusammenfällt.

Wir haben in diesem Falle eine fundamentale J_3^6 vor uns, welche mit der C_3 gegeben erscheint und deren Gruppen durch die sämtlichen Kegelschnitte der Ebene auf C_3 bestimmt werden.

17. Jede auf C_3 auftretende E -Beziehung gibt Veranlassung zu zwei J_3^6 , welche in einer einfachen gegenseitigen Beziehung stehen. Durch die auf C_3 vorausgesetzte E -Beziehung wird jedem Punkte x_6 ein Punkt o_6 zugeordnet und es wird dann x_6 mit den Schnittpunkten $x_1 \dots x_5$ von C_3 mit irgend einem durch o_6 gehen-

den Kegelschnitte ein Sextupel einer J_5^6 bilden (vgl. vorigen Artikel). Ebenso wird, wenn man o_6 als x'_6 und x_6 als o'_6 betrachtet, der Punkt x'_6 mit den fünf Schnitten $x'_1 \dots x'_5$ von C_3 mit einem durch o'_6 gehenden Kegelschnitte Sextupel einer zweiten J_5^6 bilden.

„Diese beiden Involutionen J_5^6, J_5^6 sind residual, d. h. jedes Sextupel der einen stellt mit jedem Sextupel der anderen die zwölf Schnittpunkte von C_3 mit Curven vierter Ordnung dar.“ Da alle C_4 , welche durch elf Punkte von C_3 hindurchgehen, diese Curve noch in einem und demselben zwölften Punkte schneiden, so bestimmen alle C_4 , welche durch sechs Punkte hindurchgehen, auf C_3 eine J_5^6 , und kann man hiebei jedes Sextupel jener Punkte durch die sechs Schnitte von C_3 mit einer C_4 ersetzen, welche durch irgend ein Sextupel der J_5^6 hindurchgehen. Jene Sextupel bilden somit eine zweite, die residuale J_5^6 , und beide Involutionen sind offenbar in dem Zusammenhange, dass jedes Sextupel der einen mit jedem Sextupel der anderen die zwölf Schnittpunkte von C_3 mit einer C_4 darstellen. Dass den beiden Involutionen dieselbe E -Beziehung zugehört, und zwar so, dass je zwei Punkte derselben beim Übergange von einer der beiden Involutionen zur anderen ihre Rolle wechseln, sieht man so ein:

Wir legen durch fünf Punkte x_1, x_2, \dots, x_5 eines Sextupels einer J_5^6 einen Kegelschnitt C_2 und durch den sechsten Punkt x_6 einen Kegelschnitt C'_2 ; C_2 schneidet C_3 noch in o_6 und x_6 o_6 ist ein Paar entsprechender Punkte der E -Beziehung. Der Punkt o_6 als x'_6 aufgefasst, bildet mit den weiteren fünf Schnitten $x'_1 \dots x'_5$ von C_3 und C'_2 ein Sextupel einer J_5^6 , welche mit J_5^6 residual ist, da die beiden Sextupel auf der durch die Kegelschnitte C_2, C'_2 dargestellten C_4 liegen. Nun vertritt aber x_6 die Stelle des Punktes o'_6 ; es ist also $x_6 \equiv o'$ und $o_6 \equiv x'_6$, w. z. b. w.

Eine J_5^6 wird sich selbst residual sein, wenn die E -Beziehung, welche ihr entspricht, eine vertauschungsfähige ist, d. h. wenn es eine der vier fundamentalen vertauschungsfähigen E -Beziehungen ist. Es werden dann je zwei Sextupel der J_5^6 ein System von zwölf Schnittpunkten der C_3 mit Curven vierter Ordnung darstellen und insbesondere wird es für jedes Sextupel Curven C_4 geben, welche die C_3 in den Punkten des Sextupels berühren.

Die erste fundamentale vertauschungsfähige E -Beziehung, nach welcher jeder Punkt von C_3 sich selbst entspricht, liefert die aus den conischen Sextupeln der C_3 bestehende fundamentale (sich selbst residuale) J_5^6 .

Die drei übrigen fundamentalen E -Beziehungen, von denen jede aus den Paaren correspondirender Punkte der C_3 , welche einem der drei Systeme angehören, besteht, liefern drei weitere fundamentale (sich selbst residuale) Sextupelinvolutionen fünfter Stufe. Es wird irgend ein Quintupel auf C_3 zu einem Sextupel einer solchen fundamentalen J_5^6 ergänzt, wenn man durch das Quintupel einen C_2 legt und zu dem sechsten Schnittpunkte desselben mit C_3 den correspondirenden Punkt des betreffenden Systems aufsucht, dieser ergänzt das Quintupel.

18. Zu jeder J_5^6 gehört auch eine residuale J_2^3 . Legt man durch ein Sextupel $x_1 \dots x_6$ der J_5^6 eine C_3 , so wird diese unsere Fundamentalcurve in noch drei Punkten $x'x''x'''$ schneiden. Alle diese Tripel bilden, dem Restsatze gemäss, eine J_2^3 und die C_3 , welche man durch irgend ein Tripel dieser J_2^3 legt, müssen nach demselben Satze durch ein Sextupel unserer J_5^6 hindurchgehen (da diese durch das ursprüngliche Sextupel schon bestimmt ist). Die beiden Involutionen J_5^6, J_2^3 sind nun in der residualen Beziehung da jedes Sextupel der ersten mit jedem Sextupel der zweiten, die neun Schnittpunkte der Fundamentalcurve mit anderen C_3 darstellt.

„ Wenn eine J_5^6 und eine J_2^3 residual sind, so gehört zu beiden dieselbe E -Beziehung, nur dass je zwei entsprechende Punkte beim Übergange von der einen zu der anderen Involution ihre Rollen wechseln.“

Betrachtet man nämlich ein Sextupel $x_1 x_2 \dots x_6$ der J_5^6 , welches ein gerades Tripel $x_1 x_2 x_3$ enthält, so wird o_6 der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{x_4 x_5}$ sein. Dieser Punkt, als x' aufgefasst, stellt mit den zwei Schnittpunkten $x'' x'''$ von C_3 mit irgend einer durch x_6 gehenden Geraden ein Tripel $x' x'' x'''$ der residualen J_2^3 dar, weil die drei Geraden $\overline{x_1 x_2 x_3}, \overline{x_4 x_5 x_6}, \overline{x_6 x'' x'''}$ eine Curve dritter Ordnung darstellen.

Diese residuale J_2^3 ist mit einer E -Beziehung verbunden, nach welcher dem Punkte x' der Punkt x_6 als o' entspricht; nun ist $x' \equiv o_6, o' \equiv x_6$ und somit obige Behauptung bewiesen.

Wir bemerken, dass durch eine auf C_3 auftretende J_5^6 die sämtlichen, auf C_3 befindlichen J_2^3 in Paare und die J_1^2 in Tripel geordnet erscheinen. Man sieht nämlich sofort, dass alle Tripel einer J_2^3 durch alle Tripel einer zweiten J_2^3 zu Sextupeln der J_5^6 ergänzt werden, insbesondere werden die geraden Tripel ergänzt durch eine J_2^3 , deren E -Beziehung identisch ist mit der E -Beziehung der J_5^6 ; und ebenso erkennt man, dass je drei J_1^2 , deren Centren ein Tripel der zur J_5^6 residualen J_2^3 bilden, aus Paaren bestehen, welche zu je dreien genommen, Sextupel der J_5^6 darstellen.

19. Hat man auf C_3 eine J_6^7 , so erscheinen die Punkte von C_3 in centralinvolutorischer Beziehung, und zwar folgendermassen: Hält man irgend fünf Punkte $x_1 x_2 \dots x_5$ auf C_3 fest, so werden die Paare $x_6 x_7$, welche jenes Quintupel zu einer Gruppe der J_6^7 ergänzen, der Definition der J_6^7 gemäss, eine J_1^2 bilden; es sei x das Centrum derselben, d. h. der dritte Schnittpunkt von C_3 mit den Geraden $\overline{x_6 x_7}$. Jedes der Paare $x_6 x_7$ wird aber auch mit jedem Quintupel der J_5^6 , welche durch die Gruppe $x_1 x_2 \dots x_5$ bestimmt ist, eine Gruppe der J_6^7 bilden. Nun gehen aber die diesen Quintupeln umgeschriebenen C_2 durch einen festen Punkt x' von C_3 hindurch, x' ist der sechste Schnittpunkt von C_3 mit dem durch $x_1 x_2 \dots x_5$ gehenden C_2 . Die Beziehung der Punkte x, x' ist eine eindeutige; denn sobald x gegeben ist, ist jene J_1^2 und folglich auch die J_4^5 und somit auch x' gegeben, und umgekehrt bestimmt x' zunächst die J_3^4 diese die ergänzende J_1^2 , deren Centrum x ist.

Die Beziehung zwischen x, x' ist aber auch vertauschungsfähig, sodass die Geraden $\overline{xx'}$ durch einen festen Punkt o von C_3 hindurchgehen. Wählt man nämlich die sechs Punkte $x_1 x_2 \dots x_6$, als Schnittpunkte der C_3 mit einem Kegelschnitte und ist x_7 oder o der ein solches Sextupel und daher alle conischen Sextupel ergänzende Punkt, so wird x' mit x_6 und x mit dem dritten Schnittpunkte von C_3 und $\overline{o x_6}$ zusammenfallen, so dass also die Gerade $\overline{xx'}$ durch den festen Punkt o hindurchgeht, welcher alle conischen Sextupel zu Gruppen unserer J_6^7 ergänzt, was zu beweisen war, Hieraus folgt sofort:

„Eine J_6^7 ist durch eine Gruppe oder durch den Punkt o vollkommen bestimmt.“

Um irgend ein Sextupel zu ergänzen, hat man den Schnittpunkt x' von C_3 mit dem durch fünf Punkte des Sextupels hindurchgehenden Kegelschnitte zu bestimmen, C_3 mit $\overline{ox'}$ in x zum dritten Durchschnitte zu bringen, so trifft die Gerade, welche den Punkt x mit dem sechsten Punkte des Sextupels verbindet, die Curve C_3 in dem siebenten Punkte, welcher das Sextupel zu einer Gruppe der J_6^7 ergänzt.

20. Eine auf C_3 auftretende J_7^8 liefert ebenfalls eine central-involutorische Punktebeziehung und somit einen festen Punkt o , das Centrum der Involution.

Hält man nämlich irgend vier Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 fest, so bilden, der Definition gemäss, die Quadrupel x_5, x_6, x_7, x_8 , welche mit jenen vier Punkten Gruppen der J_7^8 darstellen, eine J_3^4 , welcher ein Gegenpunkt x' , der Gegenpunkt aller der Vierecke x_5, x_6, x_7, x_8 zukommt. Hält man nun eines dieser Quadrupel x_5, \dots, x_8 fest, so wird durch die ergänzenden Quadrupel x_1, x_2, x_3, x_4 eine zweite J_3^4 mit einem Gegenpunkte x entstehen. Durch x ist die J_3^4 , durch diese die J_3^4 und dadurch x' bestimmt; ebenso bestimmt x' eindeutig den Punkt x . Dass die Beziehung zwischen x, x' eine vertauschungsfähige ist, erkennt man sofort. Es wird somit die Gerade $\overline{xx'}$ durch einen festen Punkt o der Curve C_3 hindurchgehen. Je zwei Quadrupel, deren Gegenpunkte mit o (dem Centrum der J_7^8) in gerader Linie liegen, constituiren eine achtpunktige Gruppe der J_7^8 .

„Eine J_7^8 ist durch eine Gruppe oder durch den Punkt o vollkommen bestimmt.“

Um zu sieben Punkten der C_3 jenen achten zu finden, welcher mit ihnen eine Gruppe der J_7^8 bildet, hat man also zu irgend vier von den sieben Punkten den Gegenpunkt x zu suchen, den dritten Schnittpunkt x' von C_3 mit \overline{ox} zu bestimmen und die drei übrigen von jenen sieben Punkten zu einem Quadrupel zu ergänzen, welches x' zum Gegenpunkte hat; der ergänzende Punkt ist der gesuchte.

Nachdem alle Curven dritter Ordnung, welche durch acht Punkte der C_3 hindurchgehen, dieselbe noch in einem festen neunten Punkte schneiden, so bestimmen, der Definition gemäss, alle Curven dritter Ordnung, die durch sieben Punkte von C_3 hindurchgehen, eine J_1^2 auf C_3 , welche residual ist, zu der J_6^7 ,

welche durch jene sieben Punkte bestimmt erscheint. Umgekehrt werden alle C_3 , welche durch die Paare einer J_1^2 hindurchgehen, auf der Fundamentalcurve die residuale J_6^2 bestimmen.

Ebenso erkennt man, dass alle Curven dritter Ordnung, welche durch einen festen Punkt von C_3 hindurchgehen, auf C_3 eine J_7^6 bestimmen, und hieraus folgt sofort:

„Alle Curven dritter Ordnung, welche man durch die einzelnen Gruppen einer J_7^6 legt, schneiden C_3 in einem und demselben Punkte“ (Restsatz).

„Dieser Punkt ist das Centrum jener J_7^6 .“

Denn betrachtet man eine Gruppe der J_7^6 , welche zwei gerade Tripel $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ enthält, so ist x_7 der Gegenpunkt des Quadrupels x_1, x_2, x_3, x_4 und x_8 derjenige des Quadrupels x_4, x_5, x_6, x_7 und die Gerade $\overline{x_7, x_8}$ wird somit durch o gehen, welcher Punkt als der neunte Schnittpunkt von C_3 mit der Curve dritter Ordnung, welche durch die drei Geraden $\overline{x_1, x_2, x_3}, \overline{x_4, x_5, x_6}, \overline{x_7, x_8}$ dargestellt ist, auftritt, was zu beweisen war.

Die bekannte Construction des neunten Schnittpunktes o von C_3 mit Curven dritter Ordnung, welche durch acht Punkte $x_1 \dots x_8$ von C_3 hindurchgehen, ist eine unmittelbare Folge obiger Betrachtungen. Man zerlegt die acht Punkte in zwei Quadrupel, construirt deren Gegenpunkte, verbindet diese durch eine Gerade, so geht dieselbe durch o hindurch.

21. Man erkennt unmittelbar, in welcher Art weiter gegangen werden kann. Wir begnügen uns mit der Anführung des folgenden Satzes:

„Eine Involution n -ten Grades ($n-1$)-ter Stufe J_{n-1}^n auf C_3 ist durch eine von ihren Gruppen vollkommen bestimmt.“

„Je nachdem die Zahl n durch 3 theilbar ist oder nicht, erscheint mit der J_{n-1}^n eine nicht centrale E -Beziehung oder eine centrale J -Beziehung, das heisst, ein fester Punkt o von C_3 in Verbindung.“

„Durch jede E -Beziehung sind zwei residuale Involutionen n -ten Grades ($n-1$)-ter Stufe gegeben; jede Gruppe der einen bildet mit jeder Gruppe der anderen den vollständigen Schnitt von C_3 mit einer Curve $\frac{2n}{3}$ -ter Ordnung.“

„Ist die Zahl n von der Form $3p+2$, so schneiden alle Curven $(p+1)$ -ter Ordnung, welche durch die einzelnen Gruppen hindurchgehen, die Curve in einem festen Punkte o der Curve.“

„Ist die Zahl n von der Form $3p+1$, so schneiden alle Curven $(p+1)$ -ter Ordnung, welche durch die einzelnen Gruppen hindurchgehen, die Curve in Punktepaaren, deren Verbindungsgeraden durch einen festen Punkt o der Curve hindurchgehen.“

„Der vollständige Schnitt von C_3 mit anderen algebraischen Curven setzt sich aus Gruppen residualer Involutionen zusammen“ (Restsätze).

22. Es sei R_4 eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art, d. h. Schnitt zweier (und daher unendlich vieler) Flächen zweiter Ordnung; S, S' seien zwei feste Bisecanten und x ein veränderlicher Punkt von R_4 . Die Ebenen ξ, ξ' , welche x mit S, S' , respective verbinden, werden, wenn x die R_4 durchläuft, zwei Ebenenbüschel beschreiben, welche offenbar in zwei-zweideutiger Beziehung sind. Die durch die Axen derselben gehenden Tangentialebenen der Curven sind die Verzweigungsebenen und daher der bekannte fundamentale Satz: „Durch jede Bisecante von R_4 gehen vier Tangentialebenen der Curve (ausser den zwei, welche sie in den auf der Bisecante gelegenen Punkten berühren), deren Doppelverhältniss constant, nur von der Curve abhängig ist.“

23. Es sei auf R_4 irgend eine eindeutige Punktebeziehung gegeben so dass einem Punkte x ein durch ihn vollkommen bestimmter Punkt x' entspricht; betrachtet man x als y' , so wird ihm im Allgemeinen ein von x' verschiedener Punkt y zugeordnet sein; wenn y mit x' identisch ist, so entsprechen sich die beiden Punkte vertauschungsfähig, involutorisch. Wir wählen eine beliebige Bisecante S von R_4 und verbinden S mit je zwei entsprechenden Punkten x, x' durch die Ebenen ξ, ξ' , welche als einander entsprechend betrachtet werden sollen; dadurch ergeben sich zwei coaxiale Ebenenbüschel in zwei-zweideutiger Beziehung. Denn jede Ebene ξ enthält zwei Punkte x und jede Ebene ξ' enthält zwei Punkte x' . Diese beiden Punkte fallen zusammen, wenn die Ebene eine Tangentialebene wird (welche R_4 in einem ausserhalb S gelegenen Punkte berührt); es ist somit jede von den vier

durch S gehenden Tangentialebenen eine Verzweigungsebene, und zwar sowohl als ξ wie auch als ξ' betrachtet. Die beiden coaxialen zweideutigen Büschel besitzen folglich vier gemeinschaftliche Verzweigungselemente und bilden daher ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades.¹

„Entsprechende Punkte einer jeden auf einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art auftretenden eindeutigen Beziehung werden aus jeder Bisecante der Curve durch ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades projicirt; die vier Verzweigungselemente desselben sind die vier durch die Bisecante hindurchgehenden Tangentialebenen der Curve.“

24. Nehmen wir an, dass in einer eindeutigen Beziehung auf R_4 zwei involutorisch entsprechende Punkte x, x' auftreten, so dass man x' als y und x als y' betrachten kann. Wir legen durch die Gerade $\overline{xx'}$ eine beliebige Ebene ω , welche R_4 noch in den zwei Punkten $(x)(x')$ schneiden möge, und verbinden diese Punkte durch die Bisecante (S) , aus welcher wir nun die eindeutige Beziehung projiciren. Für das entstehende symmetrische Ebenenbüschel zweiten Grades sind nun zunächst die vier durch (S) gehenden Tangentialebenen Verzweigungselemente, zu denen offenbar die Ebene ω als fünftes, und zwar sich selbst entsprechendes Verzweigungselement hinzutritt, sodass jede durch (S) gehende Ebene als sich selbst entsprechende Verzweigungsebene auftreten wird (vgl. „Über eindeutige Beziehungen u. s. w.“ I. c. Art. 5), da im Allgemeinen die Ebene ω kein Doppelement einer der drei quadratischen Involutionen sein wird, die man erhält, wenn man die vier durch (S) gehenden Tangentialebenen in zwei Paare ordnet und als eine quadratische Involution bestimmend betrachtet.

Ist also x_1, x'_1 irgend ein anderes Paar entsprechender Punkte der eindeutigen Beziehung, so muss die Ebene $[(S)x_1]$ identisch sein mit der Ebene $[(S)x'_1]$ oder also die Bisecante $\overline{x_1x'_1}$ muss die Bisecante (S) schneiden. Man erhält somit die Paare einander entsprechender Punkte als die Schnittpunktpaare der Curve R_4

¹ Vgl. „Über einen Correspondenzsatz.“ Sitzung vom 8. März 1883. „Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung.“ Sitzung vom 19. April 1883.

mit den durch (S) hindurchgehenden Ebenen, woraus folgt, dass sich je zwei Punkte x, x' vertauschungsfähig entsprechen.

„Wenn in einer eindeutigen Punktbeziehung auf R_4 ein Paar vertauschungsfähig sich entsprechender Punkte vorkommt, so herrscht in allen Paaren Vertauschungsfähigkeit und jede Bisecante (S) , welche der Verbindungsgeraden S zweier entsprechenden Punkte xx' begegnet, begegnet allen solchen Verbindungsgeraden.“

Wir bezeichnen eine solche Beziehung als eine axiale Paarinvolution J_1^2 auf R_4 ; sie wird auf R_4 durch die Ebenen eines Büschels bestimmt, dessen Axe (S) eine Bisecante der Curve ist.

Da man die Ebene ω durch eine der Geraden $\overline{xx'}$ beliebig hindurchlegen kann, so bilden die Punktepaare x, x' als deren Verbindungsgerade (S) auftritt, eine zweite axiale Paarinvolution J_1^2 auf R_4 .

„Eine axiale Paarinvolution auf R_4 ist durch ein Paar entsprechender Punkte vollkommen bestimmt.“

Eine durch das Punktepaar hindurchgelegte Ebene enthält noch zwei Punkte der Curve R_4 deren Verbindungsgerade (S) die Axe für das, die J_1^2 aus R_4 schneidende Ebenenbüschel ist.

„Eine axiale Paarinvolution auf R_4 besitzt vier sich selbst entsprechenden Punkte (Doppelpunkte).“

Es sind dies die Berührungspunkte von R_4 mit den vier durch (S) hindurchgehenden Tangentialebenen.

25. „Die auf R_4 auftretenden axialen Paarinvolutionen ordnen sich in Paare.“ Ist nämlich eine J_1^2 auf R_4 etwa durch ein Punktepaar xx' gegeben und sind $(x)(x')$ die zwei Schnitte von R_4 mit irgend einer durch $\overline{xx'}$ hindurchgehenden Ebene ω , so ist die Gerade $\overline{(x)(x')}$ oder (S) Axe für ein Ebenenbüschel, welches die J_1^2 aus R_4 herausschneidet. Dreht sich ω um $\overline{xx'}$ so beschreibt das Paar $(x), (x')$ eine zweite (J_1^2) , welche durch die J_1^2 bestimmt erscheint, und umgekehrt ist offenbar in derselben Art die J_1^2 durch die (J_1^2) bestimmt. „Jedes Paar xx' von J_1^2 liegt mit jedem Paar $(x)(x')$ von (J_1^2) in einer Ebene“. Zwei solche Paarinvolutionen sollen demnach als residuale Paarinvolutionen bezeichnet werden.

„Die Bisecanten S , welche als Verbindungsgeraden der einzelnen Paare $x x'$ einer J_1^2 auftreten, erfüllen eine Fläche zweiter Ordnung, deren zweites Erzeugendensystem aus den Verbindungsgeraden (S) der einzelnen Paare $(x)(x')$ der residualen (J_1^2) besteht.“

Denn, enthält jede der beiden Bisecanten $(S)(S_1)$ ein Punktepaar der zur J_1^2 residualen (J_1^2) , so liegt jedes Punktepaar $x x'$ der J_1^2 mit (S) in einer Ebene ω und mit (S_1) in einer Ebene ω_1 , so dass die Ebenen ω, ω_1 der beiden Büschel $(S)(S_1)$ durch die Punktepaare $x x'$ der J_1^2 in eindeutige, d. h. projectivische Beziehung gesetzt werden. Die Gerade $\overline{xx'}$ oder S , welche als Schnittlinie der entsprechenden Ebenen ω, ω_1 auftritt, wird somit einer Regelschaar zweiten Grades angehören. Die Geraden $(S)(S_1) \dots$ schneiden alle die Geraden S und stellen somit die zweite Erzeugendenschaar derselben Fläche zweiten Grades dar.

In dieser Art entsprechen jeder durch R_4 hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung zwei residuale J_1^2 welche auf R_4 durch die beiden Erzeugendensysteme der Fläche bestimmt erscheinen und umgekehrt.

26. „Es gibt vier sich selbst residuale, also fundamentale axiale Paarinvolutionen auf R_4 ; die ihnen entsprechenden Flächen zweiten Grades sind die vier Kegel zweiter Ordnung, welche man durch R_4 legen kann.“

Zunächst erkennt man leicht, dass eine sich selbst residuale J_1^2 einen durch R_4 hindurchgehenden Kegel zweiter Ordnung liefern muss; denn weil für eine solche J_1^2 jedes Punktepaar mit edem anderen in einer Ebene liegen muss, so wird die Gerade $\overline{xx'}$ durch den Schnittpunkt von $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$ hindurchgehen, wenn aa', bb' irgend zwei Paare der J_1^2 sind. Es erfüllt somit $\overline{xx'}$ einen Kegel, welcher als die, den beiden in eine zusammenfallenden residualen Paarinvolutionen entsprechende Fläche zweiter Ordnung (mit zwei zusammenfallenden Erzeugendensystemen) auftritt. Um nun die sich selbst residualen J_1^2 und damit zugleich die durch R_4 gehenden quadratischen Kegel zu erhalten, betrachten wir irgend einen Punkt p von R_4 , dessen Tangente P sein möge. Ferner betrachten wir die sämtlichen Paare residualer Involutionen $J_1^2, (J_1^2)$ auf R_4 , und soll dem Punkte p , je nachdem wir

ihn als x zur J_1^2 oder als (x) zur (J_1^2) rechnen, der Punkt x respective (x') entsprechen. Da nun $x, x', (x), (x')$ vier Punkte einer Ebene sein müssen, so werden $x', (x')$ die zwei Schnittpunkte von R_4 mit einer durch P hindurchgehenden Ebene sein, und bilden somit Paare einer axialen Paarinvolution; diese hat vier Doppelpunkte, die Berührungspunkte der vier durch P gehenden Tangentialebenen, und es wird folglich viermal geschehen, dass x' mit (x') zusammenfällt. Es geschehe dies in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 dann ist offenbar durch jedes der Punktepaare pp_1, pp_2, pp_3, pp_4 , je eine sich selbst residuale also fundamentale Paarinvolution bestimmt. Diese Involutionen mögen mit $F_i J_1^2$ ($i = 1, 2, 3, 4$) bezeichnet werden. Die Verbindungsgeraden der Punktepaare von $F_i J_1^2$ gehen durch einen festen Punkt o_i des Raumes, und o_1, o_2, o_3, o_4 sind somit die Scheitel der vier durch R_4 hindurchgehenden quadratischen Kegel K_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

27. Da je zwei in einer Ebene gelegene Punktepaare von R_4 zwei residualen Involutionen angehören, so stellen die beiden Punkte pp_i , welche in einer Doppeltangentialebene (die offenbar als Tangentialebene von K_i längst $\overline{pp_i}$ durch o_i geht) gelegen sind, Doppelpunkte residualer Involutionen dar. Die vier Doppelpunkte einer $F_i J_1^2$, welche man als die Berührungspunkte der vier durch eine $\overline{pp_i}$ -Gerade gehenden Tangentialebenen erhält, sind somit Berührungspunkte von vier durch o_i gehenden Tangenten und zugleich von vier durch o_i gehenden Wendeschmiegungebenen der R_4 .

„Die Berührungspunkte der sechzehn Wendeschmiegungebenen sind die Doppelpunkte der vier fundamentalen sich selbst residualen Paarinvolutionen.“

28. Projicirt man die Punktepaare einer J_1^2 aus irgend einer Bisecante auf R_4 , so erhält man Punktepaare, deren Punkte offenbar in eindeutiger Beziehung sind, für welche überdies aus der in J_1^2 herrschenden Vertauschungsfähigkeit sofort der involutorische Charakter folgt.

„Projicirt man die Paare einer J_1^2 aus irgend einer Bisecante von R_4 auf die Curve, so erhält man Punktepaare einer zweiten axialen Paarinvolution.“

Insbesondere werden die Doppelpunkte der einen Involution durch die axiale Projection in die Doppelpunkte der anderen Involution übergeführt und da eine J_1^2 durch ein Paar entsprechender Punkte, und somit auch durch einen Doppelpunkt vollkommen und unzweideutig bestimmt ist, so kann man je zwei Paarinvolutionen durch axiale Projection in einander überführen. Ist nämlich d einer der vier Doppelpunkte einer J_1^2 und d' ein Doppelpunkt irgend einer zweiten J_1^2 und A irgend eine mit $\overline{dd'}$ in einer Ebene liegende Bisecante, d. h. Erzeugende des durch R_4 und $\overline{dd'}$ hindurchgehenden Hyperboloides, so wird durch axiale Projection aus A jede der beiden Involutionen in die andere übergeführt, weil die beiden Doppelpunkte d, d' durch diese Projection in einander übergehen. Die übrigbleibenden drei Doppelpunktepaare von J_1^2 und J_1^2 werden also paarweise in Ebenen durch A , d. h. auf Erzeugenden jenes Hyperboloides liegen. Hieraus folgt:

„Verbindet man die vier Doppelpunkte einer Paarinvolution mit den vier Doppelpunkten einer zweiten Paarinvolution, so ergeben sich sechzehn Gerade, welche zu je vierten auf vier durch die Raumcurve gehenden Flächen zweiter Ordnung liegen. Durch axiale Projection aus den Erzeugenden dieser vier Flächen, welche dem anderen Systeme angehören, werden die beiden Involutionen in einander übergeführt“.

Man kann also zwei Paarinvolutionen in vierfacher Art aus unendlich vielen Axen in einander überführen. Ist A eine Bisecante, welche mit der Verbindungsgeraden zweier Doppelpunkte einer J_1^2 in einer Ebene liegt, so wird durch axiale Projection aus A die J_1^2 in sich selbst übergeführt, weil jeder der Doppelpunkte in den anderen übergeht; die beiden übrigen Doppelpunkte der J_1^2 müssen somit ebenfalls in einander übergeführt werden, d. h.:

„Je zwei Gegenseiten eines der R_4 eingeschriebenen Viereckes, dessen Ecken die Doppelpunkte einer J_1^2 sind, liegen auf einer und derselben durch R_4 hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung. Den drei Gegenseitenpaaren des Viereckes entsprechen drei solche Flächen; aus den Erzeugenden dieser Flächen, welche

den anderen Systemen angehören, wird die J_1^2 durch axiale Projection in sich selbst übergeführt.“

Die Verbindungsgeraden der Punktepaare der J_1^2 füllen eine Fläche zweiter Ordnung aus, deren Erzeugenden des anderen Systemes die J_1^2 durch axiale Projection ebenfalls in sich selbst übergeht, so zwar dass jedes Punktepaar in sich selbst übergeführt wird.

29. Nachdem je zwei, residualen Paarinvolutionen angehörige Punktepaare in einer Ebene gelegen sind, müssen die vier Tangenten von R_4 in den vier Doppelpunkten einer J_1^2 die vier Tangenten der Doppelpunkte der residualen J_1^2 schneiden. In der That sind diese Tangenten Erzeugende jener Fläche zweiter Ordnung, deren zwei Erzeugendensysteme die beiden residualen Paarinvolutionen auf R_4 bestimmen. Selbstverständlich sind auch je zwei Punkte der R_4 , deren Tangenten sich schneiden, oder also die Berührungspunkte einer Doppeltangentialebene der R_4 , Doppelpunkte residualer Paarinvolutionen.

Projicirt man die Punktepaare einer J_1^2 aus einem der vier Kegelscheitel o_i auf die Curve, was mit der Projection aus einer Kante dieses Kegels identisch ist, so erhält man offenbar die residuale J_1^2 ; denn ein Doppelpunkt d des J_1^2 geht in einen solchen d' der J_1^2 über und ihre Tangenten schneiden sich, weil sie in der den Kegel längs der Kante $o_i d d'$ berührenden Tangentialebene gelegen sind.

„Je zwei residuale Paarinvolutionen werden durch centrale Projection aus jedem der vier Kegelscheitel o_i oder, was dasselbe ist, aus den Kanten der vier Kegelflächen K_i in einander übergeführt.“

Die vier Flächen des vorigen Artikels gehen somit im Falle residualer Involutionen in die vier Kegel über. Bezeichnet man die vier Doppelpunkte einer J_1^2 als ein Punktquadrupel auf R_4 , so erkennt man sofort, dass dasselbe durch einen seiner Punkte vollkommen bestimmt ist; die Tangenten eines Punktquadrupels gehören als Erzeugende einer und derselben Fläche zweiter Ordnung an. Ein Quadrupel besteht aus den Berührungspunkten der durch eine Bisecante gelegten Tangentialebenen; alle Bisecanten, welche einer Fläche zweiter Ordnung angehören, liefern dasselbe Quadrupel.

Zwei Quadrupel, welche residualen Involutionen angehören, sollen residuale Quadrupel genannt werden. Ihre Tangenten gehören derselben Fläche zweiter Ordnung an u. s. w.

Aus obigem Satze folgt sofort: „Die sechzehn Verbindungsgeraden der vier Punkte eines Quadrupels mit den vier Punkten des residualen Quadrupels gehen viermal zu je vierein durch die vier Kegelscheitel o_i .“

Jede der vier fundamentalen, sich selbst residualen Paarinvolutionen wird durch Projection aus dem Scheitel des Kegels, dessen Kanten ihre Punktepaare enthalten, so in sich übergeführt, dass jedes Paar in sich selbst übergeht (jeder seiner Punkte in den anderen); ausserdem wird sie durch Projection aus den übrigen drei Kegelscheiteln in sich überführt.

Sind dd' zwei Doppelpunkte einer solchen sich selbst residualen J_1^2 , so gehen ihre Tangenten durch einen der Kegelscheitel o_i . Wird die J_1^2 aus der Bisecante $\overline{dd'}$ auf R_4 projicirt, so geht d in d und d' in d' über, d. h. J_1^2 wird in sich selbst übergeführt, es muss also endlich der dritte Doppelpunkt in den vierten übergehen, d. h. alle vier liegen in einer Ebene und die Gerade $\overline{dd'}$ muss eine Kante eines der drei übrigen Kegel sein, welchem auch die Verbindungsgeraden der beiden übrigen Doppelpunkte angehören muss:

„Die vier Doppelpunkte jeder der vier sich selbst residualen Involutionen, bilden ein ebenes Viereck; die Ecken des Diagonaldreieckes desselben sind Scheitel für drei durch R_4 gehende Kegel zweiter Ordnung.“

Durch den Scheitel des vierten Kegels gehen die Tangenten von R_4 in den vier Doppelpunkten der J_1^2 .

30. „Wenn zwei Paarinvolutionen durch axiale Projection aus den Erzeugenden einer Fläche zweiter Ordnung in einander überführt werden, so werden die residualen Paarinvolutionen durch axiale Projection aus den Erzeugenden derselben Fläche aber des anderen Systemes in einander übergeführt.“

Es sei d ein Doppelpunkt einer J_1^2 und (d) ein Doppelpunkt der residualen (J_1^2); ist nun d' ein Doppelpunkt einer zweiten Paarinvolution J_1^2 und zieht man $\overline{d(d)}$, welche Gerade nach Frttherem durch einen der Kegelscheitel o_i hindurchgehen muss,

so wird $\overline{o, d'}$ die R_3 in einem Doppelpunkte (d') der zu J_1^2 residualen (J_1^2) schneiden. Nun werden J_1^2, J_1^2 durch axiale Projection aus $\overline{(d)(d')}$ und (J_1^2), (J_1^2) durch axiale Projection aus $\overline{dd'}$ in einander übergeführt. Die beiden Geraden $\overline{dd'}$, (d)(d') liegen in einer Ebene, sind also Erzeugende verschiedener Systeme einer durch R_3 gehenden Fläche zweiter Ordnung.

31. Wir betrachten nun eine allgemeine, eindeutige Punktbeziehung auf R_3 , welcher das Merkmal der Vertauschungsfähigkeit nicht anhaften soll. Jedem Punkte x von R_3 entspricht ein Punkt x' und umgekehrt; wenn man denselben Punkt x als accentuirten Punkt u' betrachtet, so wird ihm ein von x' verschiedener Punkt u entsprechen. Denn wäre für $u' \equiv x$ auch $u \equiv x'$, so hätten wir ein Paar vertauschungsfähiger Punkte und daher, im Allgemeinen, den früheren Fall einer axialen Paarinvolution.

Wir projeciren entsprechende Punkte der eindeutigen Beziehung aus einer beliebigen Bisecante S und erhalten so (Art. 23) ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades. Ist ξ, ζ ein Ebenenpaar, welches S mit einem Paar entsprechender Punkte x, x' verbindet, so kann der symmetrischen Eigenschaft des Büschels wegen ξ als η' und ζ als η betrachtet werden, und es ist dann η, η' , d. i. ξ, ξ ein Ebenenpaar, welches durch zwei einander entsprechende Punkte y, y' unserer Beziehung hindurchgeht.

Es entspricht somit dem Schnittpunkte y von R_3 mit ξ der Schnittpunkt y' von R_3 mit ξ ; d. h.:

„Werden zwei einander entsprechende Punkte x, x' einer eindeutigen auf R_3 auftretenden Beziehung aus einer beliebigen Bisecante der Curve auf die Curve projecirt, so erhält man wieder zwei einander (invers) entsprechende Punkte y', y derselben Beziehung.“

Hieraus folgt sofort:

„Eine eindeutige, nicht vertauschungsfähige Punktbeziehung auf einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art ist durch ein Paar entsprechender Punkte vollkommen bestimmt.“

Ist x, x' ein Punktepaar der Beziehung und soll zum Punkte y der entsprechende construirt werden, so legen wir durch die Gerade $\overline{x' y}$ eine beliebige Ebene, welche R_3 in zwei weiteren Punkten schneidet, deren Verbindungsgerade S sein möge. Die

durch S und x gelegte Ebene wird R_4 zum viertenmale in dem gesuchten Punkte y' schneiden.

Die Beziehung zwischen irgend zwei Paaren entsprechender Punkte kann man offenbar auch folgendermassen ausdrücken:

„Wenn zwei Punktepaare xx', yy' auf R_4 einer eindeutigen Beziehung angehören, so liegen ihre wechselseitigen Verbindungsgeraden $\overline{xy'}, \overline{x'y}$ auf einer und derselben durch R_4 hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung, und umgekehrt.“

Es sei p irgend ein Punkt von R_4 , P seine Tangente. Wir betrachten p einmal als x und das zweitemal als y' , und seien x', y die nach einer nicht axialen Beziehung ihm entsprechenden Punkte. Es müssen $\overline{xy'}$, d. h. P und $x'y$ einer durch R_4 gehenden Fläche zweiter Ordnung angehören, welche vollkommen bestimmt ist, da die in Ebenen durch P gelegenen Bisecanten eine Erzeugendenschaar derselben bilden. Sei Q die durch p gehende Erzeugende dieser Fläche, welche R_4 in p' zum zweitenmale schneiden möge, so werden die vier Punkte $x'y, pp'$ einer Ebene angehören. Gehen wir von einer nichtaxialen Beziehung zu allen anderen über, so wird $\overline{pp'}$ fest bleiben und die Punktepaare $x'y$ gehören somit einer axialen Paarinvolution an, d. h.:

„Die zwei irgend einem Punkte $x \equiv y'$ in den einzelnen nichtaxialen Beziehungen entsprechenden Punkte $x'y$ bilden die Punktepaare einer axialen Paarinvolution.“

Legt man obige Ebene durch $\overline{pp'}$ und P , so werden x' und y mit p zusammenfallen und die Ebene ist die Schmiegungeebene von R_4 in p . Wir können also auch sagen:

„Die Ebenen, welche einen Punkt p von R_4 mit den ihm in den einzelnen nichtaxialen Beziehungen entsprechenden Punkten verbinden, gehen alle auch durch jenen Punkt p' in welchem die Schmiegungeebene des Punktes p die Curve R_4 schneidet.“

(Die bekannte Construction der Schmiegungeebene einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species).

Wird p der Berührungspunkt einer der sechzehn stationären Schmiegungeebenen, so fällt p' mit p zusammen und $\overline{pp'}$ ist Tan-

gente von R_3 und Kante eines der vier Kegel K_i . Die beiden Punkte x', y , welche mit $\overline{pp'}$ in einer Ebene liegen, werden also ebenfalls auf einer Kante desselben Kegels gelegen sein, d. h.:

„Die Punkte, welche in den einzelnen nichtaxialen Beziehungen dem Berührungspunkte einer stationären Schmiegungsbene entsprechen, bilden Punktepaare einer der axialen fundamentalen Beziehungen.“

32. Nachdem man die Paare einander entsprechender Punkte einer eindeutigen Beziehung aus einem Paar durch dessen Projection aus den einzelnen Bisecanten auf R_3 erhält, so hat man unmittelbar den Satz:

„Eine eindeutige (nicht axiale) Punktbeziehung besitzt keinen sich selbst entsprechenden (Doppel-) Punkt; wenn ein Punkt der R_3 sich selbst entspricht, so entspricht jeder Punkt von R sich selbst“.

Denn ein sich selbst entsprechender Punkt, aus den Bisecanten auf R_3 projicirt, liefert wieder sich selbst entsprechende Punkte, w. z. b. w.

33. „Sind a, b, c, d irgend vier Punkte der Raumcurve R_3 und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die ihnen gegenüberliegenden Ebenen des durch sie als Ecken dargestellten Tetraeders, sind endlich a', b', c', d' die vierten Schnittpunkte von R_3 mit den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so sind aa', bb', cc', dd' vier Paare entsprechender Punkte einer und derselben eindeutigen Beziehung.“

In der That ergeben sich die Punktepaare bb', cc', dd' , wenn man das Punktepaar $a'a$ der Reihe nach aus den Bisecanten $\overline{dc}, \overline{bd}, \overline{cb}$ auf R_3 projicirt.

34. „Sowie auf der ebenen Curve dritter Ordnung, gibt es auch auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species R_3 drei fundamentale nicht axiale aber vertauschungsfähige eindeutige Beziehungen, welche man erhält, wenn man einem Punkte der Curve einen der drei Punkte, welche mit ihm ein Quadrupel bilden, als entsprechend zuordnet“.

Sind nämlich xx' zwei einem Quadrupel angehörige Punkte, so wird durch sie als einander entsprechende Punkte eine eindeutige Beziehung bestimmt, und man erkennt zunächst die Ver-

tauschungsfähigkeit dieser Punkte; denn man kann x als y' und x' als y betrachten, da die Geraden $\overline{xy'}$, $\overline{x'y}$ als Tangenten zweier Quadrupelpunkte auf einer und derselben durch R_3 gehenden Fläche zweiten Grades gelegen sind. Wird nun das Paar $x \equiv y'$, $x' \equiv y$ aus den einzelnen Bisecanten von R_3 auf die Curve projicirt, so erhält man die übrigen Punktepaare $z \equiv w'$, $z' \equiv w$ der durch das Paar xx' bestimmten eindeutigen Beziehung. Aus der Vertauschungsfähigkeit zwischen xx' folgt nun die Vertauschungsfähigkeit in allen Paaren der Beziehung. Sind x'' , x''' die Punkte, welche mit x und x' demselben Quadrupel angehören, so werden durch die Paare xx'' , xx''' zwei weitere solche vertauschungsfähige Beziehungen bestimmt. Werden auch hier zwei einem Quadrupel angehörige Punkte als zwei correspondirende Punkte bezeichnet, so hat man den Satz:

„Werden zwei correspondirende Punkte aus einer Bisecante auf R_3 projicirt, so erhält man wiederum zwei correspondirende Punkte. Alle diese Punktepaare bilden ein System; solcher Systeme gibt es drei, je nachdem man einem Punkte einen oder den anderen oder den dritten der drei Punkte zuordnet, welche mit ihm ein Quadrupel bilden. Die drei Systeme stellen die drei fundamentalen vertauschungsfähigen nicht axialen eindeutigen Punktbeziehungen auf R_3 dar.“

Hiermit erscheint auch der in Artikel (24) angedeutete Ausnahmefall erledigt. Werden nämlich zwei correspondirende Punkte x, x' aus einer ihre Verbindungsgerade schneidenden Secante projicirt, so ist die das Paar und die Secante enthaltende Ebene wohl eine sich selbst entsprechende Verzweigungsebene des symmetrischen Ebenenbüschels zweiten Grades, in welchem sich die durch das Punktepaar xx' bestimmte eindeutige, nicht axiale Beziehung aus der Bisecante projicirt, ohne dass das Büschel aus lauter sich selbst entsprechenden Verzweigungsebenen bestehen würde. Vielmehr ist jene Ebene eine Doppelsebene einer der drei quadratischen Involutionen, die man erhält, wenn man die vier durch jene Bisecante hindurchgehenden Tangentialebenen in zwei Paare theilt und diese Paare als eine Involution zweiten Grades bestimmend betrachtet. (Vergleiche:

„Über eindeutige Beziehungen u. s. w. Sitzung vom 19. April 1883, Artikel 4 und 7.)

„Jede der drei fundamentalen nicht axialen Beziehungen, d. h. jedes der Systeme correspondirender Punkte wird aus jeder Bisecante in einer quadratischen Ebeneninvolution projecirt.“

Dies folgt unmittelbar aus der Vertauschungsfähigkeit der Beziehung; denn sind x, y die Schnittpunkte von R_4 mit einer durch die Bisecante hindurchgehenden Ebene ξ und x', y' die ihnen in einem Systeme correspondirenden Punkte, so müssen nach Früherem diese beiden Punkte in einer und derselben durch die Bisecante gehenden Ebene ξ' liegen. Die eindeutige und involutorische Beziehung zwischen den Ebenen ξ, ξ' des Büschels, dessen Axe die Bisecante ist, ist unmittelbar klar. So entstehen an jeder Bisecante drei quadratische Ebeneninvolutionen, welche bestimmt erscheinen, durch die vier durch die Bisecante hindurchgehenden Tangentialebenen, wenn man sie in zwei die Involution fixirende Paare zerlegt, was eben in drei Arten geschehen kann

35. Fassen wir die Resultate der letzten Betrachtungen zusammen, so haben wir folgende Ergebnisse:

„Es gibt auf einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species R_4 im Allgemeinen nur zwei Arten von eindeutigen Punktbeziehungen: die axialen und die nicht axialen. Durch ein Paar entsprechender Punkte x, x' ist eine axiale und eine nichtaxiale eindeutige Punktbeziehung vollkommen bestimmt. Die Punktepaare der ersten liegen auf Strahlen, welche einer durch R_4 hindurchgehenden und auch den Strahl xx' enthaltenden Fläche zweiter Ordnung angehören, und daher sind die Erzeugenden dieser Fläche, welche dem zweiten Systeme angehören, Axen von Ebenenbüscheln, von denen jedes auf R_4 die Paare der Beziehung bestimmt; die Paare $yy', zz' \dots$ der nicht axialen Punktbeziehung erhält man durch Projection der Punkte x', x aus den einzelnen Bisecanten von R_4 auf die Curve. Den axialen Beziehungen haftet das Merkmal der Vertauschungsfähigkeit an. Unter den nichtaxialen eindeutigen Beziehungen gibt es nur

drei, bei denen Vertauschungsfähigkeit auftritt, es sind dies die drei Systeme, correspondirender Punkte auf R_3 . Jede axiale Beziehung besitzt vier Doppelpunkte, die Berührungspunkte der vier durch irgend eine jener Axen an R_3 gehenden Tangentialebenen. Eine nichtaxiale Beziehung besitzt keinen Doppelpunkt, oder es ist jeder Punkt von R_3 ein solcher. Diese eindeutige Beziehung, welche man erhält, wenn man jeden Punkt von R_3 sich selbst entsprechen lässt, muss auch als eine nichtaxiale vertauschungsfähige Beziehung betrachtet werden, so dass wir im Ganzen vier solche fundamentale, durch die Curve R_3 im vorhinein gegebene nicht axiale vertauschungsfähige Beziehungen zu bemerken haben.

Die axialen Beziehungen ordnen sich in Paare residualer Beziehungen. Jedes Paar der einen Beziehung liegt mit jedem Paare der anderen in einer Ebene. Zwei solche residuale Beziehungen werden auf R_3 bestimmt durch die beiden Erzeugendensysteme irgend einer durch R_3 hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung. Es gibt vier sich selbst residuale durch die Curve im vorhinein gegebene oder fundamentale axiale Beziehungen; sie werden auf R_3 bestimmt durch die Kanten der vier quadratischen Kegel, welche man durch die Curve legen kann. Die Doppelpunkte derselben sind die Berührungspunkte der sechzehn stationären Schmiegungebenen“.

36. Wir bezeichnen die durch irgend ein Punktepaar x, x' von R_3 bestimmte nicht axiale eindeutige Beziehung mit $E(x, x')$ oder kurz mit E und fragen nach der Regelfläche, welche die Verbindungsgeraden $\overline{xx'}$ je zweier entsprechender Punkte enthält, und so als Erzeugniss der E -Beziehung auftritt.

Das Erzeugniss einer J_1^2 ist eine durch R_3 gehende Fläche zweiter Ordnung, welche zugleich als Erzeugniss der zur J_1^2 residualen Paarinvolution auftritt.

Für das Erzeugniss der E -Beziehung ist offenbar R_3 eine Doppelcurve, da durch jeden Punkt $x \equiv y'$ von R_3 zwei Erzeugende, nämlich $\overline{xx'}$ und $\overline{y'y}$ hindurchgehen.

Um die Ordnung (und zugleich Classe) des Erzeugnisses zu bestimmen, fragen wir nach den Erzeugenden desselben, welche eine beliebige Bisecante A von R_4 schneiden ohne durch die A und R_4 gemeinsamen Punkte hindurchzugehen, von welcher Art es offenbar vier Erzeugende gibt. Die E -Beziehung projicirt sich aus A durch ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades; dasselbe besitzt vier Doppelebenen erster Art (sich selbst entsprechende Ebenen; vergl. „Über einen Correspondenzsatz.“ Sitzung vom 8. März 1883), von denen also jede ein Punktepaar der E -Beziehung und somit eine Erzeugende der fraglichen Regelfläche enthält.

Es seien $\xi\tau\zeta\omega$ jene Doppelebenen und $XYZW$ die in ihnen gelegenen Erzeugenden der Fläche. Die Schnittpunkte von A mit XXZ sind zugleich vier Schnittpunkte von A mit der Fläche, hierzu kommen noch die beiden auf A gelegenen doppelt zu zählenden Punkte von R_4 , so dass A mit der Fläche im Ganzen acht Punkte gemeinschaftlich hat:

„Das Erzeugniß einer auf R_4 auftretenden nicht-axialen eindeutigen Punktbeziehung, d. h. der Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte ist eine Regelfläche achter Ordnung (und Classe) F_8 , welche die Curve R_4 zur Doppelcurve besitzt.“¹

Die durch die Bisecante A an die, den einzelnen E -Beziehungen entsprechenden F_8 -Flächen gehenden Tangentialebenenquadrupel ξ, τ, ζ, ω bilden eine degenerirte biquadratische Involution, welche drei nur Doppelemente enthaltende Quadrupel aufweist. Die letzteren sind dargestellt durch die Doppelementenpaare der drei quadratischen Involutionen, in denen sich aus A die drei Systeme correspondirender Punkte von R_4 projiciren.

Die an den einzelnen Bisecanten von R_4 in dieser Art auftretenden biquadratischen Ebeneninvolutionen sind offenbar projectivisch, woraus die Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses ($\xi\tau\zeta\omega$) für eine E -Beziehung, d. h. für eine F_8 -Fläche und

¹ Siehe: Axel Harnack, Über die Darstellung der Raumcurven vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppelt periodische Functionen². Mathem. Annalen von Clebsch u. Neumann, 12. Band.

für alle Bisecanten von R_4 folgt. (Vergl.: „Über eindeutige Beziehungen auf einer allg. eb. Curve 3. Ord.“ 1. c. Art. 10. Axel Harnack, l. c. p. 78).

Da die vier in ξ, τ, ζ, ω gelegenen Erzeugenden $XYZW$ der Fläche F_8 vier Bisecanten sind, welche A schneiden, so sind es vier Erzeugende der durch R_4 und A hindurchgehenden Fläche zweiter Ordnung, und daher ist das Doppelverhältniss $(\xi\tau\zeta\omega)$ gleich dem Doppelverhältnisse der vier Punkte, in denen A die Erzeugenden $XYZW$, d. h. die Fläche F_8 schneidet. Es ist somit das Doppelverhältniss der vierpunktigen Gruppen, in denen die Bisecanten von R_4 eine Fläche F_8 schneiden, für alle Bisecanten constant.“ (Axel Harnack l. c.)

37. „Projicirt man ein Paar entsprechender Punkte x, x' einer E -Beziehung aus einem der vier Kegelscheitel o_i auf die Curve, so erhält man ein anderes Paar y', y entsprechender Punkte derselben Beziehung in verkehrter Ordnung.“

Denn die beiden wechselweisen Verbindungsgeraden $\overline{xy'}, \overline{xy}$ sind Erzeugende einer durch R_4 gehenden Fläche zweiter Ordnung, nämlich des entsprechenden Kegels K_i .

Diese beiden Erzeugenden $\overline{xx'}, \overline{yy'}$ der Fläche F_8 schneiden sich in einem Punkte, welcher einer Doppelcurve der Fläche F_8 angehört und, wie aus dem vollständigen Vierecke $xx'yy'$ sofort folgt, in der Polarebene des Kegelscheitels o_i , d. h. in der durch die drei übrigen Kegelscheitel bestimmten Ebene liegen muss. Die Fläche hat somit in dieser Ebene eine Doppelcurve, welche also vom vierten Grade sein muss. Es besitzt somit F_8 in jeder Ebene des Tetraëders $o_1o_2o_3o_4$ eine Doppelcurve vierter Ordnung.“

Die vier Erzeugenden von F_8 , welche irgend eine Erzeugende xx' der Fläche schneiden, erhält man nach obigem, indem man das Punktepaar x, x' aus o_1, o_2, o_3, o_4 der Reihe nach auf R_4 projicirt und die entstehenden Punktepaare y', y_i ($i = 1..4$) verbindet. Man kann ebenso wie im vorigen Artikel die E -Beziehung aus den Geraden $\overline{xx'}$ $\perp A$ projiciren, erhält ein symmetrisches Ebenenbüschel zweiten Grades, dessen vier Doppelebenen erster

Art $\xi\eta\zeta\omega$ jene vier Erzeugenden $XYZW$ enthalten, welche der Erzeugenden A in Punkten der Ebenen des Tetraëders $o_1o_2o_3o_4$ begegnen.

Da auch hier das im letzten Artikel Gesagte gilt, so wird das Doppelverhältniss ($\xi\eta\zeta\omega$) für alle Erzeugenden constant bleiben, oder aber auf die Punkte, in denen $XYZW$ die Gerade A schneiden, übergehend:

„Die Erzeugenden der Fläche F_8 werden von den Ebenen des Tetraëders $o_1o_2o_3o_4$ in vierpunktigen Gruppen mit constantem Doppelverhältnisse geschnitten.“ (A. Harnack l. c.)

Die im vorigen Artikel betrachteten vier Erzeugenden $XYZW$ sind gemeinschaftlich der Fläche F_8 und dem durch die Curve R_4 und die Bisecante A bestimmten Hyperboloide, und wir haben den Satz:

„Eine auf R_4 befindliche E -Beziehung und eine axiale Paarinvolution haben vier Paare entsprechender Elemente gemeinsam.“

Oder, da dasselbe von der residualen Paarinvolution gilt:

„Eine Fläche F_8 schneidet jede durch R_4 gelegte Fläche zweiter Ordnung in vier Erzeugenden des einen und in vier Erzeugenden des anderen Systemes. Das Doppelverhältniss dieser Erzeugendenquadrupel ist für eine Fläche F_8 constant.“

Auf die sich selbst residualen Paarinvolutionen übergehend hat man sofort:

„Jede Fläche F_8 berührt jeden der vier Kegel zweiter Ordnung K_i , welche man durch die R_4 legen kann, längs vier Erzeugenden; die vier Punkte o_i sind folglich Doppelpunkte der ebenen Doppelcurven der Flächen F_8 . Diese Doppelcurven vierter Ordnung sind, weil mit drei Doppelpunkten versehen, rationale Curven.“ (Axel Harnack, l. c.)

38. Ersetzt man die allgemeine E -Beziehung durch eine der vier fundamentalen vertauschungsfähigen Beziehungen, so erhält man specielle Fälle von F_8 . Der fundamentalen E -Beziehung, nach welcher jeder Punkt von R_4 sich selbst zugeordnet ist, entspricht die abwickelbare Tangentenfläche von R_4 als Fläche F_8 .

Jeder der drei fundamentalen E -Beziehungen, welche die Paare correspondirender Punkte jedes der drei Systeme darstellen, entspricht eine durch R_4 einfach hindurchgehende Fläche vierter Ordnung, welche, doppelt gezählt, die entsprechende F_4 darstellt.

Dass die R_4 für eine solche Fläche einfache Curve ist, erkennt man aus dem Umstande, dass durch jeden Punkt von x nur eine Erzeugende $\overline{xx'}$ hindurchgeht, da sich die correspondirenden Punkte x, x' vertauschungsfähig entsprechen. Wird die aus diesen Paaren correspondirender Punkte bestehende fundamentale E -Beziehung aus einer beliebigen Biseccante A projecirt, so ergibt sich, wie gezeigt wurde, eine quadratische Ebeneninvolution, welche zwei Doppelebenen besitzt, so dass jede Biseccante nur von zwei Erzeugenden der Fläche (in der R_4 nicht angehörigen Punkten) getroffen wird. Die Fläche ist somit in der That von der vierten Ordnung.

Wird die fundamentale E -Beziehung, deren Erzeugniss diese Fläche vierter Ordnung ist, aus einer Erzeugenden A der Fläche projecirt, so ergibt sich eine quadratische Ebeneninvolution, deren zwei Doppelebenen jene beiden Erzeugenden XY enthalten, welche A schneiden,

Jede von diesen Erzeugenden vertritt somit zwei von den vier Erzeugenden $XYZW$ des allgemeinen Falles, so dass die Schnittpunkte von A mit X und Y jeder doppelt gezählt in den vier Ebenen des Tetraëders $o_1 o_2 o_3 o_4$ liegen müssen, was nur dadurch möglich ist, dass der Punkt (AX) in einer Kante und der Punkt (AY) in der Gegenkante des Tetraëders gelegen ist.

Es schneidet somit jede Erzeugende der Fläche zwei Gegenkanten des Tetraëders und dieselben treten somit als Doppelgerade und als Leitlinien der Fläche auf. (Axel Harnack, l. c.)

„Verbindet man je zwei correspondirende Punkte von R_4 , welche einem System angehören, so erfüllen die Verbindungsgeraden eine Regelfläche vierter Ordnung, welche zwei Gegenkanten des Tetraëders $o_1 o_2 o_3 o_4$ zu doppelten Leitgeraden besitzt; den drei Systemen correspondirenden Punkten, und den drei Gegenkantenpaaren des obigen Tetraëders entsprechen drei solche Regelflächen vierter Ordnung.“

39. „Jede nichtaxial eindeutige Punktbeziehung auf R_3 kann auf unendlich viele Arten durch zwei axiale Paarbeziehungen ersetzt werden.“

Es sei y, y' irgend ein Punktepaar einer E -Beziehung, durch welches dieselbe dann auch bestimmt ist, u irgend ein Curvenpunkt, welcher mit y, y' verbunden, die Biseccanten S, S' liefert, welche wir als Axen von Ebenenbüscheln betrachten, die auf R_3 zwei axiale Involutionen JJ' bestimmen. Den zu x nach der J' entsprechenden Punkt (x) erhalten wir als vierten Schnittpunkt von R_3 mit der Ebene $S'x$ und der zu (x) nach der J entsprechende Punkt, d. h. der vierte Schnittpunkt von R_3 mit der Ebene $S(x)$ sei x' . Wir behaupten, dass xx' auch ein Punktepaar der E -Beziehung ist. In der That liegen $xy'u(x)$ in der ersten, und $x'y'u(x)$ in der zweiten Ebene, und somit sind $\overline{xy'}, \overline{x'y}$ zwei Erzeugende der durch R_3 und $u(x)$ hindurchgehenden Fläche zweiten Grades und folglich sind xx', yy' zwei Punktepaare einer und derselben E -Beziehung, w. z. b. w.

Man gelangt also von x zu x' , wenn man zu x in der J' den Punkt (x) und zu diesem in der J den Punkt x' bestimmt. Symbolisch:

$$JJ \equiv E$$

(Vergl. „Über eindeutige Beziehungen auf einer Curve u. s. w.“ Sitzung v. 19. April 1883. Art. 15).

„Man kann also je zwei aufeinander folgende J durch eine E und jede E durch zwei aufeinander folgende J ersetzen.“

Geht man vom Punkte x mittelst der E -Beziehung zum Punkte x' und von diesem mittelst der J -Beziehung zum Punkte (x) über, oder umgekehrt, so hat man zwei Punkte $x, (x)$, welche einer Paarinvolution J' angehören. Symbolisch:

$$EJ \equiv J, \quad JE \equiv J, \quad \text{d. h.}$$

„Zwei aufeinander folgende ungleichartige Operationen (EJ oder JE) kann man immer durch eine axiale Paarinvolution ersetzen.“

Man kann nun in derselben Art, wie es in der zuletzt angeführten Arbeit „Über eindeutige Punktbeziehungen auf einer

allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung“ geschehen ist, den allgemeinen Satz entwickeln, und als bewiesen betrachten:

„Beliebig viele, beliebig aufeinander folgende, eindeutige Beziehungen kann man durch eine axiale oder eine nichtaxiale Beziehung (durch eine J_i^2 oder eine E) ersetzen, je nachdem die Zahl der auftretenden sämtlichen axialen Beziehungen eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.“

Man gelangt in derselben Art wie in obgenannter Arbeit zu den folgenden Sätzen:

„Wird der Curve R_n ein einfaches $2n$ -Eck eingeschrieben, und bewegen sich alle seine Seiten bis auf eine auf beliebigen durch R_n hindurchgehenden Flächen zweiter Ordnung, so bewegt sich auch die letzte Seite auf einer solchen Fläche zweiter Ordnung.“

„Es gibt vier einfache $(2n-1)$ -Ecke, welche der Curve R_n eingeschrieben sind und deren Seiten auf $(2n-1)$ gegebenen durch R_n hindurchgehenden Flächen zweiter Ordnung liegen.“

„Wenn durch R_n beliebige $2n$ Flächen zweiter Ordnung hindurchgelegt werden, so gibt es im Allgemeinen kein einfaches $2n$ -Eck, welches R_n eingeschrieben wäre und dessen Seiten der Reihe nach auf jenen Flächen gelegen wären; gibt es aber ein solches $2n$ -Eck, so gibt es deren unendlich viele.“

„Wenn $p-1$ Seiten eines der R_n eingeschriebenen p -Ecks auf $(p-1)$ Flächen achter Ordnung von der betrachteten Art fortrücken, so beschreibt auch die letzte Seite eine solche Fläche achter Ordnung.“

„Wenn $(p-1)$ Seiten eines variablen der R_n eingeschriebenen einfachen p -Ecks theils auf Flächen zweiter, theils auf Flächen achter Ordnung betrachteter Art fortrücken, so bewegt sich auch die letzte Seite auf einer Fläche zweiter oder achter Ordnung, je nachdem die Zahl der auf Flächen zweiter Ordnung fortrückenden Seiten eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.“

40. In derselben Art wie bei Curven dritter Ordnung kann man auch an den Raumcurven vierter Ordnung erster Species „cyclische Beziehungen mit n -punktigen Gruppen“ betrachten.

Hat man nämlich auf R_4 eine E -Beziehung und construirt, von einem Punkte x_1 ausgehend, die Punktreihe $x_1, x_2 \dots x_n, x_{n+1}$, so dass jeder Punkt dem vorhergehenden entspricht, so wird offenbar auch x_1 mit x_{n+1} in eindeutiger nichtaxialer Beziehung stehen, und wenn es einmal geschieht, dass x_{n+1} mit x_1 zusammenfällt, so muss es nach Früherem immer geschehen, von welchem Punkte x_1 auf R_4 man auch ausgehen möge.

„Jeder Punkt von R_4 kommt in einer einzigen durch ihn vollkommen bestimmten Gruppe vor.“

„Die sämtlichen Gruppen einer cyclischen Beziehung erhält man aus einer von ihnen durch Projection aus den einzelnen Bisecanten auf die Curve.“

„Werden zwei Gruppen festgehalten, so erfüllen die Bisecanten, aus denen durch Projection die Gruppen ineinander übergeführt werden können, „Flächen zweiter Ordnung. Die beiden Gruppen können auch identisch werden.“

„Wenn die Gruppen einer cyclischen Beziehung auf R_4 eine gerade Anzahl von Punkten enthalten, so bilden sie einfache Polygone, deren Gegeneckenpaare Paare correspondirender Punkte desselben Systemes sind.“

41. Projicirt man die Curve R_4 mit allen auf ihr befindlichen eindeutigen Punktbeziehungen aus einem ihrer Punkte auf eine Ebene, so erhält man eine ebene allgemeine Curve dritter Ordnung mit allen auf ihr auftretenden eindeutigen Punktbeziehungen. Mit Rücksicht auf das über die letzteren Entwickelte kann man sofort die cyclischen Beziehungen mit dreielementigen Gruppen angeben. Durch jeden Punkt p von R_4 gehen neun Schmiegungebenen, deren Berührungspunkte zu je dreien in einer durch p gehenden Ebene gelegen sind. Solcher Ebenen hat man zwölf, welche sich in vier Dreifache ordnen, von denen jedes alle neun Berührungspunkte enthält. Lässt man den Punkt p auf der Curve

gleiten, so beschreiben die drei in den Ebenen eines solchen Dreiflaches gelegenen Punktetripel eine cyclische Punktbeziehung mit dreipunktigen Gruppen.

„Es gibt somit vier cyclische Beziehungen mit dreipunktigen Gruppen auf R_4 .“

42. Sowie auf Curven dritter Ordnung können wir auch auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species R_4 Punktinvolutionen n -ten Grades und $(n-1)$ -ter Stufe J_{n-1}^n betrachten, indem wir unter einer J_{n-1}^n eine $(n-1)$ -fach unendliche Menge von n -punktigen Gruppen verstehen, von denen jede durch $(n-1)$ ihrer Punkte vollkommen und eindeutig bestimmt ist.

Wir haben zunächst für eine Tripelinvolution zweiter Stufe J_2^3 den Satz:

„Die durch die einzelnen Tripel einer J_2^3 bestimmten Ebenen schneiden R_4 in einem festen Punkte, dem Centrum o der Involution J_2^3 .“

Dass die durch einen Punkt o von R_4 gehenden Ebenen R_4 in Tripeln einer J_2^3 schneiden, ist nach obiger Definition unmittelbar klar.

Hat man umgekehrt eine J_2^3 auf R_4 und ist $x_1x_2x_3$ irgend ein Tripel derselben, und o der vierte Schnittpunkt von R_4 mit der Ebene $(x_1x_2x_3)$, so projicire man die R_4 sammt der J_2^3 aus o auf irgend eine nicht durch o gehende Ebene. Man erhält eine C_3 und auf derselben eine J_2^3 mit einem geraden Tripel, welches aus den Projectionen von x_1, x_2, x_3 besteht. Die J_2^3 auf C_3 enthält also lauter gerade Tripel (Art. 2) und somit besteht die J_2^3 auf R_4 aus lauter Tripeln, deren Ebenen durch o gehen, w. z. b. w. Hieraus:

„Eine Tripelinvolution zweiter Stufe auf R_4 ist durch eines ihrer Tripel vollkommen bestimmt.“

„Jede J_2^3 auf R_4 besitzt neun dreifache Punkte, die Berührungspunkte der durch das Centrum o gehenden Schmiegungebenen.“

43. Es sei auf R_4 eine Quadrupelinvolution dritter Stufe J_3^4 gegeben und $x_1x_2x_3v_4$ sei irgend ein Quadrupel derselben. Hält man den Punkt x_1 fest, so bilden der Definition gemäss die Tripel $x_2x_3v_4$ eine J_2^3 und ihre Ebenen ξ_1 werden durch einen festen Punkt o_1 der R_4 hindurchgehen. So ist jedem Punkte x_1 ein Punkt

o_1 zugeordnet; aber auch umgekehrt, entspricht einem o_1 nur ein Punkt x_1 . Dann legt man durch o_1 eine beliebige Ebene ξ_1 , welche R_4 in $x_2x_3x_4$ schneidet, so wird dieses Tripel durch einen ganz bestimmten Punkt x_1 zu einem Quadrupel ergänzt, welcher Punkt von der besonderen Lage der durch o_1 gehenden Ebene unabhängig ist, da einerseits die mit x_1 Quadrupel der J_3^2 bildenden Tripel eine J_2^3 bilden, welche andererseits durch obiges Tripel $x_2x_3x_4$ vollkommen bestimmt wird.

„Durch jede J_3^2 auf R_4 ist somit auf R_4 eine eindeutige Punktbeziehung gegeben, indem jedem Punkte x von R_4 das Centrum o der J_2^3 entspricht, deren Tripel den Punkt o zu Quadrupeln der J_3^2 ergänzen.“

„Eine J_3^4 auf R_4 ist durch ein Quadrupel von Punkten vollkommen bestimmt.“

Ist $x_1x_2x_3x_4$ das Quadrupel und $o_1o_2o_3o_4$ die vierten Schnittpunkte von R_4 mit den Ebenen des Tetraeders $x_1x_2x_3x_4$, wie sie den Ecken der Reihe nach gegenüberliegen, so sind (Art. 33) $x_1o_1, x_2o_2, x_3o_3, x_4o_4$ vier Punktepaare einer E -Beziehung, durch welche die J_3^4 nun gegeben ist.

Um ein Tripel $x'_1x'_2x'_3$ zu ergänzen, lege man durch dasselbe eine Ebene, welche R_4 in o'_4 schneidet wird, und construire den zu o'_4 nach der E entsprechenden Punkt x'_4 (also so dass z. B. $x_1o'_4$ und x'_4o_1 Erzeugende einer durch R_4 gehenden Fläche zweiter Ordnung sind.) Dann ist x'_4 der vierte Punkt des Quadrupels.

Vier in einer Ebene gelegene Punkte von R_4 bilden ein „ebenes Quadrupel“. Ein unmittelbar klarer Satz:

„Alle ebenen Quadrupel stellen eine J_3^4 dar.“

Die zugehörige E -Beziehung ordnet jeden Punkt der Curve sich selbst zu; denn hier ist $o_1 \equiv x_1, o_2 \equiv x_2 \dots$

44. Hält man ein Punktepaar x_1x_2 fest, so bilden, wie aus der Definition sofort folgt, die Paare x_3x_4 , welche ersteres zu Quadrupeln einer gegebenen J_3^2 erzeugen, eine J_1^2 ; und hält man eines der Paare x_3x_4 fest, so werden die Paare x_1x_2 eine zweite J_1^2 bilden. Jedes Paar von J_1^2 bildet mit jedem Paare von J_1^2 ein Quadrupel der J_3^2 .

„Es werden somit durch eine J_3^4 die auf R_4 auftretenden axialen Paarinvolutionen in Paare ge-

ordnet. Demgemäss werden auch die durch R_4 gelegten Regelschaaren zweiter Ordnung in Paare geordnet. Je zwei durch die Involution der ebenen Quadrupel einander zugeordnete Regelschaaren gehören derselben Fläche zweiter Ordnung an.“

45. „Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch sechs Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden R_4 in Punktpaaren einer axialen Paarinvolution.“

Mit anderen Worten: „Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch sieben Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden R_4 noch in einem und demselben achten Punkte.“ (Restsatz.)

Es seien p_i ($i = 1 \dots 6$) irgend sechs feste Punkte von R_4 ; die durch sie hindurchgehenden F_2 schneiden die Ebene $(p_1 p_2 p_3)$ in Kegelschnitten, welche durch p_1, p_2, p_3 hindurchgehen, und die Ebene $(p_4 p_5 p_6)$ in Kegelschnitten, welche durch p_4, p_5, p_6 hindurchgehen. Wir werden also alle unsere Flächen erhalten, wenn wir zwei solche Kegelschnitte, aber so wählen, dass sie die Schnittgerade der beiden Ebenen in denselben zwei Punkten schneiden. Wählen wir also in der ersten Ebene einen Punkt q_1 , in der zweiten einen q_2 , so werden zwei solche Kegelschnitte und zugleich ein durch sie gehendes Flächenbüschel zweiter Ordnung, welches auf R_4 offenbar eine J_1^2 bestimmen wird, gegeben sein. Diese J_1^2 ist aber von q_1 und q_2 unabhängig, denn die zwei Punkte, in denen die beiden Ebenen R_4 schneiden, bilden offenbar ein Punktpaar der J_1^2 , welche durch dasselbe auch bestimmt ist.

Damit ist obiger Satz und zugleich der folgende bewiesen:

„Die zehn Gegenebenenpaare eines der R_4 eingeschriebenen vollständigen Sechsecks schneiden R_4 in zehn Punktpaaren eines J_1^2 . Die zehn Verbindungsgeraden dieser Paare sind folglich Erzeugende einer durch R_4 hindurchgehenden F_2 .“

Lässt man R_4 in eine Raumcurve dritter Ordnung und eine Bisecante derselben übergehen, so erhält man den Satz, „dass die zehn Gegenebenenpaare eines der Curve dritter Ordnung eingeschriebenen vollständigen Sechsecks jede Bisecante in zehn Punktpaaren einer quadratischen Involution schneiden“. (Vergl.: „Über die Bedeutung des räumlichen Nullsystems für

cubische Involutionen beider Stufen. Art. 16. Sitzung vom 15. December 1881).

46. Aus den letzten Betrachtungen folgt der Definition gemäss, sofort:

„Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch fünf Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden die Curve in Tripeln einer J_3^2 , d. h. in Tripeln, deren Ebenen durch einen festen Punkt von R_4 hindurchgehen.“

„Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch vier, drei, respective zwei Punkte von R_4 hindurchgehen, schneiden R_4 in Quadrupeln, Quintupeln, respective Sextupeln einer J_3^2 , J_4^2 , respective J_5^2 .“

47. Wir haben gesehen, dass jede J_4^2 zu einer E -Beziehung Veranlassung gibt. Umgekehrt erkennt man:

„Durch jede E -Beziehung sind zwei Quadrupelinvolutionen auf R_4 bestimmt, je nachdem man nämlich von zwei nach der E -Beziehung zusammengehörigen Punkten den einen oder den anderen als den Punkt o betrachtet.“

Sind nämlich x, o irgend zwei einander entsprechende Punkte der E -Beziehung, so bildet x mit jedem Tripel, dessen Ebene durch o geht, ein Quadrupel eines J_3^2 , aber ebenso bildet o mit jedem Tripel, dessen Ebene durch x geht, ein Quadrupel einer zweiten (J_3^2).

„Diese beiden Quadrupelinvolutionen dritter Stufe sind residual, d. h. jedes Quadrupel der einen stellt mit jedem Quadrupel des anderen die acht Schnittpunkte von R_4 mit Flächen zweiter Ordnung dar.“

Betrachtet man nämlich eine J_3^2 und legt durch ein Quadrupel x_i ($i = 1 \dots 4$) eine F_2 , welche R_4 in o_i ($i = 1 \dots 4$) schneidet, so wird die J_3^2 durch jene F_2 auf R_4 bestimmt, welche durch irgend eines der Quadrupel o_i gehen.

Diese Quadrupel o_i bilden nun offenbar eine zweite (J_3^2) und beide Quadrupelinvolutionen sind in der Beziehung, dass jedes Quadrupel der einen mit jedem der anderen in einer F_2 liegt. Dass beiden dieselbe E -Beziehung, mit vertauschter Bedeutung

entsprechender Punkte zukommt, sieht man sofort, wenn man die durch x_1 gehende Fläche F_2 ersetzt durch die Ebene (x_2, x_3, x_4) und irgend eine durch x_1 gehende Ebene.

„Den drei vertauschungsfähigen E -Beziehungen correspondirender Punkte entsprechen drei sich selbst residuale J_3^3 , in deren Quadrupeln die R_4 von Flächen zweiter Ordnung (also vierfach) berührt wird.“

48. Je zwei J_{n-1}^n können durch axiale Projection ineinander übergeführt werden, wobei auch die singulären Elemente ineinander übergehen.

Hieraus ergibt sich speciell, dass jede J_3^3 sechzehn vierfache Punkte besitzt, welche durch axiale Projection aus den Berührungspunkten der sechzehn stationären Schmiegungebenen abgeleitet werden können.

Über die Oxydation des Morphins.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von **L. Barth** und **H. Weidel**.

(Aus dem I. Wiener Universitätslaboratorium.)

Obwohl schon seit längerer Zeit mit der Untersuchung der Einwirkung verschiedener Oxydationsmittel auf Morphin beschäftigt, ist es uns bisher mannigfacher Hindernisse wegen nicht möglich gewesen diese Arbeit zu einem entsprechenden Abschlusse zu bringen.

Wir theilen daher im Nachfolgenden ganz kurz unsere bisherigen Erfahrungen mit, indem wir hoffen, Ausführlicheres in Bälde nachtragen zu können.

Den meisten oxydirenden Substanzen gegenüber verhält sich das Morphin nicht einladend.

Ohne zahlreiche Versuche, welche kein befriedigendes Resultat ergaben, wie die Einwirkung von Chromsäure, Salpetersäure, Braunstein und Schwefelsäure etc. genauer zu beschreiben, wollen wir nur derjenigen Erwähnung thun, die irgend ein positives Ergebniss lieferten.¹

Einwirkung von Kaliumpermanganat in schwach alkalischer Lösung verläuft ziemlich energisch und namentlich am Anfange tritt schnelle Entfärbung ein. Wenn nach allmählichem Erwärmen gegen 100° der Verbrauch schon sehr träge geworden ist, unterbricht man die Operation.

Aus der vom Manganniederschlage getrennten Lösung lässt sich weder so lange sie alkalisch ist, noch nach dem Ansäuern

¹ Hier sei auch bemerkt, dass das Morphin nach der Methode von C. Liebermann acetylirt, ein in prachtvollen Tafeln krystallisirtes Product liefert welches übrigens bei der Oxydation ein dem Morphin ganz analoges Verhalten zeigte.

irgend etwas durch Äther ausziehen. Als Hauptproduct der Reaction resultirt ein hellgelbbraunlich gefärbter saurer Syrup, der auch nach monatelangem Stehen kaum Spuren von Krystallisation zeigte. Auch Salze desselben wurden nur in amorpher Form erhalten. Bemerkenswerth ist das Verhalten desselben gegen Kupferacetat. Eine mit diesem Reagens versetzte Lösung bleibt klar, beim Erhitzen zum Sieden trübt sie sich und es fällt ein blaugrüner flockiger Niederschlag heraus, der sich nach dem Erkalten wieder auflöst.

Es erinnert dieses Verhalten an das der Cinchomeronsäure und Pyridintricarbonsäure unter ähnlichen Umständen.

Wird die syrupöse Säure mit Kalk gemischt, der trockenen Destillation unterworfen, so erhält man ein basisches Öl von ausgesprochenem Pyridingeruch.

Arsensäure wirkt auch im geschlossenen Rohre nicht energisch auf Morphin ein. Man erhält eine neue Base, die eine Methylgruppe weniger, dagegen ein Hydroxyl mehr zu enthalten scheint als das Morphin. Die Reaction verläuft nicht immer gleich, trotzdem wir nach Möglichkeit die gleichen Bedingungen einhielten. Die Ausbeuten sind wechselnd und nicht besonders befriedigend.

Schmelzendes Ätzkali wirkt energisch auf Morphin ein. Nach kurzer Zeit färbt sich die Schmelze dunkelroth, später braun. Es entweichen stark alkalische Dämpfe.

Das Schmelzen muss ziemlich lange, bis zum beginnenden Verglimmen an der Oberfläche fortgesetzt werden, will man anders eine halbwegs brauchbare Ausbeute erzielen. Nach dem Ansäuern scheiden sich braunschwarze Flocken aus, humusartig und stickstofffrei. Die Lösung gibt an Äther ziemlich viel ab. Nach dem Verjagen des letzteren und Aufnahme des Rückstandes in Wasser bleibt eine amorphe Masse ungelöst. Die wässrige Lösung wird mit Bleiacetat gefällt. Aus dem Niederschlage erhält man nach dem Zersetzen mit Schwefelwasserstoff, Eindampfen, wiederholtem Reinigen und Umkrystallisiren Protokatechusäure von den bekannten Eigenschaften, deren Zusammensetzung auch durch die Analyse festgestellt wurde.

Das Filtrat entbleit und eingedampft, enthält immer noch etwas Protokatechusäure, die nur sehr schwierig durch wiederholte

Bleifällungen entfernt werden kann und ausserdem eine zweite Säure in durchsichtigen glasglänzenden Prismen anschliessend, ohne Eisenreaction, leicht löslich in Wasser und von deutlich saurem Geschmack. Da uns durch Zufall die reinste Partie derselben verloren ging, können wir leider vorderhand nichts über ihre Zusammensetzung aussagen. Als die Schmelze in einer silbernen Retorte mit vorgelegtem Kühler ausgeführt wurde, konnte man die entweichenden alkalischen Dämpfe in verdünnter Salzsäure auffangen. Man erhielt ein zerfliessliches Chlorhydrat, im Wesentlichen Methylaminsalz, dem aber noch eine geringe Menge einer zweiten Verbindung beigemischt war. Der Versuch muss in grösserem Massstabe angestellt werden, um über die Natur der zweiten Base Aufklärung zu erhalten.

Das Fehlen aromatischer Substanzen unter den Oxydationsproducten des Morphins bei Anwendung von Kaliumpermanganat einerseits, sowie das Nichtauftreten von Pyridin - (oder Chinolin-) Abkömmlingen bei der Oxydation dieses Alkaloids mit Ätzalkalien scheint bemerkenswerth und deutet darauf hin, dass im Morphin aromatische und Pyridin- (oder Chinolin-) Gruppen anders mit einander verbunden sein müssen als z. B. im Narcotin, welches bekanntlich eine leichte Trennung seiner beiden Hauptbestandtheile gestattet.

Um zu erfahren, ob etwa Chinolinabkömmlinge, namentlich hydrirte, in der Kalischmelze sich so zerlegen, dass der Pyridinkern zerstört wird und der Benzolkern in irgend einer Form erhalten bleibt, haben wir die Tetrahydrocinchoninsäure mit Kali verschmolzen und dabei die Abwesenheit jeglicher aromatischer Substanz (sowie auch die eines etwa zu erwartenden Oxyproductes) in der Reactionsmasse constatiren können. Ebenso haben wir eine Pyridindicarbonsäure (Cinchomeronsäure) der Einwirkung von schmelzendem Ätzkali unterworfen und bei diesem Versuche beobachtet, dass der Pyridinkern nicht zerstört wird, und kein basisches Product, etwa Methylamin oder Ammoniak entsteht.

Die Fortsetzung der Untersuchung wird hoffentlich darüber Aufschluss geben, in welcher Weise der aromatische und der stickstoffhaltige Kern im Morphin mit einander verknüpft sind

Es sei zum Schlusse erwähnt, dass auch andere Opiumalkaloïde, so das Papaverin (siehe folgende Mittheilung), das Narcotin, das Narceïn und Thebaïn sich gegen schmelzendes Kali sehr reactionsfähig erweisen und neben anderen Producten wie es scheint fast stets Protokatechusäure liefern (mit Ausnahme vielleicht des Thebaïns). Die Narcotin-, respective Cotarnin-kalischmelze wird darum ein besonderes Interesse beanspruchen können, weil im Narkotin der stickstoffhaltige Theil sicherlich ein Pyridinderivat ist und man das Schicksal dieses letzteren gegenüber schmelzendem Kali bei dieser Gelegenheit wird erfahren können. Aus diesem Grunde soll auch das Piperin in den Kreis dieser Untersuchungen gezogen werden, von dem man ja ebenfalls weiss, dass einer seiner Bestandtheile, das Piperidin, Hexahydropyridin ist.

Die Arbeiten hiertber sind im Gange.

Über Papaverin.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von Dr. Guido Goldschmiedt.

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.)

Seit einiger Zeit bin ich mit dem Studium des Papaverins beschäftigt und eine grössere Anzahl von mit diesem Alkaloide ausgeführten Versuchen befindet sich in einem mehr oder weniger vorgeschrittenen Stadium der Untersuchung, ohne dass irgend Einer bereits abgeschlossen wäre. Wenn ich trotzdem die gemachten Beobachtungen in aller Kürze mittheile, so möge als Entschuldigung dafür angeführt werden, dass meine Arbeiten durch die Sommerferien eine längere Unterbrechung erleiden werden und ich mir durch nachstehende Notiz das ungestörte Arbeiten sichern möchte.

Vor Allen möge hier der Oxydationsversuche gedacht werden: Bei der Behandlung mit Braunstein und Schwefelsäure habe ich die Bildung brauner seideglänzender Nadeln, wie sie Merck bei dieser Reaction erhalten hat, nicht beobachtet. Aus dem Reactionproducte wurden bisher nur nicht krystallisirende Substanzen neben unverändertem Papaverin gewonnen.

Übermangansaures Kalium in ziemlich grosser Verdünnung entwickelt beim Kochen mit Papaverin, Ammoniak, welches in vorgelegter Salzsäure aufgefangen worden ist; die entfärbte Lösung wurde vom Manganniederschlage getrennt und lieferte nach dem Einengen eine kleine Quantität Papaverin; die alkalische Flüssigkeit wird mit Kohlensäure gesättigt zur Trockene eingedampft und der Rückstand mit absolutem Alkohol extrahirt. Dieser hinterlässt einen gelben Syrup, der unter dem Mikroskope Krystallansätze zeigt. Die wässerige Lösung dieses Syrups gibt mit Kupferacetat eine geringe Menge eines blaugrünen Niederschlages, der beim Kochen sich bedeutend vermehrt, nach dem

Erkalten aber wieder verschwindet. Der Niederschlag wurde in Wasser suspendirt mit Schwefelwasserstoff zerlegt. Das Filtrat stellt nach dem Eindampfen einen sehr stark sauren Syrup dar, der Carbonate leicht zersetzt; auch die bisher dargestellten Salze dieser Säure sind amorph. Das Barytsalz fällt erst beim Kochen nieder, wenn man die Lösung des Ammoniumsalzes mit Chlorbarium versetzt; es gibt beim Glühen mit Kalk pyridinartig riechende Dämpfe.

Eine ganz kleine Probe Papaverin (etwa $\frac{1}{10}$ Grm.) liess beim Schmelzen mit Kalihydrat schon deutlich qualitativ die Bildung von Protocatechusäure nachweisen; die dabei entweichenden Dämpfe rochen ammoniakalisch und gleichzeitig aromatisch. In grösserem Massstabe wurde die Kalischmelze in einer silbernen Retorte ausgeführt, welche mit Kühler und Vorlage verbunden war, welche Letztere noch mit einem mit Salzsäure beschickten Peligot'schen Absorptionsapparate communicirte. Das Destillat bestand aus einer wässerigen stark alkalischen und einer öligen Schicht, welche bald theilweise erstarrte, dies aber selbst in einer Kältemischung nicht mehr that, nachdem sie mit Salzsäure geschüttelt worden war; die salzsauren Lösungen wurden vereinigt und mit Kalilauge versetzt, welche einen Niederschlag erzeugte, der als Papaverin an Schmelzpunkt und Schwefelsäurereaction erkannt wurde; die alkalische Lösung wurde nun destillirt, das Destillat mit Salzsäure neutralisirt hinterliess nach dem Eindampfen ein in schönen Blättchen krystallisirendes leicht zerfliessliches Chlorhydrat, dessen Platindoppelsalz genau den Platingehalt hatte, welcher dem Methylaminchloroplatinat zukömmt. Das ölige Destillat hat einen guajacolähnlichen Geruch, siedet constant bei 218° , gibt keine Farben-Reaction mit Eisenchlorid und hat die Zusammensetzung des Dimethylhomobrenzcatechins. Bei der Oxydation mit Chamäleonlösung erhält man Protocatechudimethyläthersäure, was durch Analyse und Schmelzpunkt (180°) erwiesen ist. Die Ausbeute an Dimethylhomobrenzcatechin wie auch an Methylamin ist eine sehr befriedigende.

Weniger einfach ist die Aufarbeitung der Schmelze selbst, in welcher sich als Hauptproduct der Oxydation Protocatechusäure in grosser Menge findet; in Einem Falle betrug die Ausbente an

roher Protocatechusäure, wie sie durch Ausschütteln der angesäuerten Schmelze mit Äther gewonnen wurde, über 30 Percent des angewandten Papaverins. Diese rohe Säure enthält nur noch geringe Mengen Oxalsäure und einer schwer in Wasser löslichen krystallinischen Substanz, über welche ich noch nicht in der Lage bin etwas anzuführen. Beim Ansäuern der Schmelze fällt eine braune Substanz heraus, welche an kochendes Wasser einen in weissen Nadeln krystallisirenden Körper abgibt, der bei circa 106° schmilzt und mit Eisenchlorid eine rothe Färbung gibt. Noch eine in schönen weissen Nadeln krystallisirende Substanz mit violetter Eisenreaction wurde aus dem alkoholischen Auszuge der mit Kaliumcarbonat neutralisirten und eingedampften Schmelze erhalten. Mit dem Studium dieser Körper bin ich gegenwärtig beschäftigt.

Die beiden obengenannten flüchtigen Zersetzungsproducte des Papaverins, Dimethylhomobrenzcatachin und Methylamin, entstehen auch bei der trockenen Destillation des Alkaloids. Ebenso scheinen sie bei der Destillation mit Kalk oder Zinkstaub gebildet zu werden, wenigstens entsteht in beiden ein öliges, nach Guajacol riechendes und mit Eisenchlorid nicht reagirendes Destillat und entweichen basische Dämpfe.

Barytwasser wirkt äusserst langsam auf Papaverin ein; nach zehntägigem Kochen am aufsteigenden Kühler war nur ein kleiner Bruchtheil des angewandten Alkaloids zersetzt, obwohl während der ganzen Dauer des Versuches stetige, aber äusserst schwache Entwicklung ammoniakalischer Dämpfe nachweisbar war. Der mit Kohlensäure von Baryt befreite Rückstand enthielt neben unverändertem Papaverin nur ganz geringe Quantitäten einer guajacolähnlich riechenden Schmiere. Der Versuch soll bei höherer Temperatur und unter Druck wiederholt werden.

Natriumamalgam verwandelt Papaverin nach längerer Einwirkung in alkoholischer Lösung in ein dickes Öl, welches nach längerem Stehen Krystallansätze zeigt.

Mit Essigsäureanhydrid und essigsäurem Natrium gelingt es nicht, ein Acetylproduct des Papaverins darzustellen, woraus wohl auf das Fehlen von Hydroxylgruppen zu schliessen ist, um so eher als Papaverin sich nicht, wie beispielsweise Morphin, in Alkalien auflöst.

Erhitzt man Papaverin mit Salzsäure auf 130°, so entweicht nach dem Öffnen des Rohres ein Gas, welches mit Kalilauge gewaschen mit grünesäumter Flamme brennt, also wohl Chlor-methyl ist. Man hat eine klare Lösung, aus der durch Alkohol nichts fällbar ist. Der Verdampfungsrückstand ist ein dickes braunes Öl, dessen verdünnte alkoholische oder wässerige Lösung mit Eisenchlorid eine sehr intensive smaragdgrüne Färbung gibt, welche auf vorsichtigem Zusatze verdünnter Sodalösung in eine rothe übergeht, eine Reaction, welche wahrscheinlich durch die Gegenwart von Homobrenzcatechin veranlasst wird. Mit Kalilauge färbt sich das Öl in wässriger Lösung dunkelbraun. Sodalösung erzeugt in der wässerigen Lösung des Öles einen weissen flockigen Niederschlag, der abfiltrirt bald harzartig zusammenbackt und an der Luft schnell grün wird. Die Eigenschaften dieses Körpers erinnern an jene des Apomorphins. Ich hoffe bald in der Lage zu sein, Näheres über das Papaverin mitzutheilen.

Einwirkung von Ammoniak auf Propionaldehyd.¹

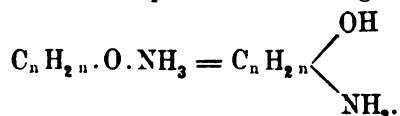
(Synthetische Darstellung des Parvolins.)

Von Dr. Alfred Waage.

(Aus dem k. k. Universitäts-Laboratorium des Prof. Lieben.)

Die charakteristischen Verbindungen der Aldehyde der Ameisensäure-Reihe mit Ammoniak sind noch nicht für alle bekannten Homologen dargestellt worden.

Die Mehrzahl dieser Körper besitzt die allgemeine Formel



Hierher gehört das Acetaldehyd-Ammoniak von Liebig, erhalten durch Einleiten von gasförmigem Ammoniak in eine ätherische Lösung von Aldehyd; ferner die Ammoniakverbindung des normalen Butyraldehydes, als welche die von Guckelberger dargestellte Verbindung betrachtet werden kann, die von Strecker durch Schütteln mit concentrirtem wässerigen Ammoniak erhaltene Verbindung des Isovaleraldehydes und das von Erlenmeyer beschriebene Oenantholammoniak, welches ebenfalls durch Mengen von wässerigem Ammoniak mit Aldehyd entsteht.

Ameisen- und Isobutyraldehyd dagegen geben anders constituirte Verbindungen.

Leitet man nämlich über erwärmtes Trioxymethylen trockenes Ammoniak, so entsteht eine einsäurige Base, das Hexamethylenamin $(CH_2)_6 . N_4$ (Butlerow).

Ferner hat Lipp beim Zusatz von Isobutyraldehyd zu überschüssigem concentrirtem Ammoniak einen Körper von der Formel $(C_4 H_9)_7 H_6 O N_6 = C_{28} H_{62} N_6 O$ bekommen.

¹ Vrgl. Monatshefte III. 693. Vorl. Mittheilung.

Auch gibt Oenanthol mit trockenem Ammoniak öliges Hydrooenanthamid (C_7H_{14})₃N₂.

Diese Verbindungen entstehen also sämmtlich durch directe Vereinigung von Aldehyd mit Ammoniak. Sie sind mit Ausnahme der Oenantholverbindungen feste krystallisirende Körper, welche, bei gewöhnlicher Temperatur stabil, durch Säuren in Aldehyd und Ammoniak zerlegt werden.

Da die Einwirkung von Ammoniak auf Propionaldehyd bisher noch nicht studirt worden war, so unterzog ich mich — einer Aufforderung des Herrn Prof. Lieben Folge leistend — dieser Aufgabe, und befasste mich weiterhin mit dem Zersetzungsproducte des erhaltenen Propionaldehyd-Ammoniaks.

Das erforderliche Propionaldehyd stellte ich in der von Lieben und Zeisel¹ angegebenen Weise dar; ich erzielte eine Ausbeute von 60 bis 65%.

Aldehyd-Ammoniak.

Als Lösungsmittel für das Aldehyd empfiehlt sich am besten Petroleumäther, und zwar die Fractionen bis 100° C. Operirt man aber bei gewöhnlicher Temperatur, so bekommt man keinen mit oben erwähnten Verbindungen vergleichbaren Körper; es ist daher nöthig, das in Petroleumäther gelöste Aldehyd — ich nahm gleiche Volume von beiden — mit einer Kältemischung zu umgeben.

Ein Strom von sorgfältig getrocknetem Ammoniak fällt dann einen weissen flockigen Niederschlag, welcher in Petroleumäther schwerer löslich ist als in Äther und Alkohol.

Entfernt man nun die Kältemischung, so zerfliessen die weissen Flecken und bilden eine aus zwei Schichten bestehende Flüssigkeit; die untere Schicht ist Wasser und enthält beträchtliche Mengen aus der oberen gelöst; diese besteht aus einem öligen, anfangs fast farblosen und dünnflüssigen Körper von basischer Reaction.

Dieses basische Öl oder „Rohproduct“, wie ich es im Folgenden immer nennen will, entsteht direct, wenn Ammoniak bei gewöhnlicher Temperatur durch das Aldehyd streicht.

¹ Monatshefte IV. 14.

Die Analyse des entstandenen festen Aldehydammoniaks war wegen seiner leichten Zersetzlichkeit nur schwer zu bewerkstelligen, und musste ich mich auf die Bestimmung des Ammoniakgehaltes beschränken, welche in der folgenden Weise durchgeführt wurde: In einer tubulirten Glasglocke befand sich, von Kältemischung umgeben, das unten ausgezogene und mit dem Ende durch den Tubus der Glocke herausragende cylindrische Gefäss mit der Lösung des Aldehydes. Das herausragende Rohr war mit einem Glashahn versehen.

Durch ein Zuleitungsrohr wurde nun getrocknetes Ammoniak in die Flüssigkeit eingeführt. Nach zweistündiger Einwirkung liess ich unverändertes Aldehyd und das Lösungsmittel durch den Glashahn abfliessen, saugte dann stark gekühlte Luft nach, und brachte eine gewogene Menge titrirter Schwefelsäure zu dem entstandenen Producte.

Die Gewichtszunahme des cylindrischen Gefässes gegenüber dem leeren Gefässe, weniger der zugefügten Schwefelsäure, bezeichnete — allerdings in nicht sehr genauer Weise — die Menge des vorhandenen, nun durch Schwefelsäure zersetzten Aldehydammoniaks.

Ich bekam 1·67 Grm. aus 5 Grm. Aldehyd.

Die Reactionsflüssigkeit wurde nun theilweise mit Ammoniak zurüctitriert, theilweise mit Platinchlorid gefällt.

Die durch Schwefelsäure gebundene Ammoniak-Menge betrug:

durch Titriren bestimmt 0·41303 Grm. NH_3

durch Darstellung von Platinsalmiak bestimmt

0·4153 Grm. NH_3 .

Diese Mengen entsprechen $24\cdot7\%$, beziehungsweise $24\cdot8\%$ Ammoniak in der erhaltenen Verbindung.

Für die Formel $\text{CH}_3\cdot\text{CH}_2\cdot\text{CH}$ $\begin{matrix} \text{OH} \\ \diagdown \\ \text{NH}_2 \end{matrix}$, eine dem gewöhnlichen

Aldehydammoniak entsprechende Structur, berechnen sich $22\cdot66\%$ Ammoniak. Es dürfte somit die Annahme dieser Formel für das Propionaldehyd-Ammoniak gerechtfertigt sein. Der Versuchsfehler von 2% ist bei der Art der Bestimmung leicht zu verstehen;

für jede andere Formel würde der Ammoniakgehalt von der obigen Zahl viel bedeutender abweichen.

Propionaldehyd-Ammoniak zeigt also bei gewöhnlicher Temperatur ein anderes Verhalten als die übrigen entsprechenden Verbindungen, doch ist es auch ein weisser, anscheinend kristallinischer Körper, dessen Zusammensetzung mit der allgemeinen Formel $C_n H_{2n} O \cdot NH_3$ übereinstimmt.

Zersetzungsproducte von $C_3 H_6 O \cdot NH_3$.

Wie bereits erwähnt, zerfließt es, sobald die Kältemischung entfernt wird; das hierbei sich abscheidende Öl ist ziemlich löslich in Wasser, schwach gelb gefärbt und besitzt einen höchst widerlichen Geruch; es wird beim Stehen dickflüssiger, färbt sich dunkel und gibt längere Zeit Ammoniak ab.

Es ist wegen seiner leichten Zersetzlichkeit nicht destillierbar, auch nicht im Vacuum, und wird durch Säuren energisch zerlegt unter Entwicklung von weissen Dämpfen und deutlichem Geruche nach Propionaldehyd und dessen von Lieben und Zeisel¹ dargestellten Condensationsproducte $C_6 H_{10} O$.

Die Elementaranalyse ergab $60 \cdot 5\%$ C. und $11 \cdot 4\%$ H. Der Stickstoffgehalt beträgt 17% .

Diese Zahlen haben keinen erheblichen Werth, da sich das Product beim Stehen fortwährend verändert und seinem ganzen weiteren Verhalten nach ein Gemenge mehrerer Körper sein dürfte. Doch zeigen der bedeutend höhere Kohlenstoff- und geringere Wasserstoff-Gehalt gegenüber dem festen Aldehydammoniak, dass nicht nur Wasser, sondern auch Ammoniak aus letzterem austreten, um das ölige Product zu bilden, und dass eine Condensation zu complicirteren Molekeln stattfindet.

Es ist mir nicht gelungen, brauchbare Salze von diesem Körper darzustellen, welche zu einer Trennung der Bestandtheile hätten führen können.

Bleibt des Rohproduct etwa eine Woche sich selbst überlassen an der Luft stehen, so bilden sich sehr langsam schöne farblose tafelförmige Krystalle.

¹ Monatshefte IV. 16.

Diese konnten entweder schon in dem Rohproducte enthalten sein und durch Verdunstung desselben zur Ausscheidung gelangen, oder sie konnten unter dem Einflusse der atmosphärischen Luft entstehen und zwar vielleicht durch Vermittlung des Sauerstoffs oder der in der Luft enthaltenen Kohlensäure.

Gegen die erste Annahme spricht von vornherein der Umstand, dass das Öl auch beim langen Stehen nur sehr wenig verdunstet. Durch Oxydation entstehen die Krystalle ebenfalls nicht, wovon ich mich dadurch überzeugte, dass ich das Rohproduct längere Zeit mit blosser Sauerstoffe in Berührung liess; es zeigte sich keine Spur von Krystallisation.

Die letzte Vermuthung jedoch, dass die Kohlensäure das wirksame Agens sei, fand durch Versuche eine entschiedene Bestätigung.

Bringt man das Rohproduct in eine mit Kohlensäure gefüllte Glasglocke, oder lässt man einen Kohlensäurestrom durch dasselbe streichen, so scheiden sich bald so viele kleine Kryställchen aus, dass die Masse breiig wird; krystallisirt man sie aus Äther um, in welchem sie sehr leicht löslich sind, so erweisen sie sich als identisch mit den spontan entstandenen Krystallen.

Um ganz sicher sein zu können, dass die Kohlensäure wirklich wesentlich ist beim Entstehen dieses merkwürdigen Körpers, führte ich durch des Rohproduct einen Luftstrom, welcher von Kohlensäure befreit war; aber es war keine Spur einer Veränderung zu bemerken, bevor nicht Kohlensäure hinzutrat; in diesem Falle trat auch die Krystallisation wieder ein.

Folgendes Verfahren diente mir nun dazu, grössere Mengen zu erhalten.

Das Rohproduct, wie es bei gewöhnlicher Temperatur aus Aldehyd und Ammoniak entsteht, wird zunächst von mechanisch beigemengtem Ammoniak durch einen mehrere Stunden wirkenden starken Luftstrom und sodann von der Wasserschicht befreit; zur gänzlichen Reinigung von Ammoniak liess ich es 2—3 Tage über Schwefelsäure stehen, löste dann in Alkohol und behandelte die Lösung einen halben Tag mit Kohlensäure. Lässt man nun den Alkohol bei gewöhnlicher Temperatur abdunsten, so scheiden sich nach und nach die Krystalle aus; viel schneller geschieht dies, wenn man einige fertige Exemplare einsät. Aus dem ent-

standenen dicken Brei wird die Mutterlauge abgesaugt, und die zwischen Papier abgepressten Krystalle werden aus Äther mehrmals umkrystallisirt. Aus 100 Grm. Aldehyd kann man, bei richtiger Beobachtung der Umstände, 30 Grm. dieses Körpers bekommen.

Sorgt man nicht für eine sehr sorgfältige Befreiung des Rohproductes von mechanisch beigemengtem Ammoniak, so erhält man beim Hinzubringen der Kohlensäure einen amorphen weissen Niederschlag, der in Äther unlöslich, in Wasser aber löslich ist, sich nicht unzersetzt aufbewahren lässt und bei verschiedenen Darstellungen ganz verschiedene Analysen-Resultate gab. Der Kohlenstoffgehalt in der Höhe von 40—50% entfernt sich weit von dem, welchen die Ammoniumcarbonate und das carbaminsaure Ammonium besitzen. Jedoch ist sehr wahrscheinlich, dass Ammoniumcarbonat in diesem Niederschlage enthalten ist, da er die Reactionen von Kohlensäure und Ammoniak in deutlichster Weise zeigt.

Die Krystalle sind öfter einen Centimeter lang und breit, wasserhell, farblos und sehr weich.

Herr Prof. v. Lang hatte die Güte, eine Messung derselben vorzunehmen; er hat mir folgendes Resultat mitgetheilt:

Krystalssystem asymmetrisch

Elemente $a : b : c = 1 : 1 \cdot 1848 : 0 \cdot 8015$

$bc = 94^\circ 58'$

$ca = 72^\circ 25'$

$ac = 101^\circ 58'$

Beobachtete Flächen:

110, 010, 001, 011, 101.

Vorherrschende Flächen: 100; auch sind einige Krystalle verlängert nach der Axe c .

Theilbarkeit: Faserig nach 010.

Die Krystalle sind in Äther, Alkohol, Chloroform, Benzol und Schwefelkohlenstoff löslich, besonders leicht in Äther, unlöslich aber in Wasser.

Ihr Schmelzpunkt liegt bei 74°C. ; er wird durch kleine Beimengungen der Mutterlauge nicht beeinflusst.

Die Elementaranalyse führte zur Annahme der empirischen Formel $\text{C}_{15}\text{H}_{29}\text{N}_3$.

- I. 0·1315 Grm. Substanz gaben bei der Verbrennung 0·1354 Grm. Wasser und 0·345 Grm. Kohlensäure.
 II. 0·2032 Grm. Substanz gaben 0·2098 Grm. Wasser und 0·533 Grm. Kohlensäure.
 III. 0·2268 Grm. Substanz gaben bei der Stickstoffbestimmung nach Dumas 0·03904 Grm. Stickstoff.
 IV. 0·4007 Grm. Substanz gaben 0·06827 Grm. Stickstoff.

	Gefunden				Berechnet für
	I.	II.	III.	IV.	$C_{15}H_{29}N_3$
Kohlenstoff	71·55,	71·53	—	—	71·71
Wasserstoff	11·44,	11·47	—	—	11·55
Stickstoff	—	—	17·21,	17·03	16·73
					99·99 ⁰ / ₀ .

Dieser Körper ist demnach sauerstofffrei und lässt durch seine empirische Formel nicht errathen, in welcher Weise die Kohlensäure bei seiner Entstehung thätig ist.

Auch die Mutterlauge enthält keine Kohlensäure.

Der krystallisirte Körper $C_{15}H_{29}N_3$ ist sehr leicht zersetzlich; über den Schmelzpunkt erhitzt, zeigt er bald Zerlegungserscheinungen, so dass eine Bestimmung der Dampfdichte nicht ausführbar ist. Sehr heftig geht die Zersetzung vor sich, sobald man Mineralsäuren einwirken lässt; es treten in diesem Falle Aldehyd und dessen Condensationsproduct auf. Selbst beim Digeriren mit warmem Wasser bemerkt man schwachen Aldehydgeruch.

Ein Platinsalz oder andere Salze darzustellen ist daher nicht möglich.

Die Unbeständigkeit der Krystalle und die complicirten Zersetzungserscheinungen erschwerten in hohem Grade alle Versuche, welche auf die Ergründung der Constitutionsformel gerichtet waren.

Ich versuchte einige Aufklärungen durch eine sorgfältig ausgeführte Zerlegung mittelst Säure zu erlangen. Ich wurde dazu durch die Beobachtung veranlasst, dass verdünnte Säuren aus $C_{15}H_{29}N_3$ Propionaldehyd und Methyäthylacrolein¹ ($C_6H_{10}O$) ausscheiden.

¹ Monatshefte IV. 10.

Es wurden 13 Grm. der Substanz mit ziemlich viel Wasser in einen Kochkolben gebracht, ferner wurde eine bestimmte Menge titrirter Schwefelsäure zugefügt und zum Kochen erhitzt. Die Krystalle lösten sich auf und entwickelten bedeutende Mengen C_3H_6O und $C_6H_{10}O$, welche mit den Wasserdämpfen überdestillirten. Das Destillat war neutral; es wurde mit Äther ausgeschüttelt und die mit geschmolzenem Chlorcalcium getrocknete Lösung destillirt. Die Scheidung des Aldehydes von seinem Condensationsproducte geschieht durch fractionirte Destillation sehr leicht, da letzteres erst bei $137^\circ C.$ siedet.

Ich erhielt so 5 Grm. C_3H_6O und 2·5 Grm. $C_6H_{10}O$, dem Molekulargewichte nach also $3\frac{1}{2}$ mal so viel C_3H_6O als $C_6H_{10}O$. Da aber jedenfalls beim Aldehyd der grösste Versuchsfehler zu suchen ist, obwohl mit Eis gekühlt wurde, so würde sich in Wirklichkeit das Verhältniss etwas anders gestalten.

Mit dem im Destillirkolben befindlichen sauren Rückstande machte ich zur Untersuchung der basischen Zersetzungsproducte folgende drei Bestimmungen.

1. Versuch. Ein Theil des auf 500 Ccm. verdünnten Rückstandes wurde mit Ammoniak-Flüssigkeit von bestimmtem Gehalte bis zur Neutralisation versetzt; es ergab sich, dass 2·43 Grm. aus dem fraglichen Körper stammender Stickstoff an Schwefelsäure gebunden waren. Für die empirische Formel $C_{15}H_{29}N_3$ berechnen sich 2·3 Grm. Stickstoff; da das Ende der Reaction beim Titiren nicht deutlich zu erkennen war, so ist diese Differenz leicht erklärt.

2. Versuch. Ein anderer Theil des Rückstandes wurde mit Kalilauge alkalisch gemacht; es fiel hierbei ein basisches Öl aus, das sich schon durch den Geruch als das im Weiteren zu beschreibende Parvolin erwies. Derselbe Geruch war auch beim Titiren (während des ersten Versuches) aufgetreten.

Ich destillirte nun die ausgeschiedenen basischen Bestandtheile in vorgelegte Salzsäure, dampfte die saure Lösung ein und fällte mit Platinchlorid. Die Fällung hatte ganz das Aussehen von Platinsalmiak; 5·4029 Grm. dieses Salzes gaben 2·357 Grm. Platin, das sind $43\cdot6\frac{0}{0}$, während reiner Platinsalmiak $43\cdot79\frac{0}{0}$ enthält.

Das Filtrat wurde zur Trockniss gebracht und mittelst absoluten Alkohols vom überflüssigen Platinchlorid befreit. Der Rückstand war roth und hatte ganz das Aussehen des Parvolin-Platindoppelsalzes. 1·0556 Grm. lieferten beim Glühen 0·349 Grm. Platin, das sind 30·2%, während reines Parvolinsalz 28·5% Platin enthält gemäss der Formel $(C_9H_{13}N.HCl)_2Pt.Cl_4$. Die Ursache dieser Ungenauigkeit liegt wohl in einer kleinen Beimengung von Platinsalmiak, welcher in Lösung gegangen war.

Eine Bestätigung, dass die vorliegende Base identisch mit dem Parvolin ist, lieferte der 3. Versuch, bei welchem aus dem obigen Rückstande freies Parvolin dargestellt wurde, das den richtigen Siedepunct von 195° C. hatte.

Beim Destilliren des Parvolins blieb ein dunkler harziger Rückstand, wie auch neutrale Nebenproducte in geringer Menge bei der Zersetzung mit Säure entstanden waren.

In folgenden Zahlen drückt sich das thatsächliche Resultat des ganzen Versuches aus. Ich erhielt aus 13·8 Grm. Substanz:

5·3 Grm. Propionaldehyd,

2·5 Grm. Methyläthylacrolein,

ferner an basischen Producten:

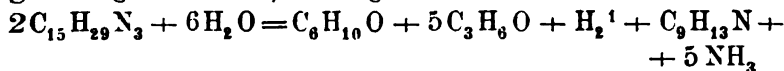
2·7 Grm. Parvolin ($C_9H_{13}N$),

2·06 Grm. Ammoniak durch Darstellung von Platinsalmiak bestimmt,

oder zusammen 2·4 Grm Stickstoff.

Da diese Bestimmungen einer Reihe bedeutender Versuchsfehler — besonders das öftere Destilliren — ausgesetzt waren, so musste man einen ziemlich grossen Abgang in der Gesamtmenge der zu erhaltenden Zersetzungsproducte voraussehen.

Annähernd liessen sich das Ergebniss durch die Formelgleichung ausdrücken, wie folgt:



Dann müssten aber erhalten werden:

2·69 Grm. $C_6H_{10}O$ und 3·71 Grm. $C_9H_{13}N$

7·97 Grm. C_3H_6O und 2·2 Grm. NH_3

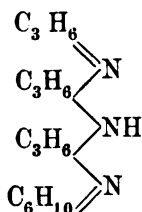
2·3 Grm. N.

¹ In welcher Weise die zwei Wasserstoffatome austreten können, wird später besprochen werden, vielleicht reduciren sie $C_6H_{10}O$ zu Hexylalkohol.

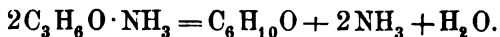
Aus den erhaltenen Zersetzungsproducten ergibt sich mit grosser Wahrscheinlichkeit die Folgerung, dass in dem krystallisirten Körper $C_{15}H_{29}N_3$ eine oder mehrere Molekeln $C_6H_{10}O$ beziehungsweise C_3H_6O vorgebildet seien und zwar in Form der zweierwerthigen Reste $C_3H_6\langle$ und $C_6H_{10}\langle$, welche mittelst Stickstoffatomen oder Imidgruppen verkettet sind.

Dass nicht $C_6H_{10}O$ unter dem Einflusse der Schwefelsäure in Aldehyd oder umgekehrt dieses in $C_6H_{10}O$ verwandelt wird, ergaben mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit zwei entsprechend angestellte Versuche. Weder $C_6H_{10}O$ noch C_3H_6O wurden irgendwie verändert, als sie mit derselben Schwefelsäure, welche bei obigem Versuche gedient hatte, in einem geschlossenen Rohre auf $100^\circ C.$ erhitzt wurden.

Gestützt auf ähnliche Beobachtung, welche Lipp¹ beim Isobutyraldehydammoniak gemacht hat, möchte ich die Vermuthung aussprechen, dass dem Körper $C_{15}H_{29}N_3$ möglicherweise die Constitution eines Hydramides zukommen könnte, etwa in dieser Form:



Die Bildung des Condensationsproductes $C_6H_{10}O$ aus Aldehydammoniak ist leicht denkbar nach der Gleichung



Die Kohlensäure könnte bei diesem Entstehungsprocesse so wirken, dass sie den Aldehydammoniakmolekeln durch Entziehung von Ammoniak Gelegenheit gibt sich zu vereinigen; das in geringer Menge entstandene Ammoniumcarbonat zersetzt sich wieder, so dass man in der Mutterlauge keine Kohlensäure findet.

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass in dem Rohproducte ziemlich viel Aldehydammoniak noch unzersetzt aufgelöst ist, was

¹ Berliner Berichte 14, 1746; „Über ein Hydromid der Fettreihe“

nicht nur möglich, sondern sogar sehr wahrscheinlich ist; der flüssige Theil des Rohproductes würde natürlich an der ganzen Reaction nicht theilhaftig sein.

Der Versuch durch ein Bromadditionsproduct Aufschlüsse zu erlangen, scheiterte an der grossen Unbeständigkeit der erhaltenen Verbindung.

Die Molekulargrösse und Constitution von $C_{15}H_{29}N_3$ konnte ich also nicht ermitteln, ebenso wie die Rolle noch unangeklärt ist, welche die Kohlensäure bei seiner Entstehung spielt. Jedenfalls dürfte die Molekel ziemlich complicirt sein, und kommt ihr vielleicht noch ein grösseres Gewicht zu.

Darstellung des Parvolins.

Bekanntlich haben Bayer und Ador¹ durch Erhitzen von Acroleinammoniak und Aldehydammoniak Picolin, beziehungsweise Collidin erhalten. Die Eigenschaften dieser künstlich dargestellten Basen stimmen mit denen überein, welche Picolin und Collidin aus Knochenöl aufweisen. Die Siedepuncte differirten allerdings ziemlich bedeutend und zwar höchst wahrscheinlich nur wegen geringer Beimengungen von homologen Basen, welche die Ergebnisse der Analysen nicht merkbar beeinflussten.

Aus meinem Rohproducte habe ich einen basischen Körper erhalten, welcher ebenfalls als ein Homologes vom Pyridin angesprochen werden kann.

Wird das Rohproduct erhitzt, so tritt Zersetzung ein; unter reichlicher Wasser- und Ammoniak-Abspaltung wird die Flüssigkeit dunkel braunroth. Um die hierbei stattfindenden Reactionen ganz zu Ende zu führen, erhitzte ich das Rohproduct in zugeschmolzenen Glasröhren unter wiederholtem Öffnen derselben durch mehrere Tage auf 230 C.

Der Röhreninhalt wurde nun mit Salzsäure versetzt, wobei sich eine obenauf schwimmende ölige Flüssigkeit als in Säure unlöslich abschied. Ich destillirte dieselbe mit Wasserdämpfen ab, fällte den sauren Rückstand mit Kalilauge und destillirte abermals mit Wasserdämpfen. Zur besseren Reinigung wiederholte ich die Lösung, Fällung und Destillation, und hatte nun zwei Partien, eine neutrale und eine basische.

¹ Liebig's Annalen, Bd. 155, Seite 281.

Beim Destilliren mit Wasserdämpfen blieb in bedeutender Menge ein fast schwarz gefärbtes Harz zurück, welches zum grössten Theile basisch war, aber zu einer weiteren Untersuchung nicht geeignet erschien.

Das neutrale Product wurde mit geschmolzenem Chlorcalcium getrocknet und destillirt. Der Siedepunct steigt von 120° bis 200° C. Während der von 120° bis 160° siedende Theil einen angenehmen Geruch besitzt und farblos bleibt, riecht der höher siedende intensiv aromatisch, terpeninölähnlich, und färbt sich bald roth. Die niedrige Fraction wurde zur Entfernung eventuell vorhandenen Aldehydes mit Natriumbisulphit geschüttelt, mit Ätzkalk und Ätznatron am Rückflusskühler erhitzt und dann über Natrium destillirt. Der Siedepunct war aber immer noch nicht constant, sondern stieg von 130° bis 160° . Die Menge war zu gering, um für weitere Versuche hinzureichen; der Geruch des mehrmals destillirten Productes erinnerte sehr deutlich an den des Hexylalkohols, welcher durch Reduction aus $C_6H_{10}O$ erhalten wird.

Eine Verbrennung der höheren Fraction ergab einen Gehalt von 11.8% Wasserstoff und 75.7% Kohlenstoff.

Das basische Product der trockenen Destillation wurde aus dem wässrigen Destillate, in welchem eine beträchtliche Menge gelöst war, mit Äther ausgeschüttelt, mit Kali getrocknet und der fractionirten Destillation unterworfen. Man bemerkt bald die Gegenwart zweier verschiedener Basen. Die eine destillirt von 150° bis 180° C., die andere von 180° bis 220° C. Die beiden Hauptfractionen unterscheiden sich einigermassen durch den Geruch.

Um die beiden Basen vollständig zu reinigen, stellte ich die Platindoppelsalze derselben dar.

Das Salz der höher siedenden Base krystallisirt in schönen, rosettenförmig gruppirten spitzigen Krystallen von der Farbe des Kaliumbichromates. In ganz reinem Zustande zeigen sie blaugrünen Flächenschimmer. Sie sind in heissem Wasser ziemlich leicht löslich, viel weniger in kaltem und in Alkohol.

Durch fortlaufende Fällungen, wobei das Lösungsmittel immer mehr eingeengt wurde, bekam ich eine Reihe von 10 Fractionen, welche so oft unkrystallisirt wurden, bis sie den

gleichen Platingehalt zeigten. Die letzten Fractionen bereiteten aber Schwierigkeiten, insoferne sie beim Lösen in heissem Wasser immer wieder kleine Mengen eines schmutzigschwefelgelben amorphen in Wasser und Salzsäure so gut wie unlöslichen Platinsalzes abschieden.

Dasselbe haben schon Anderson und Bayer beim Picolin und Pyridin beobachtet. Die Ursache dieser Bildung eines Platinosalzes, wie es Anderson nannte, kann in der Gegenwart reducirender Substanzen gelegen sein.

Dieses schwefelgelbe Platinsalz enthält 31.27% Platin, während für ein dem Picolinplatinosalz entsprechendes Platinosalz des Parvolins 32.01% berechnet sind.

Von den acht im Platingehalt übereinstimmenden Fractionen sah die fünfte, bei 188°C. (uncorr.) schmelzende, am schönsten aus. Ich verwandle sie zur Elementaranalyse.

Krystallwasser enthält des Salz nicht.

I. 0.2277 Grm. Substanz gaben beim Glühen 0.065 Grm. Platin.

II. 0.2732 Grm. Substanz gaben beim Glühen mit Kalk 0.345 Grm. Chlorsilber.

III. 0.3809 Grm. Substanz gaben bei der Verbrennung 0.444 Grm. Kohlensäure und 0.1495 Grm. Wasser.

	Gefunden			Berechnet für $(\text{C}_9\text{H}_{13}\text{N} \cdot \text{H}(\text{Cl})_2 \cdot \text{PtCl}_4)$
	I.	II.	III.	
Platin	28.54	—	—	28.57
Chlor	—	31.4	—	31.16
Kohlenstoff	—	—	31.78	31.81
Wasserstoff	—	—	4.35	4.15.

Die gefundenen Procentzahlen stehen also in guter Übereinstimmung mit jenen, welche die Formel



beansprucht. Die freie Base hätte demnach die Formel $\text{C}_9\text{H}_{13}\text{N}$, welche dem Parvolin zukommt.

Die einzelnen Fractionen des Platinsalzes wurden nun vereinigt, in Wasser mit etwas Salzsäure gelöst und mittelst Schwefelwasserstoff zerlegt.

Die Lösung der Chlorwasserstoffverbindung der Base durch einen Strom von Kohlensäure von gelöstem Schwefelwasserstoff befreit und eingedampft, lieferte weisse nadelförmige Krystalle, welche aber an der Luft zerfliessen und daher zu einer Analyse nicht recht geeignet sind. Das daraus mittelst Ätzkali ausgeschiedene Öl destillirte nun innerhalb fünf Graden.

Der corrigirte Siedepunct ist 198—200° C. bei 745·5 Mm. Barometerstand.

Die sorgfältig mittelst frisch geschmolzenem Ätzkali getrocknete freie Base unterwarf ich nun der Elementaranalyse:

I. 0·2082 Grm. Substanz lieferten 0·609 Grm. Kohlensäure und 0·1816 Grm. Wasser.

II. 0·2844 Grm. Substanz lieferten bei der Stickstoffbestimmung nach Dumas 0·03036 Grm. Stickstoff.

	Gefunden		Berechnet für für $C_9H_{13}N$
	I.	II.	
Kohlenstoff	79·73	—	80·0
Wasserstoff	9·69	—	9·62
Stickstoff	—	10·67	10·37
			99·99 ⁰ / ₀

Es führt also auch die Analyse der freien Base zu derselben Formel.

Die Dampfdichte bestimmte ich nach der Luftverdrängungsmethode von Victor Meyer.

0·1061 Grm. Substanz gaben 21·6 Ccm. verdrängter Luft bei 25° C. und 744 Mm. Barometerstand. Daher ist $D = 4·49$ bezogen auf Luft als Einheit. Die Formel $C_9H_{13}N$ verlangt $D = 4·66$.

Das Parvolin ist eine dünnflüssige, farblose, stark lichtbrechende Flüssigkeit, welche leichter als Wasser ist und beim Stehen farblos bleibt, wenn sie aus dem Platinsalz ausgeschieden wurde; sonst wird sie bald bräunlich gelb. Es besitzt einen sehr intensiven aromatischen Geruch, welcher dem der anderen Pyridin-

¹ Die Base ist ausserordentlich schwer verbrennlich; es ist stundenlanges Glühen im Sauerstoffströme nöthig, um diesich reichlich abscheidende Kohle zu verbrennen.

basen sehr ähnlich ist und schmeckt äusserst bitter. Es ist in Wasser nicht unerheblich löslich, leicht in Alkohol und Äther. Mit Salzsäure entwickelt es weisse Nebel und färbt Fichtenholz gelb.

Mit Pikrinsäure gibt Parvolin einen in schönen gelben Blättchen von der Farbe der Pikrinsäure krystallisirenden Körper, welcher in Alkohol leichter löslich ist als in Wasser. Die Löslichkeitsverhältnisse sind ungefähr die der freien Pikrinsäure. Die entstandene Verbindung enthält je eine Molekel Parvolin und Pikrinsäure. Ihr Schmelzpunkt liegt bei 149° C. (uncorr.).

Mit Tanninlösung gibt Parvolin einen weissen flockigen Niederschlag, welcher in Alkohol leicht löslich ist. Mit Phosphorwolframsäure fällt es einen schwach bläulichweissen Körper, der sich bei Zusatz von Salzsäure vermehrt und in Alkohol unlöslich ist. Kaliumquecksilberjodid gibt eine gelblichweisse Fällung, leicht löslich in Alkohol und Salzsäure.

Jodjodkaliumlösung fällt einen braunen flockigen Niederschlag, der von Schwefelkohlenstoff unter Violettfärbung aufgenommen wird. Kaliumwismuthjodid verursacht ebenfalls einen flockigen dunkelbraunen Niederschlag, der in Salzsäure löslich ist und durch Alkohol gelb gefärbt wird. Die vorstehenden Reactionen wurden mit einer wässerigen Lösung des Parvolins ausgeführt.

Seine Salzsäureverbindung gibt ein Golddoppelsalz, das in gelben Nadeln krystallisirt, aber an der Luft zerfliesst.

Die Eigenschaften des von mir erhaltenen Parvolins stimmen mit denen überein, welche Parvolin aus bituminösem Schiefer aufweist, soweit sie eben bekannt sind. Der Siedepunct jedoch wurde bis jetzt bei 188° C. angegeben, während ich fand, dass Parvolin bei 198 — 200° C. siedet. Allein dies ist nicht entscheidend, da bekanntermassen die Siedepuncte der Pyridinbasen durch kleine Beimengungen ihrer Homologen ausserordentlich stark alterirt werden. Das natürliche nur durch Destillation isolirte Parvolin hat solche Beimengungen jedenfalls enthalten, während das künstliche Parvolin durch Darstellung des Platindoppelsalzes gereinigt wurde, der von mir beobachtete Siedepunct dürfte also eher der richtige sein.

Ich gehe nun zu der nieder siedenden Base über, welche bei der trockenen Destillation meines Rohproductes neben Parvolin

erhalten wurde. Sie destillirt nach der Reinigung mit Salzsäure zwischen 150° und 180° C.; an meisten geht bei 160° über. Sie riecht anders als Parvolin, erinnert aber ebenfalls gleich an Pyridinbasen:

Sie entsteht nur in geringer Menge, wesshalb das Platinsalz nicht ganz gut zu reinigen war; es bildete sich überdies auch hier wieder ein schwefelgelbes amorphes Salz, wahrscheinlich eine Platinverbindung. Das Platindoppelsalz ist licht gelbbraun, krystallisirt undeutlich und wird leicht harzig.

0·2128 Grm. Substanz gaben beim Erhitzen und Glühen 0·007 Grm. Wasser und 0·0678 Grm. Platin.

	Gefunden	Berechnet für (C ₈ H ₇ N·HCl) ₂ ·PtCl ₄ + H ₂ O.
Wasser	3·28	2·95
Platin	31·86	31·85

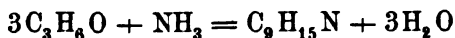
Wie man sieht, stimmen diese gefundenen Procentzahlen gut mit denen überein, welche das Picolin-Platindoppelsalz mit einer Molekel Krystallwasser fordert.

Die erhaltenen Mengen des reinen Salzes waren nicht hinreichend, um weitere Bestimmungen zu machen. Dass Picolin neben Parvolin entstanden sei, ist übrigens gar nicht unwahrscheinlich.

Die Base ist eine farblose Flüssigkeit von durchdringendem Geruche, der viel intensiver ist als beim Parvolin, und von brennend bitterem Geschmacke; sie löst sich leicht in Wasser, Alkohol, und Äther, reagirt alkalisch und bildet mit Salzsäure weisse Nebel wie das Parvolin. Der Siedepunct des Picolins wird bei 135° C. angegeben. Die hier sich ergebende Differenz von circa 25° C. ist zwar bedeutend, beweist aber doch nicht mit Sicherheit, dass der vorliegende Körper kein Picolin ist.

Dieselben Basen, welche das Rohproduct beim Erhitzen liefert, entstehen, wenn man die Mutterlauge des krystallisirten Körpers C₁₅H₂₉N₃ und anderseits diesen selbst in zugeschmolzenen Röhren über 200° erhitzt. Im letzteren Falle ist die Ausbeute eine viel bessere, indem etwa 50% Parvolin gebildet werden. Viel weniger entsteht davon, wenn C₁₅H₂₉N₃ mit Säuren auf 100° C. erhitzt wird.

In welcher Weise Parvolin aus Propionaldehydammoniak gebildet wird, ist nicht ganz leicht zu verstehen. Die einfache Formelgleichung



entspricht der Wirklichkeit schon deshalb nicht, weil die Base dann 15 Atome Wasserstoff enthalten müsste und ein Dihydro-parvolin wäre, wogegen aber entschieden die Resultate der Analysen sprechen. Für ein solches Dihydroproduct berechnen sich nämlich folgende Procentzahlen:

Kohlenstoff	Wasserstoff	Stickstoff
78·83%	10·94%	10·21%

für $C_9H_{13}N$ aber berechnen sich

C = 80	H = 9·62	N = 10·37
--------	----------	-----------

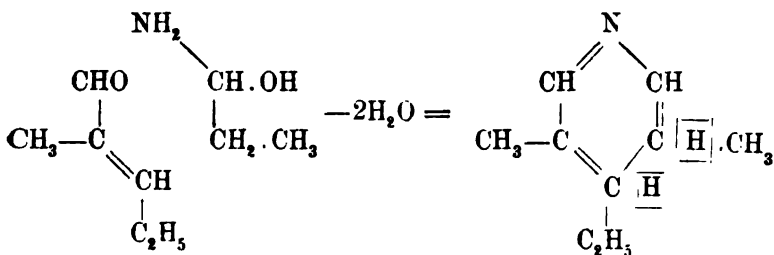
gefunden wurden bei der Elementaranalyse

C = 79·73	H = 9·69	N = 10·67
-----------	----------	-----------

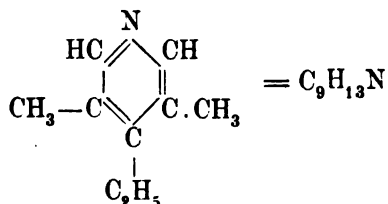
Man könnte sich den Bildungsprocess des Parvolins etwa so vorstellen:

Aus einer Molekel $C_6H_{10}O$, dessen Bildung aus Propionaldehydammoniak leicht zu begreifen ist, und aus einer Molekel $C_3H_6O.NH_3$, beziehungsweise aus drei Molekeln Aldehydammoniak entsteht das Parvolindihydrät, welches sogleich unter Abgabe von zwei Wasserstoffatomen Parvolin bildet. Dieser Wasserstoff kann gleichzeitig vorhandenes $C_6H_{10}O$ zu Hexylalkohol reduciren. Thatsächlich ist ja ein entsprechend riechendes neutrales Product in dem Röhreninhalte gefunden worden.

Ich will das Gesagte durch die beigegebenen Structurformeln versinnlichen:

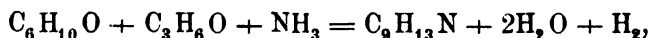


Aus dem Dihydrür entsteht dann unter Austritt der beiden eingeklammerten Atome des Parvolin:



Nach dieser Formulierung enthielte das Parvolin drei Seitenketten, eine Äthyl- und zwei Methylgruppen.

Ich brachte nun in ein Glasrohr $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}$, $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$ und alkoholisches Ammoniak in molekularen Mengen nach der Gleichung



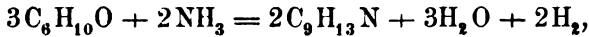
und erhitzte über 200°C . Es konnte ja sein, dass man so eine bessere Ausbeute an Parvolin bekäme als nach dem alten Verfahren. Diese Hoffnung gieng aber nicht in Erfüllung. Die Producte blieben ganz dieselben.

Es war auch interessant, zu erfahren, ob durch Einwirkung von Ammoniak auf $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}$ allein und darauffolgendes Erhitzen Parvolin erhalten werden kann.

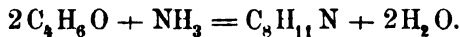
$\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}$ stellte ich dar nach der Vorschrift von Lieben und Zeisel, indem ich Propionaldehyd mit dem gleichen Volum einer wässerigen Lösung von essigsaurem Natron in einem Glasrohre durch 48 Stunden auf 100°C . erhitzte.

Um nicht mit alkoholischem Ammoniak erhitzen zu müssen, liess ich zunächst gasförmiges Ammoniak durch $\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}$ streichen. Es fällt da ein weisser Niederschlag aus, der aber bald unter Wasserabspaltung verschwindet. Es bleibt eine braunrothe Flüssigkeit, welche noch dunkler wird, wenn man die Einwirkung des Ammoniaks am Rückflusskühler fortsetzt. Das Product wurde in einem geschlossenen Rohre durch zwei Tage auf 150°C . erhitzt. Der Röhreninhalt wies dieselben Producte auf, welche man bei der trockenen Destillation des Rohproductes erhält. Er wurde mittelst Salzsäure in einen neutralen und einen basischen Theil getrennt und der letztere mit Wasserdämpfen destillirt. Die Ausbeute an Parvolin war nicht schlecht; von der niederen Base ist wieder nur sehr wenig entstanden.

Die Bildung des Parvolins aus $C_6H_{10}O$ und Ammoniak lässt sich ähnlich vorstellen wie oben. Aus drei Molekülen $C_6H_{10}O$ entstehen zwei Moleküle Parvolin, indem ein $C_6H_{10}O$ an Stelle der doppelten Bindung zerrissen wird. Der Bildungsprocess drückt sich dann so aus:



während die Entstehung des Collidins aus Aldehydammoniak, beziehungsweise aus Crotonaldehyd und Ammoniak folgender Gleichung entspricht:



Weitere Aufschlüsse über die Constitution und folglich auch über die Bildungsweise des Parvolins versprach die Oxydation zu geben.

Oxydation des Parvolins.

Nach einem mit kleiner Menge ausgeführten Versuche wurden 12 Grm. Parvolin von dem Siedepuncte $190-200^\circ C.$ in Wasser vertheilt, so dass es eine Emulsion darstellte und am Rückflusskühler unterhalb der Kochtemperatur nach und nach mit einer vierprocentigen Chamäleonlösung versetzt. Ich nahm so viel Kaliumpermanganat, als zur Bildung einer Pyridintricarbonsäure nöthig ist. Die Oxydation dauerte unter diesen Umständen etwa fünf Tage. Der Geruch der Reactionsflüssigkeit veränderte sich bald und unterschied sich später ziemlich stark von dem des Parvolins. Nach dem Abfiltriren und gehörigen Auswaschen des Braunsteins wurde die Lösung eingedampft und dann genau mit Schwefelsäure neutralisirt. Cadmiumsulphat bringt dann einen krystallinischen weissen Niederschlag hervor, der sich mit Wasser sehr gut auswaschen lässt und in verdünnter Salzsäure löslich ist. Man erhält ihn aber nur in genau neutralisirter Lösung; gar nicht entsteht er, wenn man mit Essigsäure neutralisirt. Es ist zweckmässig, in warmer Lösung zu fällen und mit dem Niederschlage eine Zeit lang zu kochen. Ich erhielt 15 Grm Cadmiumsalz.

Es enthält vier Moleküle Krystallwasser, wovon zwei beim langen Stehen über Schwefelsäure oder beim Erhitzen auf $140^\circ C.$

die beiden andern aber erst nach längerem Erhitzen weit über 200° C. entweichen; es beginnt bei dieser Temperatur auch schon die weitere Zersetzung des Salzes.

2·1787 Grm. Substanz verloren über Schwefelsäure 0·227 Grm. Wasser = $10\cdot42^{\circ}_{00}$, für zwei Moleküle Wasser berechnen sich, wie aus dem Weiteren hervorgehen wird, 10·32 Procente.

Mit diesem schwefelsäuretrockenen Salze wurden analytische Bestimmungen gemacht.

- I. 0·303 Grm. Substanz gaben beim Erhitzen und Glühen 0·0265 Grm. Wasser und 0·123 Grm. CdO.
- II. 0·5325 Grm. Substanz gaben bei der Verbrennung 0·0832 Grm. Wasser und 0·5192 Grm. Kohlensäure.
- III. 0·402 Grm. Substanz lieferten 0·075 Grm. Wasser und 0·395 Grm. Kohlensäure.
- IV. 0·490 Grm. Substanz gaben bei der Stickstoffbestimmung nach Dumas 0·02195 Grm. Stickstoff.

	Gefunden				Bechnet für
	I.	II.	III.	IV.	$C_7H_3\cdot NO_4\cdot Cd + 2H_2O.$
Wasser	8·75	—	—	—	8·64
Cadmium	35·5	—	—	—	35·7
Kohlenstoff	—	26·57,	26·79	—	26·87
Wasserstoff	—	1·73,	2·08	—	2·23
Stickstoff	—	—	—	4·48	4·47.

Dieses Resultat zeigt, dass die erhaltene Säure nicht eine Tricarbonsäure, sondern eine Dicarbonsäure des Pyridins ist.

Um die Säure selbst zu bekommen, löste ich das Cadmiumsalz in ganz verdünnter Salzsäure und zerlegte es mit Schwefelwasserstoff. Das ausgeschiedene Cadmiumsulphid hält die Säure ziemlich hartnäckig zurück und muss mehrmals mit Wasser ausgekocht werden. Beim Eindampfen des Filtrates und der Waschwässer erhielt ich die Salzsäureverbindung der Säure, welche in Wasser sehr leicht löslich ist. Durch öfteres Eindampfen zur Trockniss bekam ich nach und nach die freie Säure.

Sie musste oftmals aus heissem Wasser umkrystallisirt werden, bis die mittleren Fractionen rein weiss wurden; die

anderen färbten sich nach kurzer Zeit bräunlich oder fielen schon so aus der Lösung. Die reinste Fraction verwendete ich zur Elementaranalyse.

I. 0·316 Grm. Substanz gaben bei der Verbrennung 0·1057 Grm. Wasser und 0·5847 Grm. Kohlensäure.

II. 0·357 Grm. Substanz gaben 0·1228 Grm. Wasser und 0·658 Grm. Kohlensäure.

Krystallwasser fand ich keines.

	Gefunden		Berechnet für
	I.	II.	$C_3H_5 \cdot NO_4$
Kohlenstoff	50·14,	50·26	50·29
Wasserstoff	3·69,	3·82	2·99.

Es blieb bei der Verbrennung im Schiffchen ein Rückstand, der mehrere Milligramm wog; die Säure war also trotz des offenen Umkrystallisirens noch nicht rein.

Sie krystallisirt in kreidigen mikroskopischen Nadeln, welche zu Krusten vereinigt sind. Ihr Schmelzpunkt liegt bei 219° C. (uncorr.)

Sie ist in kaltem Wasser und heissem Alkohol schwer löslich, bedeutend leichter in heissem Wasser, unlöslich in Äther, schmeckt sauer mit bitterem Beigeschmacke und röthet blaues Lackmuspapier.

Um noch eine analytische Bestätigung dafür zu bekommen, dass die Säure zweibasisch ist, neutralisirte ich sie mit titrirtem Ammoniak; 0·420 Grm. wurden in 200 Ccm. Wasser gelöst und verbrauchten 4·6 Ccm. Ammoniaklösung vom Titre 0·017218 = 0·079 Grm. Ammoniak. Das entspricht dem Molekulargewichte 31·5, während zwei Moleküle Ammoniak 34 ausmachen. Da die Säure nicht ganz rein ist, so kann diese Differenz nicht überraschen; der gefundene Werth bestätigt trotzdem das Resultat der Analysen.

Mit Eisenvitriol zusammengebracht gibt die Säure eine rothe Farbenreaction und fällt nach kurzer Zeit einen schmutzigen braunen Niederschlag.

Mit Bleizucker gibt sie weisse Flocken, die sich weder im Fällungsmittel noch in Essigsäure, wohl aber in Salpetersäure lösen.

Chlorcalcium fällt nach und nach aus dem neutralen Ammoniumsalze ein weisses krystallinisches Pulver. Silbernitrat und Mercuronitrat geben weisse flockige Fällungen.

Die Salzsäureverbindung wird durch Platinchlorid gelb gefällt.

Beim Erwärmen mit essigsauerm Kupfer gibt die Säure einen licht blaugrünen Niederschlag, der beim Kochen krystallinisch wird und sich mit Wasser sehr gut waschen lässt.

0.4435 Grm. Substanz gaben beim Erhitzen über 200° C. und beim Glühen 0.1523 Grm. Kupferoxyd, aber kein Wasser.

Gefunden	Berechnet für $C_7H_5NO_4 \cdot Cu$.
<u>27.4⁰/₀</u>	<u>27.63⁰/₀</u>

Wenn man die erhaltene Säure mit den bekannten Pyridin-dicarbonensäuren vergleicht, so sieht man, dass sie grosse Ähnlichkeit mit der Lutidinsäure hat. Beide Säuren schmelzen bei 219° C. (uncorr.) unter Zersetzung und geben mit Eisenvitriol eine charakteristische rothe Farbenreaction. Beide gaben mit Bleizucker weisse Fällungen, die durch einen Überschuss des Fällungsmittels nicht in Lösung gebracht werden. Silbernitrat bringt in beiden Säuren einen flockigen, weissen Niederschlag hervor, welcher sich in Ammoniak und Salpetersäure leicht löst. Ebenso bringt Chlorcalcium in Lösungen des neutralen Ammoniumsalzes gleiche Niederschläge hervor. Beide werden durch essigsaueres Kupfer licht blaugrün gefällt.

Dagegen wird die Lutidinsäure¹ und das eben genannte Kupfersalz krystallwasserhältig beschrieben, was meiner Beobachtung widerspricht. Ebenso geben Weidel und Herzig an, dass sich die Lutidinsäure in kaltem Wasser ziemlich leicht, in heissem Wasser und Alkohol aber sehr leicht löse, während ich gefunden habe, dass meine Säure in kaltem Wasser nur ungefähr doppelt so löslich ist als Gyps und auch von kochendem Wasser nur langsam in keineswegs bedeutender Menge aufgenommen wird.

¹ Monatshefte. I. 20.

Da aber keine bestimmten Verhältnisse angegeben und die Ausdrücke „leicht“ und „schwer löslich“ sehr verschieden zu nehmen sind, da ferner der Krystallwassergehalt bei den Pyridincarbonsäuren je nach Umständen wechselt, so stehe ich nicht an, wenn auch mit einigem Vorbehalte, die von mir aus Parvolin dargestellte Pyridindicarbonsäure als Lutidinsäure anzusprechen. Mein Substanzvorrath reichte nicht hin, um weitere Bestätigungen für diese Annahme suchen zu können.

Da über die Stellung der Carboxylgruppen in der Lutidinsäure nichts bekannt ist, so gibt sie auch keinen Aufschluss über die Stellung der Seitenketten des Parvolins. Allein so viel scheint beinahe gewiss, dass in letzterem nicht drei, sondern nur zwei Seitengruppen enthalten seien, und zwar müssen es Äthylgruppen sein, da es doch sehr unwahrscheinlich ist, dass bei der Oxydation ein Methyl oder Äthyl aus dem Pyridinkerne verschwinden sollte. Diese Erwägung spricht gegen die Formulirung der Bildung von Parvolin aus Aldehydammoniak, wie ich sie oben dargestellt habe.

Destillation mit Kalk.

Als letzte Bestätigung dafür, dass mein Parvolin eine Pyridinbase und die daraus dargestellte Säure eine Pyridindicarbonsäure sei, diente die Destillation der Säure mit Ätzkalk.

Ich rührte mit der Lösung der Säure Ätzkalk zu einem Brei an, trocknete und erhitzte des Gemenge des Kalksalzes mit überschüssigem Ätzkalk in einem Glasrohre, durch welches ein langsamer Luftstrom geführt wurde, erst schwach und dann zum Glühen. Es trat sofort intensiver Geruch nach Pyridin auf; die entweichenden Dämpfe wurden in vorgelegter Salzsäure aufgefangen, welche sich aber bald von gleichzeitig gebildetem Pyrrol dunkelbraun färbte. Ich reinigte das Pyridin von letzterem durch zweimaliges Füllen mit Ätzkali und Destilliren mit Wasserdämpfen.

Die nunmehr farblos bleibende wässrige Lösung wurde mit Salzsäure eingedampft und mit concentrirt salzsaurem Platinchlorid versetzt. Zuerst fiel ein schwefelgelbes Platinsalz, beim Verdunsten der Lösung aber orangerotheres Pyridinplatinchlorid aus. Von letzterem bestimmte ich den Platingehalt.

0·1945 Grm. Substanz gaben beim Erhitzen auf 100° C. und Glühen 0·066 Grm. Platin; Wasser enthält das Salz nicht.

	Gefunden	Berechnet für (C ₅ H ₅ NHCl) ₂ ·PtCl ₄
Platin	33·93 ₀	34·45 ₀

Für eine Siedepunktbestimmung reichte die Menge des Pyridins nicht hin.

Bemerkungen über die Stickstoffbestimmung nach Dumas.

Bei Ausführung der in vorstehender Arbeit vorkommenden Stickstoffbestimmungen bin ich Schwierigkeiten begegnet, die zwar nicht unbekannt, aber doch, wie mir scheint, nicht genug gewürdigt sind. Die Verdrängung der Luft aus dem Apparate durch Kohlensäure gelingt nämlich nur dann annähernd vollständig, wenn sie bei hoher Temperatur durchgeführt wird; bei dem gewöhnlichen Verfahren dagegen, auch wenn man sehr lange Zeit Kohlensäure (mit Hilfe eines besonderen Entwicklungsapparates) durchleitet, bleibt, besonders bei Anwendung von feinem Kupferoxyd, erheblich viel Luft in dem Apparate zurück, die erst während der Verbrennung zugleich mit dem Stickstoff zur Entwicklung kommt. Ich fand in einigen Bianco-Versuchen (ohne Substanz) ihre Menge = 1—2 Ccm. Durch wiederholtes abwechselndes Auspumpen des Apparates (mit Hilfe einer Bunsen'schen Pumpe) und Füllen mit Kohlensäure kann der Fehler zwar verringert, doch kaum beseitigt werden. Die besten Resultate bekam ich bei Anwendung des folgenden Verfahrens:

In einem Rohre von 100 Cm. Länge, das rückwärts ausgezogen war, folgten der Reihe nach 20—25 Cm. Natriumbicarbonat, 8 Cm. körniges Kupferoxyd, dann höchstens 5 Cm. feines Kupferoxyd mit der Substanz. (Man kann das feine Kupferoxyd bei Flüssigkeiten und leicht verbrennlichen Substanzen ganz weglassen). 40 Cm. körniges Kupferoxyd, eine Rolle aus Kupferdrahtnetz von 12 Cm. und eine Rolle aus oxidiertem Kupfernetz von 8 Cm. Länge.

Es wurde nun zunächst durch Kohlensäure auf einem Entwicklungsapparat die Hauptmenge der Luft verdrängt, dann das Rohr rückwärts abgeschmolzen und seiner ganzen Länge nach erhitzt, mit Ausnahme von 10 Cm., wo sich die Substanz befand. Das Natriumbicarbonat erhitzt man erst und zwar schwach, wenn das Kupferoxyd bereits in dunkler Rothgluth ist. Der grösste Theil des Bicarbonates muss aufgespart werden für den Schluss der Operation. Jetzt werden rückwärts die Flammen ausgelöscht bis auf eine, welche sich zwischen der Substanz und dem Bicarbonat befindet und verhindern soll, dass erstere nach rückwärts diffundirt. Man führt nun die Verbrennung wie gewöhnlich durch.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Herrn Professor Lieben für die freundliche Unterstützung zu danken, welche er mir bei der Ausführung dieser Arbeit gewährt hat.

Mittheilungen aus dem Laboratorium für allgemeine Chemie
an der technischen Hochschule zu Brünn.

Zur directen Bestimmung der Kohlensäure bei Gegenwart von Sulfiden, Sulfiten und Thiosulfaten der Alkalien.

Von **M. Hönig** und **E. Zatzek**.

Für die directe Bestimmung der Kohlensäure unter Bedingungen, welche die gleichzeitige Bildung von Schwefeldioxyd und Schwefelwasserstoff herbeiführen, wie sie z. B. bei der Untersuchung der rohen Soda, Sodalaugen etc. vorliegen, ist bisher keine sichere Methode bekannt gemacht worden; nur für den Fall, als Kohlensäure und Schwefelwasserstoff neben einander zu ermitteln sind, hat **Fresenius**¹ schon vor längerer Zeit eine Methode ausgearbeitet, welche gestattet beide Körper in einer Operation zu bestimmen.

Für den oben angegebenen Fall hat man bisnun in der Regel die Menge der Kohlensäure indirect auf massanalytischem Wege festgestellt, indem man einerseits die Summe der Säure neutralisirenden Substanzen, andererseits die Summe der Jod in Jodwasserstoff verwandelnden Schwefelverbindungen ermittelte.

In Nachstehendem soll nun eine Methode beschrieben werden, welche die gewichtsanalytische Bestimmung der Kohlensäure auf directem Wege neben gleichzeitig auftretendem

¹ Zeitschrift f. analyt. Chem. 10. 75.

Schwefeldioxyd und Schwefelwasserstoff ermöglicht; das Princip derselben beruht darauf, dass Kaliumpermanganat unter Einhaltung gewisser Bedingungen — dieselben werden in einer zweiten Abhandlung eingehend erörtert — die Sulfide, Sulfite und Thiosulfate der Alkalien nahezu vollständig in Sulfate umsetzt, so zwar, dass nach der Einwirkung von Kaliumpermanganat auf ein Gemenge aller dieser Körper mit Carbonaten, bei der hierauf erfolgenden Zersetzung durch Säuren nur Kohlensäure in Gasform auftritt.

Die Ausführung dieser Methode wird in folgender Weise bewerkstelligt:

Die zu untersuchende Substanz wird in ein circa 300^{cc} fassendes Kölbchen gebracht, welches durch einen zweibohrigen Kautschukstöpsel verschlossen wird; durch die eine Bohrung führt ein Hahntrichterrohr bis nahe an den Boden des Kölbchens, durch die andere Bohrung steht dieses, mit Hilfe eines vorstossartig ausgezogenen Glasrohres, der Reihe nach mit folgenden Apparaten luftdicht in Verbindung: 1. Mit einem mit einer verdünnten und schwach angesäuerten Kaliumpermanganatlösung gefüllten Liebig'schen Kugelapparat. 2. Mit einer mit Chlorcalcium gefüllten U-Röhre. 3. Mit einem mit Kalilauge ($d = 1.27$) versehenen vorher gewogenen Liebig'schen Absorptionsapparat. 4. Mit einer U-Röhre mit Chlorcalcium gefüllt. Nachdem die einzelnen Theile des Apparates zusammengefügt sind und man sich in der bekannten Weise von dem luftdichten Verschluss an den Verbindungsstellen überzeugt hat, lässt man durch das Trichterrohr eine concentrirte Lösung von Kaliumpermanganat — ungefähr 5 Gr zu 1 Liter gelöst — unter vorsichtigem Umschwenken so lange einfließen, bis die Lösung bleibend dunkelroth gefärbt erscheint, mit anderen Worten ein Überschuss von Kaliumpermanganat eingetreten ist; hierauf wird die zur Zersetzung des Carbonates nothwendige Säure — man wendet verdünnte Salpetersäure, Schwefelsäure, Essigsäure etc., niemals aber, aus leicht erklärlichen Gründen, Salzsäure an — eingeführt, der Hahn des Trichterrohres geschlossen und nun unter anfänglich sehr gelindem Erwärmen, das man allmähig bis zum schwachen Sieden der Flüssigkeit steigert, die Zersetzung des kohlensauren Salzes und die Austreibung der Kohlensäure zu Ende geführt. Man öffnet dann zum

Schlusse, indem man das Erhitzen unterbricht, den Hahn des Trichterrohres, setzt dieses entweder mit einer mit Ätzkalistücken gefüllten U-Röhre oder einer mit Kalilauge versehenen Waschflasche in Verbindung und beginnt gleichzeitig mit Hilfe eines Aspirators einen schwachen Luftstrom durch den Apparat zu saugen. Nach $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$ stündigem Durchsaugen der Luft kann der Apparat auseinander genommen werden. Die Gewichtszunahme des mit Kalilauge gefüllten Absorptionsapparates gibt natürlicherweise direct die Menge der Kohlen-säure an.

Das Einschalten des mit Kaliumpermanganat gefüllten Liebig'schen Kugelapparates hat den Zweck etwa sich bildende schwefelige Säure und Schwefelwasserstoff, wenn eine zur Umsetzung der Schwefelverbindungen ungenügende Menge von Kaliumpermanganat in das Kölbchen eingeführt wurde, zurückzuhalten; unter den später angegebenen Analysen findet sich ein Beispiel dafür, dass beim Hinweglassen dieses Apparates wesentlich höhere Resultate erhalten werden können.

Über die Brauchbarkeit der Methode mögen folgende Beleganalysen Aufschluss geben:

1. Angewendet wurden 0·2600 Grm. chemisch reines Natriumcarbonat, welchem 0·2870 Grm. Natriumsulfit beigemischt wurden. Zur Oxydation des letzteren kamen circa 0·2100 Grm. Kaliumpermanganat gelöst zur Verwendung und zur Zersetzung diente verdünnte Schwefelsäure.

Gefunden wurden 0·1080 Grm. Kohlendioxyd, welche 41·54 % entsprechen.

2. Es wurde ein Gemenge von 0·3290 Grm. kohlensaurem Natron und 0·3450 Grm. schwefligsaurem Natron zunächst mit einer Lösung von 0·3400 Grm. übermangansaurem Kali versetzt und dann mit verdünnter Schwefelsäure zerlegt.

Erhalten wurden 0·1360 Grm. Kohlendioxyd, entsprechend 41·34 %.

3. 0·2890 Grm. Natriumcarbonat und 0·2800 Grm. Natriumthiosulfat mit 0·5100 Grm. Kaliumpermanganat versetzt, lieferten bei der Zerlegung mit verdünnter Salpetersäure 0·1195 Grm. Kohlendioxyd, das entspricht 41·35 %.

4. Aus einem Gemisch von 0·2550 Grm. Natriumcarbonat, 0·0940 Grm. Schwefelkalium, 0·1380 Grm. schwefligsaurem Natron, 0·1040 Grm. unterschwefligsaurem Natron, welches mit 0·5080 Grm. Kaliumpermanganat versetzt wurde, resultirten bei der Zersetzung mit verdünnter Salpetersäure 0·1054 Grm. Kohlendioxyd, das sind 41·33 %.

Dass diese Methode auch bei Gemengen der analogen Verbindungen der alkalischen Erden gute Resultate liefert, dafür gibt das nachstehende Beispiel einen Beleg.

5. 0·3614 Grm. isländischer Doppelspath, 0·4270 Grm. schwefligsaurer Baryt, 0·4260 Grm. unterschwefligsaurer Baryt mit 0·5050 Grm. übermangansaurem Kali versetzt und verdünnter Salpetersäure zerlegt, gaben 0·1581 Grm. Kohlendioxyd, gleich 43·75 %.

Gefunden	Berechnet
1.....41·54 %	
2.....41·34 %	
3.....41·35 %	} 41·51 %
4.....41·33 %	
5.....43·75 %	} 44·00 %

In einem Falle, wo der mit Kaliumpermanganat gefüllte Absorptionsapparat nicht eingeschaltet war, wurden bei 0·2510 Grm. Natriumcarbonat, 0·2660 Grm. Natriumsulfit und 0·210 Grm. übermangansaurem Kali, 0·1180 Grm. Kohlendioxyd erhalten, welche 47·01 % entsprechen; verlangt werden 41·51 %.

Mit Hilfe dieser Methode lässt sich neben der Kohlensäure die Gesamtmenge des Schwefels, welcher in den dem Carbonate beigemengten Schwefelverbindungen enthalten war, in ein und derselben Portion bestimmen. Zu dem Ende wird nach der Bestimmung der Kohlensäure, der Inhalt des Zersetzungs-kölbchens und des mit Kaliumpermanganat erfüllten Absorptionsapparates in ein Becherglas gespült, das überschüssige Kaliumpermanganat und der entstandene Niederschlag des manganigsauren Salzes durch Zufügen von Salzsäure und Erwärmen zerstört und nach dem Wegkochen des Chlors, die gebildete

Schwefelsäure mit Chlorbarium gefällt etc. Selbstverständlicher Weise wird in einem solchen Falle zur Zersetzung des kohlensauren Salzes bloss Salpetersäure oder Essigsäure angewendet.

Entsprechende Beleganalysen sind in der folgenden Abhandlung: „Über die Einwirkung von Kaliumpermanganat auf einige Schwefelverbindungen“ enthalten.

Brünn, Laboratorium des Prof. Dr. Habermann.

Über die Einwirkung von Kaliumpermanganat auf einige Schwefelverbindungen.

Von M. Hönig und E. Zatzek.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Juli 1883.)

Bei Durchsicht der Arbeiten, die von verschiedenen Forschern über diesen Gegenstand vorliegen, sind wir auf einige, einander entgegenstehende Behauptungen gestossen, die klarzustellen für uns von umso grösserem Interesse war, als wir inzwischen gefunden hatten, dass die Wirkung von Kaliumpermanganat auf gewisse Schwefelverbindungen zur Grundlage einer Bestimmungsmethode der Kohlensäure neben Schwefeldioxyd und Schwefelwasserstoff benutzt werden kann. Gleichzeitig schien es uns nicht unwichtig, diesen Gegenstand nach gewissen Richtungen hin etwas eingehender und erweiterter, als von den bisherigen Forschern geschehen war, zu bearbeiten.

Aus der einschlägigen Literatur sind zunächst die Arbeiten von L. Péan de Saint-Gilles¹ hervorzuheben. Kurz zusammengefasst fand derselbe, dass schwefligsaure und unterschwefligsaure Salze in saurer Lösung nur unvollständig, in alkalischen Flüssigkeiten dagegen vollkommen durch Kaliumpermanganat in schwefelsaure Salze übergehen. Lösliche und die meisten anderen Schwefelmetalle nehmen bei Gegenwart von kohlen-saurem Kali 4 Äquivalente Sauerstoff auf und verwandeln sich in Sulfate. Häufig entgeht jedoch eine kleine Menge von Schwefel der Oxydation. Auf Grund seiner Beobachtungen empfiehlt er eine Lösung von übermangansauerm Kali, unter Einhaltung der für die vollständige Oxydation nothwendigen Bedingungen, zur massanalytischen Bestimmung von schwefeligsauren, unterschwefeligsauren

¹ Jahresber. 1858, 583.

Salzen und Schwefelmetallen. Bezüglich der letzteren gibt er noch an, um die Abscheidung von Schwefel, der sich nur schwierig vollständig mit Kaliumpermanganat oxydiren lässt, zu verhindern, die Lösung derselben vor der Titration mit übermangansaurem Kali mit einem Überschusse von jodsaurem Kali zu erhitzen, wodurch das Schwefelmetall lediglich nur in unterschwefelsaures Salz übergeführt wird. Die so erhaltene Lösung von Jodmetall und unterschwefligsaurem Salze verhält sich gegen das Kaliumpermanganat bezüglich des aufzunehmenden Sauerstoffes wie das Schwefelmetall.

Dem entgegen behaupten Fordos und Gelis,¹ dass das übermangansaure Kali zur Bestimmung des Schwefels in seinen Sauerstoffverbindungen nicht anwendbar ist, weil die Oxydation stets unvollkommen bleibt; wenigstens gilt dies für unterschwefelsaures Natron, unterschwefligsaures Natron, trithionsaures Kali, Schwefeldioxyd und schwefligsaures Natron.

H. Buignet² fand, dass die fünf Atome Sauerstoff, welche das Kaliumpermanganat abgibt, von sechs Moleculen schwefeliger Säure gebunden werden, oder dass das Schwefeldioxyd nur fünfsechstel des zu seiner völligen Oxydation erforderlichen Sauerstoffes aufnimmt. Aus dem übermangansauren Kali entsteht hiebei unter Schwefelsäurebildung zuerst Manganhyperoxyd und dieses erzeugt seinerseits mit der schwefeligen Säure Unterschwefelsäure, welche von Kaliumpermanganat nicht weiter oxydirt wird.

Die letztgenannten Experimentatoren behaupten demnach, im Gegensatze zu Péan de Saint-Gilles, dass die Oxydation der früher aufgezählten Schwefelsauerstoffverbindungen durch übermangansaures Kali stets eine unvollkommene sei, und wir haben daher um diesen Widerspruch aufzuklären diesen Gegenstand einer neuerlichen Bearbeitung unterzogen und hiebei, ergänzend zu den früheren Arbeiten, noch Rücksicht genommen auf den Einfluss, welchen die Concentrationsverhältnisse der angewendeten Lösungen eventuell auf den Verlauf der Reaction nehmen und gleichzeitig auch versucht, die Zusammensetzung des stets sich hiebei bildenden Manganniederschlages festzustellen, um womög-

¹ Jahresber. 1859, 660.

² Jahresber. 1859, 660.

lich den Process durch eine Gleichung zum Ausdrucke bringen zu können.

Es wurde hiebei stets nur die Einwirkung von Kaliumpermanganat auf die entsprechenden Salze der Alkalien näher ins Auge gefasst.

Unterschwefligsaure Alkalien.

Zunächst wurde die Einwirkung einer Lösung von übermangansaurem Kali mit stets gleichem Wirkungswerthe auf saure, neutrale und alkalische Lösungen von unterschwefligsauren Salzen festgestellt.

1. In saurer Lösung. 0.1496 Grm. chemisch reines unterschwefligsaures Natron im Wasser gelöst, wurden mit 10Cc Essigsäure angesäuert und so lange bei gewöhnlicher Temperatur Kaliumpermanganat zufließen gelassen, bis die Lösung bleibend deutlich roth gefärbt erschien. Im Anfang verschwand jeder einfallende Tropfen der Permanganatlösung, ohne einen Niederschlag hervorzurufen; nach einiger Zeit — es waren 6Cc von im Ganzen verbrauchten 49.5Cc zugesetzt worden — begann sich ein dunkelbrauner, Niederschlag zu bilden, der nur sehr schwer, selbst bei anhaltendem Unrühren und Schwenken der Flüssigkeit, zum vollkommenen Absitzen gebracht werden konnte und die Lösung stets etwas getrübt erscheinen liess. Die durch einen Überschuss von übermangansaurem Kali roth gefärbte Lösung behielt diese Farbe auch nach stundenlangem Stehen bei; mit anderen Worten, es fand keine weitere Einwirkung mehr statt.

In der vom Niederschlage durch anhaltendes Waschen vollkommen getrennten Flüssigkeit, in welcher das überschüssige Kaliumpermanganat durch Alkohol früher entfernt worden war, wurde die Menge der Schwefelsäure bestimmt und in dem vorliegenden Fall 0.2462 Grm. Baryumsulfat gefunden. Bei vollständiger Oxydation sämmtlichen Schwefels im angewendeten Natriumthiosulfat hätten 0.2812 Grm. erhalten werden müssen.

Im Filtrate, das vom gefällten Bariumsulfat resultirte, wurde der Rest des Schwefels durch Oxydation mit chlorsaurem Kali und Salzsäure in Form von schwefelsaurem Baryt erhalten.

¹ Stets krystallisirt mit 5aq verstanden.

In einem zweiten Falle wurden, um den Einfluss der Säuremenge auf die Quantität der gebildeten Schwefelsäure festzustellen, 0·14965 Grm. unterschwefligsaures Natron mit 20Cc Essigsäure angesäuert und wie früher mit einem Überschusse von übermangansaurem Kali versetzt. Es konnten dann nur 0·2352 Grm. Bariumsulfat — gegen früher 0·2462 Grm. — erhalten werden. Eine Vermehrung der freien Säure vermindert demnach die Menge der gebildeten Schwefelsäure.

Zu ähnlichen Resultaten gelangt man, wenn man zu einer neutralen Lösung von Natriumthiosulfat eine angesäuerte Lösung von Kaliumpermanganat zuziessen lässt; der Verlauf der Reaction ist dem früher geschilderten gleich und die Oxydation eine unvollständige. So ergaben 0·3193 Grm. des Thiosulfats 0·5048 Grm. Baryumsulfat statt 0·599 Grm.

Auch bei der Einwirkung von übermangansaurem Kali in der Siedehitze vermag man in der sauren Lösung nicht sämmtlichen Schwefel des unterschwefligsauren Natrons in Schwefelsäure zu überführen. Es wurden aus 0·1955 Grm. Natriumthiosulfat, welche mit 10Cc Essigsäure und einem Überschusse von Kaliumpermanganat versetzt waren, nach längerem Kochen 0·3231 Grm. schwefelsaurer Baryt statt 0·3673 Grm. erhalten.

Diese Versuche zeigen, in Übereinstimmung mit früheren Beobachtungen, zunächst, dass übermangansaures Kali die sauren Lösungen von Natriumthiosulfat, sowohl in der Kälte, als auch in der Siedehitze nur unvollkommen oxydirt und zwar umso unvollständiger, je grösser die Menge der freien Säure ist. Die neben der Schwefelsäure bei der Oxydation auftretende sauerstoffärmere Säure des Schwefels kann nur Unterschwefelsäure (Dithionsäure) sein, da aus der Reihe der Thionsäuren nur dieser allein die Eigenschaft zukommt, von Kaliumpermanganat selbst in der Siedehitze nicht verändert und nur von den freien Halogenen in Schwefelsäure übergeführt zu werden. Dass dies hier der Fall ist, beweisen die oben angegebenen Beleganalysen; bei Verwendung der ungefähr gleichen Mengen freier Säure wurde, wie eine einfache Berechnung zeigt, sowohl in der Kälte, als auch in der Kochhitze der gleiche Betrag des Schwefels im Natriumthiosulfat in Schwefelsäure übergeführt.

2. In neutraler Lösung. Lässt man zu einer neutralen Lösung von unterschwefligsaurem Natron übermangansaures Kali einfließen, so erzeugt jeder einfallende Tropfen sofort einen dunkelbraunen Niederschlag, der sich beim Umschwenken der Flüssigkeit rasch zusammenballt und die darüber stehende Lösung klar erscheinen lässt, so dass der Endpunkt der Einwirkung leicht und sicher erkannt werden kann. Bestimmt man die Mengen der gebildeten Schwefelsäure, so zeigt sich, dass auch in diesem Falle keine vollständige Oxydation stattfindet, die Menge des Schwefels jedoch, welche in Schwefelsäure umgesetzt wurde, grösser erscheint, als dies in saurer Lösung der Fall ist.

0.2234 Grm. unterschwefligsaures Natron gaben 0.413 Grm. Bariumsulfat; bei vollständiger Oxydation müssten 0.1197 Grm. erhalten worden sein.

0.3354 Grm. Natriumthiosulfat lieferten 0.6045 Grm. schwefelsauren Baryt gegenüber 0.6302 Grm., wenn vollständige Oxydation vor sich ginge.

In saurer Lösung hätten sich aus 0.3354 Grm. unterschwefligsaurem Salz, den früher angegebenen Daten nach, bei Zusatz von 10Cc Essigsäure bloss 0.5594 Grm. Baryumsulfat gebildet.

3. In alkalischer Lösung. Der äussere Verlauf der Reaction ist genau der, wie er, bei der neutralen Lösung angegeben wurde; ein Unterschied besteht zunächst nur darin, dass man bis zum Eintreten des Endpunktes in der alkalischen Flüssigkeit mehr Kaliumpermanganat verbraucht, als unter sonst gleichen Umständen in der neutralen Lösung. Die Oxydation ist in diesem Falle — wie schon Péan de Saint-Gilles angibt — eine vollständige.

0.2586 Grm. unterschwefligsaures Natron gaben in ammoniakalischer Lösung 0.485E Grm. schwefelsaures Baryt; theoretisch werden verlangt 0.4861 Grm.

0.2780 Grm. unterschwefligsaures Natron lieferten bei Gegenwart von 0.2500 Grm. Kaliumcarbonat, 0.5213 Grm. Baryumsulfat, berechnet 0.5205 Grm.

0.2447 Grm. unterschwefligsaures Natron gaben in mit Natriumcarbonat alkalisch gemachter Lösung 0.4608 Grm. schwefelsaures Baryt; berechnet 0.4590 Grm.

Aus 0·3107 Grm. unterschwefligsaurem Natron resultirten in alkalischer Lösung 0·5832 Grm. Baryumsulfat; theoretisch werden verlangt 0·5840 Grm.

Diese Versuche wurden mit Permanganatlösungen verschiedenen Titres angestellt.

Um entscheiden zu können, ob diese Reaction — wie Péan de Saint-Gilles bereits vorgeschlagen — geeignet erscheint, als Grundlage einer massanalytischen Bestimmungsmethode für Thio-sulfate zu dienen, war es noch nothwendig festzustellen, ob unabhängig von der Concentration der Permanganatlösung stets die gleiche Sauerstoffmenge oder die gleiche Menge von übermangansauren Kali zur Oxydation verwendet wird.

Die nach dieser Richtung hin angestellten Versuche ergaben folgende Resultate:

	Zur Oxydation von Grm. Natriumthios.	wurden ver- braucht Cc Kaliumpermang.	1 Cc Lösung enthält Grm. Kaliumpermang.	Im Ganzen ver- braucht Grm. Kaliumpermang.
1.	0·1840	168·15	0·00179	0·30099
2.	0·1770	161·7	0·00179	0·28928
3.	0·1598	80·0	0·003258	0·26070
4.	0·1336	67·1	0·003258	0·21870
5.	0·2087	47·4	0·007218	0·34210

Aus den vorstehenden Daten rechnet sich nun, dass zur Oxydation von 1 Grm. Natriumthiosulfat in den einzelnen Fällen folgende Mengen von Permanganat verbraucht wurden:

1. 1·6352 Grm., 2. 1·6352 Grm., 3. 1·6265 Grm., 4. 1·6367 Grm.,
5. 1·6393 Grm.

Diese ziemlich gut unter einander übereinstimmenden Zahlen lassen daher den Schluss zu, dass die in Action tretenden Mengen an übermangansaurem Kali von der Concentration der Permanganatlösung unabhängig erscheinen und im Mittel rechnet sich aus den angegebenen Werthen, dass zur Oxydation von einem Gewichtstheil ($\text{Na}_2 \text{S}_2\text{O}_3 + 5 \text{ aq}$) 1·6366 Gewichtstheile (K Mn O_4) nothwendig sind.

Es wurde ferner, um den Oxydationsvorgang womöglich durch eine Gleichung zum Ausdrucke zu bringen, versucht, die

Zusammensetzung des sich bildenden Manganniederschlages festzustellen.

Die Ermittlung der Zusammensetzung dieses Niederschlages erscheint auch mit Rücksicht auf eine Behauptung, welche Morawski und Stingl in ihrer Arbeit: „Über Kaliumpermanganat und dessen Zersetzungsproducte bei Oxydationen“ aufstellen, sehr interessant. Sie sprechen darin nämlich den Satz aus:¹ „Das Kaliumpermanganat gibt 3 Atome Sauerstoff an oxydirbare Körper leicht ab, wenn keine freie Mineralsäure vorhanden ist und es entsteht hierbei nicht Mangansuperoxydhydrat, sondern $Mn_2KH_3O_{10}$.“ Gestützt wird dieser ganz allgemein gehaltene Satz durch analytische Belege, die sie bei der Untersuchung von Manganniederschlägen, welche bei der Einwirkung von übermangansaurem Kali auf verschiedene, aber durchwegs organische Körper erhalten worden waren, fanden, und darum ist es nicht unwichtig zu untersuchen ob der Oxydationsvorgang in dem vorliegenden Falle einen weiteren Beleg für diesen Satz abgeben kann oder nicht, zumal Wright und Menke² inzwischen zu anderen Ergebnissen als Morawski und Stingl gekommen sein wollen.

Die der Analyse unterzogenen Manganniederschläge stammten von verschiedenen Darstellungen, bei welchen Permanganatlösungen von wechselndem Wirkungswerth in neutraler und alkalischer Lösung zur Anwendung kamen. Die Niederschläge wurden mit heissem Wasser bis zum Verschwinden der alkalischen Reaction gewaschen und bei 100° C. im Vacuum bis zur Gewichtsconstanz getrocknet.

1. 0·5352 Grm. Substanz gaben 0·4136 Mangansulfid, d. i. 48·85% Mangan.
2. 0·1987 Grm. Substanz verbrauchten 57·3 Cc Kaliumpermanganat vom Titre 0·001683 Grm. Mangan; daraus berechnen sich 48·52% Mangan.
3. 0·1800 Grm. Substanz erforderten 52·5 Cc Kaliumpermanganat; 1 Cc. = 0·001677 Grm. Mangan; das entspricht 48·9% Mangan.

¹ Journ. f. pr. Ch. 18, 86. (2)

² Gmelin Kraut anorg. Chemie II Bd. 2. Abth. 455.

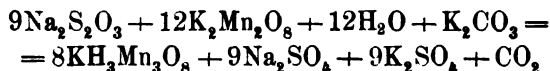
4. 0·2900 Grm. Substanz benötigten 84·4 Cc Kaliumpermanganat; (1 Cc. = 0·001677 Grm. Mangan), entsprechend 48·66% Mangan.
5. 0·3240 Grm. Substanz lieferten 0·0843 Grm. Kaliumsulfat, entsprechend 11·54% Kalium.
6. 0·7016 Grm. Substanz verloren 0·0745 Grm. Wasser beim Glühen, was 1·18% Wasserstoff entspricht.
7. 0·5240 Grm. Substanz machten 1·1457 Grm. Jod frei, entsprechend 0·0722 Grm. oder 38·38% Sauerstoff.

Diese Zahlen entsprechen am besten der Formel $\text{KH}_3\text{Mn}_3\text{O}_8$, wie folgende Zusammenstellung lehrt.

	<u>Gefunden</u>	<u>$\text{KH}_3\text{Mn}_3\text{O}_8$</u>	<u>$\text{KH}_3\text{Mn}_4\text{O}_{10}$</u>
Mn (in Mittel von 4 Bestimmungen)	48·73%	49·24%	52·12%
Kalium	11·54 "	11·67 "	9·26 "
Sauerstoff	1·18 "	0·89 "	0·71 "
Wasserstoff	38·38 "	38·19 "	37·91 "

Bei der Einwirkung von übermangansaurem Kali auf unterschwefligsaure Alkalien unter Ausschluss einer freien Mineralsäure bildet sich demnach nicht die Verbindung $\text{KH}_3\text{Mn}_4\text{O}_{10}$ und der von Morawski und Stingl früher erwähnte, allgemein gelten sollende Satz kann für den vorliegenden Fall nicht angewendet werden; damit werden aber auch in weiterer Konsequenz alle die Betrachtungen illusorisch, welche die beiden genannten Forscher auf Grund ihrer Annahmen über die Constitution des Kaliumpermanganats anstellen.¹

Legt man dem bei der Einwirkung von übermangansaurem Kali auf die Thiosulfate der Alkalien entstehenden Niederschläge die oben gefundene Formel zu Grunde, so lässt sich für diesen Process folgende Reaktionsgleichung aufstellen:



Diese Gleichung bringt zunächst die experimentell gefundene Thatsache, dass die vollkommene Oxydation nur in alkalischer Lösung vor sich geht, deutlich zum Ausdrucke und ebenso

¹ Journ. f. pr. Chemie 18, 88. (2)

stimmen auch die aus der Formel sich berechnenden Gewichtsmengen an Permanganat, welche für die Oxydation eines Gewichtstheiles unterschwefelsauren Natrons nothwendig sind, ziemlich mit den durch den Versuch ermittelten überein. Die Gleichung verlangt diesbezüglich das Gewichtsverhältniss 1:1.7, gefunden wurde im Mittel 1:1.6366.

Schwefligsaure Alkalien.

Auch hier wurde zuerst wieder, ohne Rücksicht auf den Wirkungswerth der Permanganatlösung, festgestellt, inwieweit die Oxydation des schwefligsauren Salzes in saurer, neutraler und alkalischer Lösung vorschreitet.

1. In saurer Lösung. 0.3868 Grm. neutrales Natriumsulfit (stets wasserfrei verstanden) in 100Cc Wasser gelöst, wurden mit 5Cc concentrirter Essigsäure versetzt und hierauf übermangansaures Kali zufließen gelassen. Im Anfange verschwand jeder einfallende Tropfen und die Lösung blieb vollkommen wasserhell. Auf diese Weise konnten 22.9Cc zugesetzt werden; von da an wirkte jeder einfallende Tropfen zunächst eine Braunfärbung der Flüssigkeit, aus der sich beim Umschwenken allmählig ein raungefärbter Niederschlag abzusetzen begann, während die darüber stehende Lösung getrübt blieb. Nachdem 42Cc im Ganzen gesetzt waren, erschien die Flüssigkeit deutlich roth und behielt diese Farbe auch nach längerem Stehen bei. Gefunden wurden 0.56 Grm. Baryumsulfat, während bei vollständiger Oxydation 0.7151 Grm. BaSO_4 erhalten werden müssen; demnach heinen in diesem Falle 84.68% des im Natriumsulfit enthaltenen Schwefels zu Schwefelsäure oxydirt.

Ein zweites Mal wurden in ähnlicher Weise 0.3237 Grm. Natriumsulfit mit Kaliumpermanganat versetzt und 0.5292 Grm. Baryumsulfat erhalten, während der Theorie nach 0.5986 Grm. Baryumsulfat erforderlich wären; dem entsprechend sind 88.40% Schwefel in Schwefelsäure überführt worden.

Ähnlich den unterschwefligsauren Salzen werden daher auch schwefligsauren Alkalien in saurer Lösung unvollständig durch Kaliumpermanganat oxydirt.

In neutraler und alkalischer Lösung hingegen vollkommene Oxydation statt. Jeder Tropfen hinzugefügten

Übermangansäuren Kalis erzeugt sofort einen braunen Niederschlag, der sich, wenn die Flüssigkeit fortwährend in Bewegung erhalten wird, rasch zusammenballt und absetzt. Der Endpunkt der Reaction lässt sich auch hier wieder leicht und sicher erkennen.

1. 0·3237 Grm. schwefligsaures Natron gaben in neutraler Lösung 0·6013 Grm. schwefelsauren Baryt; verlangt werden 0·5986 Grm.
2. 0·2743 Grm. schwefligsaures Natron mit 0·1500 Grm. Kaliumcarbonat versetzt, lieferten 0·5093 Grm. schwefelsauren Baryt statt 0·5071 Grm.
3. 0·3521 Grm. schwefligsaures Natron in neutraler Lösung angewendet, gaben 0·6527 Grm. schwefelsauren Baryt; theoretisch sollten 0·6512 Grm. erhalten werden.

Führt man die Einwirkung des Permanganats auf Sulfite in neutraler Lösung durch, so reagirt die vom Niederschlage getrennte Flüssigkeit sehr deutlich alkalisch; es spaltet sich bei dem Vorgange freies Ätzkali ab.

Berücksichtigt man nun weiters, welchen Einfluss die Concentrationsverhältnisse der Permanganatlösungen auf diese Reaction nehmen, so gelangt man zu interessanten Beziehungen, welche zwischen dem Titre des übermangansäuren Kalis und der zur vollständigen Oxydation nothwendigen Menge an Permanganat obwalten.

Die Versuche, die nach dieser Richtung hin durchgeführt wurden, ergaben Folgendes:

	Angewendet Grm. Natrium- sulfid	Zur Oxydation verbraucht Cc Kalium- permanganatl.	1Cc Kallum- permanganatl. enthält Grm. Kalium- permanganat	Im Ganzen verbraucht Grm. Kalium- permanganat
1.	0·2217	78·2	0·001790	0·13988
2.	0·1950	72·9	0·001788	0·13040
3.	0·2751	29·4	0·007103	0·20888
4.	0·2535	27·1	0·007218	0·19560

Aus diesen Zahlen rechnet sich wieder, dass in den einzelnen Fällen zur Oxydation von je 1 Grm. schwefligsaurem Natron folgende Mengen an Permanganat nothwendig waren:

1. 0·6300 Grm., 2. 0·6787 Grm., 3. 0·7591 Grm., 4. 0·7714 Grm.

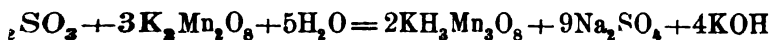
Daraus folgt nun, dass die Menge des übermangansauren Kalis, welche zur vollständigen Oxydation nothwendig ist, abhängig erscheint von dem Wirkungswerthe der angewendeten Permanganatlösung, und zwar zeigt sich, dass je concentrirter die Lösung benützt wird, desto mehr von ihr verhältnissmässig verbraucht wird und umgekehrt.

Diese eigenthümlichen Beziehungen machen die Verwendung des übermangansauren Kalis zur massanalytischen Bestimmung der Sulfite, wenn auch nicht ganz unmöglich, so doch sehr schwierig, da entweder, wenn Lösungen von wechselndem Gehalt an Permanganat zur Anwendung kommen, jederzeit empirisch der Titer derselben gegenüber dem schwefligsauren Alkali festgestellt werden, oder stets eine Lösung von genau derselben Concentration zur Benützung vorliegen muss.

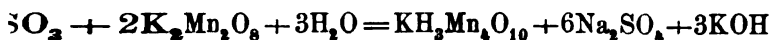
Aus dieser Thatsache lässt sich weiters a priori folgern, dass für die verschiedenen Concentrationen auch die Reaction anders verläuft und die sich bildenden Manganniederschläge gleichfalls eine wechselnde Zusammensetzung aufweisen müssen.

Der Versuch bestätigt diese Annahme vollständig. So wurden bei vier Darstellungen, zu welchen verschieden concentrirte Permanganatlösungen angewendet worden waren, Niederschläge erhalten, deren Mangangehalte folgende Zahlen auswiesen: 45·50%, 48·06%, 48·31%, 50·41%.

Legt man irgend einer Concentration die Bildung des Niederschlages von der Zusammensetzung $\text{KH}_2\text{Mn}_3\text{O}_8$, wie bei der Oxydationsvorgänge der Thiosulfate zu Grunde, so lässt sich folgende Reaktionsgleichung aufstellen:



Nimmt man hingegen die Bildung des Niederschlages Mn_4O_{10} an, so kann den Vorgang nachstehende Gleichung darstellen:



In beiden Fällen werden zur Oxydation von 1 Grm. Natriumsulfit 0.8365 Grm. Kaliumpermanganat theoretisch verbraucht.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass die constatirte Bildung von Manganniederschlägen verschiedener Zusammensetzung bei der Einwirkung von Permanganat auf Alkalisulfite, einem weiteren Beleg dafür abgibt, dass dem von Morawski und Stingl aufgestellten Satz nicht die beanspruchte allgemeine Geltung beigelegt werden kann.

Schwefelalkalien.

Es wurde hier bloss die Einwirkung in neutraler Lösung eingehender studirt. Setzt man zu einer wässerigen Lösung von Einfach- oder Mehrfach Schwefelkalium in der Kälte allmählig übermangansaures Kali, so entsteht anfangs unter vollständiger Entfärbung des Permanganats der charakteristische Niederschlag von hydratischem Schwefelmangan; allmählig aber verändert sich dessen Farbe und übergeht durch graubraun in dunkelbraun. Endlich lässt sich und zwar nach Zusatz von verhältnismässig geringen Mengen an übermangansaurem Kali ein Punkt erreichen, wo die über dem Niederschlage stehende Flüssigkeit in Folge ihrer stark alkalischen Reaction deutlich grün gefärbt erscheint, zum Zeichen, dass bereits Permanganat im Überschusse zugefügt wurde. Nach wenigen Augenblicken jedoch verschwindet beim kräftigen Umschwenken der Flüssigkeit die grüne Farbe, die Lösung erscheint wieder wasserhell, um nach Zusatz von einigen Tropfen Permanganat abermals die grüne Farbe anzunehmen u. s. w. Es ist jetzt der Moment eingetreten, wo das zugesetzte übermangansaure Kali nur sehr langsam auf einzelne Reactionproducte, die sich hier bilden und gleich näher charakterisirt werden sollen, weiter oxydirend einwirkt und in Folge dessen lässt sich auch der Endpunkt der Reaction nicht genau feststellen.

Wird die durch einen Zusatz von Permanganat vorübergehend grün gefärbte Lösung von dem entstandenen Niederschlag getrennt, so lässt sich zunächst in der ersteren Schwefelsäure nachweisen. Hierbei sei bemerkt, dass die Lösung bei dem der Fällung der Schwefelsäure vorausgehenden Ansäuern mit Salzsäure und Erwärmen bis zur Kochhitze weder eine Schwefelabscheidung, noch eine Entwicklung von schwefeliger Säure

oder Schwefelwasserstoff zeigt. Damit erscheint einmal constatirt, dass sämtliches Schwefelalkali bei Eintritt der grünen Farbe der Lösung bereits vollständig umgesetzt ist, und zum anderen Male erwiesen, dass bei diesem Zersetzungs Vorgange sich weder Sulfit, nach Thiosulfate oder eine der Thionsäuren, die beim Kochen mit Salzsäure Schwefeldioxyd abgeben oder Schwefel ausscheiden, gebildet haben.

In dem von der Fällung der Schwefelsäure erhaltenen salzsauren Filtrate lässt sich durch Oxydation mit Kaliumchlorat eine weitere Partie an Bariumsulfat gewinnen. Ein Theil des Schwefels findet sich also in einer niedrigeren Oxydationsstufe in der Lösung vor.

Die nähere Untersuchung des entstandenen Niederschlages zeigt, dass derselbe ein Gemenge einer Manganverbindung mit fein vertheiltem Schwefel darstellt. Wird derselbe nämlich mit Oxalsäure und verdünnter Schwefelsäure in der Kälte behandelt, so löst sich die Manganverbindung bekanntlich sehr leicht auf und man erhält eine durch fein vertheilten Schwefel milchig getrübe Flüssigkeit.

Bei der Einwirkung von Permanganat auf Schwefelalkalien in der Kälte erhält man demnach Schwefel, Schwefelsäure und eine Thiosäure, über deren Natur eine noch später anzuführende Thatsache weitere Anhaltspunkte liefern wird.

Über die Mengenverhältnisse, in denen die eben genannten Reactionsproducte auftreten, gibt die nachstehende Analyse Aufschluss:

5Cc. einer frisch bereiteten Lösung von Einfach Schwefelium wurden mit übermangansaurem Kali bis zum Auftreten der deutlich grünen Färbung der Flüssigkeit versetzt, hierauf der Niederschlag anhaltend mit Wasser bis zum Verwinden der alkalischen Reaction gewaschen, das Filtrat mit Oxalsäure angesäuert, aufgeköcht und heiss mit Chlorbaryum gefällt.

Gefunden wurden 0.2370 Grm. schwefelsaurer Baryt.

Aus dem Filtrate vom schwefelsauren Baryt konnten durch Fällung mit Kaliumchlorat ferner noch 0.0220 Grm. Baryum erhalten werden.

Der gut gewaschene Niederschlag wurde mit Oxalsäure und unter Schwefelsäure in der Kälte digerirt, der ausgeschie-

dene Schwefel auf einem tarirten Filter gesammelt, gewaschen und getrocknet. Sein Gewicht betrug 0·0406 Grm., welchem 0·2956 Grm. Baryumsulfat entsprechen. Es resultirten demnach aus 5Cc der Schwefelkaliumlösung:

0·2370	Grm.	Baryumsulfat	entspr.	der	gebildeten	Schwefelsäure
0·0220	"	"	"	"	"	Thiosäure
0·2956	"	"	"	dem	"	Schwefel
0·5546	"	"	"	dem	Gesamtschwefel.	

Auf directem Wege wurde die Menge des Gesamtschwefels in der angegebenen Quantität der Schwefelkaliumlösung 0·5563 Grm. Baryumsulfat entsprechend gefunden.

In der Kochhitze verläuft die Einwirkung von Permanganat auf eine Lösung der Alkalisulfide wesentlich anders, als im Vorstehenden beschrieben wurde. Versetzt man eine Schwefelkaliumlösung mit einem bedeutenden Überschusse einer Lösung von übermangansaurem Kali, bringt dann die Flüssigkeit zum Kochen und sorgt dafür, dass stets ein Überschuss an Permanganat vorhanden ist, so findet man im abfiltrirten Manganniederschlage nach dem Behandeln mit Oxalsäure und verdünnter Schwefelsäure kaum noch Spuren von Schwefel, und aller Schwefel findet sich in der Lösung, so gut wie vollständig, als Schwefelsäure vor. In dem vom gefällten schwefelsauren Baryt resultirenden Filtrate lässt sich auch nach anhaltender Oxydation mit chlorsaurem Kali keine Schwefelsäure mehr erhalten.

Diese Wirkungsweise des übermangansauren Kalis auf die Sulfide der Alkalien in der Siedehitze, welches schon Cloëz und Guignet¹ bekannt war, und von diesen zur Bestimmung des Schwefels im Schiesspulver etc. vorgeschlagen wurde, gibt auch Aufschluss über die Natur der Thiosäure, die bei der Einwirkung in der Kälte neben der Schwefelsäure in geringen Mengen auftritt. Diese Säure wird, dem früheren nach, in der wässerigen Lösung ihrer Verbindungen durch Salzsäure in der Kochhitze nicht zerlegt, dagegen von Chlor und Permanganat in der Hitze zu Schwefelsäure oxydirt. Diesen Eigenschaften entspricht nach Fordos und Gelis² nur eine aus der Gruppe der Thionsäuren,

¹ Compt. rend. t. 46, 1110 — Journ. f. pr. Ch. 75, 175. (1).

² Jahresber. 1850, 265 u. 1859, 660.

nämlich die Trithionsäure. Die viel beständigere Unterschwefelsäure (Dithionsäure) erscheint ausgeschlossen, weil dieselbe, wie wir uns wiederholt überzeugt haben, durch übermangansaures Kali weder in der Kälte noch in der Kochhitze im geringsten verändert wird.

Die im Vorstehenden gewonnenen Resultate lassen sich in Kürze in Folgendem zusammenfassen:

1. Die Thiosulfate der Alkalien werden in der Kälte durch übermangansaures Kali nur in alkalischer Lösung vollständig oxydirt. Unabhängig von der Concentration der angewendeten Permanganatlösung werden auf einen Theil Natriumthiosulfat ($\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3 + 5\text{aq}$) 1.6366 Gewichttheil Kaliumpermanganat zur vollständigen Oxydation verbraucht. Der bei dem Prozesse sich bildende Niederschlag kann am besten durch die Formel $\text{KH}_3\text{Mn}_2\text{O}_8$ ausgedrückt werden.

2. Die Sulfito der Alkalien werden sowohl in der neutralen, als auch in der alkalischen Lösung vollkommen bei gewöhnlicher Temperatur oxydirt. Die Menge des zur Oxydation von einem Gewichtstheil Natriumsulfit (Na_2SO_3) verwendeten Permanganats ist abhängig von der Concentration der Chamäleonlösung und zwar wird umso weniger von derselben verbraucht, je verdünnter die angewendete Permanganatlösung vorliegt. Die sich bildenden fanganniederschläge haben eine wechselnde, gleichfalls von der Concentration der Chamäleonlösung abhängige Zusammensetzung.

3. Bei der Einwirkung des übermangansauren Kalis auf die mono- und Polisulfide der Alkalien in der Kälte bilden sich Schwefelsäure, Trithionsäure und Schwefel; in der Kochhitze wird so gut wie aller Schwefel in Schwefelsäure überführt.

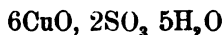
Br ü n n. Laboratorium des Prof. Dr. J. Habermann.

Über einige basische Sulfate.

Von J. Habermann.

(Vorläufige Mittheilung.)

Nach Reindel (Gmelin-Kraut 6. Aufl., 3. Bd., 628) erhält man beim Fällen einer siedenden Lösung von Kupfervitriol mit ungenügenden Mengen Ammoniak ein basisches Kupfersulfat in Form eines blaugrünen Niederschlages, welchem die durch die Formel



ausgedrückte Zusammensetzung zukommt.

Dieselbe Verbindung hat in neuester Zeit auf anderem Wege Spencer Umfreville Pickering erhalten und beschrieben (Berl. B. 16. 1360) und auch ich kann die Bildung dieser Verbindung bestätigen und noch hinzufügen, dass man dieselbe ausser mit Ammoniak bei Einhaltung bestimmter Gewichtsverhältnisse auch mittelst kohlensaurem Natron erhalten kann.

Endlich lassen sich sowohl mit dem einen wie mit dem anderen Fällungsmittel basische Sulfate des Nickels, des Cobaltes, des Zinkes und des Cadmiums erhalten, welche indessen keineswegs eine der Kupferverbindung analoge Zusammensetzung zeigen und welchen vielmehr nach den, bei der Analyse von Producten verschiedener Darstellung erhaltenen, gut übereinstimmenden Zahlen wesentlich andere Formeln beizulegen sein werden.

Ich werde sehr bald in der Lage sein, Endgiltiges über den Gegenstand mitzutheilen.

Über das Arbutin.

Von J. Habermann.

Im Jahre 1875 haben H. Hlasiwetz und ich in diesen Sitzungsberichten (Bd. 71, II. Abth.) Beobachtungen über das Arbutin mitgetheilt, welche von den bis dahin gemachten Wahrnehmungen anderer Forscher insoferne erheblich verschieden waren, als wir als Spaltungsproducte des Glucosides nicht allein Glucose und Hydrochinon, sondern stets auch Methylhydrochinon, und zwar alle drei Körper bei verschiedenen Experimenten in solch unveränderten Mengenverhältnissen beobachtet hatten, dass wir uns veranlasst sahen, die bis dahin geltende Arbutin-formel zu rectificiren und durch eine solche zu ersetzen, welche der neu aufgefundenen Thatsache Rechnung trug. Zu diesem Vorgehen hatten wir, wie ich meine, in Hinblick auf die zahlreichen Beobachtungen, die wir in häufiger Wiederholung der Versuche gemacht haben, ein volles Recht, trotzdem es schwer begreiflich schien, wie die Chemiker, welche sich vor uns mit dem gleichen Gegenstande beschäftigt hatten, einen Körper von so auffälligen Eigenschaften, wie sie dem Methylhydrochinon zukommen, übersehen konnten. Indessen wird vielleicht schon das, was ich zunächst mittheilen werde, in dieser Richtung manchen Gedanken zerstreuen und sicherlich werden die von mir neuerlich gemachten Beobachtungen, über die ich in dem späteren Theile meiner Abhandlung berichten werde, Manches bringen, was zur Unterstützung der von Hlasiwetz und mir aufgestellten Formel des Arbutins dienen kann.

In einer auf das Arbutin bezüglichen Abhandlung von Lawalier (diese Sitzungsberichte IX. Bd., 290), welche die

Auffindung des Glucosides, seine Zusammensetzung etc. zum Gegenstand hat, finden sich Bemerkungen, welche hier angeführt zu werden verdienen. Auf Seite 296 heisst es: „In den Blättern der Bärentraube ist eine Substanz enthalten, die, ähnlich dem Emulsin, die Fähigkeit besitzt, das Arbutin in Zucker und Arctuin (Hydrochinon) zerfallen zu machen. Aus einer Mutterlauge, aus welcher Arbutin auskrystallisirt war, liessen sich nach mehrere Wochen langem Stehen Krystalle von Arctuin erhalten, die früher nicht nachgewiesen werden konnten.“ In den Mutterlaugen des Arbutins hat K. nach derselben Quelle Zucker und einen Stoff, das Ericolin, nachgewiesen, von welchem er auf Seite 297 angibt, dass er durch Erwärmen mit Salzsäure oder Schwefelsäure zerfällt und dabei ein flüchtiges Öl liefert, welches er unter der Benennung Ericinol beschreibt und das bei der Verbrennung einen Kohlenstoffgehalt von $68 \cdot 15\%$ und einen Wasserstoffgehalt von $9 \cdot 37\%$ ergab. Der Kohlenstoffgehalt des Ericinols stimmt aber in geradezu auffälliger Weise mit demjenigen des Methylhydrochinons, dessen Formel $C_7H_8O_2$ $67 \cdot 90\%$ Kohlenstoff verlangt, während die beiden Verbindungen in ihrem Gehalt an Wasserstoff allerdings einen sehr erheblichen Unterschied zeigen. Wenn man indessen berücksichtigt, was Hlasiwetz und ich in der obeitirten Abhandlung über das Verhalten des Methylhydrochinons in wässriger Lösung, über seine Abscheidung aus einer solchen in öligen Tröpfchen u. s. w. sagen und dies damit zusammenhält, dass K. die Kohlenstoff- Wasserstoffbestimmung des Ericinols mit $0 \cdot 135$ Grm. einer Substanz ausführte, von der er sagt, „dass das Öl, was zur Analyse diente, durch mehrere Tage Gelegenheit hatte Sauerstoff aufzunehmen“, dann wird man die Ansicht nicht allzu gewagt finden, dass K. unreines Methylhydrochinon in Händen hatte, und zwar, als Spaltungsproduct des Arbutins, neben Hydrochinon und Glucose.

Diese Vermuthung ist umso gerechtfertigter, als, wie ich später zeigen werde, die von dem Genannten zur Reinigung des Arbutins aufgewendeten Operationen und Reagentien allein genügen, um das Glucosid, ohne das Vorhandensein eines besonderen Fermentes, zu spalten.

Ob Kawalier dann auch bei der Spaltung des gereinigten Arbutins Ericinol beobachtete, lässt sich aus seinen Angaben mit

einiger Sicherheit nicht entnehmen, wenn man es auch vermuthen darf. Er sagt nämlich in Bezug auf das Krystallisiren des Arctuvins aus der wässerigen, mit Thierkohle behandelten Lösung auf Seite 293: „Bei langsamem Verdunsten an einem kühlen Orte setzen sich braun gefärbte, zolllange, halbzolldicke Krystalle ab. Die braune Farbe rührt von einer geringen Menge einer Verunreinigung her“, während wir (Hl. und ich) uns über das Abscheiden des Hydrochinons folgendermassen äussern: „Die etwas gefärbte Flüssigkeit liess beim langsamen Verdunsten Krystalle anschliessen, die nach und nach ein sehr beträchtliches Volumen erreichten, und von sehr schön ausgebildeten Formen waren.

In dem Maasse aber, als die Flüssigkeit so langsam verdunstete, schied sich auch neben diesen Krystallen wieder ein bräunlich gefärbtes Öl aus“ u. s. w.

Es ist nun wohl denkbar, dass auch K. diese ölige Abscheidung beobachtete, sie indessen als verunreinigende Beimengung auffasste und ihr demgemäss keine weitere Beachtung schenkte.

Ähnliche Überlegungen lassen sich an die Arbeiten von A. Strecker (Annal. d. Chem. und Pharm. 107, 228 und 118, 292) nicht knüpfen. Derselbe macht keinerlei Angaben über die Beschaffenheit der bei der Darstellung und Reinigung des Arbutins erhaltenen Mutterlauge und auch keine über jene Laugen, welche er bei der Abscheidung und dem Umkrystallisiren des Hydrochinons erhalten hat, obwohl in letzterer Beziehung auch die Möglichkeit vorliegt, dass Strecker die Krystalle, welche er durch Ausschütteln der mit verdünnter Schwefelsäure gekochten Arbutinlösung mittelst Äther und Abdunsten des letzteren erhalten hat, für die weitere Untersuchung unmittelbar verwendete, denn er sagt auf Seite 230 (Ann. 107): „Schüttelt man die (Arbutin)-Lösung, nachdem sie längere Zeit im Kochen erhalten wurde, mit Äther und verdampft man den ätherischen Auszug, so hinterbleiben farblose Krystalle, die im Wasser, Alkohol und Äther leicht löslich sind. Dieselben sind mit dem von K a w a l i e r durch Einwirkung von Emulsin auf Arbutin erhaltenen, Arctavin genannten Stoff identisch. Die Untersuchung ergab das interessante Resultat, dass sie nichts anderes als Hydrochinon sind, in jeder

Beziehung übereinstimmend mit dem von Wöhler aus Chinasäure und Chinon dargestellten Körper. Die Krystalle schmelzen beim Erhitzen“ u. s. w. Es folgen nun weitere Angaben über die physikalischen und chemischen Eigenschaften des Hydrochinons, während von einer vorherigen Reinigung mit keiner Silbe Erwähnung geschieht. Freilich kann trotzdem die Reinigung vorgenommen worden sein und ich muss daran umso eher glauben, als ich bei meinen oft wiederholten Spaltungen den Ätherauszug in keinem Falle in einem Zustand erhielt, welcher nach der äusseren Beschaffenheit die sofortige Verwendung desselben für die Analyse etc. gestattet hätte.

Bemerkenswerth erscheinen mir einige Angaben von Zwenger und Himmelmann, welche sie in ihrer Publication „Über Chinasäure, Ericinon und Arbutin“ machen. Dieselben, welche das Arbutin aus den Blättern von *Pyrola umbellata* dargestellt haben, geben auf Seite 206 an, dass sie aus dem wässerigen Auszuge nach der Behandlung desselben mit basisch-essigsäurem Blei nicht unmittelbar Krystalle des Arbutins, welches sich unter ähnlichen Verhältnissen bei der Verarbeitung der Bärentraube leicht auszuscheiden pflegt, erhalten konnten, dass die eingedampfte Masse aber stets eine, alkalische Kupferlösung leicht reducirende Substanz enthielt und dass sie einmal aus dem Syrup direct Hydrochinon erhielten, wozu sie bemerken, dass es offenbar durch freiwillige Spaltung entstanden sei. Man kann der Auffassung, dass das Hydrochinon und, zum Theil wenigstens, auch die reducirende Substanz (Glucose) hier als Spaltungsproducte des Arbutins auftreten, nur beistimmen, ohne aus dem Nichtvorhandensein einer das Methylhydrochinon andeutenden Bemerkung irgend welche weiter gehende Schlussfolgerung machen zu dürfen; denn ein Übersehen des Methylhydrochinons erklärt sich unter obigen Verhältnissen durch seine grosse Löslichkeit im Wasser, sowie durch sein Aussehen im nicht gereinigten Zustande.

Dass indessen Zwenger und Himmelmann das Methylhydrochinon in Händen hatten, scheint mir unzweifelhaft aus dem hervorzugehen, dass sie auf Seite 205 über das Hydrochinon, respective über Uloth's Ericinon sagen: das Hydrochinon erhält man, „wenn es auch durch öftere Sublimation weiss

erhalten wurde, stets mit fremden Stoffen verunreinigt, so dass es nicht nur eine abweichende procentische Zusammensetzung, sondern selbst andere Eigenschaften zeigt. Nach Beobachtungen von Uloth färbt sich das Ericinon mit der Zeit immer dunkler, schmolz bei etwas niedrigerer Temperatur, wie Hydrochinon und wurde durch Eisenchlorid nicht verändert. Da wir aber gefunden haben, dass Ericinon, welches Uloth selbst dargestellt hat, beim Behandeln mit salpetersaurem Silberoxyd in der Kochhitze, je nach der Menge Silberlösung entweder grünes Hydrochinon oder Chinon lieferte, so geht aus dieser Reaction, in Verbindung mit den anderen Eigenschaften dieses Körpers, unzweifelhaft hervor, dass das sogenannte Ericinon nur unreines Hydrochinon gewesen ist.“ Vergleicht man nun aber das Vorstehende und das was Uloth in seiner Abhandlung über Brenzcatechin und Ericinon (Ann. d. Ch. und Pharm. 111) bezüglich Reindarstellung und Beschaffenheit des Körpers sagt, mit den von Hlasiwetz und mir über die Eigenschaften des Methylhydrochinons gemachten Angaben, welche unter Anderem besagen, dass diese Verbindung mit Eisenchlorid keine Ausscheidung des grünen Hydrochinons gibt, Silbernitrat beim Erhitzen reducirt und den Geruch des Chinons entwickelt, so kann kein Zweifel dartüber bestehen, dass das von Zwenger und Himmelmann als Hydrochinon aufgefasste Ericinon im Wesentlichen aus Methylhydrochinon bestand und dass also auch Zwenger und Himmelmann Zucker, Hydrochinon und Methylhydrochinon als Spaltungsproducte des Arbutins erhalten haben.

H. Schiff endlich macht in seiner ersten Abhandlung, betitelt: „Zur Constitution des Arbutins“ (Ann. d. Ch. und Pharm. 153, 247), über Darstellung, Reinigung und Spaltung des Glucosides keinerlei Angaben. Er führt an, dass ihm (zur Darstellung von Acetyl- und Benzoylderivaten etc.) „nur etwa 20 Grm. dieses kostbaren Materials zu Gebote standen“ und sagt über dieses Arbutin in seiner zweiten, 13 Jahre später erschienenen Abhandlung, welche, wie ich gleich bemerken will, die unmittelbare Veranlassung bildet, dass ich mich des Gegenstandes neuerlich bemächtigt habe, auf Seite 161 (Ann. Ch. und Pharm. 206): „das Präparat, welches zu meinen früheren Versuchen gedient hatte, verhielt sich wie eine einheitliche Substanz.“ Das Material für

seine zweite Versuchsreihe aber waren etwa 20 Grm. Rückstände, welche von einem unter Piria dargestellten Arbutinpräparat herührten und eine fast schwarze, voluminöse, in Wasser lösliche Masse bildeten, welche durch wiederholtes Behandeln mit Bleiessig und Schwefelwasserstoff, so wie durch fractionirte Krystallisation gereinigt wurden.

Ich bin bemüsst, dies hier hervorzuheben, in Hinblick auf mancherlei Differenzen, welche sich zwischen den Beobachtungen Schiff's und meinen eigenen ergeben haben, sowie auch mit Rücksicht auf eine Bemerkung dieses Autors, welche er in seiner zweiten Abhandlung über die Qualität des Arbutins gemacht hat, welches der Untersuchung von Hlasiwetz und Habermann zu Grunde lag, und auf die ich später zurückkommen werde. Für einen Theil seiner in der zweiten Abhandlung mitgetheilten Versuche (Elementaranalyse, Bestimmung des Schmelzpunktes und des Wassergehaltes) hat Schiff ein im Jahre 1870 oder 1871 bezogenes Trommsdorff'sches Präparat benutzt, welches er als „sehr rein“ bezeichnet und von dem er auf Seite 164 in Bezug auf die Ergebnisse der Elementaranalysen und Schmelzpunktbestimmungen verschiedener Fractionen sagt, dass sie sich (die Tabelle mit jenen Angaben), wie man sogleich ersieht, „auf eine physikalisch und chemisch homogene Substanz bezieht“.

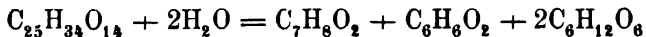
Auch das von Hlasiwetz und mir vor acht Jahren benutzte „schöne, ganz reine Präparat“ war von Herrn H. Trommsdorff in Erfurt bezogen und wir kamen demnach nicht in die Lage, Beobachtungen über die bei der Darstellung des Rohpräparates erzielten Mutterlaugen zu machen, was auch in unserem Falle ganz bedeutungslos ist, weil die Spaltung des Arbutins uns unmittelbar zur Auffindung des Methylhydrochinons als drittes Spaltungsproduct geführt hat. Da uns das Arbutin ursprünglich allein das Material für die Darstellung des Hydrochinons bilden sollte, so wäre es begreiflich, wenn wir die Spaltung mit dem Trommsdorff'schen Präparat ohne vorherige Reinigung auch dann noch ausgeführt hätten, wenn dasselbe weniger schön und rein gewesen wäre, als es in Wirklichkeit war. Für bestimmte Zwecke wurde überdies das Arbutin durch wiederholtes Umkrystallisiren gereinigt.

Wie übrigens die von uns (Hl. und Hb.) seiner Zeit mitgetheilten Beobachtungen beweisen, hatten wir auch gar keinen Grund an der Reinheit unseres Arbutins zu zweifeln und es war mir eine Überraschung neben den mancherlei Bemerkungen, welche H. Schiff in seiner zweiten Publication über die Constitution des Arbutins gegen unsere Arbeit vorbrachte, auch die Vermuthung zu finden, dass das von uns benützte Präparat vielleicht eine zweite Krystallisation von einer grösseren Arbutindarstellung war. Diese Vermuthung und ebenso die Thatsache, dass Fittig in seinem Grundriss der organischen Chemie die Ansicht ausspricht, das Arbutin möchte zuweilen Methyларbutin beigemischt enthalten und dass Schiff und A. Michael zu derselben Vorstellung gelangten, hätten mich nicht bestimmen können, auf den Gegenstand noch einmal zurückzukommen. Denn der Vermuthung des ersteren wird es genügen, die in allen Details klaren Angaben unserer Abhandlung entgegenzuhalten, und die Gründe, welche den Ansichten von Fittig und Michael zur Stütze dienen, sind mir zur Stunde unbekannt, trotz der Publication des Letztgenannten über die Synthese des Methyларbutins. (Berl. Berichte 14, 2097.) Aus diesem Aufsätze will ich nur hervorheben, dass Michael das zu dieser Synthese erforderliche Methylhydrochinon aus Arbutin, wie er ausdrücklich hervorhebt, genau nach der von uns gegebenen Vorschrift dargestellt hat, also einen sehr wesentlichen Theil unserer Angaben bestätigt fand, während er beobachtete, dass der Schmelzpunkt des Methyларbutins nicht, wie Schiff angegeben hat (Berl. Bericht 15, 1842), bei 175 oder bei 142, sondern bei 169° liegt, dass sein synthetisch gewonnenes Methyларbutin durch Eisenchlorid nicht gebläut wird, während Schiff diese Färbung für alle seine Fractionen nachgewiesen hat. Nach diesen Ausführungen ist es schwer verständlich, wenn Michael dann sagt: „Die Eigenschaften (welche ?) des Methylhydrochinons scheinen mir entschieden für die Auffassung zu sprechen, dass das Arbutin ein Gemenge von Hydrochinon- und Methylhydrochinonglucosiden bildet.“

Bevor ich nun dazu übergehe, dasjenige zu besprechen, was sonst noch gegen die Arbeit von Hlasiwetz und Habermann vorgebracht wurde, um daran die Ergebnisse meiner Untersuchung zu knüpfen, will ich das im Vorstehenden Gesagte in dem

Hinweise zusammenfassen, dass bis zu dem durch jene Arbeit erbrachten Nachweise, dass das Methylhydrochinon neben Hydrochinon und Glucose ein normales Spaltungsproduct des Arbutins bildet, drei Untersuchungen vorlagen, welche sich mit der Spaltung des Arbutins befassten und dass es zum Mindesten wahrscheinlich ist, dass in zwei Fällen nicht zwei, sondern drei Spaltungsproducte des Glucosides, nämlich ausser Glucose und Hydrochinon auch noch Methylhydrochinon erhalten wurden.

Wie schon den bisherigen Ausführungen entnommen werden kann, ist es vor allem H. Schiff, welcher gegen die Arbutinformel $C_{25}H_{34}O_{14}$ und die damit verknüpfte Ansicht, dass das Arbutin bei der Spaltung durch Emulsin oder verdünnte Schwefelsäure nach der Gleichung:



zerfällt, einen durch mancherlei Gründe gestützten Widerspruch erhebt.

Diese Gründe aber sind etwa die Folgenden:

1. Vor der Untersuchung von Hl. und Hb. wurden bei sämtlichen Analysen Werthe gefunden, welche im Kohlenstoffgehalt um 1—1.5% von dem durch die neu aufgestellte Formel verlangten differiren, während selbst die von Hl. und Hb. mitgetheilten Beleganalysen keine vollständige Übereinstimmung mit den Formelwerthen zeigen.

2. Die von Hl. und Hb. aufgestellte Spaltungsgleichung enthält die sogleich in die Augen springende Anomalie, dass zur Bildung von vier Molekülen Spaltungsproducte nicht drei, sondern nur zwei Moleküle Wasser assimilirt wurden.

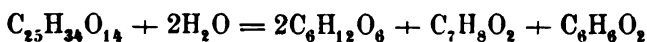
3. Die sämtlichen von Schiff neuerlich untersuchten Arbutinfraktionen kennzeichnen sich durch zweifache Schmelzpunkte als Gemische.

4. Dafür spricht auch die procentische Zusammensetzung dieser Fractionen und

5. Die wechselnden Mengen an Hydrochinon und Methylhydrochinon, welche bei der Spaltung von mehreren Fractionen erhalten wurden.

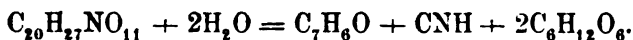
Man ersieht aus diesen fünf Punkten, welche das Wesentlichste der zweiten Schiff'schen Publication mit ziemlicher Genauigkeit wiedergeben, dass die Gründe gerade nicht mit zwingender Gewalt gegen die von Hl. und Hb. aufgestellte Arbutinformel etc. sprechen und ich glaube auch in der Lage zu sein, ihr Gewicht noch erheblich vermindern zu können, wobei ich gleich darauf hinweisen will, dass nur ein Theil des von Schiff Vorgebrachten auf experimenteller Grundlage ruht, der andere Theil aber dergleichen entbehrt. Und diesem letzteren will ich mich zunächst zuwenden.

In sehr nachdrücklicher Weise wird von Schiff die Zersetzungsgleichung



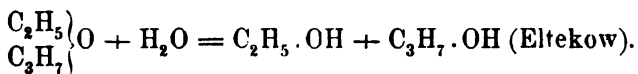
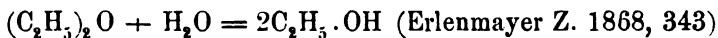
als anomal bezeichnet, weil nach derselben zur Bildung von vier Spaltungsmolekülen nur zwei Moleküle Wasser beansprucht werden.

Mir ist dieser Einwand schwer verständlich und zwar sowohl im Hinblick auf allgemein bekannte Thatsachen, als auch mit Rücksicht auf unsere dermaligen Kenntnisse über die Glucoside und die herrschenden theoretischen Anschauungen. Ich will darauf hinweisen, dass z. B. die Zersetzungsgleichung für das Amygdalin, wie sie sich seit Liebig's und Wöhler's Untersuchung über das Glucosid in allen Büchern, das neue ausgezeichnete Handbuch von Beilstein nicht ausgenommen, findet, der obigen Gleichung ganz analog ist:

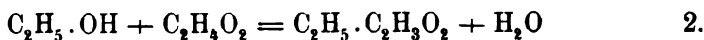
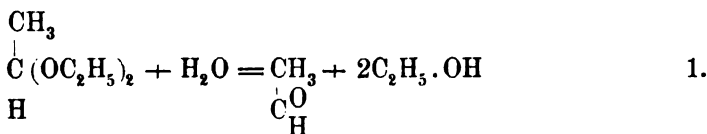


Man wird dagegen nicht einwenden können, dass das Amygdalin zu den wenig zahlreichen stickstoffhaltigen Glucosiden gehört und ihm schon dadurch eine Ausnahmstellung zukommt. Denn, um in der alphabetischen Reihenfolge der Glucoside nicht weiter zu suchen, kann ich darauf die Aufmerksamkeit lenken, dass ein Molekül des stickstofffreien Apiÿns, $\text{C}_{27}\text{H}_{32}\text{O}_{16}$, unter Bindung von ein Molekül Wasser, in zwei Moleküle Glucose und ein Molekül Apigenin zerfällt, d. h. es wurden zur Bildung von drei Molekülen der Zersetzungsstoffe ein und nicht zwei Moleküle Wasser verbraucht, wie es nach Schiff sein sollte.

Geht man die Glucoside überhaupt nach den für sie aufgestellten Zersetzungsgleichungen durch, wie ich dies nach Beilstein's Handbuch gethan habe, dann begreift man erst recht nicht, worin die Regel, dass bei den Glucosiden für n Moleküle Zersetzungsproducte, $(n-1)$ Moleküle Wasser gebunden werden, begründet sein soll, denn von etwa 53 Glucosiden, über die sich in jenem Buche in dem Abschnitte „Glucoside“ Zersetzungsgleichungen finden, fügen sich 29 jener Forderung nicht. Und dieses Zahlenverhältniss wird sich, wie ich meine, bei fortgesetzter Untersuchung der in Rede stehenden Körpergruppe, welche nach unseren heutigen Erfahrungen eine überaus bunte Gesellschaft bilden, noch wesentlich zu Ungunsten der früher ausgedrückten Norm ändern. Aber auch, wenn wir die Kenntnisse berücksichtigen, welche wir bezüglich jener Substanzen besitzen, über deren Stellung im chemischen System schon heute kein Zweifel besteht, lässt sich nicht behaupten, dass jene Regel allgemeine Geltung haben muss. Sie gilt, ohne Frage, bei der Zersetzung der einfachen und gemischten Äther der Fettreihe durch verdünnte Schwefelsäure, wie z. B.



Sie wird gewiss vollkommen richtig sein für die analogen Glycol- und Glycerinverbindungen. Aber diese Regel gilt nicht mehr für die Zersetzung der Acetale und voraussichtlich auch nicht für die Zersetzung der den letzteren analogen Ketonverbindungen. Für die Acetale geben Beilstein (siehe dessen Handbuch, 239) und Würtz (ebendasselbst) an, dass sie beim Erhitzen mit Essigsäure im zugeschmolzenen Rohre zerfallen in Aldehyde und Essigäther und man kann den hiebei stattfindenden Vorgang wohl durch die Gleichungen ausdrücken:



Nach der ersten Gleichung wird beim Zerfallen der Acetale ein Molekül Wasser gebunden und es entstehen drei Moleküle Zersetzungsproducte. Gerade aber das Verhalten der Acetale muss ein besonderes Interesse für die Zersetzung der Glucoside beanspruchen, wenn man bedenkt, dass die Glucose nach der Auffassung von Fittig (Festschrift, Tübingen, L. F. Fues 1871) als ein Aldehydalkohol oder nach V. Meyer (Berl. Berichte 13, 2344) und Th. Zinke (Ann. d. Chem. und Pharm. 216, 286) als ein Ketonalkohol anzusehen ist. Nun wird jedoch vom theoretischen Standpunkte wohl nichts dagegen eingewendet werden können, hinter manchen Glucosiden den Acetalen analoge Verbindungen von Glucosen, Saccharosen mit aromatischen Substanzen zu vermuthen und es erweist sich somit der von Schiff gegen die von Hl. und Hb. aufgestellte Zersetzungsgleichung des Arbutins erhobene Einwand der Anomalie in jeder Richtung als unbegründet.

Indem ich mich nun jenen Punkten des früher angegebenen Resumés zuwende, welche auf einer experimentellen Grundlage ruhen, will ich vor Allem genauen Aufschluss über den Ursprung und die Reinigung des Materials geben, welches ich bei all den Untersuchungen verwendet habe, die im Folgenden besprochen werden sollen.

Das Arbutin (150 Grm.) habe ich von Herrn H. Trommsdorff bezogen und wurde mir dasselbe, über meinen Wunsch, in nicht gereinigtem Zustande nebst einer Menge (200 Grm.) eingedickter Mutterlauge übermittelt. Herr Trommsdorff hatte die grosse Freundlichkeit, die Sendung mit folgender Mittheilung zu begleiten: „Ich sende Ihnen 150 Grm. Arbutin, welches zuerst auskrystallisirt ist und 200 Grm. einer krystallinischen Masse, wie sie erhalten wurde, nachdem die von der ersten und Hauptkrystallisation abfiltrirte Lauge zur Syrupdicke abgedampft worden war. Nach mehrwöchentlichem Stehen ist dieselbe jetzt zu diesem Krystallbrei erstarrt, wozu ich bemerke, dass der Brei durch gelindes Abpressen von der noch weiter bleibenden Mutterlauge befreit worden ist. In Bezug auf die relativen Mengen, in welchen die beiden Producte erhalten wurden, theile ich Ihnen mit, dass auf 105 Grm. der rohen Krystalle 50 Theile der breiförmigen Masse erhalten wurden.“

Ich habe bis jetzt nur die rohen Krystalle verarbeitet und es ist somit constatirt, dass das für das Weitere verwendete Material eine erste Krystallisation und das Hauptproduct von einer grösseren Arbutinbereitung bildet.

Was aber die Beschaffenheit dieser Substanz anbelangt, so bildete dieselbe eine, wenig bräunlich gefärbte, deutlich krystallinische Masse, welche sich in Wasser leicht und vollständig zu einer gefärbten Flüssigkeit löste. Zur Reinigung des Körpers wurde, nach verschiedenen Versuchen, welche im Wesentlichen darauf gerichtet waren, die Anwendung von Blutkohle auf das kleinste Mass einzuschränken, Bleiacetat und Schwefelwasserstoff aber ganz auszuschliessen, das folgende Verfahren eingehalten: 50 Grm. des Präparates wurden zerrieben und in einem Kochkolben am Rückflusskühler mit einer zur vollständigen Lösung ausreichenden Menge Amylalkohol von 127·5 bis 129° Siedepunkt so lange gekocht, bis sich alles gelöst hatte, was in relativ kurzer Zeit erfolgt war. Die ganz klare, hell gelblich braun gefärbte Lösung wurde siedend heiss mittelst eines Faltenfilters und unter Anwendung eines Dampfbadtrichters möglichst rasch filtrirt. Aus dem Filtrat schied sich die Substanz als krümliche Krystallmasse sofort nach beginnender Abkühlung rasch aus und wenn die Abkühlung vollendet war, nahm die Krystallisation nicht mehr wesentlich zu. Die krystallinische Ausscheidung wurde nach mehrstündigem Stehen mit einem Pistill zu einem Brei zerrieben und die Mutterlauge von den festen Antheilen durch Filtration mittelst Leinwandfilterchen und Wasserluftpumpe getrennt, der Filterrückstand in Leinwand und Filterpapier eingeschlagen, in einer Spindelpresse kräftig gepresst und mit dem Presskuchen das Auflösen in Amylalkohol, Filtriren etc. einmal wiederholt. Der sodann resultirende Presskuchen wurde nun durch Auflösen in heissem Wasser, mässig langes Kochen der Lösung mit geringen Mengen Thierkohle und fünfmaliges Umkrystallisiren gereinigt und in systematischer Weise fractionirt krystallisirt. Erhalten wurden vier Fractionen und ein relativ geringfügiger Rest einer gelbbraun gefärbten, krystallinisch erstarrenden Mutterlauge, in welcher Zucker nachgewiesen werden konnte.

Genau in derselben Weise und mit dem gleichen Erfolge wurde restliche Roharbutin in einer zweiten Operation gereinigt.

Die ersten Fractionen, welche in beiden Fällen die weitaussten waren, krystallisirten, wie alle andern Fractionen aus wässerigen Lösungen in zwei bis drei Centimeter langen, elliptisch oder büschelförmig gruppirten, rein weissen, glänzenden Nadeln, welche ein durchaus gleichartiges Verhalten hatten und auch unter dem Mikroskop keinerlei Verunreinigungen erkennen liessen. Alle Fractionen wurden in wässriger Lösung durch Eisenchloridlösung blau gefärbt, kurz alle Fractionen hatten nicht allein das Aussehen homogener Substanzen, sondern sie hatten alle das Aussehen und Verhalten von Arbutin, wie es von Kawalier und anderen Forschern beschrieben wurde.

Mit diesem Material habe ich, wie gesagt, die Versuche ausgestellt, welche ich im Folgenden beschreiben, vorher jedoch bemerken will, dass beim Abdestilliren des Amylalkohols im Wasserbade, von den diesbezüglichen Substanzen, eine geringe Menge eines bräunlich gelb gefärbten Rückstandes hinterblieb, welcher krystallinisch erstarrte, der sich in Wasser leicht und vollständig löste und in dem sich ausser dem Rest von Arbutin mittelst der Trommer'schen Probe, aber nicht mit Sicherheit, Hydrochinon oder Methylchinon nachweisen liess.

Krystallwasser. Aus der Formel, welche Kawalier für trockene und für das bei 100° getrocknete Arbutin berechnet, berechnet sich der Gehalt an Krystallwasser zu 3,78%; aus der von Strecker aufgestellten hingegen zu 2,99%; Zwenger und Himmelmann fanden einmal 2,99%; bei der Darstellung einer zweiten Darstellung hingegen bei zwei Bestimmungen 11,31 und 11,58% bei 100° verdrängbares Wasser. Schiff fand, nach seiner zweiten Abhandlung, den Gehalt an Krystallwasser für sieben Fractionen zwischen 4,80 liegend und im Mittel zu 3,78%. Er bemerkt, dass es nicht ganz leicht ist, Arbutin von constantem Wassergehalt zu bekommen, so wie, dass das Arbutin auch im trockenen Zustande für die Feuchtigkeit der Luft sehr empfindlich ist.

Ich habe den Krystallwassergehalt der lufttrockenen Substanz durch Trocknen bei 100° im Vacuo in dem von mir vor einiger Zeit construirten Trockenapparat (Verhandl. des naturforschenden Vereines in Brünn, 16. Bd.) bestimmt und bei den verschiedenen Fractionen die folgenden Procentzahlen erhalten: 2·29, 3·24, 3·08, 1·92, 2·29, 2·46, d. i. im Mittel 2·55%.

Schon bei der in Gemeinschaft mit Hlasiwetz ausgeführten Untersuchung hatten wir beobachtet, dass das Arbutin ziemlich hygroskopisch ist. Doch damals haben wir den Gegenstand nicht weiter verfolgt. Im Hinblick darauf, dass Schiff in besonderer Weise hervorhebt, dass wir nur bei recht sorgfältig ausgeführter (oder, wie es hätte heißen sollen, recht sorgfältig vorbereiteter) Analyse die verlangten Zahlen gefunden haben, schien es mir nothwendig, auch diese Eigenschaft genauer zu studiren, wozu mich dann noch weiter die nicht unerheblichen Differenzen in den Angaben über den Krystallwassergehalt bestimmten.

Um über die Hygroskopicität des Arbutins ins Klare zu kommen, wurden beim 1. Versuch 0·3942 Grm. der lufttrockenen Substanz in einem doppeltglasirten Porcellanschiffchen von bekanntem Gewichte abgewogen, das Ganze im Vacuo bei 100° bis zur Gewichtconstanz getrocknet, gewogen, sodann an einem staubfreien Orte der Zimmerluft ausgesetzt, nach längerer Zeit gewogen, wieder getrocknet und gewogen, u. s. w.; kurz gesagt, es wurde abwechselnd das Gewicht der bei 100° getrockneten und der mit Feuchtigkeit gesättigten Substanz bestimmt. Die Dauer der Einwirkung der feuchten Luft auf das Arbutin war verschieden; sie schwankte zwischen 8 Stunden und 5 Tagen, ohne dass dadurch das Resultat beeinflusst worden wäre. Die beobachteten Gewichte sind die folgenden:

1. Versuch. Gewicht der lufttrockenen Substanz sammt Schiffchen 7·2887 Grm.

	Gewicht der
bei 100° getrockneten	Substanz
	mit Feuchtigkeit gesättigten
7·2790 Grm.	7·2903 Grm. Nach 14stündigem Stehen in der Zimmerluft.
	7·2904 Grm. Nach weiteren 8 Stunden.
	7·2904 Grm. Nach weitem 16 Stunden.

2. Versuch. Gewicht der lufttrockenen Substanz sammt Schiffchen
7·2717 Grm.

Gewicht der	
bei 100° getrockneten	mit Feuchtigkeit beladenen
Substanz	
7·2626 Grm.	7·2738 Grm. nach 48stündigem Stehen in der Zimmerluft.
7·2610 Grm.	7·2740 Grm. nach weiteren 72 Stunden.

Die Menge der beim zweiten Versuche angewendeten lufttrockenen Substanz betrug 0·3783 Grm.

Aus diesen Zahlenwerthen lässt sich das Folgende berechnen: Bei dem ersten Versuche erlitt die lufttrockene Substanz durch das Trocknen bei 100° einen Verlust von 2·46%, während die Gewichtszunahme durch Absorption der Feuchtigkeit der Zimmerluft 2·89% betrug. Beim zweiten Versuch wurde ein Trockenverlust von 2·82% und eine Gewichtszunahme von 2·91% constatirt. Ein Vergleich dieser Zahlen ergibt das gewiss interessante Resultat, dass das Arbutin nach dem Trocknen bei 100° im Vacuo beim Stehen in der Zimmerluft sein Gewicht durch Absorption von Feuchtigkeit um dieselbe Grösse vermehrt, als es beim Trocknen durch Wasserabgabe verloren hatte.

Der Gehalt an Krystallwasser aber ergibt sich nach den bei der Absorption der Feuchtigkeit erhaltenen Zahlen zu

2·90%, während die Formel $C_{25}H_{24}O_{14} + H_2O$
3·12% und die Formel $C_{12}H_{16}O_7 + \frac{1}{2}H_2O$
3·20% Krystallwasser verlangen.

Die Zahl 2·90 stimmt sehr gut mit dem einen der von Zwenger und Himmelmann beobachteten Krystallwassergehalte (2·99%), weicht indessen nicht unerheblich von dem von der Formel verlangten Werth (3·12%) und noch stärker von der durch Trocknen erhaltenen Zahl (2·55%) ab. Alle diese Umstände scheinen mir zu beweisen, dass man es im Arbutin mit einer Substanz zu thun hat, welche im krystallwasserfreien Zustand ebenso begierig Feuchtigkeit der Luft entzieht, als sie im krystallwasserhaltenden Wasser an die mit Feuchtigkeit nicht gesättigte Luft, und zwar nach deren Feuchtigkeitsgehalt und Temperatur

wechselnde Mengen Krystallwasser abgibt. Es steht diese letztere Anschauung im völligen Einklange mit der Beobachtung Kawaliers, welche dahin geht, dass die Krystalle des lufttrockenen Arbutins Wasser abgeben, ohne ihre Durchsichtigkeit zu verlieren.

Selbstverständlich beziehen sich die mitgetheilten Beobachtungen auf verschiedene Fractionen.

Verhalten des Arbutins bei höherer Temperatur.

Nach einer von Kawalier gemachten Bemerkung (Seite 292) verliert das bei 100° getrocknete Arbutin durch Erhitzen bis zum Schmelzen nichts mehr an Gewicht. Strecker hat eine für die Elementaranalyse bestimmte Menge von Arbutin bei 170° geschmolzen und bei der Analyse für den Kohlenstoff eine Zahl gefunden, welche um 0.6% grösser ist als die von einer bei 100° getrockneten Substanz herrührende und sich derjenigen erheblich nähert, welche die Formel $C_{25}H_{34}O_{14}$ verlangt. Nach den Angaben von H. Schiff endlich (Berl. Berichte 14, 302) erleidet Arbutin beim Erhitzen keine Spaltung.

Mit diesen Angaben lassen sich die Beobachtungen, welche ich über das Verhalten des Arbutins bei höherer Temperatur gemacht habe, nur zum geringsten Theil in Einklang bringen und theile ich darum die diesbezüglichen Versuche mit allen Details mit.

1. Versuch. Eine gewogene Menge Arbutin, der ersten Fraction angehörig, wurde in einem Platinschiffchen zunächst bei 100° im Vacuo bis zur Gewichtconstanz getrocknet und dann in einem gewöhnlichen Luftbade aus Kupfer, das in einem mit Glasthüre versehenen Holzkästchen untergebracht war, bei einer Temperatur von durchschnittlich 147° erwärmt. Die Temperatur schwankte nur innerhalb weniger Grade und war nur ein einziges Mal und zwar gleich zu Beginn des Experimentes während kurzer Zeit auf 164° gestiegen.

Das Platinschiffchen stand im Trockenschrank auf einer Glasplatte, möglichst nahe an dem Thermometergefäss. Das Thermometer war ein gewöhnliches von Grad zu Grad getheiltes Luftbadthermometer. Über den Verlauf des Versuches kann ich

die folgenden Zahlenwerthe und sonstigen Wahrnehmungen mittheilen:

Gewicht des leeren Platinschiffchens	8·2367 Grm.
Gewicht des Platinschiffchens + der lufttrocknen Substanz	8·5489 „
Gewicht des Platinschiffchens + b. 100° getrockneter Substanz	8·5429 „
Gewicht des Schiffchens + der Substanz nach dem Erwärmen, 1. Wägung	8·5266 „
Gewicht des Schiffchens + der Substanz nach dem neuerlichen Erwärmen, 2. Wägung	8·4869 „
Gewicht des Schiffchens + der Substanz nach dem neuerlichen Erwärmen, 3. Wägung	8·4672 „
Gewicht des Schiffchens + der Substanz nach dem neuerlichen Erwärmen, 4. Wägung	8·4508 „
Gewicht des Schiffchens + der Substanz nach dem neuerlichen Erwärmen, 5. Wägung	8·4390 „

Beim Öffnen des noch heissen Trockenschrankes konnte das Entweichen von, die Schleimhaut der Augen reizenden Dämpfen wiederholt wahrgenommen werden, während die Substanz selbst schon nach dem ersten Erhitzen vollständig geschmolzen war und nach dem Erkalten eine schwach gelb gefärbte, vollständig amorphe, etwas rissige Masse bildete, welche durch das fortgesetzte Erwärmen, wenigstens dem Anscheine nach, zähflüssiger wurde, sich bei der dritten Wägung um eine Nuance stärker gebräunt zeigte und nach der fünften Erwärmung merklich stärker gefärbt war.

Der Rückstand zeigte sich in Wasser mit hellbrauner Farbe löslich, die Lösung hatte einen schwach bitteren Geschmack und wirkte überaus energisch reducirend auf alkalische Kupferoxydlösung. Beim freiwilligen Verdunsten trocknet sie gummiartig ein, und der Rückstand zeigt keine Spur einer Krystallbildung. Es unterliegt keinem Zweifel, dass der Körper Glucosan oder vielleicht auch ein Gemenge dieser Verbindung mit Levulosan repräsentirt. Auf das letztere scheint die grosse Hygroskopicität des beim Erwärmen erhaltenen Rückstandes hinzudeuten. Ver-

gleichet man nun aber das bei der fünften Wägung erhaltene Gewicht mit jenem, welches nach dem Trocknen bei 100° beobachtet wurde, so ergibt sich eine durch das Erhitzen über 100° bedingte Gewichtsabnahme von 0·1039 Grm. oder von 33·92% der bei 100° getrockneten Substanz. Bei dem vorstehenden, wie bei dem folgenden Versuche wurde das Erhitzen zwischen je zwei Wägungen durch 6 bis 7 Stunden fortgesetzt.

2. Versuch. Derselbe wurde im Allgemeinen in ganz analoger Weise, wie der eben geschilderte ausgeführt und bestanden die Abweichungen darin, dass nicht das bisher gebrauchte, sondern ein anderes, dem früheren ganz ähnliches Thermometer zur Verwendung kam, und dass die Temperatur nur für kurze Zeit auf 147° stieg und sonst fast stets innerhalb der Grenzen 133 bis 136° schwankte.

Gewicht des leeren Platinschiffchens	8·2367 Grm.
Gewicht des Schiffchens + d. lufttrocknen Substanz	8·5686 "
Gewicht des Schiffchens + der bei 100° getrockneten Substanz	8·5600 "
Gewicht des Schiffchens + d. über 100° (133—136°) erhitzten Substanz, 1. Wägung	8·5556 "
Gewicht des Schiffchens + d. über 100° erhitzten Substanz, 2. Wägung	8·5413 "
Gewicht des Schiffchens + d. über 100° erhitzten Substanz, 3. Wägung	8·5244 "
Gewicht des Schiffchens + der erhitzten Substanz, 4. Wägung	8·5090 "
Gewicht des Schiffchens + der erhitzten Substanz, 5. Wägung	8·4903 "
Gewicht des Schiffchens + der erhitzten Substanz, 6. Wägung	8·4735 "
Gewicht des Schiffchens + der erhitzten Substanz, 7. Wägung	8·4657 "

Nach dem ersten Erhitzen war die Substanz vollständig geschmolzen und bildete nach dem Erkalten eine völlig amorphe, durchsichtige und ganz farblose Masse. Bei der vierten Wägung zeigte sie sich schwach gelb gefärbt und erst nach siebenmaligem Erhitzen hatte sie die Farbe von gewöhnlichem, gelbem Candis-

zucker angenommen. Die Gewichtabnahme aber betrug in Bezug auf das Gewicht der bei 100° getrockneten Substanz 0·0943 Grm. oder 29·14%. Beim Öffnen des Trockenschrankes glaube ich den Geruch nach Methylhydrochinon wiederholt wahrgenommen zu haben. Der amorphe Rückstand erwies sich als zum grössten Theile unlöslich in absolutem Alkohol, quoll beim längeren Stehen in Berührung damit in einem ungentügend verschlossenen Gefässe auf, verlor seine Durchsichtigkeit und bildete nach tagelangem Verweilen unter den angegebenen Umständen eine schmutzige, gequollene und zerklüftete Masse, welche sich von den Wänden des Schiffchens loslöste. Die so veränderte Substanz wurde nach dem Abgiessen des Alkohols ziemlich rasch schmierig und scheint sehr hygroskopisch. Ich gedenke dieses ziemlich auffällige Verhalten des Rückstandes (Glucosan) gegen absoluten Alkohol genauer zu prüfen.

3. Versuch. Um die im Vorstehenden beschriebenen Veränderungen des Arbutins besser verfolgen zu können, habe ich eine gewisse Menge desselben nach der Beseitigung des Krystallwassers in einem kleinen Retörtchen im Ölbad bei allmählig steigender Temperatur, welche schliesslich 162° erreichte, durch mehrere Stunden erhitzt. Der Körper sinterte und schmolz allmählig und bildete schliesslich eine bräunlichgelb gefärbte Masse, welche nach dem Erkalten in Wasser gelöst und mit Wasser wiederholt ausgeschüttelt wurde.

Nach dem Abdestilliren des Äthers und dem Abdunsten der flüchtigen Antheile desselben hinterblieb eine nicht gerade sehr beträchtliche, aber immerhin bemerkenswerthe Menge eines krystallinischen Rückstandes, welcher ausser den ziemlich charakteristischen Formen des Hydrochinons auch blättchenförmige Krystalle von der Gestalt derjenigen des Methylhydrochinons enthielt, welchen liess, welche als solche auch daran erkannt werden konnten, dass sie sich im Gegensatze zu den nadelförmigen Krystallen des Hydrochinons in Benzol von gewöhnlicher Temperatur mit Leichtigkeit lösten. Die von der ätherischen getrennte, flüchtige Lösung reducirte alkalische Kupferoxydlösung.

4. Versuch. Ganz reines Arbutin in der Menge von etwa 1 Grm. wurde ohne vorherige Trocknung in einem kleinen Retörtchen der trockenen Destillation unterworfen, wobei die

Mündung des Retortenhalses unter das Wasser einer mit diesem gefüllten kleinen Vorlage tauchte.

Die Substanz schmolz ohne sich zu färben unter Entwicklung von Wasserdämpfen, welchen sehr bald Dämpfe folgten, die sich im Retortenhalse zu einem hellgelben Öle verdichteten, das, in relativ reichlicher Menge auftretend, zum Theile im Halse des Retörtchens zu einer schwach gelb gefärbten, krystallinischen Masse erstarrte, welche in Wasser leicht löslich war. Gleichzeitig färbte sich der Inhalt des Retörtchens immer dunkler und ging schliesslich unter starkem Aufschäumen in einen schwarzen, kohligen Rückstand über. Nach beendiger Destillation wurde das im Retortenhalse Festgewordene mittelst des Wassers der Vorlage in Lösung gebracht und diese Lösung mit dem gleichen Volumen Äther geschüttelt.

Die ätherische, von der wässerigen Lösung hierauf mittelst Scheidetrichter getrennt und durch ein kleines, trocknes Filterchen filtrirt, hinterliess nach Beseitigen des Äthers einen reichlichen, krystallinischen, von einem öligen Antheile durchtränkten Rückstand, welcher den charakteristischen Geruch der Producte der trockenen Destillation des Zuckers zeigte und von dem sich ein Theil bei gewöhnlicher Temperatur in Benzol mit Leichtigkeit löste, während ein anderer, sehr wenig gefärbter Antheil ungelöst hinterblieb. Dieser in Benzol unlösliche Rest, durch Abdrücken zwischen Filterpapier und Abdunsten an der Luft vom Benzol befreit, löste sich leicht in Wasser und gab, mit einer verdünnten Lösung von Eisenchlorid versetzt und bis zum Auftreten des Chinogeruches erwärmt, nach dem Abkühlen eine reichliche Ausscheidung der charakteristischen, metallglänzenden Nadeln von Chinhydrin. Besser noch gelang die Darstellung des letzteren, wenn eine mit Eisenchlorid oxydirte Lösung des obigen Rückstandes nach dem Erkalten mit einer nicht veränderten wässerigen Lösung desselben zusammengebracht wurde. Durch diese Reaction aber ist der in Benzol unlösliche Antheil des Ätherauszuges als Hydrochinon sichergestellt.

Die Benzollösung hinterliess nach dem Abdunsten des Lösungsmittels einen blättrig krystallinischen Rückstand, welcher von einer gelben, nach verbranntem Zucker riechenden Lauge durchtränkt war. Zur Beseitigung der letzteren wurde der

Rückstand mit wenig Wasser gelöst und die Lösung durch ein kleines, nasses Filterchen filtrirt, wobei ein klares und fast farbloses Filtrat resultirte, welches beim Verdunsten des Wassers theils am Boden und theils an der Oberfläche ein Öl genau unter jenen Umständen absonderte, welche ich beim Abdunsten einer wässerigen Lösung von Methylhydrochinon stets beobachtet habe, und, wie stets in dem letzterem Falle, erstarrte das Öl nach dem vollständigen Verdunsten des Wassers zu einer weichen, blättrig krystallinischen Masse. Die wässerige Lösung dieser krystallinischen Substanz gab mit Eisenchlorid keine Chinhydronekrystalle, reducirte aber beim Erwärmen Silbernitratlösung unter Entwicklung des Geruches von Chinon und unter Abscheidung des Silbers theils in Form von Flocken, theils als Spiegel. Es zeigte also die Substanz bei allen diesen Reactionen das Verhalten des Methylhydrochinons, mit dem sie unfraglich identisch ist. Als weitere Folge aber ergibt sich aus dieser Thatsache, dass das von Uloth bei der trockenen Destillation der Abdampfrückstände wässriger Auszüge verschiedener Pflanzen der Familie der Ericaceen erhaltene „Ericinon“ (Ann. d. Chem. und Pharm. 111, 222) nicht, wie Zwenger und Himmelmann als unzweifelhaft annehmen, Hydrochinon, sondern, wie ich das bereits an einer früheren Stelle ausgesprochen habe, ein Gemenge von Hydrochinon und Methylhydrochinon gewesen ist.

In seinem ganzen Verhalten gegen höhere Temperatur aber zeigt das von mir untersuchte Arbutin, entgegen den von Schiff seinem Präparat gemachten Wahrnehmungen, grosse Ähnlichkeit mit Äsculin, Salicin etc., d. h. es zerfällt hierbei gleich diesen liefert gut charakterisirte Spaltungsproducte, nämlich Glucosan, Hydrochinon und Methylhydrochinon.

Diese Verschiedenheiten in den Beobachtungen verschiedener Experimentatoren lassen, wenn man die Richtigkeit mancher Beobachtungen nicht anzweifeln will, die Annahme Schiff's wahrscheinlich erscheinen, dass es mehrere Arbutine pflanzlichen Ursprungs geben muss.

Darauf deutet auch die früher erwähnte Angabe Strecker's welcher bei der Verbrennung eines bei 170° geschmolzenen Arbutins einen Kohlenstoffgehalt fand, welcher denjenigen, den die Formel $C_{12}H_{16}O_7$ verlangt, erheblich übersteigt, während eine

bei 100° getrocknete Probe diesen Gehalt nicht erreicht, ich aber im Vorstehenden gezeigt habe, dass mein Präparat schon weit unter 170° continuirlich Hydrochinon und Methylhydrochinon verliert und schliesslich Glucosan zurückbleibt, dessen Kohlenstoffgehalt wesentlich geringer ist als der von der Formel $C_{12}H_{16}O_7$, verlangte.

Schmelzpunkt. Gewisse Unregelmässigkeiten, welche man bei der Bestimmung des Schmelzpunktes des Arbutins beobachtet hat, bilden einen Hauptstützpunkt der Ansicht, dass das von Hlasiwetz und Habermann untersuchte Arbutin ein Gemenge gewesen sei. Ich habe in Folge dessen diese Eigenschaft des Glucosides mit aller Sorgfalt studirt und will in dem Folgenden alle darauf bezüglichen Wahrnehmungen mittheilen.

Das von mir verwendete Geisler'sche Thermometer mit Milchglasscala und Theilung von 90 bis 210° C. zeigte den Siedepunkt um einige Zehntelgrade zu hoch liegend. Ich habe diesen Fehler indessen, aus Gründen, welche sich aus meinen Mittheilungen von selbst ergeben werden, nicht weiter berücksichtigt.

Das zur Schmelzpunktbestimmung eingehaltene Verfahren war von dem gewöhnlich beobachteten in keiner Weise verschieden, d. h. die fein zerriebene und bei 100° im Vacuo getrocknete Substanz wurde in ein capillares Röhrchen an dem trichterförmig erweiterten Ende eingefüllt, durch Klopfen etc. an das andere in eine haarfeine Spitze ausgezogene Ende gefördert, diese Spitze zugeschmolzen, das Röhrchen an das Thermometer so befestigt, dass der die Substanz enthaltende Theil desselben das Thermometergefäss berührte und das Ganze in einem Ölbad bei sehr allmählig gesteigerter Temperatur erhitzt.

Die bei den einzelnen Versuchen gemachten Beobachtungen sind die folgenden:

1. Versuch. Verwendet wurde eine bei der Reinigung des Arbutins erzielte erste Fraction.

Die Substanz war bei 143·5° zum allergrössten Theil zu einem farblosen Öle geschmolzen, welches indessen selbst bei 147° eine wolkige Trübung erkennen liess.

Nach dem völligen Erkalten und auch noch vier Stunden später hatte der Inhalt des Röhrchens das Aussehen von

trübtem, durchsichtigem, stellenweise etwas getrübttem Glase
dieses Aussehen blieb beim neuerlichen Erhitzen bis nahe an
128° fast ungeändert.

Bei dieser Temperatur wurde die Substanz sehr rasch
klar, alle Anschein nach krystallinisch und bildete
von früheren Eigenschaften nach ein homogenes Ganzes. Das
Erhitzen trat bei diesem zweiten Erhitzen indessen erst bei etwa
128° ein und war bei 161·5 vollendet. Abermals auf die Zimmer-
temperatur abgekühlt, war die Substanz auch nach 18 Stunden
glasartig und durchsichtig, trübte sich beim neuerlichen
Erhitzen schon vor 128°, war bei diesem Temperatursgrade voll-
ständig undurchsichtig, begann zwischen 158 und 159° zu
schmelzen, bei 161·4° zu schmelzen und war bei 162·4° voll-
ständig geschmolzen.

Versuch. Die Substanz gehörte der dritten Fraction der
Reindarstellung an, bei welcher das für den ersten
mal verwendete Material als erste Fraction erhalten worden
war. In 144° bildeten sich zum Theil noch getrübt Tröpfchen
in 146·7 bis 147° war der gesammte Röhrcheninhalt zur
Flüssigkeit geschmolzen.

Versuch. Für denselben diente ein Antheil der ersten
Fraction von der zweiten Reindarstellung als Material. Beobachtet
wurde dass der Körper bei 132° in deutlich wahrnehmbarer
Trübung, bei 136 bis 137° zu einem an den Röhrchen-
wand hängenden trüben Faden zusammenfloss, welcher bei
141° in dem das Röhrchen im ganzen Querschnitt erfüllenden
Inhalt zusammensank, welches sich bei 141 bis 142° zu
einem Faden begann, bei 144° nur noch eine geringfügige, flockige
Trübung zeigte und bei 146° völlig klar und durchsichtig war.
Auf folgenden Abkühlen blieb diese Probe in der grösseren
Trübung klar und durchsichtig, begann sich beim neuerlichen
Erhitzen schon wesentlich unter 128° zu trüben und war etwas
unter diesem Temperatursgrade vollständig undurchsichtig.

156° begann das Schmelzen; bei 159° zeigte sich noch
Trübung und bei 160·7 bis 161° war die Substanz ganz
völlig geschmolzen.

Versuch. Zur Anwendung kamen Theile der zweiten
Fraction von der zweiten Reindarstellung und bestand eine kleine

Abweichung bei diesem Experimente darin, dass das gepulverte Arbutin in dem Röhrchen mittelst eines feinen Platindrahtes zusammengedrückt wurde. Bei 131.7 bis 132° trat Sinterung ein, bei 136 bis 137° war das Arbutin fadenförmig zusammengeronnen, worauf sich zwei, durch ein Luftbläschen von 3 bis 4 Mm. Länge getrennte Tröpfchen bildeten, welche bei steigender Temperatur insoferne ein etwas verschiedenes Verhalten zeigten, als das Durchsichtigwerden, das vollständige Schmelzen bei dem unteren Tröpfchen stets etwas früher, das Erstarren hingegen stets etwas später eintrat als bei dem oberen Tröpfchen, Verschiedenheiten also, welche sich durch die trotz alles Rührens immer noch ungleichförmige Erwärmung des Ölbad, durch die etwas differente Lage der Tröpfchen etc. in einfacher Weise erklären lassen. Beide Tröpfchen waren bei 142 bis 144° nur noch wenig getrübt, und bei 145.5 bis 146.5 ohne irgend welche Trübung.

Auf die Zimmertemperatur abgekühlt, waren beide Tröpfchen drei Stunden nachher noch klar und glasartig. Bei dem neuerdings vorgenommenen Erwärmen wurden sie nahe an 128° vollständig undurchsichtig und waren bei 162° völlig geschmolzen.

Wenn ich die auf die Schmelztemperatur gemachten Wahrnehmungen zusammenfasse und als Schmelzpunkt diejenige Temperatur bezeichne, bei welcher jede Trübung verschwunden war, dann glaube ich das Folgende sagen zu können:

1. Alle in Untersuchung gezogenen, bei zwei verschiedenen Reindarstellungen erhaltenen Arbutinfractionen zeigen zwei verschiedene Schmelzpunkte, von welchen der eine zwischen 144 und 146° , der andere aber nahe bei 162° liegt.

2. Der erste, niedrigere Schmelzpunkt ist dem bei 100° im Vacuo getrockneten Arbutin eigen, während der andere höher gelegene dem vorher geschmolzenen Präparate zukommt.

3. Der zweite höhere Schmelzpunkt scheint sich beim neuerlichen Schmelzen im capillaren Röhrchen nicht mehr erheblich zu ändern.

4. Das geschmolzene Arbutin erstarrt beim Abkühlen zu einer amorphen, glasartigen Masse, welche beim neuerlichen Erwärmen bei etwa 128° wieder vollkommen undurchsichtig und wahrscheinlicher Weise krystallinisch wird.

Die Schmelzpunkte, welche Schiff in seiner mehrfachsten Arbeit, sowie in einer späteren Mittheilung (Berl. B., 2561) angibt, liegen, wie hervorgehoben zu werden ver-
mögen von mir beobachteten Schmelzpunkten fast durchgehend
überein, ja stimmen damit zum Theil vollständig überein. Aber
ein kleiner Unterschied ist gleichwohl vorhanden.

Während Schiff bei jeder Fraction die beiden Schmelzpunkte
erster und derselben Bestimmung, also bei continuirlich
steigender Temperatur wahrgenommen hat, habe ich den zweiten,
höheren Schmelzpunkt stets erst dann beobachten können, wenn
die Substanz einmal geschmolzen und nach dem durch Abkühlung
bedingten Erstarren wieder erwärmt wurde. Andere Differenzen
sind mir so wenig wichtig, dass ich glaube dieselben
ausgleichen zu können. Worin aber die Ursache der einen hervor-
gehobenen Verschiedenheit zu suchen ist, darüber können wohl
Vermuthungen, aber keine Erklärungen ausgesprochen werden
und ich unterlasse es darum mich darüber weiter zu ergehen.

Liegen die Umstände bezüglich der von mir beobachteten
zwei Schmelzpunkte. Für das Auftreten derselben kann, wie
oben, eine plausible Erklärung in den Mittheilungen gesucht
werden, welche ich früher über das Verhalten des Arbutins bei
steigender Temperatur gemacht habe und nach denen das Arbutin
in ähnlicher Weise während des ersten Schmelzens Zer-
setzt erleidet, so dass man es beim Schmelzen der wieder
erhaltenen Masse nur dem Anscheine nach noch mit einer
homogenen Substanz, thatsächlich aber mit einem
Gemisch der Zersetzungsproducte des Arbutins zu thun hat. Aber
wegen der Schwierigkeit, den ersten Schmelzpunkt nur einiger-
maßen genau zu erhalten, findet in diesem Verhalten und in den
physikalischen Eigenschaften des Glucosides namentlich in dessen
Opacität eine genügende Erklärung.

Ich glaube ich aus dem Umstande, dass die zweiten
Schmelzpunkte bei sämmtlichen Fractionen fast vollständig über-
einstimmen, den Schluss ziehen zu dürfen, dass sie sich auf
eine von gleicher qualitativer und quantitativer Zusammen-
gehörigkeit beziehen und diese Schmelzpunkte bilden somit ein
Gesetz, welches nicht dagegen, sondern dafür spricht, dass
die von mir untersuchte Arbutin ein chemisches Individuum und

kein Gemenge bildet. Was aber von diesem Präparat gilt, das muss nach meinen Wahrnehmungen auch seine volle Geltung bezüglich desjenigen Arbutins haben, welches den Gegenstand der Untersuchung von Hlasiwetz und mir im Jahre 1875 bildete und es erscheint die Vermuthung Schiff's, dass wir es mit einem Gemenge zu thun hatten, auch im Hinblick auf die bei der Bestimmung des Schmelzpunktes gemachten Beobachtungen nicht gerechtfertigt, während sie bei allen, einmal geschmolzenen Präparaten aller Wahrscheinlichkeit nach volle Geltung hat.

Was sodann die Angaben Strecker's über den Schmelzpunkt anbelangt, so beschränken sich dieselben darauf, dass er in Bezug auf eine für die Elementaranalyse bestimmte Substanz in einer Anmerkung sagt „b. geschmolzen bei 170° “, woraus nicht gefolgert werden muss, dass damit der Schmelzpunkt gemeint ist. Ich hebe dies hervor, weil sich in chemischen Werken mehrfach die Angabe findet, dass Strecker den Schmelzpunkt des Arbutins zu 170° bestimmt hat. Endlich sei noch darauf hingewiesen, dass über das Methylarbutin drei Schmelzpunkte, nämlich 142 , 169 und 175° vorliegen und eine Entscheidung dartüber, welche Beobachtung die richtige ist, im Augenblick nicht zu treffen ist. Höchstens kann bemerkt werden, dass 142° der Schmelzpunkt des Methylarbutins nicht zu sein scheint, dass dies vielmehr annähernd der Schmelzpunkt des eigentlichen Arbutins $C_{25}H_{34}O_{14}$ sein dürfte. Unter allen Umständen aber wird es nothwendig sein, diesen Gegenstand weiter zu verfolgen, eine Absicht, welche auszuführen H. Schiff auch schon angekündigt hat.

Zusammensetzung. In Bezug auf die folgenden Resultate, welche die Ergebnisse der quantitativen Bestimmung des Kohlenstoffes und des Wassertoffes in verschiedenen Arbutinfraktionen bilden, habe ich nichts weiter zu bemerken, als dass die sämtlichen Verbrennungen mit aller Sorgfalt ausgeführt wurden, dass die Substanz stets bei 100° im Vacuo getrocknet wurde und sich demgemäss alle Zahlen auf krystallwasserfreies Arbutin beziehen. Verbrannt wurden Proben von allen vier bei der ersten Reindarstellung erhaltenen Fractionen und eine solche von der ersten Fraction der zweiten Reindarstellung.

Kohlenstoff.....	53·48 ⁰ / ₀
Wasserstoff.....	6·06 ⁰ / ₀
Sauerstoff.....	40·46 ⁰ / ₀

Wie ein Blick auf die ganze Zusammenstellung lehrt, stimmen die zuletzt angeführten Werthe in höchst befriedigender Weise nicht allein mit den von mir neuerlich gefundenen bei allen Fractionen fast vollständig übereinstimmenden Zahlen, sondern auch mit jenen, welche die Formel $C_{25}H_{34}O_{14}$ verlangt, während sie recht erheblich von den durch die Formeln $C_{12}H_{16}O_7$ und $C_{13}H_{18}O_7$ bedingten Werthen differiren.

H. Schiff hingegen findet die Übereinstimmung zwischen den aus der Formel $C_{25}H_{34}O_{14}$ berechneten und den „bei recht langsamer, sorgfältiger Verbrennung“¹ erhaltenen Zahlen allem Anscheine nach nicht gleich zufriedenstellend, indem er in sehr bestimmter Weise hervorhebt, dass diese Zahlen den Kohlenstoffgehalt noch immer um 0·2—0·3% niedriger angeben, als er durch die Formel $C_{25}H_{34}O_{14}$ verlangt wird. Dem gegenüber genügt ein Hinweis auf die Beleganalysen unserer chemischen Literatur. Ich erlasse es mir, durch Beispiele darzuthun, dass Elementaranalysen, bei welchen der Kohlenstoffgehalt um 0·2 bis 0·25% kleiner gefunden wurde, als ihn die Formel verlangt, als sehr gute Analysen stets anerkannt worden sind. Immerhin und unter allen Umständen sind Zahlenwerthe mit solcher Übereinstimmung beweiskräftiger für die Richtigkeit der Formel, als Analysen, bei welchen sich der Unterschied zwischen den einzelnen Werthen und der aus der Formel $C_{12}H_{16}O_7$ berechneten Zahl innerhalb der Grenzen —0·52 und +0·16 bewegt, wie dies bei den vier Analysen, welche Kawalier, den zwei welche Strecker und der einen, welche Zwenger und Himmelmann mittheilen, der Fall ist und die unter einander im Kohlenstoffgehalt bis zu

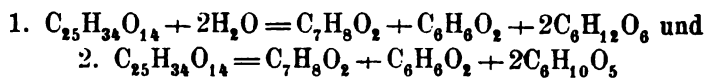
¹ H. Schiff scheint die Publication von Hl. und Hb. nur nach einer Übersetzung oder einem Auszuge zu kennen. Denn anstatt der obigen Worte „.....“ unserer Mittheilung, welche sich dann fortsetzen in „fanden wir auch wirklich Zahlen die unserer Voraussetzung entsprachen“, heisst es in seinem Aufsätze: „Hl. und Hb sagen, dass sie nur durch langsame und besonders sorgfältige Verbrennung zu höheren Werthen gelangten.“

differiren. Dieser Thatsache gegenüber erscheint dann der Umstand minder bedenklich, dass die obcitirten Daten der genannten Forscher, von dem für die $C_{25}H_{34}O_{14}$ berechneten Kohlenstoffgehalt um 0.66 bis (und nicht um 1 bis 1.5%) verschieden sind. Sowie man Unterschied von 0.68% durch verunreinigende Beimengungen, die Wirkungen der Hygroskopicität, durch beginnende Fäulung bei unvorsichtigem Trocknen erklären muss, ebenso an die etwas höheren um 1% sich bewegenden Differenzen denken müssen und erklären dürfen. Wer z. B. kann wohl behaupten, dass die Substanz Streckers beim Erhitzen auf 170° verändert wurde? Endlich muss ich noch darauf hinweisen, dass die Kohlenstoffgehalte, welche Schiff bei der Analyse von Arbutin aus den Arbutinresten dargestellten Fractionen gefunden hat, den durch die Formel $C_{25}H_{34}O_{19}$ gegebenen Werth in diesen Fällen um -0.4 bis $+0.32$, in vier Fällen aber um -0.59 bis $+0.14$ % verschieden sind und gegenüber dem procentischen Kohlenstoffgehalt der Formel $C_{12}H_{16}O_7$ um 0.01 bis 1.14% höher sind wurden, während das Mittel aus den neun Analysen den Kohlenstoffgehalt zu 53.36% angibt und dieses demnach der Formel $C_{25}H_{34}O_{14}$ mit 53.76% Kohlenstoffgehalt entschieden näher steht als der Formel $C_{12}H_{16}O_7$, welche 52.94% verlangt.

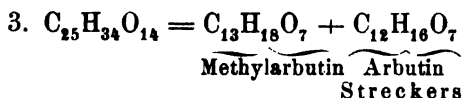
Das Ergebniss des im Vorstehenden über die Zusammensetzung des Arbutins angeführten kann gesagt werden, dass die Analysen von Kawalier, Streckers, Zwenger und Himmel und einige Analysen von H. Schiff die Existenz eines Arbutins von der Formel $C_{12}H_{16}O_7$ annehmen lassen, aber die Existenz eines Arbutins von der Zusammensetzung $C_{25}H_{34}O_{14}$ keineswegs beweisen, während die Analysen von Hl. und Hb. die Mehrzahl der Analysen von Arbutin und die von mir mitgetheilten das ausser Frage stellen, dass das gewöhnlich vorkommende Arbutin diese Formel hat.

Die Eigenschaften des Arbutins beim Kochen mit Wasser etc.

Gesammtheit der Thatsachen, welche über das Arbutin berichtet sind, hat in mir den Gedanken wachgerufen, dass sich das Arbutin vielleicht nicht allein in der durch die Gleichungen



ausgedrückten Art zersetzen könne, sondern, dass auch ein Zerfallen nach folgender Gleichung möglich ist:



Ich habe einige Versuche unternommen, welche mir nicht allein in dieser Richtung, sondern auch über manche für das Zerfallen des Arbutins wichtige Umstände Aufklärung bringen sollten. Die Resultate, die ich dabei erhalten habe, sind in der ersten Richtung heute noch durchaus unzulänglich, indem es mir nicht gelungen ist, die Verbindungen $\text{C}_{13}\text{H}_{18}\text{O}_7$ und $\text{C}_{12}\text{H}_{16}\text{O}_7$ als Spaltungsproducte des Arbutins $\text{C}_{25}\text{H}_{34}\text{O}_{14}$ nachzuweisen, und ich will nur mittheilen, dass ich gehofft hatte durch die Anwendung bestimmter Temperatursgrade und darauffolgende Einwirkung verschiedener Lösungsmittel ans Ziel zu kommen. Ich behalte mir vor den Gegenstand in dieser Richtung weiter zu verfolgen. Nicht von gleicher Tendenz waren einige Versuche geleitet, welche die Art der Einwirkung von kochendem Wasser etc. auf Arbutin darthun sollten. Hiebei wollte ich vielmehr erfahren, bis zu welchem Grade die bei der Darstellung und Reinigung aufgewendeten Mittel das Arbutin zu verändern vermöchten.

Über die Ausführung der diesbezüglichen Experimente kann ich das Folgende sagen:

1. Versuch. Ganz reines Arbutin wurde in viel Wasser gelöst, etwas aschefreie Thierkohle hinzugefügt, die Lösung zum Sieden erhitzt und in diesem Zustande durch mehrere Stunden erhalten, wobei das abdampfende Wasser von Zeit zu Zeit ersetzt wurde.

Nach eingestelltem Kochen blieb die Flüssigkeit in Folge von mancherlei Umständen durch einige Tage stehen, wobei sich in derselben eine leichte Schimmelbildung eingestellt hatte. Die Lösung wurde filtrirt, mit reinem Äther geschüttelt, die ätherische von der wässrigen Flüssigkeit getrennt und bei der ersteren das Lösungsmittel theils durch Destillation, theils durch Abdunsten

entfernt. Es hinterblieb eine geringe Menge eines schwach gelbbraunen Rückstandes, welcher nach sehr kurzer Zeit theils in Nadeln, theils in Blättchen krystallinisch erstarrte, und aus dem der blätterig-krystallinische Antheil durch Benzol von gewöhnlicher Temperatur ausgezogen werden konnte.

Dieser Auszug hinterliess die Substanz beim Abdunsten des Benzols wieder als blätterig-krystallinische Masse, welche in ihrem Aussehen und Geruch dem Methylhydrochinon ebenso vollständig glich, wie die im Benzol unlöslichen Nadeln dem Hydrochinon.

In der mit Äther geschüttelten, wässrigen Flüssigkeit konnte ich mittelst der Trommer'schen Probe Zucker mit Sicherheit nachweisen.

2. Versuch. Zwei Gramme Arbutin einer ersten Fraction wurden in 200 CC. Wasser gelöst und die Lösung zunächst mit Äther geschüttelt etc., um etwa schon vorhandenes Hydrochinon oder Methylhydrochinon zu constatiren. Dessgleichen wurde die Lösung auf Zucker geprüft und ergaben beiderlei Prüfungen völlig negative Resultate. Nun wurde die Flüssigkeit nach dem Abdunsten der vorhandenen Ätherantheile, mit etwas Thierkohle versetzt und am Rückflusskühler andauernd gekocht. Das Kochenährte 8—10 Stunden und unmittelbar nach Unterbrechung desselben und nach erfolgtem Abkühlen wurde filtrirt, das Filtrat in reinem Äther geschüttelt etc. etc. Die schliesslich erhaltenen Resultate mochten in den Mengenverhältnissen sich von den beim ersten Versuch erzielten unterscheiden; in qualitativer Beziehung ist ein solcher Unterschied sicherlich nicht vorhanden.

Die bei diesem Versuch erbrigte wässrige Lösung wurde nach Aufkochen von dem gelösten Äther befreit, mit 2 CC. Eisg versetzt, neuerdings während acht Stunden am Rückflusskühler gekocht, nach dem Erkalten mit Äther geschüttelt und Zucker untersucht u. s. w. Der mittelst Äther erzielte Extracte in grösserer Menge erhalten, als bei den vorigen Versuchen, aber mit den dort erhaltenen Rückständen von gleicher tät. Ebenso wurde Zucker nachgewiesen.

Es kann somit keinem Zweifel unterliegen, dass das Arbutin beim andauernden Kochen mit Wasser und Blutkohle und Kerem Masse noch beim Kochen der schwach essigsauren

Lösung, Spaltung erleidet, eine Thatsache, welche das von Kawalier und Zwenger und Himmelmann wahrgenommene Auftreten des Hydrochinons in den von der Darstellung des Arbutins herrührenden Mutterlaugen in genügender Weise erklärt und noch in manch' anderer Beziehung Beachtung verdient.

Spaltung des Arbutins mittelst stark verdünnter Schwefelsäure.

Über die Mengenverhältnisse, in welchen die einzelnen Spaltungsproducte beim Kochen einer Arbutinlösung mit verdünnter Schwefelsäure auftreten, kann ich heute nur so viel sagen, dass wenn ich auch die von Hlasiwetz und mir seinerzeit mitgetheilten Resultate im Allgemeinen bestätigt fand, die bei den jetzt durchgeführten Versuchen erhaltenen Zahlen unter einander doch nicht jene Übereinstimmung zeigen, welche ich erwarten musste.

Die Differenzen beziehen sich indessen, wie ich hervorheben muss, nicht allein auf verschiedene Arbutinfraktionen, sondern mehrfach auf Versuche, welche mit Substanzmengen derselben Fraction ausgeführt wurden. So habe ich, um ein Beispiel anzuführen, bei zwei Spaltungsversuchen derselben zweiten Fraction das eine Mal 41·7%, das zweite Mal hingegen nur 31·1% Gesamtätherauszug erhalten, ohne dass es mir im zweiten Falle gelungen wäre, mit Sicherheit nachzuweisen, dass die Zersetzung eine unvollständige war. Ähnliche Verschiedenheiten habe ich in Bezug auf das Verhältniss zwischen dem Benzolauszug und dem Hydrochinon beobachtet. Es liegen im letzteren Falle mehrere Möglichkeiten vor, die ich heute nicht näher berühren will, die ich indessen schon jetzt zum Gegenstande eingehender Studien gemacht habe.

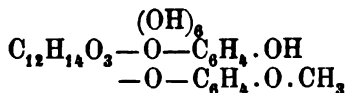
Bei allen Spaltungsversuchen konnte ich indessen so viel constatiren, dass das Methylhydrochinon nach seiner Menge immer einen sehr wesentlichen Antheil des Ätherauszuges bildet.

In keinem Falle habe ich beim Behandeln mit Benzol diesen Körper spurenweise erhalten, wie das Schiff einmal beobachtet hat und es scheint mir deshalb unthunlich, trotz der bisher bei der Spaltung nicht erzielten übereinstimmenden

Resultate, in dem untersuchten Präparate ein wechselndes Gemenge zweier chemischer Individuen zu vermuthen. Ich zweifle nicht daran, dass es mir gelingen wird, auch durch das Studium der Spaltungsvorgänge die Unhaltbarkeit dieser Anschauung darzuthun, und dann werde ich auch in der Lage sein, die Umstände zu beleuchten, welche es ermöglichten, dass bei den diesbezüglichen Versuchen von Hl. und Hb. besser übereinstimmende Resultate erzielt werden konnten, Umstände und Details, auf die ich mich heute, nach acht Jahren, trotz mancher darauf bezüglicher Notizen nicht mehr mit Sicherheit zu erinnern vermag.

Die experimentellen Untersuchungen und die Überlegungen, welche ich im Vorstehenden niedergelegt habe, erscheinen mir zwar in mehrfacher Richtung der Ergänzung bedürftig. Jedoch werden sie genügen, um die Berechtigung der Auffassung von Hlasiwetz und Habermann über die Zusammensetzung des Arbutins, welcher sie in der Formel $C_{25}H_{34}O_{14}$ Ausdruck gegeben haben, darzuthun und die Einwendungen zu beheben, welche gegen diese Formel gemacht wurden.

Es erübrigt mir jetzt noch, Einiges über die Vorstellungen mitzutheilen, welche ich mir in Bezug auf die Constitution des Arbutins gebildet habe. Und in dieser Richtung neige ich, wie schon aus früher gegebenen Andeutungen hervorgeht, der Ansicht zu, dass das Arbutin nicht unmittelbar zur Glucose in Beziehung steht, also nicht als eine esterartige Verbindung der Glucose oder einer mit dieser isomeren Zuckerart aufgefasst werden darf, sondern aller Wahrscheinlichkeit nach sich von dem Rohrzucker oder einer isomeren Zuckerart, wie Maltose etc. ableitet. Ohne mich nun in Erörterungen über die Constitution der Zuckerarten einzulassen, will ich dieser Auffassung durch die Formel



Ausdruck geben und darauf hinweisen, dass diese Formel zwar das Zerfallen des Arbutins beim Erhitzen oder beim Kochen mit verdünnter Schwefelsäure, sowie, wenn man dem Rest $C_{12}H_{14}O_3$

die von Fittig aufgestellte Formel des Rohrzuckers zu Grunde legt, auch die nicht reducirende Wirkung des Arbutins auf alkalische Kupferoxydlösung in genügender Weise berücksichtigt, aber mit dem Acetylarbutin Schiff's $C_{12}H_{11}(C_2H_3O)_5O_7$ nicht in Einklang zu bringen ist. Während nach den Beobachtungen Schiff's in das Arbutin $C_{12}H_{14}O_7$, $5C_2H_3O$ und in das Methylarbutin unfraglich $4C_2H_3O$ eintreten können und demgemäss in ein Arbutin, welches gewissermassen durch Addition nach der Gleichung $C_{12}H_{16}O_7 + C_{13}H_{18}O_7 = C_{25}H_{34}O_{14}$ entstanden ist, $9C_2H_3O$ aufgenommen werden sollten, gestattet die obige Arbutin-formel die Einführung von nur sieben Molekülen Acetyl. Ich behalte mir vor, mein Arbutin auch in dieser Richtung zu prüfen.

Brünn, Laboratorium der allgemeinen Chemie.

Über gewisse mechanisch erzeugbare Curven und Flächen höherer Ordnung.

Von Phil. Dr. Anton Puchta,
a. o. Professor an der deutschen Universität in Prag.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1883.)

Ich beabsichtige in der vorliegenden Abhandlung eine Reihe von Sätzen über gewisse Curven und Flächen höherer Ordnung zu geben, zu deren Kenntniss ich im Wintersemester 1883 gelangte, und glaube hinzufügen zu sollen, dass ich die weitere Fortsetzung in der Untersuchung dieser Curven und Flächen später zu geben gedenke und mir desshalb vorbehalte, so dass dieser Aufsatz als erster Theil einer zusammenhängenden Arbeit aufzufassen ist.

I.

Analytische Definition der Curven und Flächen und Lösung ihres Tangentenproblems in einem Punkte derselben.

In meinen Vorlesungen über höhere Analysis an der Prager deutschen Universität im Wintersemester 1883 gab ich in der Einleitung die Roberval'sche Lösung des Tangentenproblems bei der Ellipse. Dieselbe kann, wenn Fig. 1 die beiden Brennpunkte durch 1 und 2 gegeben sind und $2a$ die grosse Achse derselben ist, etwa dahin ausgedrückt werden, dass man in Bezug auf die analytische Gleichung

$$r_1 + r_2 = 2a$$

sagt: Die Bewegung des Punktes M der Ellipse zu dem unendlich nahen Punkte M' erfolgt derart, dass r_1 und r_2 absolut genommen um dieselbe unendlich kleine Grösse zunehmen, welche jedoch bei r_1 z. B. +, bei r_2 negativ ist und darum geht, wenn MN , resp. MN' diese Zunahmen sind, die Bewegung von M nach M' in der

Richtung der Diagonale des Parallelogramms NMN' vor sich, und halbiert die Tangente an die Ellipse in M bekanntlich den Nebenwinkel von r_1 und r_2 . Diese Überlegung Roberval's veranlasste mich zu dem Problem:

„Bei welchen Curven existirt eine analoge Lösung des Tangentenproblems?“ zugleich mit Beachtung der Frage:

„Wie lässt sich die bekannte Fadenconstruction der Ellipse verallgemeinern?“

Ich gelangte unmittelbar, durch blosser Analogie, zur Lösung dieser Probleme. Nimmt man nämlich n Punkte 1, 2, . . . n durch ihre rechtwinkligen Coordinaten

$$\begin{aligned}x &= a_i \\ y &= b_i,\end{aligned}$$

wobei $i = 1, 2, 3, \dots n$ ist, als gegeben an und setzt

$$r_i = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2},$$

so gestatten die Curven

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = Cst, \quad 1)$$

worin n eine ganz beliebige positive ganze Zahl ist, eine analoge Lösung des Tangentenproblems. Aus 1) folgt nämlich durch Differentiation

$$\sum \frac{x - a_i}{r_i} + \frac{dy}{dx} \sum \frac{y - b_i}{r_i} = 0,$$

wobei sich die Summation auf $i = 1, 2, 3, \dots n$ bezieht, und man hat daher aus der letzten Gleichung, wenn α_i den Winkel von r_i mit der x -Achse und β den der Normale mit derselben Geraden bezeichnet, da $\frac{x - a_i}{r_i} = \cos \alpha_i$, $\frac{y - b_i}{r_i} = \sin \alpha_i$ ist,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sum \sin \alpha_i}{\sum \cos \alpha_i}$$

und damit offenbar nach einem bekannten Satze der analytischen Mechanik folgende Lösung des Tangentenproblems in einem Punkte x, y der Curve 1).

„Um die Normale und damit die Tangente in einem beliebigen Punkte der Curve 1) zu finden, verlängere man sämtliche Radienvectoren über M hinaus, also in positiver Richtung, um beliebige, aber überall gleiche Strecken, z. B. um die Längeneinheit, und betrachte diese Verlängerungen als Componenten. Ihre durch das Kräftepolygon gefundenen Resultate gibt die Richtung der Normalen in diesem Curvenpunkte.“

Es erhellt sofort, dass die Ellipse genau dieselbe, nur jetzt verallgemeinerte Lösung gestattet, nur muss man von der Normale und nicht von der Tangente ausgehen.

Es ergibt sich aber sofort eine weitere Verallgemeinerung. Sind nämlich $\alpha, \beta, \gamma, \dots r$ beliebige reelle, rationale oder irrationale Zahlen, deren Construction auf geometrischem Wege möglich ist, so kann man an Stelle der Curven 1) auch die durch 2) definierten setzen

$$\pm \alpha r_1 \pm \beta r_2 \pm \gamma r_3 \pm \dots \pm \nu r_n = \text{Cst} \quad 2)$$

und genau in derselben Weise für 2) die Normale mittelst des Kräftepolygons construiren, nur hat man die Radienvectoren in positivem oder negativem Sinne um $\alpha, \beta, \dots \nu$ Einheiten respective zu verlängern etc., da bei der Differentiation von 2) sich nichts Wesentliches ändert.

Der Übergang zu den Flächen bietet sich jetzt von selbst dar. Sind nämlich in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume n Punkte durch ihre Coordinaten $x = a_i, y = b_i, z = c_i$ gegeben, wobei $i = 1, 2, 3, \dots n$ ist und setzt man

$$\rho_i = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2},$$

so besitzen die Flächen

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_n = \text{Cst} \quad 3)$$

genau dieselbe Normalconstruction. Denn aus der letzten Gleichung folgt durch partielle Differentiation

$$\Sigma \frac{x - a_i}{\rho_i} + \frac{\partial z}{\partial x} \Sigma \frac{z - c_i}{\rho_i} = \rho \Sigma \frac{y - b_i}{\rho_i} + \frac{\partial z}{\partial y} \Sigma \frac{z - c_i}{\rho_i} = 0,$$

also

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = \Sigma \cos \alpha_i : \Sigma \cos \beta_i : \Sigma \cos \gamma_i,$$

wobei $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ die Winkel von ρ_i mit den drei Coordinatenachsen und α, β, γ die der Normalen mit denselben Achsen bedeutet. Daraus resultirt die Regel:

„Um für die Flächen 3) in einem beliebigen Punkte die Normale zu construiren, verlängere man sämmtliche Radienvectoren ρ_i im positiven Sinne um die Längeneinheit und setze diese Verlängerungen zu ihrer Resultante zusammen. Die letztere gibt dann die Richtung der Normale der Fläche in diesem Punkte und die zu ihr durch diesen Punkt senkrecht gelegte Ebene daher die Tangentialebene.“

Dass an Stelle der Flächen 3) die durch 4) definirten Flächen

$$\pm \alpha \rho_1 \pm \beta \rho_2 \pm \gamma \rho_3 \pm \dots \pm \nu \rho_n = \text{Cst} \quad 4)$$

treten können etc., ist unmittelbar klar. Damit ist also in der That die Roberval'sche Lösung für gewisse Curven und Flächen höherer Ordnung verallgemeinert und bemerke ich hier nur noch, dass die Lösung des Tangentenproblems auch ohne jede Rechnung durch mechanische Überlegungen hätte gegeben und bewiesen werden können, was ich jedoch übergehe.

II.

Construction der Curven und Flächen. Die nächste Frage, deren Behandlung vorliegt, ist offenbar die nach der Construction derartiger Gebilde. Es wird genügen, wenn ich mich auf die Curven allein beschränke, da sich die betreffenden Ergebnisse sofort auf die Flächen übertragen lassen. Was nun die Construction der erwähnten Curven anbelangt, so kann dieselbe z. B. bei

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm \dots \pm r_n = a \quad \alpha)$$

entweder recurrent oder direct erfolgen. Denn die Totalität der Schnittpunkte von den beiden Curven $\beta)$ und $\gamma)$

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm \dots \pm r_{n-1} = a - z \quad \beta)$$

$$\pm r_n = z, \quad \gamma)$$

worin z ein veränderlicher Parameter ist, ist offenbar mit der Curve $\alpha)$ identisch, und hiedurch ist die Construction von dem Falle n auf den $n-1$ reducirt, also allgemein als gelöst zu betrachten. Es ist dabei zu beachten, dass bei dieser recurrenten

Construction der Curven viele Varianten möglich sind, indem z. B. die Curve $r_1 + r_2 - r_3 - r_4 = a$ offenbar auch mit Hilfe der beiden Kegelschnitte $r_1 + r_2 = a + z$, $r_3 + r_4 = z$ construirt ist etc.

Bei der directen Construction, bei beliebig grossem n , sollen nur die Curven mit durchweg positiven r betrachtet werden, bloss wegen grösserer Kürze, da auch der Fall von beliebig vielen negativen r keine zu grossen Schwierigkeiten bietet. Hier läst sich nun die Fadenconstruction der Ellipse direct verallgemeinern und dadurch die Lösung herbeiführen. Denn ist $r_1 + r_2 + r_3 = a$ z. B. in einem Zuge zu zeichnen, so nehme man einen biegsamen, undehnbaren Faden von der Länge $a + 23$, wo 23 die Entfernung von 2 und 3 bezeichnet, und befestige das eine Ende, etwa durch Anbringung eines Knotens auf der unteren Zeichnungsfläche im Punkte 1. Führt man dann den Faden auf der oberen Zeichnungsfläche nach 2, in diesem Punkte auf die untere Seite und dort nach 3, wo er wieder nach Oben übertritt und befestigt an dem Ende etwa eine Spitze, so kann, wie Fig. 2 angibt, die geforderte Curve in einem Zuge gezeichnet werden, es braucht die Spitze sich nur so bewegen, dass die gesammte Fadenzuglänge in die vier geradlinigen Strecken $1M$, $2M$, 23 und $3M$ zerfällt, denn bei der Bewegung von M variirt die Länge von r_1 , r_2 , r_3 in Folge des Zuges von selbst und M beschreibt offenbar ein Oval. Fig. 3 gibt die Construction von $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = a$ etc., und man erkennt, dass z. B. bei $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = a$ die Gesammtlänge $a + 23 + 45$ bei dem benutzten Faden beträgt u. s. w. Um eine ungefähre Vorstellung derartiger Curven zu geben, ist in Fig. 4 die Curve 1) . . . $r_1 + r_2 + r_3 = a$ völlig construirt, wenn 1, 2, 3 die Ecken eines gleichseitigen Dreieckes bilden. Es ist aber zu beachten, dass 1) bei der Rationalisirung allgemein zu einer Curve 8. Ordnung führt, wie sich bald zeigen wird, welche ausser dem Curvenzuge 1) — so hätte streng genommen derselbe bezeichnet werden sollen — noch für den gewählten speciellen Werth von a die drei Curvenzüge

$$r_1 + r_2 - r_3 = a, \quad r_1 - r_2 + r_3 = a, \quad -r_1 + r_2 + r_3 = a \dots 2)$$

besitzt und auch keinen weiteren, da jede durch O gezogene Gerade bereits in der grösstmöglichen Anzahl von Punkten, nämlich 8, schneidet. Dabei treten 6 Doppelpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$

auf, da z. B. $r_1 - r_2 + r_3 = a$ und $-r_1 + r_2 + r_3 = a$ gleichzeitig befriedigt werden durch $\pm(r_1 - r_2) = 0$ und $r_3 = a$, d. h. man erhält zwei Doppelpunkte, wenn man den Kreis $r_3 = a$ schneidet mit der Geraden, welche auf 12 im Halbirungspunkte senkrecht errichtet ist. In Fig. 5 ist die Curve $\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 = a$ völlig für einen gewissen Werth von a construirt, wenn die vier Punkte 1, 2, 3, 4 die Ecken eines Quadrates bilden. Es resultiren in diesem speciellen Falle fünf Ovale mit 12 Doppelpunkten $\alpha, \beta, \dots \pi, \iota$, die man einfach construiren kann.

Es ist dabei nur zu beachten, dass die beiden Curvenzüge $\pm(r_1 - r_2) + r_3 + r_4 = a$, welche hier existiren, die beiden Schnittpunkte der Geraden $\pm(r_1 - r_2) = 0$ und des Kegelschnittes $r_3 + r_4 = a$ gemeinsam haben. Ein Umstand ist aber besonders zu erwähnen, erstens dass die Tangentenconstruction für jeden Curvenzug derselben rationalen Curve nach dem Vorzeichen der einzelnen r in der früher angegebenen Weise zu modificiren ist, und dass selbst bei festen Grundpunkten, z. B. viere, die Gestalt der rationalen Curve — völlig in Analogie zu den Kegelschnitten — vielfach variirt, je nach dem Werthe von a , da z. B., wie Fig. 6 lehrt, auch 8 Curvenzüge auftreten können, von denen vier sich ins Unendliche erstrecken mit 12 reellen Doppelpunkten. Ich komme später hierauf zurück. Bei einer grösseren Anzahl von Fundamentalpunkten können, wie ich hier bemerke, noch höhere, im Endlichen gelegene vielfache Punkte auftreten, so kann z. B. bei $\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 \pm r_5 = a$, wenn die drei Gleichungen

$$\pm(r_1 - r_2) = 0, \quad \pm(r_4 - r_3) = 0, \quad r_5 = a$$

gleichzeitig befriedigt werden können, wie sich aus

$$\pm(r_1 - r_2) \pm (r_3 - r_4) + r_5 = a$$

ergibt, ein vierfacher Punkt der Curve resultiren. Die beiden Figuren 5 und 6 lassen vermuthen, dass $\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 = a$ rationalisirt auf eine Curve 10. Ordnung führt, entgegen der Vermuthung, dass sie von der Ordnung $2^4 = 16$ sei; allein es tritt in der That ein Zerfallen derselben ein, indem eine gewisse Gerade mehrfach mitzählt. Dieser Punkt kann erst später beleuchtet werden und führt wieder, wie anticipando bemerkt werden soll, auf ein zu den Kegelschnitten ganz analoges Verhalten. — Die

zu Fig. 5 analoge Fläche, wenn die vier Radienvectoren von den Eckpunkten eines Tetraëders ausgehen, besteht, wenn a innerhalb gewisser Grenzen liegt, offenbar aus fünf im Endlichen gelegenen Flächenzügen und besitzt sehr bemerkenswerthe im Folgenden erwähnte Eigenschaften. Vorläufig soll jedoch die Rationalisirung erledigt werden.

III.

Rationalisirung und Brennpunkte, sowie deren Vertheilung.
Ist die Curve

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm \dots \pm r_n - a = 0 \quad 1)$$

zu rationalisiren, so setze man

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n - a = f(r_1, r_2, \dots r_n)$$

und hat dann offenbar, um die Gleichung

$$r_1 + r_2 + \dots r_n - a = 0$$

von der in r_1 befindlichen Quadratwurzel zu befreien, nur das Product $f(r_1, r_2, \dots r_n) \cdot f(-r_1, r_2, \dots r_n)$ zu bilden, um durch Nullsetzen desselben eine Gleichung zu gewinnen, welche nur mehr r_1^2 enthält. Die Gleichung 1) gibt daher, indem der eben geschilderte Process wiederholt wird, rationalisirt

$$\Pi f(\pm r_1, \pm r_2, \dots \pm r_n) = 0, \quad 2)$$

wobei das Product 2^n Factoren enthält, indem jede Zeichencombination in den r zu gebrauchen ist. Die Curve 1) wird daher rationalisirt allgemein von der Ordnung 2^n sein, wenn etwaige mehrfach zählende Theile bei etwaiger Zerfällung in geeigneter Multiplicität mitzählen. Aus dem Bisherigen ergibt sich jetzt, dass in der That z. B. die beiden Curvenzüge

$$r_1 + r_2 - r_3 - a = 0 \quad \text{und} \quad r_1 - r_2 + r_3 - a = 0$$

als Theile derselben rationalen Curve aufzufassen sind, wie dies früher behauptet wurde. Ich will nun das Product in 2) für $n=2$, 3, 4 wirklich bilden, da sich hieraus schon das Verfahren ergeben wird, um von dem Falle $n-1$ aus zu dem n übergehen und das Product 2) bis auf rein numerische Constante sofort hinschreiben

zu können. Die Bestimmung der erwähnten Constanten kann dann ohne Schwierigkeit auf vielfache Weise bewirkt werden. Wenn nun $r_1 + r_2 - a = 0$ zu rationalisiren ist, so hat man nach Obigem das Product zu bilden:

$$(r_1 + r_2 - a)(r_1 - r_2 - a)(-r_1 + r_2 - a)(-r_1 - r_2 - a) \alpha$$

und dasselbe stellt, gleich Null gesetzt, die rationale Form dar.

Ich bilde das letztere offenbar auch, indem ich die Gleichung $r_1 + r_2 = a$ quadrire, wodurch resultirt $a^2 - r_1^2 - r_2^2 = 2r_1r_2$, welche Gleichung auf Null reducirt, offenbar das Product aus dem ersten und vierten Factor in α) darstellt. Quadrire ich sie nochmals, d. h. multiplicire ich sie mit dem zweiten und dritten Factor von α), so ergibt sich

$$(a^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_1^2r_2^2 = 0 \quad \beta)$$

die rationale Form der Kegelschnitte. Die Glieder mit dem grössten Exponenten in β) werden offenbar den Coëfficienten haben $(-1 - 1)^2 - 4 = 0$, wie man auch sofort aus der mit β) identischen Gleichung γ)

$$(r_1^2 - r_2^2)^2 - 2a^2(r_1^2 + r_2^2) = 0 \quad \gamma)$$

erkennt, und dies heisst, die Gleichung β) stellt die doppelt-zählende unendlich ferne Gerade und eine Curve zweiter Ordnung dar, die einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel natürlich sein kann, je nach der Lage der beiden Fundamentalpunkte, von welchen r_1 und r_2 ausgehen und dem Verhältnisse ihrer Distanz zu a , da dann z. B. der Curvenzug $r_1 + r_2 = a$ allein einen Sinn hat, also eine Ellipse vorliegt, oder die beiden Züge $r_1 - r_2 = a$ - $r_1 + r_2 = a$, also eine Hyperbel resultirt. Genau die analoge Erscheinung tritt bei mehreren Fundamentalpunkten auf und ebenso ein Zerfallen der rationalen Curve, wenn n eine gerade Zahl ist. Ehe ich zu $n=3$ übergehe, will ich jedoch aus dem Producte 2) eine Folgerung ziehen. Dasselbe besteht aus 2^n Factoren, von denen 2^{n-1} das Glied $+r_1$ und 2^{n-1} das Glied $-r_1$ enthält. Das Product der ersteren soll mit $\varphi(+r_1, r_2, r_3 \dots r_n)$ oder kurz $\varphi(+r_1)$, das der letzteren also mit $\varphi(-r_1)$ bezeichnet werden. Die Gleichung 2) lautet jetzt $\varphi(+r_1) \cdot \varphi(-r_1) = 0$ und übergeht für $r_1 = \theta$ in $[\varphi(0, r_2, r_3, \dots r_n)]^2 = \theta$, d. h. der Kegel-

schnitt $r_1=0$, welcher aus den beiden Geraden $y-b_1 \pm i(x-a_1)=0$ besteht, berührt die Curve 1) allgemein 2^{n-1} mal, und da die beiden letzten Geraden offenbar durch die beiden Kreispunkte J_1 und J_2 hindurchgehen, so kann man von denselben, entsprechend den Gleichungen $r_1=0, r_2=0 \dots r_n=0, 2n$ im allgemeinen mehrfach berührende Tangenten ziehen. Sieht man von den mehrfach zählenden Kreispunkten, die ohnehin im Unendlichen liegen, ab, und combinirt die $2n$ erwähnten Tangenten zu paarweise conjugirten Geraden, so ergibt sich der Satz:

„Die Curve 1) hat die n Fundamentalpunkte zu reellen Brennpunkten und besitzt ausserdem noch $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare complex conjugirter ebenfalls im Endlichen gelegener Brennpunkte.“

Was die Vertheilung der letzteren betrifft, so ergibt sich dieselbe auf folgende Weise: Wenn durch die Gleichung $\pm r_1 \pm r_2 = 2a$ eine Curve zweiter Ordnung definiert ist und die beiden Fundamentalpunkte haben die Coordinaten $y=0$, so lauten nach Obigem die Gleichungen der vier Tangenten, die von den Kreispunkten ausgehen, offenbar $y \pm i(x \pm c) = 0$ und die Coordinaten der vier endlichen Brennpunkte sind offenbar

$$\begin{array}{l} x = \pm c \\ y = 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} x = 0, \\ y = \pm ci, \end{array}$$

d. h. sie bilden ein Quadrat in gewissem Sinne, das resultirt, wenn man die beiden reellen Brennpunkte verbindet und auf der Senkrechten im Halbierungspunkte die Strecken $\pm ci$ aufträgt. Dies gibt, da man bei der Curve 1) offenbar zwei beliebigen der n reellen

Brennpunkte die Coordinaten $\begin{array}{l} x = \pm c \\ y = 0 \end{array}$ beilegen kann, folgenden

Satz über die Vertheilung der $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare conjugirter Brennpunkte:

„Um von den n reellen Brennpunkten zu den $\frac{n(n-1)}{2}$ Paaren complex conjugirten übergehen zu können, hat man dieselben nur zu $\frac{n(n-1)}{2}$ Paaren zu ordnen, und erhält zu jedem dieser reellen Paare ein complex conjugirtes, indem man auf der

Senkrechten im Halbirungspunkte ihrer Verbindungsstrecke sich diese halbe Strecke multiplicirt mit i nach beiden Seiten hin aufgetragen denkt.“

Damit dürfte ein klares Bild über die Vertheilung der n^2 endlichen Brennpunkte gewonnen sein und ich bemerke nur, dass es scheint, als sollte jeder derselben eigentlich mit einer gewissen Multiplicität im Allgemeinen strenge genommen zählen, doch soll hierauf nicht eingegangen werden. Zu beachten ist jedoch, um zu dem Kegelschnitte zurückzukehren, die völlige Symmetrie beim Übergange von den zwei reellen zu den zwei complex conjugirten Brennpunkten und umgekehrt, und diese Symmetrie führte mich auf die Frage, ob man nicht durch die imaginären Brennpunkte die Ellipse z. B. ebenso definiren kann, wie durch die reellen. Dies trifft in der That zu, denn die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + (y - ci)^2} + \sqrt{x^2 + (y + ci)^2} = 2\sqrt{a^2 - c^2}$$

gibt rationalisirt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

also dieselbe Ellipse und damit den mir persönlich neuen und sehr interessanten Satz:

„Bei der Ellipse und Hyperbel ist auch die Summe oder Differenz der von den imaginären Brennpunkten ausgehenden Radienvectoren constant, und zwar gleich der kleinen Achse.“

Aus der früher gemachten Bemerkung, dass der Kegelschnitt $r_1^2 = 0$ die rationalisirte Curve 1) 2^{n-1} mal im Allgemeinen berührt, folgt z. B. unmittelbar, dass für die Curve

$$\pm r_1^3 \pm r_2^3 \pm r_3^3 = a^3$$

eine gewisse Anzahl von Brennpunkten sofort angegeben werden kann, und dieses Ergebniss lässt sich noch bedeutend verallgemeinern, wenn man an Stelle von r_i eine Quadratwurzel aus einem in x und y beliebig hohen Ausdruck treten lässt. Man kann so algebraische Curven beliebig hohen Grades unmittelbar hinschreiben, die ein gewisses System im Endlichen gelegener Brennpunkte haben etc. Auch gelten die bisherigen Sätze in Bezug auf Brennpunkte offenbar noch bei Curven

$$f(r_1, r_2, \dots r_n) = a,$$

wenn f keine algebraische Function der r ist, wenn nur in f lauter ungerade Potenzen von den r auftreten.

Ich kehre nun nochmals zur Bildung des Productes

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \dots \pm r_n - a) = 0 \tag{A}$$

zurück. Man hat für $n=1$ sofort

$$\Pi(\pm r_1 - a) = a^2 - r_1^2 \tag{B}$$

und hat, um $\Pi(\pm r_1 \pm r_2 - a)$ zu bilden, nur zu beachten, dass dasselbe für $r_2=0$ in das Quadrat von B) übergeht, woraus folgt, dass dasselbe wegen der Symmetrie in r_1 und r_2 gleich ist $(a^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 +$ Gliedern, die mit r_1 und r_2 gleichzeitig verschwinden, so dass man, weil nur gerade Potenzen der r auftreten können, sofort den Ansatz hat:

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 - a) = (a^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 + C r_1^2 r_2^2,$$

worin C eine rein numerische Constante ist. Um C zu bestimmen, kann man in der letzten Gleichung, welche eine algebraische Identität ist, z. B. setzen $a=0$ und erhält $C=-4$, so dass sich ergab

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 - a) = (a^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4 r_1^2 r_2^2. \tag{C}$$

Für das Folgende ist nun die Bemerkung wichtig, dass das Product A) so beschaffen ist, dass a genau in derselben Weise sich verhält wie die r , denn es ist offenbar

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \pm \dots \pm r_n - a) = \Pi(r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm \dots \pm r_n \pm a),$$

d. h. A) ist in $a, r_1, r_2, \dots r_n$ symmetrisch und enthält nur die geraden Potenzen dieser Grössen.

Soll jetzt

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 - a)$$

gebildet werden, so hat man genau in derselben Weise wie für $n=2$ schliessend, indem zuvor $r_3=0$ gesetzt und die eben erwähnte Symmetrie beachtet wird, unmittelbar den Ansatz:

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 - a) = \{(a^2 - \Sigma r_i^2)^2 - 4 \Sigma r_1^2 r_2^2\}^2 - C a^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2$$

und erhält z. B. aus $r_1 = r_2 = r_3 = a = 1$ $C = 64$, also ergibt sich

$$\Pi(\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 - a) = \{(a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4 \Sigma r_1^2 r_2^2\}^2 - 64 a^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2. \quad D)$$

Um jedes Bedenken gegen die Gleichung $D)$, das etwa auftreten könnte, zu beheben, will ich dieses Resultat noch direct herleiten. Die Gleichung

$$r_1 + r_2 + r_3 = a$$

gibt quadirt offenbar

$$2 \Sigma r_1 r_2 = a^2 - \Sigma r_1^2$$

und derselbe Process nochmals angewendet, führt zur Gleichung

$$8 r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3) = (a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4 \Sigma r_1^2 r_2^2$$

oder

$$8 a r_1 r_2 r_3 = (a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4 \Sigma r_1^2 r_2^2$$

und daher resultirt durch nochmaliges Quadriren

$$\{(a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4 \Sigma r_1^2 r_2^2\}^2 - 64 a^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2 = 0$$

die frühere Gleichung $D)$. Wiederholt man genau dieselben Schlüsse, wie bisher — ich unterdrücke sie desshalb als überflüssig — so erhält man für $n = 4$ den Ansatz unmittelbar

$$\begin{aligned} \Pi(\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 - a) = & [\{(a^2 - \Sigma r_1^2)^2 - 4 \Sigma r_1^2 r_2^2\}^2 - 64 a^2 \Sigma r_1^2 r_2^2 r_3^2 \\ & - 64 r_1^2 r_2^2 r_3^2 r_4^2]^2 - a^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2 r_4^2 [\alpha (a^6 + \Sigma r_1^6) + \beta (a_4 \Sigma r_1^4 \\ & + \Sigma r_1^3 r_2^2 + a^2 \Sigma r_1^4) + \delta (a^2 \Sigma r_1^2 r_2^2 + \Sigma r_1^2 r_2^2 r_3^2)], \quad E) \end{aligned}$$

worin nur mehr die rein numerischen Constanten α , β , δ zu bestimmen sind, was gar keine Schwierigkeit hat und was z. B. dadurch geschehen kann, dass man in der letzten Gleichung

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$$

setzt und in der resultirenden Gleichung die Coëfficienten der gleich hohen Potenzen von a gleichsetzt, oder in irgend welcher andrer Weise, stets erhält man

$$\alpha = 2^{11}, \beta = -2^{11}, \delta = 2^{12},$$

wodurch in $E)$ alles bestimmt ist. Genau in derselben Weise kann man von dem Falle $n - 1$ zu dem n übergehen und sofort das

Product bis auf leicht zu bestimmende numerische Constanten ohne weiteres hinschreiben; ich gehe nur deshalb hierauf nicht näher ein, weil die Formeln offenbar sehr lang werden und bemerke nur, dass auch das Gesetz für die numerischen Coefficienten keine wesentlichen Schwierigkeiten bieten dürfte.

Um jedoch die Fruchtbarkeit dieser Schlussweise an einem anderen Beispiele zu zeigen, soll die Gleichung

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + a = \theta$$

rationalisirt werden.

Setzt man $\sqrt[3]{A} = \rho_1$, $\sqrt[3]{B} = \rho_2$ und ist α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^3 = 1$, so hat man, um die rationale Form zu gewinnen, bekanntlich das Product zu bilden

$$\prod_{\substack{i=3 \\ \lambda=3 \\ i=1 \\ \lambda=1}} (\alpha^i \rho_1 + \alpha^\lambda \rho_2 + a).$$

Setzt man $\rho_2 = 0$ für einen Moment, so ergibt sich hiefür $(\rho_1^3 + a^3)^3$, folglich hat man den Ansatz

$$\Pi(\alpha^i \rho_1 + \alpha^\lambda \rho_2 + a) = (a^3 + \rho_1^3 + \rho_2^3)^3 + C a^3 \rho_1^3 \rho_2^3,$$

da die Symmetrie in den dritten Potenzen von a , ρ_1 und ρ_2 auch hier weiter besteht. Aus der Annahme $a = \rho_1 = \rho_2$ ergibt sich $C = -27$, so dass die rationale Form lautet:

$$(a^3 + A + B)^3 - 27 a^3 AB = 0.$$

Ganz analog könnte jetzt $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} + a = 0$ rationalisirt werden. Genau in derselben Weise gibt z. B., wenn r_1 und r_2 vierte Wurzeln sind, die Gleichung $r_1 + r_2 + a = 0$ rationalisirt

$$(a^4 + r_1^4 + r_2^4)^4 - 8 \Sigma a^{12} r_1^4 - 8 a^4 r_1^4 r_2^4 (a^4 + r_1^4 + r_2^4) = 0 \text{ u. s. f.}$$

Überhaupt scheint es, dass die Verallgemeinerung dieser Methode auf beliebig hohe Irrationalitäten keine erhebliche Mühe bereitet, indem gewisse Producte thatsächlich gebildet werden. Daraus ergibt sich auch die Verallgemeinerung der früheren Brennpunktsätze und der mehrfachen Berührung, z. B. der Curve

$$\sqrt[n]{U_1} + \sqrt[n]{U_2} - a = 0 \text{ durch die Curven } U_1 = 0 \text{ und } U_2 = 0 \text{ etc.}$$

Es ist selbstverständlich, dass die Gleichungen *C*), *D*) und *E*) z. B., wenn unter r_i der Ausdruck $\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}$ verstanden wird, auch die rationale Form der früher angegebenen Flächen darstellen. Ich übergehe jetzt zu einigen Sätzen über die Gestalt etc. dieser Curven, da im weiteren Verlaufe an die Gleichungen *D*) und *E*) wieder angeknüpft wird.

IV.

Endliche und unendlich grosse Curvenzüge. Asymptoten und Asymptotenkegel. Was die Gestalt der Curvenzüge anbelangt, resp. ihre Existenz, so kann man folgenden Satz aufstellen. Wenn der Curvenzug $\pm r_1 \pm r_2 \pm \dots \pm r_n - a = 0$ für eine gewisse Zeichencombination existirt, so liegt derselbe bei ungeradem n völlig im Endlichen, bildet also ein Oval, da er sich wegen der Eindeutigkeit der Tangentenconstruction nie selbst schneiden, also einen mehrfachen Punkt bilden kann. Die Erstreckung ins Unendliche ist also nur bei geradem n möglich und soll die Bedingung gleich dafür entwickelt werden. Ich zeige zu diesem Zwecke, dass r_i und r_h , wenn die beiden Punkte i und h eine endliche Distanz besitzen, immer gleichzeitig so unendlich werden, dass $\lim \frac{r_i}{r_h} = 1$ ist. In der That, es sei z. B. $r_h < r_i$, so beschreibe man um M mit r_h einen Kreis, und hat sofort (Fig. 7) $r_i = r_h + iN = r_h + \varepsilon \cdot iS = r_h + \varepsilon \cdot ih \cdot \cos \alpha$, woraus durch Division mit r_h , da ε ein echter Bruch ist, ih und $\cos \alpha$ stets endlich bleiben, folgt, dass in der Grenze für unendlich fernes M $\lim \frac{r_i}{r_h} = 1$ ist. Hiermit ist auch die Behauptung für den Fall eines ungeraden n erwiesen und die Möglichkeit unendlich grosser Curvenzüge bei geradem n allein dargethan. Der Kreis und Fig. 4, 5, 6 illustriren die einfachsten Fälle. Man erhält jetzt die Bedingung dafür, dass der Curvenzug *A*)

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm \dots \pm r_{2n} - a = 0 \quad A)$$

sich ins Unendliche wirklich erstreckt, sowie seine Asymptotenrichtungen auf folgende Weise. Zunächst ist wegen des obigen Grenzwertes, da a als endliche Strecke angenommen wird, nothwendig, dass die Hälfte der r positives, die andere negatives Vorzeichen habe. Zu diesem Zwecke nehme ich z. B. den Curvenzweig

$$r_1 - r_2 + r_3 - r_4 - a = 0 \quad B)$$

und frage, wenn die vier reellen Brennpunkte im Endlichen liegen, welches ist der Maximalwerth von $r_1 - r_2 + r_3 - r_4$, wobei die vier r die gegebenen vier Punkte mit einem beliebigen Punkte M der Ebene verbinden?

Aus dem Früheren ergibt sich, dass $(r_1 - r_2) + (r_3 - r_4)$ einen Maximalwerth — selbstverständlich einen positiven — annehmen wird, dann, und nur dann, wenn jeder der beiden Summanden $r_1 - r_2$ und $r_3 - r_4$ möglichst gross wird, was offenbar nur eintritt, wenn (Fig. 8) M ins Unendliche rückt; dann ist aber offenbar $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = 12 \cos \alpha + 34 \cos \beta$, und es erübrigt noch die Bestimmung von α und β . Ich verfare zu diesem Zwecke bloss rechnerisch zunächst und setze $12 = a$, $34 = b$. Dann ist also Fig. 9

$$y = r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = a \cos x + b \cos(\gamma - x)$$

zu einem Maximum zu machen. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin x + b \sin(\gamma - x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -[a \cos x + b \cos(\gamma - x)]$$

und erhält aus $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\sin x = \frac{b \sin \gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}}$$

und für y den Maximalwerth $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}$ bei unendlich fernem M . Dieser letzte Werth ist offenbar die schliessende Strecke, wenn a und b einfach wie Kräfte zusammengesetzt werden. Hiernach lässt sich vermuthen, dass die Function $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + r_5 - r_6$ zum Maximalwerthe die resultirende Strecke hat, wenn 12, 34 und 56 einfach nach dem Kräftepolygon zusammengesetzt werden, was die geometrische Analyse in der That sofort gibt. Denn nehme ich wieder z. B. nur vier Brennpunkte, die ich mit einem unendlich fernen Punkte M verbunden denke, so darf ich, ohne etwas an $r_3 - r_4$ zu ändern, diese Strecke parallel zu sich nach 24' verschieben und habe (Fig. 10) sofort $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = c + d$, d. h. gleich der Projection von

$$14' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \cos \gamma}$$

auf die Richtung 1 M .

Nun wird offenbar diese Projection ein Maximum, wenn 1 M mit 14' zusammenfällt und damit ist bewiesen:

„Der Curvenzug $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 - a = 0$ existirt und erstreckt sich ins Unendliche, wenn $a < 14'$.“

Ich bemerke, dass die geometrische Überlegung, wenn man von $(r_1 - r_4) + (r_3 - r_2)$ ausgegangen wäre, wie eine leicht zu entwerfende Figur bestätigt, zu genau demselben Resultate geführt hätte, und so in der That nur ein Maximum, nämlich das obige für $r_1 - r_2 + r_3 - r_4$ resultiren würde. Auch die Asymptotenrichtungen lassen sich jetzt einfach angeben. Denn um z. B. für den Curvenzug $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 - a = 0$, wo $a < 14'$ (Fig. 11) die letzteren zu finden, hat man in dem Kreise über l , der schliessenden Strecke von 12 und 34, als Durchmesser, von 1 aus nur die Sehnen a einzutragen, um durch 1 U und 1 V die Asymptotenrichtungen offenbar zu erhalten. Demnach ist bewiesen — und die ganze bisherige Überlegung überträgt sich sofort auf den Raum, also auf die Flächen $\pm r_1 \pm r_2 \pm \dots \pm r_n - a = 0$ — dass z. B. der Zug $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 - a = 0$ existirt und sich ins Unendliche erstreckt, wenn $a < 14'$ ist. Für $a = 14'$ liegt er völlig im Unendlichen. Ist aber $a < 14'$, so wird von $r_1 - r_2 + r_3 - r_4$ der Werth a auch im Endlichen erreicht und die Curve erstreckt sich nach zwei leicht construierbaren Richtungen ins Unendliche; weiter sind diese Asymptotenrichtungen auch dem Curvenzuge $r_2 - r_1 + r_4 - r_3 - a = 0$ gemeinsam und existirt derselbe genau unter derselben Bedingung, also beide immer gleichzeitig, ganz in Analogie zur Hyperbel. — Hieraus ergibt sich eine einfache Construction der Asymptoten bei der Hyperbel durch einen Kreis über 12 und zugleich, warum die Ellipse imaginäre Asymptoten hat.

Die Hyperbel als einfachster Fall, wenn eine gerade Anzahl von reellen Brennpunkten gegeben ist, führte mich auch auf folgenden hübschen Satz, dessen Beweis ich aber zur grösseren Kürze nicht in extenso gebe, sondern nur bemerke, dass derselbe mit Berücksichtigung der obigen parallelen Verschiebung der Strecken leicht zu erbringen ist. Dieser Satz lautet:

„Die zwei Curven, resp. Flächenzüge

$$\pm (r_1 - r_2 + r_3 - r_4 \dots + r_{2n-1} - r_{2n}) = a$$

existiren stets gleichzeitig und erstrecken sich ins Unendliche, wobei sie zwei gemeinsame Asymptoten, resp. Asymptotenkegel besitzen, dann, und nur dann, wenn die schliessende Strecke l des aus 12, 34, $(2^{n-1} \cdot 2^n)$ gebildeten offenen Polygons grösser als a ist. Die beiden gemeinsamen Asymptoten bilden mit l gleiche Winkel, und die Asymptotenkegel sind Kreiskegel, die man erhält, indem über l als Durchmesser eine Kugel beschrieben wird und in dieselbe von dem einen Endpunkte der Strecke l aus alle Sehnen gleich a eingetragen werden, d. h. der Öffnungswinkel dieser Kegel ist durch die Gleichung bestimmt, $\cos \alpha = \frac{a}{l}$. Weiter

erhält man genau auf dieselbe Weise die Asymptotenrichtungen und Asymptotenkegel, z. B. bei jeder Permutation der r — die Hälfte muss positiv sein, die andere negativ — durch das analoge offene Polygon, und es erübrigt zur völligen Bestimmung der sämtlichen Asymptoten, resp. Asymptotenkegelpaare, nur mehr die Angabe des Scheitels derselben.“ Dieser Scheitel ist nun für alle möglichen Züge derselbe, nämlich der Schwerpunkt des aus den reellen Brennpunkten bestehenden Punktsystems. Das Rotationshyperboloid ist wie die Hyperbel eine Illustration des einfachsten Falles. Die angegebenen Curven und Flächen, deren Ordnung offenbar beliebig hoch gemacht werden kann, dürften die einzigen bekannten algebraischen sein, deren Asymptoten stets auf die angegebene Weise sich einfach construiren lassen. Ehe ich zum letzten Abschnitte dieser Abtheilung übergehe, will ich die Bedingung ermitteln, wann bei vier gegebenen Brennpunkten das Oval $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = a$ existirt. Die vier Punkte 1, 2, 3, 4 bilden — es sind alle r positiv zu nehmen — ein Viereck, z. B. Fig. 12. Es fragt sich, für welche Lage von M wird $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ ein Minimum? Es sei M ein beliebiger Punkt der Ebene, so denke ich mir die Ellipse beschrieben, welche 3 und 4 zu Brennpunkten hat und deren grosse Achse $3M + 4M$ ist. Verschiebe ich M auf dieser Ellipse nach N , auf die Gerade 12, so bleibt $r_3 + r_4$ dabei constant, allein $r_1 + r_2$ nimmt offenbar ab, also die ganze Summe $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ nimmt bei dieser

Verschiebung ab. Verschiebe ich jetzt N nach O , so bleibt $r_1 + r_2$ constant und $r_3 + r_4$ nimmt ab und wird offenbar in O am kleinsten, d. h. im Punkte O hat die Summe $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ den Maximalwerth erreicht. Setzt man jetzt $1O + 2O + 3O + 4O = m$, so dass m eine gegebene Strecke ist, so zieht sich offenbar das Oval $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = a$, wenn $a = m$ ist, auf den Punkt O zusammen und existirt für Werthe von a , die kleiner als m sind, nicht, — es existiren dann andere Züge der Curve $\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 = a$, welche sonst nicht existiren; ist dagegen $a > m$, so existirt dieses Oval und umschliesst den Punkt O , indem es sich mit zunehmendem a gleichzeitig erweitert.

V.

Ebene Krümmungscurven auf gewissen Flächen, die Transformationen in sich zulassen. Punkte, durch welche mehr als zwei Krümmungscurven hindurchgehen. — Nimmt man die vier Eckpunkte eines regelmässigen Tetraeders als Ausgangspunkte der vier r an, und lässt den Punkt xyz sich so bewegen, dass die Gleichung α) stets erfüllt wird

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 = a, \quad \alpha)$$

so erhält man die in III. Gleichung E) rationalisirte Fläche. Dieselbe ist sehr wahrscheinlich von der 10. Ordnung und besteht, wenn a geeignet gewählt ist (vergl. Fig. 5), aus fünf völlig im Endlichen gelegenen Flächenzügen, nämlich

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = a \text{ I); } & \quad r_1 + r_2 + r_3 - r_4 = a \text{ II); } \\ r_1 + r_2 - r_3 + r_4 = a \text{ III); } & \quad r_1 - r_2 + r_3 + r_4 = a \text{ IV); } \\ & \quad -r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = a \text{ V).} \end{aligned}$$

Diese fünf Flächenzüge durchsetzen sich in sechs Ellipsen, nämlich

II und III	in der Ellipse	$r_1 + r_2 = a$,	$\pm (r_3 - r_4) = 0$
II	"	IV " " "	$r_1 + r_3 = a$, $\pm (r_2 - r_4) = 0$
II	"	V " " "	$r_2 + r_3 = a$, $\pm (r_1 - r_4) = 0$
III	"	IV " " "	$r_1 + r_4 = a$, $\pm (r_2 - r_3) = 0$
III	"	V " " "	$r_2 + r_4 = a$, $\pm (r_1 - r_3) = 0$
IV	"	V " " "	$r_3 + r_4 = a$, $\pm (r_1 - r_2) = 0$

Für die Fläche α) gilt die früher bewiesene Normalenconstruction, und es ergibt sich hieraus Folgendes: Denkt man sich die sämtlichen Symmetrieebenen des Tetraëders, so schneidet jede den Flächenzug I in einer ebenen Krümmungcurve, weil für jeden Punkt der Schnittcurve die Normale in dieser Ebene bleibt, sämtliche Normalen sich also successive schneiden, wodurch ja bekanntlich eine Krümmungcurve defnirt ist. Man erhält hiedurch auf den Flächenzug I sechs ebene Krümmungcurven, die sich in acht Punkten zu je dreien — entsprechend den vier Eckpunkten des Tetraëders und den vier Mittelpunkten der Seitenflächen — schneiden, und in sechs Punkten — entsprechend den Mittelpunkten der Kanten — zu je zweien schneiden. Die drei Symmetrieebenen, welche durch den Punkt 1 gehen, bestimmen aber offenbar auf dem Flächenzuge V ebenfalls drei ebene Krümmungcurven, die sich in zwei Punkten zu je dreien schneiden — entsprechend dem Punkte 1 und dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seitenfläche des Tetraëders — und Analoges gilt für die Züge II, III und IV. Demnach erhält man auf der Fläche α) im Ganzen 18 ebene Krümmungcurven, die sich in 16 Punkten zu je dreien und sechs Punkten zu je zweien schneiden, und zwar unter gleichen Winkeln. Durch die angegebenen 16 Punkte gehen noch drei weitere, aber nicht mehr ebene Krümmungcurven — die obige Normalenconstruction gibt dies einfach und führte mich mein geehrter Lehrer Prof. F. Lippich darauf — so dass auch hier sämtliche Krümmungslinien in den erwähnten singulären Punkten sich unter gleichen Winkeln schneiden, ebenso wie der Satz erhalten bleibt, dass längs jeder ebenen Krümmungcurve die Tangentialebene der Fläche mit der ersteren einen constanten Winkel bildet, hier 90° .

Die Fläche α) übergeht ferner offenbar bei den bekannten 12 Rotationen des Tetraëders — vergl. z. B. mein Octaëder in dem XLI. Bande der Denkschriften der kaiserlichen Akademie in Wien — in sich selbst, d. h. α) ist in sich selbst transformirbar. Genau in derselben Weise kann man, von den übrigen vier regelmässigen Körpern ausgehend, die Flächen erhalten

$$\begin{aligned} \pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 \pm r_4 \pm r_5 \pm r_6 &= a & \beta) & \text{beim Octaëder,} \\ \pm r_1 \pm r_2 \pm \dots \pm r_{12} &= a & \gamma) & \text{beim Ikosaëder,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pm r_1 \pm r_2 \pm \dots \pm r_8 &= a & \delta) & \text{beim Hexaëder,} \\ \pm r_1 \pm r_2 \pm \dots \pm r_{20} &= a & \varepsilon) & \text{beim Dodekaëder.} \end{aligned}$$

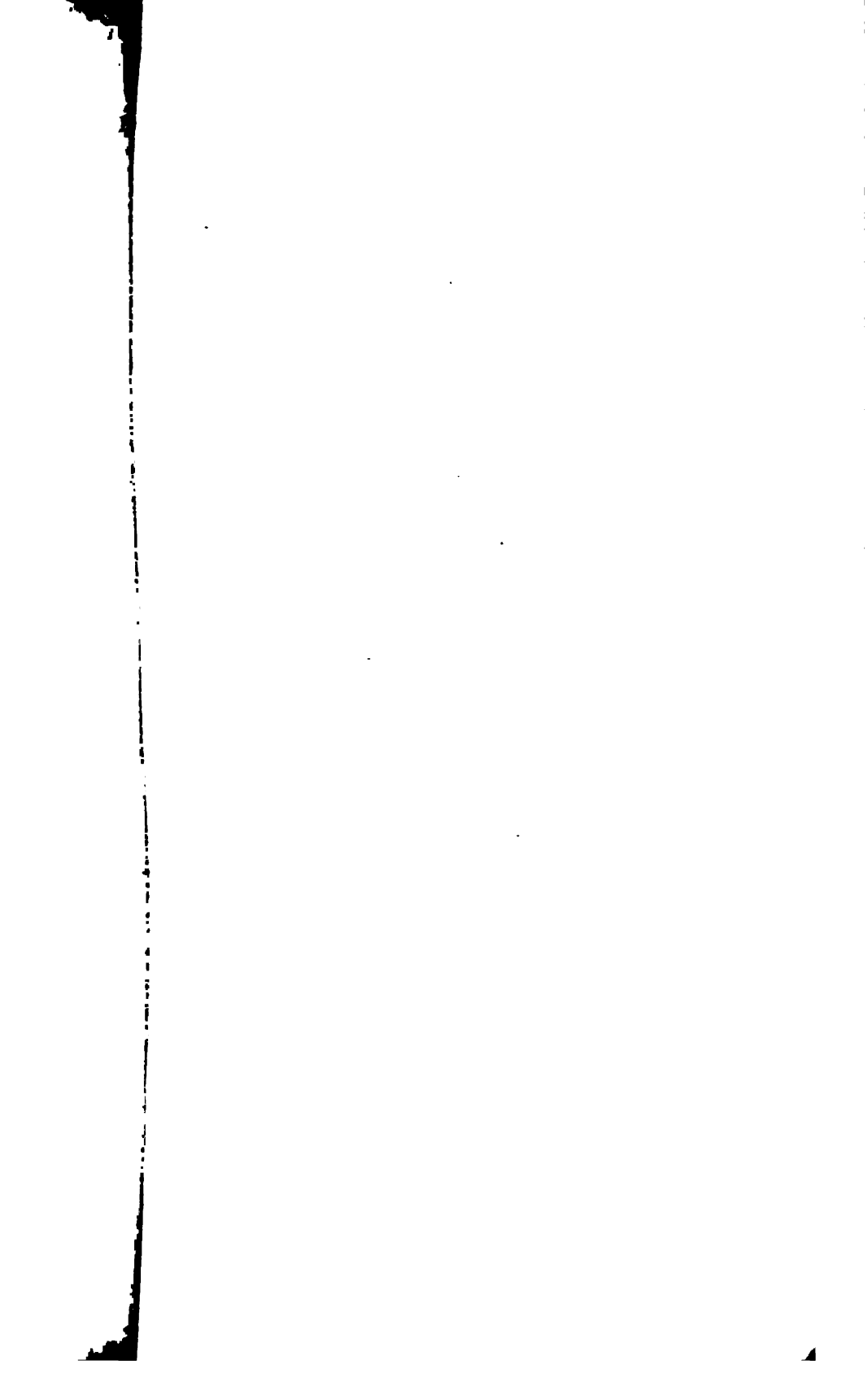
Man hat dann algebraische Flächen mit Transformationen in sich selbst, bei denen ebene Krümmungscurven auftreten, die sich in gewissen singulären Punkten zu je zweien, dreien, vieren und fünfен schneiden und die ich später genauer zu untersuchen gedenke. Die angegebenen Flächen haben, um im Sinne meines geehrten Lehrers Prof. Dr. F. Klein in Leipzig zu sprechen, den Typus der regelmässigen Körper.

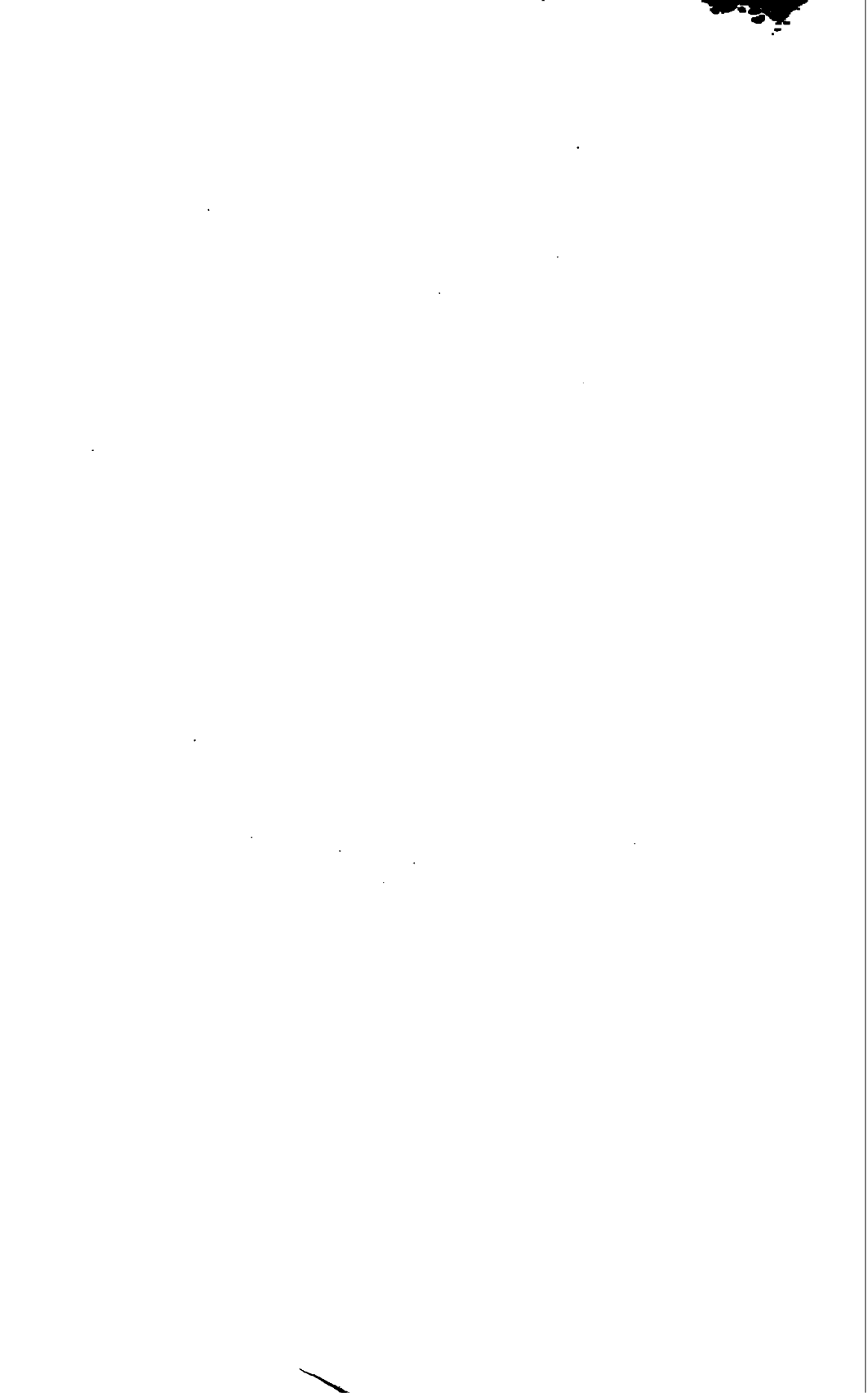
Man kann jedoch auch solche mit dem Typus der Pyramiden sofort construiren, indem man von den Eckpunkten eines regelmässigen ebenen Polygons ausgeht und dann hat die Fläche ζ), die von der 8. Ordnung ist, ihre rationale Gleichung ist in III D),

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm r_3 = a \qquad \zeta)$$

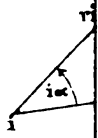
ebenfalls ebene Krümmungscurven und zwar hat der Flächenzug $r_1 + r_2 + r_3 = a$ vier ebene Krümmungscurven, und die Züge $r_1 + r_2 - r_3 = a$, $r_1 - r_2 + r_3 = a$, $-r_1 + r_2 + r_3 = a$ je eine.

Auf dem ersten Zuge liegen weiter zwei Punkte, durch welche drei ebene Krümmungscurven hindurchgehen u. s. f., kurz es liegt auf der Hand, dass man so algebraische Flächen construiren kann, bei denen durch zwei Punkte beliebig viele und zwar ebene Krümmungscurven hindurchgehen.

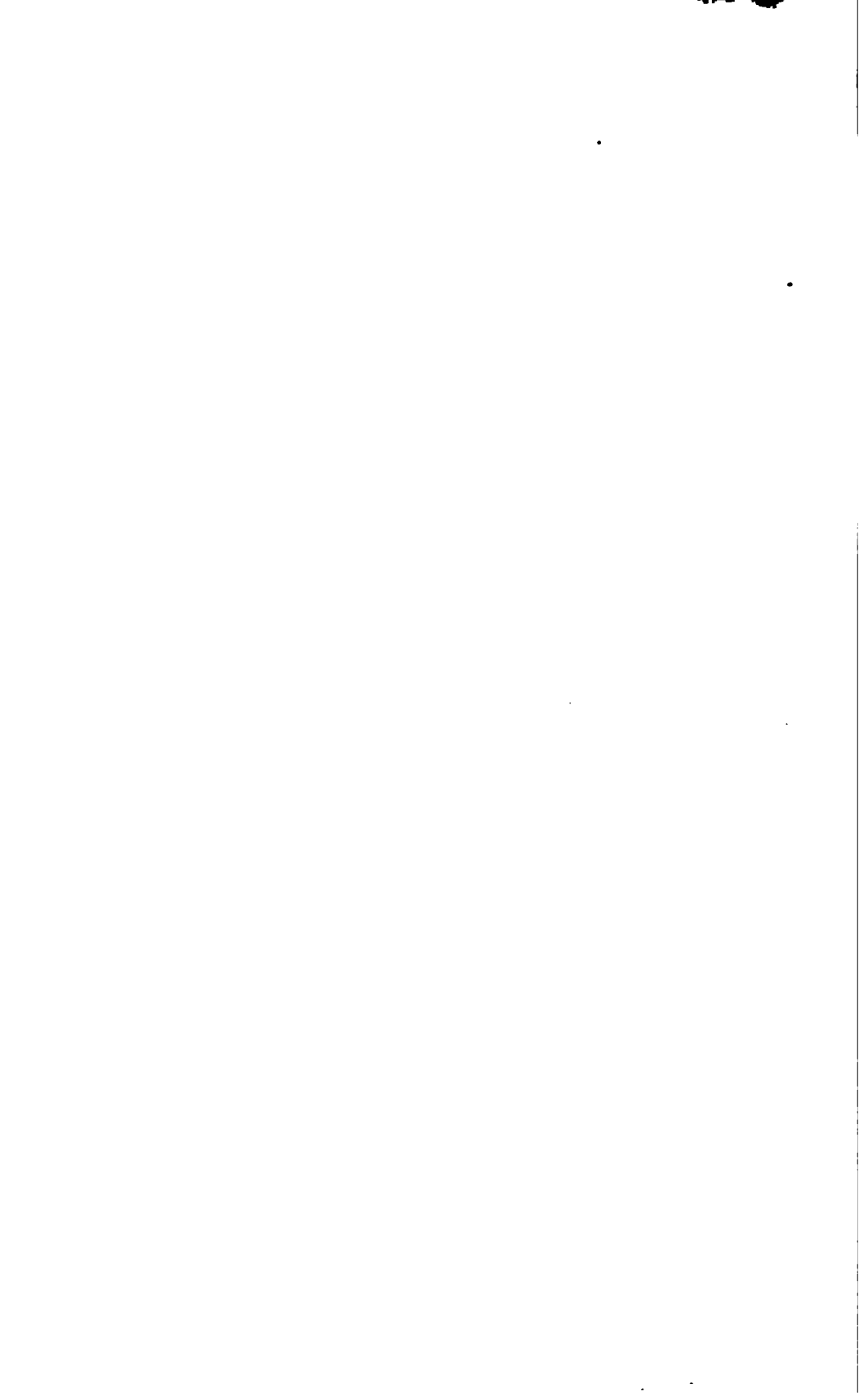




Puchta : 2



Seite 5 F. 201 m



Beitrag zur Auswerthung unendlicher Producte und Reihen.

Von **Reinhard Mildner**,
Realschulprofessor in Biberstadt.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Juli 1883.)

I.

Es soll der Werth der nachstehenden unendlichen Reihe für alle x , deren absolute Beträge kleiner als 1 sind, ermittelt werden.

Es sei:

$$1) \quad F(x) = \frac{1}{1^n - x^n} + \frac{1}{2^n - x^n} + \frac{1}{3^n - x^n} + \frac{1}{4^n - x^n} + \dots; \text{ also } [x] < 1$$

Zunächst entwickle man die einzelnen Glieder in Potenzreihen, geordnet nach steigenden Potenzen von x , so folgt unter der über x gemachten Voraussetzung:

$$\frac{1}{1^n - x^n} = \frac{1}{1^n} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{1}\right)^n} = \frac{1}{1^n} \left[1 + \frac{x^n}{1^n} + \frac{x^{2n}}{1^{2n}} + \frac{x^{3n}}{1^{3n}} + \dots \right]$$

$$\frac{1}{2^n - x^n} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^n} = \frac{1}{2^n} \left[1 + \frac{x^n}{2^n} + \frac{x^{2n}}{2^{2n}} + \frac{x^{3n}}{2^{3n}} + \dots \right]$$

$$\frac{1}{3^n - x^n} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^n} = \frac{1}{3^n} \left[1 + \frac{x^n}{3^n} + \frac{x^{2n}}{3^{2n}} + \frac{x^{3n}}{3^{3n}} + \dots \right]$$

.....

Alles addirt gibt:

$$2) \quad F(x) = S_n + S_{2n}x^n + S_{3n}x^{2n} + S_{4n}x^{3n} + \dots; [x] < 1$$

dabei stellt S_n die Summe der n ten Potenzen der reciproken ganzen Zahlen vor; nämlich:

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots$$

Der Logarithmus von $\Gamma(1-x)$ lässt sich, wie aus der Theorie der Gammafunctionen bekannt ist, durch folgende Potenzreihe ausdrücken:

$$3) \quad \lg \Gamma(1-x) = Cx + \frac{1}{2} S_2 x^2 + \frac{1}{3} S_3 x^3 + \frac{1}{4} S_4 x^4 + \dots,$$

wobei C durch nachfolgende Gleichung bestimmt wird:

$$C = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r} - \lg r \right) = 0.57721566\dots$$

Es ist ferner bekannt, dass aus der Reihe

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

der Werth der nachstehenden Reihe durch die Summe bestimmt ist:

$$\varphi(x) = A_0 + A_n x^n + A_{2n} x^{2n} + A_{3n} x^{3n} + \dots = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f(xe^{\frac{2g\pi i}{n}})$$

$\varphi(x)$ ist für alle x convergent, für welche $f(x)$, die ursprüngliche Reihe convergirt.

Dieser Satz auf Gleichung 3) angewendet, gibt, wenn in der Potenzreihe für $\lg \Gamma(1-x)$ immer $(n-1)$ Glieder weggelassen werden:

$$4) \quad \varphi(x) = \frac{1}{n} S_n x^n + \frac{1}{2n} S_{2n} x^{2n} + \frac{1}{3n} S_{3n} x^{3n} + \dots$$

$$= \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \lg \Gamma(1-xe^{\frac{2g\pi i}{n}}) = \frac{1}{n} \lg \prod_0^{n-1} \Gamma(1-xe^{\frac{2g\pi i}{n}})$$

Wird hier n als gerade Zahl vorausgesetzt, so geht die letzte Gleichung durch Vertauschung von x mit $-x$ über in:

$$5) \quad \varphi(-x) = \varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \prod_0^{n-1} (1+xe^{\frac{2g\pi i}{n}})$$

Durch Addition von 4) und 5) ergibt sich:

$$6) \quad 2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \prod_0^{n-1} \Gamma(1+xe^{\frac{2g\pi i}{n}}) \cdot \Gamma(1-xe^{\frac{2g\pi i}{n}})$$

Berücksichtigt man die Fundamenteigenschaft der Gammafunction:

$$\Gamma(1+\lambda) \cdot \Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}; \text{ wobei } [\lambda] < 1,$$

so verwandelt sich die Gleichung 6) in die nachstehende:

$$7) \quad 2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \frac{\pi^{n-1} x \pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}}{\sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}})}$$

Der Zähler kann leicht umgeformt werden, denn es ist:

$$\begin{aligned} \prod_0^{n-1} e^{\frac{2g\pi i}{n}} &= e^{\frac{2\pi i}{n} [1+2+3+\dots+(n-1)]} = e^{(n-1)\pi i} \\ &= \cos(n-1)\pi + i \sin(n-1)\pi = -1; \end{aligned}$$

da $(n-1)$ ungerade ist, demnach geht 7) über in:

$$7') \quad 2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \frac{-x^n \pi^n}{\pi^{n-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}})}$$

Es sei der Kürze halber:

$$\begin{aligned} P &= \prod_0^{n-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}) = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}) \cdot \prod_{\frac{n}{2}}^{n-1} \underline{\sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}})} \\ &= \sin \pi x \cdot \prod_1^{\frac{n}{2}-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}) \cdot \sin(x\pi e^{\pi i}) \cdot \prod_{\frac{n}{2}+1}^{n-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}) \end{aligned}$$

Der letzte Factor kann folgendermassen umgeformt werden, wenn die Substitutionen in umgekehrter Ordnung ausgeführt werden:

$$\prod_{n-1}^{\frac{n}{2}+1} \sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}) = \prod_1^{\frac{n}{2}} \sin(x\pi e^{\frac{2n-2g}{n}\pi i})$$

Dies beachtend, hat man für P den Ausdruck:

$$P = -\sin^2 \pi x \cdot \prod_1^{\frac{n}{2}-1} [\sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}) \cdot \sin(x\pi e^{\frac{2\pi-2g}{n}\pi i})]$$

$$= -\sin^2 \pi x \cdot \prod_1^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g);$$

dabei steht $\omega(x, g)$ zur Abkürzung für den Ausdruck in der eckigen Klammer. Werden darin die Exponentialgrößen durch trigonometrische Functionen ersetzt, so folgt:

$$\omega(x, g) = \sin\left(x\pi \cos \frac{2g\pi}{n} + i x\pi \sin \frac{2g\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(x\pi \cos \frac{2g\pi}{n} - i x\pi \sin \frac{2g\pi}{n}\right)$$

und wenn hier noch das Product der Sinuse durch die Differenz zweier Cosinuse ausgedrückt wird, so gibt dies:

$$\omega(x, g) = \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(2ix\pi \sin \frac{2g\pi}{n}\right) - \cos\left(2x\pi \cos \frac{2g\pi}{n}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ e^{2ix\pi \sin \frac{2g\pi}{n}} + e^{-2ix\pi \sin \frac{2g\pi}{n}} - 2 \cos\left(2x\pi \cos \frac{2g\pi}{n}\right) \right\}$$

Setzt man in Folgendem zur Abkürzung:

$$\lambda_g = \sin \frac{2g\pi}{n} \text{ und } \rho_g = \cos \frac{2g\pi}{n},$$

so geht P über in:

$$P = -\sin^2 \pi x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \prod_1^{\frac{n}{2}-1} \{e^{2x\pi \lambda_g} + e^{-2x\pi \lambda_g} - 2 \cos(2x\pi \rho_g)\}$$

und aus Gleichung 7') wird alsdann:

$$8) \quad 2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \frac{2^{n-2} x^n \pi^n}{\sin^2 \pi x \cdot \prod_1^{\frac{n}{2}-1} \{e^{2x\pi \lambda_g} + e^{-2x\pi \lambda_g} - 2 \cos(2x\pi \rho_g)\}}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach x ergibt sich:

$$9) \quad 2\overline{\varphi}(x) = \frac{1}{x} - \frac{2\pi}{n} \cotg \pi x - \frac{2\pi}{n} \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g).$$

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen ist durch die nachstehende Gleichung bestimmt:

$$A) \quad \psi(x, g) = \frac{\lambda_g(e^{2x\pi\lambda_g} - e^{-2x\pi\lambda_g}) + 2\rho_g \sin(2x\pi\rho_g)}{e^{2x\pi\lambda_g} + e^{-2x\pi\lambda_g} - 2 \cos(2x\pi\rho_g)}.$$

Wird jetzt auch Gleichung 4) nach x differentiirt, so folgt:

$$\varphi'(x) = S_n x^{n-1} + S_{2n} x^{2n-1} + S_{3n} x^{3n-1} + S_{4n} x^{4n-1} + \dots$$

und nach geschehener Division der letzten Gleichung durch x^{n-1} folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(x)}{x^{n-1}} &= S_n + S_{2n} x^n + S_{3n} x^{2n} + S_{4n} x^{3n} + \dots \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Substituirt man in die letzte Gleichung den Werth des Differentialquotienten $\varphi'(x)$ aus Gleichung 9), so erhält man:

$$10) \quad F(x) = \frac{1}{2x^n} - \frac{\pi}{nx^{n-1}} \left[\cotg \pi x + \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g) \right]$$

und wenn x durch $\frac{x}{\pi}$ ersetzt wird, so folgt für $-\pi < x < +\pi$

$$\begin{aligned} 10') \quad \frac{1}{x^n} F\left(\frac{x}{\pi}\right) &= \frac{1}{1^n \pi^n - x^n} + \frac{1}{2^n \pi^n - x^n} + \frac{1}{3^n \pi^n - x^n} + \dots \\ &= \frac{1}{2x^n} - \frac{1}{nx^{n-1}} \left[\cotg x + \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi\left(\frac{x}{\pi}, g\right) \right] \end{aligned}$$

für $n = 4$ gibt Gleichung 10), da $g = 1$ und $\lambda_g = \sin \frac{2g\pi}{4} = 1$ und $\rho_g = 0$ ist das leicht zu beweisende Resultat:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1^4-x^4} + \frac{1}{2^4-x^4} + \frac{1}{3^4-x^4} + \frac{1}{4^4-x^4} + \dots \\ &= \frac{1}{2x^4} - \frac{\pi}{4x^3} \left(\cotg \pi x + \frac{e^{2x\pi} + 1}{e^{2x\pi} - 1} \right). \end{aligned}$$

Zur bequemerer praktischen Berechnung mögen zwei Fälle unterschieden werden.

$$\alpha) n = 4p+2 \text{ und } \beta) n = 4p.$$

Wird in $\psi(x, g)$ statt $g \dots \left(\frac{n}{2} - g\right)$ eingesetzt, so stimmen, wie sich leicht zeigen lässt, die Substitutionsresultate $\psi(x, g)$ und $\psi\left(x, \frac{n}{2} - g\right)$ überein. Es ist nämlich:

$$\lambda_{\frac{n}{2}-g} = \sin \frac{2\left(\frac{n}{2} - g\right)\pi}{n} = \sin \frac{2g\pi}{n} = \lambda_g$$

und

$$\rho_{\frac{n}{2}-g} = \cos \frac{2\left(\frac{n}{2} - g\right)\pi}{n} = -\cos \frac{2g\pi}{n} = -\rho_g.$$

Dies beachtend, gibt die Gleichung A) nach ausgeführter Substitution:

$$\psi\left(x, \frac{n}{2} - g\right) = \psi(x, g)$$

und es lässt sich die Summe in Gleichung 10) also umformen:

$$\sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g) = \sum_1^{\frac{n-2}{4}} \psi(x, g) + \sum_{\frac{n+2}{4}}^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g); \text{ für } n = 4p+2.$$

Der zweite Theil lässt sich, wenn die Substitutionen in umgekehrter Ordnung vorgenommen werden, folgendermassen darstellen:

$$\sum_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n+2}{4}} \psi(x, g) = \sum_1^{\frac{n-2}{4}} \psi\left(x, \frac{n}{2} - g\right) = \sum_1^{\frac{n-2}{4}} \psi(x, g)$$

und es geht daher das Resultat der Gleichung 10) über in:

$$11) \quad F(x) = \frac{1}{2x^n} - \frac{\pi}{nx^{n-1}} \left[\cotg \pi x + 2 \sum_1^{\frac{n-2}{4}} \psi(x, g) \right]$$

β) Für $n = 4p$ ist:

$$\sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g) = \sum_1^{\frac{n}{4}-1} \psi(x, g) + \psi(x, \frac{n}{4}) + \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g).$$

Das Mittelglied $\psi(x, \frac{n}{4})$ gibt:

$$\psi(x, \frac{n}{4}) = \frac{e^{x\pi} + e^{-x\pi}}{e^{x\pi} - e^{-x\pi}}$$

und der letzte Theil der Summe kann wie früher behandelt werden, nämlich:

$$\sum_{\frac{n}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g) = \sum_{\frac{n}{4}-1}^{\frac{n}{4}+1} \psi(x, g) = \sum_1^{\frac{n}{4}-1} \psi(x, \frac{n}{2} - g) = \sum_1^{\frac{n}{4}-1} \psi(x, g);$$

daher ist:

$$\sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g) = \frac{e^{2x\pi} + 1}{e^{2x\pi} - 1} + 2 \sum_1^{\frac{n}{4}-1} \psi(x, g).$$

Mit Berücksichtigung der letzten Gleichung erhält man aus 10) für $n = 4p$:

$$12) \quad F(x) = \frac{1}{2x^n} - \frac{\pi}{nx^{n-1}} \left[\cotg \pi x + \frac{e^{2x\pi} + 1}{e^{2x\pi} - 1} + 2 \sum_1^{\frac{n}{4}-1} \psi(x, g) \right].$$

Dabei ist $\psi(x, g)$ durch den Ausdruck bestimmt:

$$\psi(x, g) = \frac{\lambda_g (e^{2x\pi\lambda_g} - e^{-2x\pi\lambda_g}) + 2\rho_g \sin(2x\pi\rho_g)}{e^{2x\pi\lambda_g} + e^{-2x\pi\lambda_g} - 2 \cos(2x\pi\rho_g)}$$

und

$$\lambda_\rho = \sin \frac{2g\pi}{n}; \quad \rho_\rho = \cos \frac{2g\pi}{n}.$$

Um einige specielle Fälle zu berechnen, setze man in Gleichung 11) $n = 6$ und in Gleichung 12) $n = 8$, so folgt:

$$F(x) = \frac{1}{2x^6} - \frac{\pi}{6x^5} [\cotg \pi x + 2\psi(x, 1)]$$

$$\lambda_1 = \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{3}; \quad \rho_1 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

daher:

$$3\psi(x, 1) = \frac{\sqrt{3}(e^{x\pi/\sqrt{3}} - e^{-x\pi/\sqrt{3}}) + 2 \sin x\pi}{e^{x\pi/\sqrt{3}} - e^{-x\pi/\sqrt{3}} - 2 \cos x\pi}.$$

Dies beachtend, geht die vorige Gleichung über in:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1^6 - x^6} + \frac{1}{2^6 - x^6} + \frac{1}{3^6 - x^6} + \frac{1}{4^6 - x^6} + \dots \\ &= \frac{1}{2x^6} - \frac{\pi}{6x^5} \left[\cotg \pi x + \frac{\sqrt{3}(e^{x\pi/\sqrt{3}} - e^{-x\pi/\sqrt{3}}) + 2 \sin x\pi}{e^{x\pi/\sqrt{3}} + e^{-x\pi/\sqrt{3}} - 2 \cos x\pi} \right]. \end{aligned}$$

Für $n = 8$ gibt die Gleichung 12)

$$F(x) = \frac{1}{2x^8} - \frac{\pi}{8x^7} \left[\cotg \pi x + \frac{e^{3\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} + 2\psi(x, 1) \right].$$

In der Function $\psi(x, 1)$ ist:

$$\lambda_1 = \sin \frac{2g\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2}; \quad \rho_1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

und

$$2\psi(x, 1) = \frac{\sqrt{2}(e^{x\pi/\sqrt{2}} - e^{-x\pi/\sqrt{2}}) + 2\sqrt{2} \sin(x\pi/\sqrt{2})}{e^{x\pi/\sqrt{2}} + e^{-x\pi/\sqrt{2}} - 2 \cos(x\pi/\sqrt{2})},$$

daher:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{1^8 - x^8} + \frac{1}{2^8 - x^8} + \frac{1}{3^8 - x^8} + \frac{1}{4^8 - x^8} + \dots \\ &= \frac{1}{2x^8} - \frac{\pi}{8x^7} \left[\cotg \pi x + \frac{e^{2\pi x} + 1}{e^{2\pi x} - 1} + \frac{\sqrt{2}(e^\alpha - e^{-\alpha} + 2 \sin \alpha)}{e^\alpha + e^{-\alpha} - 2 \cos \alpha} \right]. \end{aligned}$$

Dabei hat α den Werth: $\alpha = x\pi \sqrt{2}$.

Werden nun die Gleichungen 1) und 2) zuerst mit x^{n-1} multiplicirt und sodann nach x zwischen den Grenzen 0 und x integrirt, so entspringt die Gleichung:

$$\int_0^x \left[\frac{1}{1^n - x^n} + \frac{1}{2^n - x^n} + \frac{1}{3^n - x^n} + \frac{1}{4^n - x^n} + \dots \right] x^{n-1} dx$$

$$= \int_0^x [S_n x^{n-1} + S_{2n} x^{2n-1} + S_{3n} x^{3n-1} + S_{4n} x^{4n-1} + \dots] dx.$$

Entwickelt man die Integrale linker Hand nach der Formel:

$$\int_0^x \frac{x^{n-1}}{p^n - x^n} dx = -\frac{1}{n} \lg \left(1 - \frac{x^n}{p^n} \right),$$

so folgt nach Ausführung der Integration der rechten Seite der Gleichung:

$$-\frac{1}{n} \left[\lg \left(1 - \frac{x^n}{1^n} \right) + \lg \left(1 - \frac{x^n}{2^n} \right) + \lg \left(1 - \frac{x^n}{3^n} \right) + \lg \left(1 - \frac{x^n}{4^n} \right) + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{n} S_n x^n + \frac{1}{2n} S_{2n} x^{2n} + \frac{1}{3n} S_{3n} x^{3n} + \frac{1}{4n} S_{4n} x^{4n} + \dots = \varphi(x);$$

oder

$$\varphi(x) = -\frac{1}{n} \lg \left(1 - \frac{x^n}{1^n} \right) \left(1 - \frac{x^n}{2^n} \right) \left(1 - \frac{x^n}{3^n} \right) \left(1 - \frac{x^n}{4^n} \right) \dots$$

$$= \frac{1}{2n} \lg \frac{-x^n \pi^n}{\prod_0^{n-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}})},$$

wenn für $\varphi(x)$ der Werth aus Gleichung 7') substituirt wird, fehlt oder wenn man von der Gleichheit der Logarithmen auf die Gleichheit der Grundzahlen schliesst:

$$13) \left[\left(1 - \frac{x^n}{1^n} \right) \left(1 - \frac{x^n}{2^n} \right) \left(1 - \frac{x^n}{3^n} \right) \left(1 - \frac{x^n}{4^n} \right) \dots \right]^2 = \frac{\prod_0^{n-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}})}{-x^n \pi^n}$$

$$= \frac{4 \sin^2 \pi x \prod_1^{\frac{n}{2}-1} [e^{2x\pi i \rho} + e^{-2x\pi i \rho} - 2 \cos(2x\pi \rho)]}{(2x\pi)^n},$$

welch' letzterer Ausdruck unmittelbar aus Gleichung 7) und 8) hervorgeht. Wird zur Abkürzung

$$A) \quad f(x, g) = e^{2x\pi\lambda_g} + e^{-2x\pi\lambda_g} - 2 \cos(2x\pi\rho_g)$$

gesetzt, so ist die letzte Gleichung in ihrer einfachsten Form:

$$14) \quad \left[\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x^n}{g^n} \right) \right]^2 = \frac{4 \sin^2 \pi x}{(2\pi x)^n} \cdot \prod_1^{\frac{n}{2}-1} f(x, g).$$

Um die Anzahl der Substitutionen auf die Hälfte zu reduciren, mögen wieder die zwei Fälle unterschieden werden:

$$\alpha) \quad n = 4p+2 \quad \text{und} \quad \beta) \quad n = 4p.$$

$$\alpha) \quad \prod_1^{\frac{n}{2}-1} f(x, g) = \prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x, g) \cdot \prod_1^{\frac{n}{2}-1} f(x, g)$$

$$= \prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x, g) \cdot \prod_1^{\frac{n+2}{4}} f(x, g) = \prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x, g) \cdot \prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x, \frac{n}{2} - g).$$

Nun ist aber

$$f(x, \frac{n}{2} - g) = f(x, g),$$

da

$$\lambda_{\frac{n}{2}-g} = \lambda_g \quad \text{und} \quad \rho_{\frac{n}{2}-g} = -\rho_g$$

ist, also folgt:

$$\prod_1^{\frac{n}{2}-1} f(x, g) = \left[\prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x, g) \right]^2$$

und Gleichung 14) geht über in:

$$15) \quad \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x^n}{g^n} \right) = \frac{2 \sin \pi x \prod_1^{\frac{n-2}{4}} f(x, g)}{(2\pi x)^{\frac{n}{2}}}; \quad \text{für } n = 4p+2.$$

β) $n = 4p$. Für diesen Fall lässt sich das Product folgendermassen umformen :

$$\begin{aligned} \prod_1^{\frac{n}{2}-1} f(x, g) &= \prod_1^{\frac{n}{4}-1} f(x, g) \cdot f(x, \frac{n}{4}) \cdot \prod_1^{\frac{n}{4}-1} f(x, g) \\ &= \prod_1^{\frac{n}{4}-1} f(x, g) \cdot f(x, \frac{n}{4}) \cdot \prod_1^{\frac{n}{4}+1} f(x, g) \cdot \prod_1^{\frac{n}{2}-1} f(x, g). \end{aligned}$$

Nun ist der letzte Factor:

$$\prod_1^{\frac{n}{4}+1} f(x, g) = \prod_1^{\frac{n}{4}-1} f(x, \frac{n}{2} - g) = \prod_1^{\frac{n}{4}-1} f(x, g),$$

daher:

$$\prod_1^{\frac{n}{2}-1} f(x, g) = (e^{\pi x} - e^{-\pi x})^2 \left[\prod_1^{\frac{n}{4}-1} f(x, g) \right]^2.$$

Aus diesem Grunde erhält man aus Gleichung 14)

$$16) \quad \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x^n}{g^n} \right) = \frac{2 \sin \pi x (e^{\pi x} - e^{-\pi x}) \prod_1^{\frac{n}{4}-1} f(x, g)}{(2x\pi)^{\frac{n}{2}}}; \quad n = 4p.$$

Durch Substitution von $\frac{x}{\pi}$ statt x findet man aus den letzten zwei Gleichungen die Resultate:

$$17) \quad \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x^n}{g^n \pi^n} \right) = \frac{2 \sin x \prod_1^{\frac{n-2}{4}} f\left(\frac{x}{\pi}, g\right)}{(2x)^{\frac{n}{2}}}; \quad \text{für } n = 4p+2$$

$$18) \quad = \frac{2 \sin x (e^x - e^{-x}) \prod_1^{\frac{n}{4}-1} f\left(\frac{x}{\pi}, g\right)}{(2x)^{\frac{n}{2}}}; \quad \text{für } n = 4p.$$

In 17) und 18) muss $-\pi < x < +\pi$ sein.

Als Anwendungen der Gleichungen 15) und 16) mögen einige specielle Beispiele Platz finden. Man setze in 14) $n = 4$ und in Gleichung 15) $n = 6$ und $n = 10$, so folgt nach kurzer Rechnung:

$$\left(1 - \frac{x^4}{1^4}\right) \left(1 - \frac{x^4}{2^4}\right) \left(1 - \frac{x^4}{3^4}\right) \left(1 - \frac{x^4}{4^4}\right) \cdot \dots = \frac{2 \sin \pi x (e^{x\pi} - e^{-x\pi})}{(2x\pi)^2}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^6}{1^6}\right) \left(1 - \frac{x^6}{2^6}\right) \left(1 - \frac{x^6}{3^6}\right) \left(1 - \frac{x^6}{4^6}\right) \cdot \dots \\ \cdot = \frac{\sin \pi x (e^{x\pi/\sqrt{3}} + e^{-x\pi/\sqrt{3}} - 2 \cos \pi x)}{4x^2\pi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^{10}}{1^{10}}\right) \left(1 - \frac{x^{10}}{2^{10}}\right) \left(1 - \frac{x^{10}}{3^{10}}\right) \cdot \dots \\ = \frac{2 \sin x\pi}{(2x\pi)^5} \cdot \left[e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - 2 \cos \left\{ \frac{x\pi}{2} (-1 + \sqrt{5}) \right\} \right] \\ \left[e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} + e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} - 2 \cos \left\{ \frac{x\pi}{2} (1 + \sqrt{5}) \right\} \right]. \end{aligned}$$

In Gleichung 16) $n = 8$ gesetzt, gibt:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^8}{1^8}\right) \left(1 - \frac{x^8}{2^8}\right) \left(1 - \frac{x^8}{3^8}\right) \left(1 - \frac{x^8}{4^8}\right) \cdot \dots \\ = \frac{2 \sin \pi x}{(2x\pi)^4} (e^{x\pi} - e^{-x\pi}) (e^{x\pi/\sqrt{2}} + e^{-x\pi/\sqrt{2}} - 2 \cos x\pi/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Ersetzt man in Formel 13), welche einfacher geschrieben, folgende Form annimmt:

$$\left[\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x^n}{g^n}\right) \right]^2 = - \frac{\prod_0^{n-1} \sin \left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}} \right)}{(x\pi)^n}$$

x durch $\frac{x}{2}$, so folgt:

$$\left[\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x^n}{2^n g^n}\right) \right]^2 = - \frac{\prod_0^{n-1} \sin \left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g\pi i}{n}} \right)}{\left(\frac{x\pi}{2}\right)^n}.$$

Durch Division dieser zwei Gleichungen ergibt sich:

$$\left[\prod_1^{\infty} \left\{ 1 - \frac{x^n}{(2g+1)^n} \right\} \right]^2 = \frac{1}{2^n} \cdot \prod_0^{n-1} \frac{\sin\left(x\pi e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)}{\sin\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)} = \prod_0^{n-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right)$$

nachdem der Sinus im Zähler durch Functionen des halben Bogens ausgedrückt worden. Das letzte Product kann jetzt auf nachstehende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} \prod_0^{n-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) &= \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) \cdot \prod_{\frac{n}{2}}^{n-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) \\ &= \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) \cdot \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2n-2g}{n}\pi i}\right) \\ &= \prod_0^{\frac{n}{2}-1} P_g \end{aligned}$$

dabei ist

$$P_g = \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g\pi i}{n}}\right) \cdot \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2n-2g}{n}\pi i}\right).$$

P_g , das Product der Cosinuse, lässt sich folgendermassen darstellen, wenn die Exponentialfunctionen durch trigonometrische Functionen ersetzt werden.

$$\begin{aligned} P_g &= \cos\left(\frac{x\pi}{2} \cos \frac{2g\pi}{n} + i \frac{x\pi}{2} \sin \frac{2g\pi}{n}\right) \cdot \\ &\quad \cos\left(\frac{x\pi}{2} \cos \frac{2g\pi}{n} - i \frac{x\pi}{2} \sin \frac{2g\pi}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(x\pi \cos \frac{2g\pi}{n}\right) + \cos\left(ix\pi \sin \frac{2g\pi}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[e^{x\pi \sin \frac{2g\pi}{n}} + e^{-x\pi \sin \frac{2g\pi}{n}} + 2 \cos\left(x\pi \cos \frac{2g\pi}{n}\right) \right] = \frac{1}{4} \omega(x, g) \end{aligned}$$

$\omega(x, g)$ ist durch die Gleichung defnirt:

$$B) \quad \omega(x, g) = e^{x\pi \lambda_g} + e^{-x\pi \lambda_g} + 2 \cos(x\pi \rho_g).$$

λ_g und ρ_g haben ihre fröhere Bedeutung.

Es ist demnach der Werth des unendlichen Productes:

$$19) \quad \left[\prod_1^{\infty} \left\{ 1 - \frac{x^n}{(2g+1)^n} \right\} \right]^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^n \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g).$$

Zur bequemeren Berechnung mögen auch hier die zwei Fälle unterschieden werden:

$$\alpha) \quad n = 4p+2 \quad \beta) \quad n = 4p$$

$\alpha)$ Es ist:

$$\begin{aligned} \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) &= \omega(x, 0) \cdot \prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega(x, g) \cdot \prod_{\frac{n+2}{4}}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) \\ &= \omega(x, 0) \cdot \prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega(x, g) \cdot \prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega(x, \frac{n}{2} - g) \end{aligned}$$

Wie früher hat man:

$$\lambda_{\frac{n}{2}-g} = \lambda_g$$

und

$$\rho_{\frac{n}{2}-g} = -\rho_g$$

und wie leicht einzusehen ist auch:

$$\omega(x, \frac{n}{2} - g) = \omega(x, g),$$

wenn in Gleichung B) statt $g \dots \frac{n}{2} - g$ gesetzt wird, daher folgt:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) = \omega(x, 0) \cdot \left[\prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega(x, g) \right]^2$$

$$\omega(x, 0) = 2(1 + \cos \pi x);$$

dies beachtend, gibt Gleichung 19)

$$\left[\prod_1^{\infty} \left\{ 1 - \frac{x^n}{(2g+1)^n} \right\} \right]^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \cos^2 \frac{\pi x}{2} \left[\prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega(x, g) \right]^2$$

oder:

$$20) \prod_1^{\infty} \left[1 - \frac{x^n}{(2g+1)^n} \right] = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n-2}{2}-1} \cdot \cos \frac{x\pi}{2} \cdot \prod_1^{\frac{n-2}{4}} \omega(x, g),$$

für $n = 4p+2$

$$\begin{aligned} \beta) \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) &= \omega(x, 0) \cdot \prod_1^{\frac{n}{4}-1} \omega(x, g) \cdot \omega(x, \frac{n}{4}) \cdot \prod_{\frac{n}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) \\ &= \omega(x, 0) \cdot \omega(x, \frac{n}{4}) \cdot \prod_1^{\frac{n}{4}-1} \omega(x, g) \cdot \prod_1^{\frac{n}{4}-1} \omega(x, \frac{n}{2}-g). \end{aligned}$$

Das Product der ersten zwei Factoren ist durch den Ausdruck gegeben:

$$\omega(x, 0) \cdot \omega(x, \frac{n}{4}) = 4 \cos^2 \frac{x\pi}{2} \left(e^{\frac{x\pi}{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}} \right)^2,$$

also ist:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) = 4 \cos^2 \frac{x\pi}{2} \left(e^{\frac{x\pi}{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}} \right)^2 \cdot \left[\prod_1^{\frac{n}{4}-1} \omega(x, g) \right]^2.$$

Die Gleichung 19) geht somit für $n = 4p$ über in:

$$21) \prod_1^{\infty} \left[1 - \frac{x^n}{(2g+1)^n} \right] = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}-1} \cos \frac{x\pi}{2} \left(e^{\frac{x\pi}{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}} \right) \cdot \prod_1^{\frac{n}{4}-1} \omega(x, g).$$

Durch Substitution von $n = 6$ und $n = 8$ gehen aus den letzten zwei Gleichungen nachstehende specielle Resultate hervor:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{x^6}{1^6} \right) \left(1 - \frac{x^6}{3^6} \right) \left(1 - \frac{x^6}{5^6} \right) \left(1 - \frac{x^6}{7^6} \right) \dots \\ &= \frac{1}{4} \cos \frac{x\pi}{2} \left(e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}} + e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}} + 2 \cos \frac{x\pi}{2} \right) \\ &\left(1 - \frac{x^8}{1^8} \right) \left(1 - \frac{x^8}{3^8} \right) \left(1 - \frac{x^8}{5^8} \right) \left(1 - \frac{x^8}{7^8} \right) \dots \\ &= \frac{1}{8} \cos \frac{x\pi}{2} \left(e^{\frac{x\pi}{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}} \right) \left(e^{\frac{x\pi}{2}\sqrt{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}\sqrt{2}} + 2 \cos \frac{x\pi}{2} \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

Nimmt man von den Gleichungen 19), 20) und 21) die natürlichen Logarithmen und bildet die Differentialquotienten nach x , so folgt:

$$\begin{aligned} & 2 \left[\lg \left(1 - \frac{x^n}{1^n} \right) + \lg \left(1 - \frac{x^n}{3^n} \right) + \lg \left(1 - \frac{x^n}{5^n} \right) + \dots \right] \\ & = n \lg \frac{1}{2} + \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \lg \omega(x, g), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & -2nx^{n-1} \left[\frac{1}{1^n - x^n} + \frac{1}{3^n - x^n} + \frac{1}{5^n - x^n} + \frac{1}{7^n - x^n} + \dots \right] \\ & = \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \frac{\omega'(x, g)}{\omega(x, g)} = \pi \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \eta(x, g) \end{aligned}$$

dabei hat $\eta(x, g)$ den Werth:

$$\eta(x, g) = \frac{\lambda_g(e^{x\pi\lambda_g} - e^{-x\pi\lambda_g}) - 2\rho_g \sin(x\pi\rho_g)}{e^{x\pi\lambda_g} + e^{-x\pi\lambda_g} + 2 \cos(x\pi\rho_g)}$$

also folgt für die unendliche Reihe, bei welcher im Nenner die n ten Potenzen der ungeraden Zahlen vorkommen, der Werth:

$$\begin{aligned} 22) \quad & \frac{.1}{1^n - x^n} + \frac{1}{3^n - x^n} + \frac{1}{5^n - x^n} + \frac{1}{7^n - x^n} + \dots \\ & = -\frac{\pi}{2nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \eta(x, g) \end{aligned}$$

ebenso findet man aus 20) und 21) für $n = 4p + 2$ und für $n = 4p$ die Resultate:

$$\begin{aligned} 23) \quad & \frac{1}{1^n - x^n} + \frac{1}{3^n - x^n} + \frac{1}{5^n - x^n} + \frac{1}{7^n - x^n} + \dots \\ & = \frac{\pi}{2nx^{n-1}} \left[\operatorname{tg} \frac{x\pi}{2} - 2 \sum_1^{\frac{n-2}{4}} \eta(x, g) \right] \end{aligned}$$

$$24) \quad = \frac{\pi}{2nx^{n-1}} \left[\operatorname{tg} \frac{x\pi}{2} - \frac{e^{x\pi} - 1}{e^{x\pi} + 1} - 2 \sum_1^{\frac{n-1}{4}} \eta(x, g) \right]$$

Für $n = 2$ und $n = 4$ gehen aus der Gleichung 22) die bekannten speciellen Reihen hervor:

$$\frac{1}{1^2-x^2} + \frac{1}{3^2-x^2} + \frac{1}{5^2-x^2} + \frac{1}{7^2-x^2} + \dots = \frac{\pi}{4x} \operatorname{tg} \frac{x\pi}{2}$$

und

$$\frac{1}{1^4-x^4} + \frac{1}{3^4-x^4} + \frac{1}{5^4-x^4} + \frac{1}{7^4-x^4} + \dots = \frac{\pi}{8x^3} \left(\operatorname{tg} \frac{x\pi}{2} - \frac{e^{x\pi}-1}{e^{x\pi}+1} \right)$$

und für $n = 6$ und $n = 8$ geben die letzten zwei Gleichungen die bemerkenswerthen Resultate:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1^6-x^6} + \frac{1}{3^6-x^6} + \frac{1}{5^6-x^6} + \frac{1}{7^6-x^6} + \dots \\ &= \frac{\pi}{12x^5} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} - \frac{\sqrt{3} (e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} - e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}}) - 2 \sin \frac{\pi x}{2}}{e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} + e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} + 2 \cos \frac{\pi x}{2}} \right] \\ & \frac{1}{1^8-x^8} + \frac{1}{3^8-x^8} + \frac{1}{5^8-x^8} + \frac{1}{7^8-x^8} + \dots \\ &= \frac{\pi}{16x^7} \left[\operatorname{tg} \frac{x\pi}{2} - \frac{e^{x\pi}-1}{e^{x\pi}+1} - \sqrt{2} \cdot \frac{e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} - e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} - 2 \sin \left(x\pi\sqrt{\frac{1}{2}} \right)}{e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} + e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} + 2 \cos \left(x\pi\sqrt{\frac{1}{2}} \right)} \right] \end{aligned}$$

Es ist ferner nach Gleichung 10):

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{1^n-x^n} + \frac{1}{2^n-x^n} + \frac{1}{3^n-x^n} + \frac{1}{4^n-x^n} + \dots \\ &= \frac{1}{2x^n} - \frac{\pi}{nx^{n-1}} \left[\operatorname{cotg} \pi x + \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g) \right] \end{aligned}$$

und wenn $\frac{x}{2}$ statt x gesetzt wird, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} F\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2^n-x^n} + \frac{1}{4^n-x^n} + \frac{1}{6^n-x^n} + \dots \\ &= \frac{1}{2x^n} - \frac{\pi}{2nx^{n-1}} \left[\operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2} + \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi\left(\frac{x}{2}, g\right) \right] \end{aligned}$$

Durch Subtraction der letzten Gleichung von 22) ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1^n - x^n} - \frac{1}{2^n - x^n} + \frac{1}{3^n - x^n} - \frac{1}{4^n - x^n} + \dots \\ &= -\frac{\pi}{2nx^{n-1}} [\eta(x, 0) + \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \eta(x, g)] + \frac{\pi}{2nx^{n-1}} [\cotg \frac{\pi x}{2} \\ & \quad + \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi(\frac{x}{2}, g)] - \frac{1}{2x^n} \\ &= -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{2nx^{n-1}} \left[\frac{2}{\sin x\pi} + \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \{\psi(\frac{x}{2}, g) - \eta(x, g)\} \right] \end{aligned}$$

Die Functionen ψ und η sind durch den Ausdruck bestimmt:

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{x}{2}, g\right) &= \frac{\lambda_g(e^\alpha - e^{-\alpha}) + 2\rho_g \sin \beta}{e^\alpha + e^{-\alpha} - 2 \cos \beta} \\ \eta(x, g) &= \frac{\lambda_g(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2\rho_g \sin \beta}{e^\alpha + e^{-\alpha} + 2 \cos \beta} \end{aligned}$$

Dabei haben α und β die Bedeutung;

$$\alpha = x\pi\lambda_g \quad \text{und} \quad \beta = x\pi\rho_g$$

Für die Differenz dieser zwei Functionen erhält man:

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{x}{2}, g\right) - \eta(x, g) &= \frac{4\rho_g \sin \beta (e^\alpha + e^{-\alpha}) + 4\lambda_g \cos \beta (e^\alpha - e^{-\alpha})}{(e^\alpha + e^{-\alpha})^2 - 4 \cos^2 \beta} \\ &= 4 \cdot \frac{e^{x\pi\lambda_g} \sin\left(x\pi\rho_g + \frac{2g\pi}{n}\right) + e^{-x\pi\lambda_g} \sin\left(x\pi\rho_g - \frac{2g\pi}{n}\right)}{e^{2x\pi\lambda_g} + e^{-2x\pi\lambda_g} - 2 \cos(2x\pi\rho_g)} \end{aligned}$$

Es ist somit der Werth der Reihe mit regelmässigem Zeichenwechsel durch folgende Formel gegeben:

$$\begin{aligned} 25) \quad & \frac{1}{1^n - x^n} - \frac{1}{2^n - x^n} + \frac{1}{3^n - x^n} - \frac{1}{4^n - x^n} + \dots \\ &= -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \left[\frac{1}{\sin x\pi} + 2 \sum_1^{\frac{n}{2}-1} Q(x) \right] \end{aligned}$$

wobei abkürzend

$$Q(x) = \frac{e^{\pi\lambda} \sin(x\pi\rho_g + \frac{2g\pi}{n}) + e^{-\pi\lambda} \sin(x\pi\rho_g - \frac{2g\pi}{n})}{e^{2\pi\lambda} + e^{-2\pi\lambda} - 2 \cos(2x\pi\rho_g)}$$

gesetzt wurde.

Wird ferner in Gleichung 11) x durch $\frac{x}{2}$ ersetzt, so entspringt die Gleichung:

$$\frac{1}{2^n} F\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2x^n} - \frac{\pi}{2nx^{n-1}} \left[\cotg \frac{\pi x}{2} + 2 \sum_1^{\frac{n}{2}-1} \psi\left(\frac{x}{2}, g\right) \right],$$

für $n = 4p + 2$.

Zieht man das letzte Resultat von Gleichung 23) ab, so folgt:

$$\begin{aligned} 26) \quad & \frac{1}{1^n - x^n} - \frac{1}{2^n - x^n} + \frac{1}{3^n - x^n} - \frac{1}{4^n - x^n} + \dots \\ & = -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \left[\frac{1}{\sin x\pi} + \sum_1^{\frac{n-2}{4}} \left\{ \psi\left(\frac{x}{2}, g\right) - \eta(x, g) \right\} \right] \\ & = -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \left[\frac{1}{\sin x\pi} + 4 \sum_1^{\frac{n-4}{4}} Q(x) \right], \quad n = 4p + 2 \end{aligned}$$

Durch dasselbe Verfahren gibt Gleichung 12) in Verbindung mit 24) für $n = 4p$ nachstehendes Resultat:

$$\begin{aligned} 27) \quad & \frac{1}{1^n - x^n} - \frac{1}{2^n - x^n} + \frac{1}{3^n - x^n} - \frac{1}{4^n - x^n} + \dots \\ & = -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \left[\frac{1}{\sin \pi x} + \frac{2e^{\pi x}}{e^{2\pi x} - 1} + 4 \sum_1^{\frac{n}{4}-1} Q(x) \right] \end{aligned}$$

Spezielle Fälle: Für $n = 4$ gibt Gleichung 25)

$$\frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{2^4-x^4} + \frac{1}{3^4-x^4} - \frac{1}{4^4-x^4} + \dots = -\frac{1}{2x^4} + \frac{\pi}{4x^3} \left(\frac{1}{\sin \pi x} + \frac{2}{e^{2\pi} + e^{-2\pi}} \right)$$

Für $n = 6$ und $n = 8$ erhält man aus 26) und 27):

$$\frac{1}{1-x^6} - \frac{1}{2^6-x^6} + \frac{1}{3^6-x^6} - \frac{1}{4^6-x^6} + \dots$$

$$= -\frac{1}{2x^6} + \frac{\pi}{6x^5} \left\{ \frac{1}{\sin \pi x} + 4 \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} \sin \left[\frac{\pi}{6} (3x+2) \right] + e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} \sin \left[\frac{\pi}{6} (3x-2) \right]}{e^{2\pi\sqrt{3}} + e^{-2\pi\sqrt{3}}} - 2 \cos \pi x \right\}$$

$$\frac{1}{1-x^8} - \frac{1}{2^8-x^8} + \frac{1}{3^8-x^8} - \frac{1}{4^8-x^8} + \dots$$

$$= -\frac{1}{2x^8} + \frac{\pi}{8x^7} \left\{ \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{2}{e^{\pi} - e^{-\pi}} + 4 \cdot \frac{e^{\pi\sqrt{1/2}} \sin \left[\frac{\pi}{4} (2x\sqrt{2}+1) \right] + e^{-\pi\sqrt{1/2}} \sin \left[\frac{\pi}{4} (2x\sqrt{2}-1) \right]}{e^{\pi\sqrt{2}} + e^{-\pi\sqrt{2}}} - 2 \cos(\pi\sqrt{2}) \right\}$$

II.

Es ist nicht schwer, die analogen unendlichen Reihen und Producte auszuwerthen, wenn im Nenner x^n durch $-x^n$ vertreten ist.

Für diesen Fall hat die Reihe die Form :

$$1) \quad F(x) = \frac{1}{1^n+x^n} + \frac{1}{2^n+x^n} + \frac{1}{3^n+x^n} + \frac{1}{4^n+x^n} + \dots;$$

für $[x] < 1$ und $n = 2r$.

Man drücke die Glieder dieser Reihe durch Potenzreihen nach x aus, so hat man für alle x , deren absolute Beträge kleiner als 1 sind:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^n+x^n} &= \frac{1}{1^n} \left[1 - \frac{x^n}{1^n} + \frac{x^{2n}}{1^{2n}} - \frac{x^{3n}}{1^{3n}} + \dots \right] \\ \frac{1}{2^n+x^n} &= \frac{1}{2^n} \left[1 - \frac{x^n}{2^n} + \frac{x^{2n}}{2^{2n}} - \frac{x^{3n}}{2^{3n}} + \dots \right] \\ \frac{1}{3^n+x^n} &= \frac{1}{3^n} \left[1 - \frac{x^n}{3^n} + \frac{x^{2n}}{3^{2n}} - \frac{x^{3n}}{3^{3n}} + \dots \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Dieses System von Gleichungen gibt durch Addition vereinigt:

$$2) \quad F(x) = S_n - S_{2n}x^n + S_{3n}x^{2n} - S_{4n}x^{3n} + \dots$$

Dabei ist wie früher :

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots$$

Setzt man in die Potenzreihe für $\lg \Gamma(1-x)$ anstatt $x \dots x e^{\frac{\pi i}{n}}$ so folgt:

$$\begin{aligned} 3) \lg \Gamma(1-x e^{\frac{\pi i}{n}}) &= C x e^{\frac{\pi i}{n}} + \frac{1}{2} S_2 e^{\frac{2\pi i}{n}} x^2 + \frac{1}{3} S_3 e^{\frac{3\pi i}{n}} x^3 + \frac{1}{4} S_4 e^{\frac{4\pi i}{n}} x^4 + \dots \\ &= B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + B_4 x^4 + \dots = f(x) \end{aligned}$$

Es ist nach dem Vorhergehenden :

$$a) \quad B_n x^n + B_{2n} x^{2n} + B_{3n} x^{3n} + \dots = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f(x e^{\frac{2\pi i k}{n}})$$

und wenn für die Coëfficienten B_n, B_{2n}, B_{3n} , u. s. w. ihre Werthe eingesetzt werden, geht die vorige Gleichung über in :

$$\varphi(x) = \frac{1}{n} \left(e^{\frac{\pi i}{n}} \right)^n S_n x^n + \frac{1}{2n} \left(e^{\frac{\pi i}{n}} \right)^{2n} S_{2n} x^{2n} + \frac{1}{3n} \left(e^{\frac{\pi i}{n}} \right)^{3n} S_{3n} x^{3n} + \dots$$

oder:

$$4) \varphi(x) = -\frac{1}{n} S_n x^n + \frac{1}{2n} S_{2n} x^{2n} - \frac{1}{3n} S_{3n} x^{3n} + \frac{1}{4n} S_{4n} x^{4n} - \dots$$

und nach Gleichung a) ist:

$$5) \varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \lg \Gamma(1 - x e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{2g\pi i}{n}}) = \frac{1}{n} \lg \prod_0^{n-1} \Gamma(1 - x e^{\frac{2g+1}{n} \pi i}).$$

Wird in den Gleichungen 4) und 5) x durch $-x$ ersetzt, so ändert sich der Werth der Function $\varphi(x)$ nicht, da n der Voraussetzung zufolge eine gerade Zahl bedeutet und es ist somit:

$$\varphi(-x) = \varphi(x)$$

oder auch

$$\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \prod_0^{n-1} \Gamma(1 + x e^{\frac{2g+1}{n} \pi i}) = \frac{1}{n} \lg \prod_0^{n-1} \Gamma(1 - x e^{\frac{2g+1}{n} \pi i})$$

woraus unmittelbar folgt:

$$2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \Gamma(1 + x e^{\frac{2g+1}{n} \pi i}) \cdot \Gamma(1 - x e^{\frac{2g+1}{n} \pi i})$$

und nach der Formel:

$$\Gamma(1+\lambda) \cdot \Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}$$

wird aus der vorhergehenden Gleichung:

$$6) \quad 2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \prod_0^{n-1} \frac{x\pi e^{\frac{2g+1}{n} \pi i}}{\sin(x\pi e^{\frac{2g+1}{n} \pi i})}.$$

Das Product der Exponentialfunctionen im Zähler kann leicht berechnet werden. Es ist nämlich:

$$\prod_0^{n-1} e^{\frac{2g+1}{n} \pi i} = e^{(1+3+5+\dots+n-1)\frac{\pi i}{n}} = e^{n^2 \cdot \frac{\pi i}{n}} = e^{n\pi i} = \cos n\pi + i \sin n\pi = 1; \text{ vermöge } n = 2r.$$

Dies berücksichtigt, gibt Gleichung 6):

$$7) \quad 2\varphi(x) = \frac{1}{n} \lg \frac{x^n \pi^n}{\prod_0^{n-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i})}$$

Man setze für den Augenblick zur Abkürzung:

$$P = \prod_0^{n-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}),$$

so lässt sich dieses Product folgendermassen zerlegen:

$$P = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}) \cdot \prod_{\frac{n}{2}}^{n-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}).$$

Der zweite Factor lässt sich also umformen, wenn die Substitutionen in umgekehrter Ordnung ausgeführt werden:

$$\prod_{n-1}^{\frac{n}{2}} \sin(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}) = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \sin(x\pi e^{\frac{2n-2g-1}{n}\pi i}).$$

P ist somit durch das Product gegeben:

$$P = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \sin(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}) \cdot \sin(x\pi e^{\frac{2n-2g-1}{n}\pi i}).$$

Die Exponentialfunction im zweiten Factor ausgerechnet, gibt

$$e^{\frac{2n-2g-1}{n}\pi i} = e^{-\frac{2g-1}{n}\pi i} = \cos \frac{2g+1}{n} \pi - i \sin \frac{2g+1}{n} \pi$$

desshalb erhält man für P :

$$P = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \sin \left[x\pi \cos \frac{2g+1}{n} \pi + ix\pi \sin \frac{2g+1}{n} \pi \right] \cdot \sin \left[x\pi \cos \frac{2g+1}{n} \pi - ix\pi \sin \frac{2g+1}{n} \pi \right].$$

Wird das Product der Sinuse durch die Differenz zweier Cosinuse ersetzt, so ist P durch den Ausdruck bestimmt:

$$P = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2} \left\{ \cos(2x\pi i \sin \frac{2g+1}{n} \pi) - \cos(2x\pi \cos \frac{2g+1}{n} \pi) \right\}.$$

Der erste Theil der Differenz, durch Exponentielle ausgedrückt, gibt:

$$\cos(2x\pi i \sin \frac{2g+1}{n} \pi) = \frac{1}{2} (e^{2x\pi \sin \frac{2g+1}{n} \pi} + e^{-2x\pi \sin \frac{2g+1}{n} \pi}),$$

also ist:

$$P = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{4} \left\{ e^{2x\pi \sin \frac{2g+1}{n} \pi} + e^{-2x\pi \sin \frac{2g+1}{n} \pi} - 2 \cos(2x\pi \cos \frac{2g+1}{n} \pi) \right\}$$

$$D) P = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}-1} \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \{ e^{2x\pi \lambda_g} + e^{-2x\pi \lambda_g} - 2 \cos(2x\pi \rho_g) \}$$

λ_g und ρ_g sind durch die Gleichungen gegeben:

$$\lambda_g = \sin \frac{2g+1}{n} \pi \text{ und } \rho_g = \cos \frac{2g+1}{n} \pi.$$

Durch Substitution des Werthes von P in Gleichung 7) erhält man:

$$7') \quad 2\varphi(x) = \lg(2x\pi) - \frac{1}{n} \lg \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \{ e^{2x\pi \lambda_g} + e^{-2x\pi \lambda_g} - 2 \cos(2x\pi \rho_g) \}.$$

Durch Differentiation der letzten Gleichung nach x ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\varphi'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{2\pi}{n} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \frac{\lambda_g (e^{2x\pi \lambda_g} - e^{-2x\pi \lambda_g}) + 2\rho_g \sin(2x\pi \rho_g)}{e^{2x\pi \lambda_g} + e^{-2x\pi \lambda_g} - 2 \cos(2x\pi \rho_g)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{2\pi}{n} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g). \end{aligned}$$

Die Function ω unter dem Summenzeichen ist durch den Ausdruck bestimmt:

$$A) \quad \omega(x, g) = \frac{\lambda_g (e^{2x\pi i_g} - e^{-2x\pi i_g}) + 2\rho_g \sin(2x\pi\rho_g)}{e^{2x\pi i_g} - e^{-2x\pi i_g} - 2 \cos(2x\pi\rho_g)}$$

Aus Gleichung 4) folgt durch Differentiiren nach x und nachheriger Division durch $-x^{n-1}$ also gleich;

$$-\frac{\varphi'(x)}{x^{n-1}} = F(x) = -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g),$$

nachdem der Werth für den Differentialquotienten $\varphi'(x)$ aus der vorhergehenden Gleichung eingesetzt wurde. Es ist somit:

$$8) \quad F(x) = -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g).$$

Durch nachstehende Umformung soll die praktische Ausrechnung von $F(x)$ vereinfacht werden. Man unterscheide wieder die zwei Fälle:

$$\alpha) n = 4p \text{ und } \beta) n = 4p + 2.$$

Im ersten Falle kann die Summe folgendermassen umgestaltet werden:

$$\sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) = \sum_0^{\frac{n}{4}-1} \omega(x, g) + \sum_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g).$$

Der zweite Theil der Summe kann gleichfalls auf eine andere Form gebracht werden, wenn man die Substitutionen in umgekehrter Ordnung ausführte. Es ist dann:

$$\sum_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{4}} \omega(x, g) = \sum_0^{\frac{n}{4}-1} \omega(x, \frac{n}{2} - g - 1);$$

daher:

$$\sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) = \sum_0^{\frac{n}{4}-1} [\omega(x, g) + \omega(x, \frac{n}{2} - g - 1)].$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Functionen in der eckigen Klammer einander gleich sind. In $\omega(x, g)$ erscheint g nur in λ_g und in ρ_g .

Durch Substitution von $(\frac{n}{2} - g - 1)$ statt g erhält man:

$$\lambda_{\frac{n}{2}-g-1} = \sin \frac{n-2g-1}{n} \pi = \sin \frac{2g+1}{n} \pi = \lambda_g$$

und

$$\rho_{\frac{n}{2}-g-1} = \cos \frac{n-2g-1}{n} \pi = -\cos \frac{2g+1}{n} \pi = -\rho_g.$$

Dies beachtend, geht $\omega(x, \frac{n}{2} - g - 1)$ in $\omega(x, g)$ über und es ist:

$$\sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) = 2 \sum_0^{\frac{n}{4}-1} \omega(x, g),$$

daher gibt die Gleichung 8) für $n = 4p$:

$$9) \quad F(x) = -\frac{1}{2x^n} + \frac{2\pi}{nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{4}-1} \omega(x, g)$$

$\beta)$ für $n = 4p + 2$ zerlege man die Summe, wie folgt:

$$\sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) = \sum_0^{\frac{n-2}{4}-1} \omega(x, g) + \sum_{\frac{n-2}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) + \omega(x, \frac{n-2}{4}).$$

Der Werth von $\omega(x, \frac{n-2}{4})$ ergibt sich sofort aus Gleichung A):

$$\omega(x, \frac{n-2}{4}) = \frac{e^{x\pi} + e^{-x\pi}}{e^{x\pi} - e^{-x\pi}} = \frac{e^{2x\pi} + 1}{e^{2x\pi} - 1}$$

und der zweite Theil der Summe kann auf die Form gebracht werden:

$$\sum_{\frac{n-2}{4}+1}^{\frac{n-2}{4}-1} \omega(x, g) = \sum_0^{\frac{n-2}{4}-1} \omega(x, \frac{n}{2}-g-1) = \sum_0^{\frac{n-2}{4}-1} \omega(x, g)$$

also geht die obige Summe über in:

$$\sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) = \frac{e^{i\pi} + 1}{e^{2x\pi} - 1} + 2 \sum_0^{\frac{n-2}{4}-1} \omega(x, g)$$

und man gelangt für $n = 4p+2$ zu dem Resultate:

$$10) \quad F(x) = -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \left[\frac{e^{2x\pi} + 1}{e^{2x\pi} - 1} + 2 \sum_0^{\frac{n-2}{4}-1} \omega(x, g) \right]$$

Spezielle Fälle: Für $n = 2$ gibt Gleichung 8) die bekannte Reihe:

$$\frac{1}{1^2+x^2} + \frac{1}{2^2+x^2} + \frac{1}{3^2+x^2} + \frac{1}{4^2+x^2} + \dots = -\frac{1}{2x^2} + \frac{\pi}{2x} \cdot \frac{e^{2x\pi} + 1}{e^{2x\pi} - 1};$$

und für $n = 4$ und $n = 6$ folgen aus Gleichung 9) und 10) die Resultate:

$$\frac{1}{1^4+x^4} + \frac{1}{2^4+x^4} + \frac{1}{3^4+x^4} + \frac{1}{4^4+x^4} + \dots = -\frac{1}{2x^4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4x^3} \cdot \frac{e^{x\pi\sqrt{2}} - e^{-x\pi\sqrt{2}} + 2 \sin(x\pi\sqrt{2})}{e^{x\pi\sqrt{2}} + e^{-x\pi\sqrt{2}} - 2 \cos(x\pi\sqrt{2})}$$

$$\frac{1}{1^6+x^6} + \frac{1}{2^6+x^6} + \frac{1}{3^6+x^6} + \frac{1}{4^6+x^6} + \dots = -\frac{1}{2x^6} + \frac{\pi}{6x^5} \left[\frac{e^{2x\pi} + 1}{e^{2x\pi} - 1} + \frac{e^{x\pi} - e^{-x\pi} + 2\sqrt{3} \sin(x\pi\sqrt{3})}{e^{x\pi} + e^{-x\pi} - 2 \cos(x\pi\sqrt{3})} \right].$$

Werden die Gleichungen 1) und 2) mit x^{n-1} multiplicirt und sodann zwischen den Grenzen 0 und x integrirt, so folgt:

$$\int_0^x \left[\frac{1}{1^n + x^n} + \frac{1}{2^n + x^n} + \frac{1}{3^n + x^n} + \frac{1}{4^n + x^n} + \dots \right] x^{n-1} dx$$

$$= \int_0^x [S_n x^{n-1} - S_{2n} x^{2n-1} + S_{3n} x^{3n-1} - S_{4n} x^{4n-1} + \dots] dx$$

oder nach Ausführung der Integrationen:

$$\frac{1}{n} \left[\lg \left(1 + \frac{x^n}{1^n} \right) + \lg \left(1 + \frac{x^n}{2^n} \right) + \lg \left(1 + \frac{x^n}{3^n} \right) + \lg \left(1 + \frac{x^n}{4^n} \right) + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{n} S_n x^n - \frac{1}{2n} S_{2n} x^{2n} + \frac{1}{3n} S_{3n} x^{3n} - \frac{1}{4n} S_{4n} x^{4n} + \dots = -\varphi(x)$$

oder nach Vereinigung der Logarithmen in der Klammer unter Berücksichtigung der Gleichungen 7) und D)

$$\frac{1}{n} \lg \left[\left(1 + \frac{x^n}{1^n} \right) \left(1 + \frac{x^n}{2^n} \right) \left(1 + \frac{x^n}{3^n} \right) \left(1 + \frac{x^n}{4^n} \right) \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2n} \lg \frac{\prod_0^{n-1} \sin \left(x \pi e^{\frac{2g+1}{n} \pi i} \right)}{x^n \pi^n}.$$

Es ist nämlich nach D):

$$E) \quad P = \prod_0^{n-1} \sin \left(x \pi e^{\frac{2g+1}{n} \pi i} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^n \prod_0^{\frac{n}{2}-1} f(x, g),$$

wenn die Function $f(x, g)$ durch die nachfolgende Gleichung erklärt wird:

$$f(x, g) = e^{2x\pi i_g} + e^{-2x\pi i_g} - 2 \cos(2x\pi g).$$

Übergeht man von den Logarithmen auf die Grundzahlen, so folgt also gleich:

$$11) \quad \left[\left(1 + \frac{x^n}{1^n} \right) \left(1 + \frac{x^n}{2^n} \right) \left(1 + \frac{x^n}{3^n} \right) \left(1 + \frac{x^n}{4^n} \right) \dots \right]^2 = \frac{\prod_0^{\frac{n}{2}-1} f(x, g)}{(2x\pi)^n}$$

Dabei liegt x zwischen $+1$ und -1 .

Um die Anzahl der Substitutionen zu vermindern, sollen abermals die zwei Fälle $\alpha) n = 4p$ und $\beta) n = 4p + 2$ unterschieden werden.

$\alpha)$ Für $n = 4p$ kann der Zähler in folgende zwei Producte zerlegt werden:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} f(x, g) = \prod_0^{\frac{n}{4}-1} f(x, g) \cdot \prod_0^{\frac{n}{4}-1} f(x, g).$$

Der letzte Factor lässt sich also umgestalten, wenn die Substitutionen in umgekehrter Ordnung geschehen:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} f(x, g) = \prod_0^{\frac{n}{4}-1} f(x, \frac{n}{2} - g - 1) = \prod_0^{\frac{n}{4}-1} f(x, g);$$

denn g kommt in der Function $f(x, g)$ nur in $\lambda_g = \sin \frac{2g+1}{n} \pi$ und in $\rho_g = \cos \frac{2g+1}{n} \pi$ vor und es ist bereits von früher her bekannt, dass $\lambda_{\frac{n}{2}-g-1} = \lambda_g$ und $\rho_{\frac{n}{2}-g-1} = -\rho_g$ ist, desshalb geht auch die Function $f(x, \frac{n}{2} - g - 1)$ über in $f(x, g)$, also hat man für das Product:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} f(x, g) = \left[\prod_0^{\frac{n}{4}-1} f(x, g) \right]^2$$

und es nimmt die Gleichung 11) die Form an:

$$12) \quad \left(1 + \frac{x}{1^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right) \left(1 + \frac{x^{n^2}}{3^n}\right) \left(1 + \frac{x^{n^3}}{4^n}\right) \dots = \frac{\prod_0^{\frac{n}{4}-1} f(x, g)}{(2x\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

für $n = 4p$.

$\beta)$ Für $n = 4p + 2$ kann der Zähler in Gleichung 11) in nachstehende Factoren zerlegt werden:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} f(x, g) = \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} f(x, g) \cdot f\left(x, \frac{n-2}{4}\right) \cdot \prod_{\frac{n-2}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1} f(x, g).$$

Der mittlere Factor ausgerechnet, gibt den einfachen Werth:

$$f\left(x, \frac{n-2}{4}\right) = (e^{x\pi} - e^{-x\pi})^2$$

und der letzte Theil des Productes kann ähnlich wie vorher umgeformt werden:

$$\prod_{\frac{\frac{n-2}{4}+1}^{\frac{n}{2}-1}} f(x, g) = \prod_0^{\frac{\frac{n-2}{4}-1}^{\frac{n}{2}-1}} f\left(x, \frac{n}{2} - g - 1\right) = \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} f(x, g)$$

daher liefert Gleichung 11) das Resultat:

$$\begin{aligned} 13) \quad & \left(1 + \frac{x^n}{1^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{3^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{4^n}\right) \cdot \dots \\ & = \frac{e^{x\pi} - e^{-x\pi}}{(2x\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} f(x, g). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $n = 2$ in Gleichung 11) findet man das bekannte Product:

$$\left(1 + \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{3^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{4^2}\right) \cdot \dots = \frac{e^{x\pi} - e^{-x\pi}}{2x\pi}.$$

Aus den Gleichungen 12) und 13) folgen durch Substitution von $n = 4$, $n = 6$ und $n = 8$ noch die Resultate:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x^4}{1^4}\right) \left(1 + \frac{x^4}{2^4}\right) \left(1 + \frac{x^4}{3^4}\right) \left(1 + \frac{x^4}{4^4}\right) \cdot \dots \\ & = \frac{1}{4x^2\pi^2} [e^{x\pi/\sqrt{2}} + e^{-x\pi/\sqrt{2}} - 2 \cos(x\pi/\sqrt{2})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x^6}{1^6}\right) \left(1 + \frac{x^6}{2^6}\right) \left(1 + \frac{x^6}{3^6}\right) \left(1 + \frac{x^6}{4^6}\right) \cdot \dots \\ & = \frac{e^{x\pi} - e^{-x\pi}}{8x^3\pi^3} [e^{x\pi} + e^{-x\pi} - 2 \cos(x\pi/\sqrt{3})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x^8}{1^8}\right) \left(1 + \frac{x^8}{2^8}\right) \left(1 + \frac{x^8}{3^8}\right) \left(1 + \frac{x^8}{4^8}\right) \cdot \dots \\ &= \frac{1}{16x^4\pi^4} (e^{a\pi} + e^{-a\pi} - 2 \cos b\pi) (e^{b\pi} + e^{-b\pi} - 2 \cos a\pi). \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$a = x\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad b = x\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Substituirt man in Formel 11) statt $x \dots \frac{x}{2}$, so nimmt das Product die Form an:

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{4^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{6^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{8^n}\right) \cdot \dots \right]^2 \\ &= \frac{2^n \prod_0^{n-1} \sin \left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g+1}{n}\pi i} \right)}{x^n \pi^n}. \end{aligned}$$

$\frac{n}{2} - 1$

Bei dieser Umformung wurde $\prod_0^{n-1} f(x, g)$ vermöge Gleichung E) durch den Zähler des Bruches in der letzten Gleichung ersetzt, nebstdem kann 11) in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$\left[\left(1 + \frac{x^n}{1^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{3^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{4^n}\right) \cdot \dots \right]^2 = \frac{\prod_0^{n-1} \sin \left(x\pi e^{\frac{2g+1}{n}\pi i} \right)}{x^n \pi^n}.$$

Durch Division dieser zwei unendlichen Producte entspringt die Gleichung:

$$\begin{aligned} 14) \quad & \left[\left(1 + \frac{x^n}{1^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{3^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{5^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{7^n}\right) \cdot \dots \right]^2 \\ &= \prod_0^{n-1} \cos \left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g+1}{n}\pi i} \right). \end{aligned}$$

Ich setze zur Abkürzung:

$$P = \prod_0^{n-1} \cos \left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g+1}{n}\pi i} \right),$$

so folgt:

$$P = \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) \cdot \prod_{n-1}^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right),$$

wenn die Substitutionen beim zweiten Factor in umgekehrter Ordnung vorgenommen werden. Letzterer lässt sich auf nachstehende Weise umformen:

$$\begin{aligned} \prod_{n-1}^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) &= \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2n-2g-1}{n}\pi i}\right) \\ &= \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{-\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) \end{aligned}$$

da $e^{2\pi i} = 1$ ist, also hat man für P den Ausdruck:

$$\begin{aligned} P &= \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) \cdot \cos\left(\frac{x\pi}{2} e^{-\frac{2g+1}{n}\pi i}\right) \\ &= \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2} \left[\cos\left(x\pi \cos\frac{2g+1}{n}\pi\right) + \cos\left(ix\pi \sin\frac{2g+1}{n}\pi\right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(x\pi \cos\frac{2g+1}{n}\pi\right) + \frac{1}{2} e^{x\pi \sin\frac{2g+1}{n}\pi} + \frac{1}{2} e^{-x\pi \sin\frac{2g+1}{n}\pi} \right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \{e^{x\pi\lambda_g} + e^{-x\pi\lambda_g} + 2 \cos(x\pi\rho_g)\} \end{aligned}$$

hier haben λ_g und ρ_g ihre frühere Bedeutung, nämlich:

$$\lambda_g = \sin\frac{2g+1}{n}\pi \quad \text{und} \quad \rho_g = \cos\frac{2g+1}{n}\pi$$

und Gleichung 14) gibt das Resultat:

$$\begin{aligned} 15) \quad & \left[\left(1 + \frac{x^n}{1^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{3^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{5^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{7^n}\right) \dots \right]^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_1^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g); \quad -1 < x < +1. \end{aligned}$$

$\psi(x, g)$ ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\psi(x, g) = e^{x\pi i_g} + e^{-x\pi i_g} + 2 \cos(x\pi\rho_g).$$

$\alpha)$ Für $n = 4p + 2$ ist:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g) = \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} \psi(x, g) \cdot \psi(x, \frac{n-2}{4}) \prod_0^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g).$$

Für das Mittelglied im Producte erhält man den Werth:

$$\psi\left(x, \frac{n-2}{4}\right) = e^{x\pi} + e^{-x\pi} + 2$$

und der letzte Factor kann ähnlich wie in den früheren Fällen umgestaltet werden, wenn man von rückwärts zu substituiren beginnt. Es folgt dann:

$$\prod_0^{\frac{n-2}{4}+1} \psi(x, g) = \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} \psi(x, \frac{n}{2} - g - 1) = \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} \psi(x, g)$$

weil

$$\lambda_{\frac{n}{2}-g-1} = \lambda_g \quad \text{und} \quad \rho_{\frac{n}{2}-g-1} = -\rho_g$$

ist, daher geht die Gleichung 15) über in:

$$16) \quad \left(1 + \frac{x^n}{1^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{3^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{5^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{7^n}\right) \cdot \dots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} (e^{\frac{x\pi}{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}})^{\frac{n-2}{4}-1} \prod_0^{\frac{n-2}{4}-1} \psi(x, g).$$

$\beta)$ Für $n = 4p$ hat man:

$$\prod_0^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g) = \prod_0^{\frac{n}{4}-1} \psi(x, g) \cdot \prod_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g),$$

Der zweite Factor kann wieder auf die Form gebracht werden:

$$\prod_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{2}-1} \psi(x, g) = \prod_0^{\frac{n}{4}-1} \psi(x, \frac{n}{2} - g - 1) = \prod_0^{\frac{n}{4}-1} \psi(x, g)$$

Dies beachtend gibt Gleichung 14) für $n = 4p$

$$17) \left(1 + \frac{x^n}{1^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{3^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{5^n}\right) \left(1 + \frac{x^n}{7^n}\right) \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_0^{\frac{n}{4}-1} \psi(x, g).$$

Für $n = 2$ findet sich aus Gleichung 14) das bekannte specielle Resultat:

$$\left(1 + \frac{x^2}{1^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{3^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{5^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{7^2}\right) \dots = \frac{1}{2} (e^{\frac{x\pi}{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}})$$

und für $n = 4$, $n = 6$ und $n = 8$ gehen aus den letzten zwei Gleichungen noch folgende specielle Ergebnisse hervor:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x^4}{1^4}\right) \left(1 + \frac{x^4}{3^4}\right) \left(1 + \frac{x^4}{5^4}\right) \left(1 + \frac{x^4}{7^4}\right) \dots \\ = \frac{1}{4} \left(e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} + e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} + 2 \cos x\pi \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x^6}{1^6}\right) \left(1 + \frac{x^6}{3^6}\right) \left(1 + \frac{x^6}{5^6}\right) \left(1 + \frac{x^6}{7^6}\right) \dots \\ = \frac{1}{8} (e^{\frac{x\pi}{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}}) (e^{\frac{x\pi}{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}} + 2 \cos \frac{x\pi}{2} \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x^8}{1^8}\right) \left(1 + \frac{x^8}{3^8}\right) \left(1 + \frac{x^8}{5^8}\right) \left(1 + \frac{x^8}{7^8}\right) \dots \\ = \frac{1}{16} (e^{a\pi} + e^{-a\pi} + 2 \cos b\pi) (e^{b\pi} + e^{-b\pi} + 2 \cos a\pi) \end{aligned}$$

Dabei haben a und b die Werthe:

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Nimmt man von den Gleichungen 15), 16) und 17) die natürlichen Logarithmen und differentiirt dann nach x , so ist:

$$2 \left[\lg \left(1 + \frac{x^n}{1^n} \right) + \lg \left(1 + \frac{x^n}{3^n} \right) + \lg \left(1 + \frac{x^n}{5^n} \right) + \dots \right] = n \lg \frac{1}{2} + \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \lg \psi(x, g)$$

und

$$2nx^{n-1} \left[\frac{1}{1^n+x^n} + \frac{1}{3^n+x^n} + \frac{1}{5^n+x^n} + \frac{1}{7^n+x^n} + \dots \right] = \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \frac{\psi'(x, g)}{\psi(x, g)}$$

folglich hat man für die Reihe in der eckigen Klammer:

$$18) \frac{1}{1^n+x^n} + \frac{1}{3^n+x^n} + \frac{1}{5^n+x^n} + \frac{1}{7^n+x^n} \cdot \dots = \frac{\pi}{2nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \eta(x, g),$$

wenn der Bruch

$$\frac{\psi'(x, g)}{\psi(x, g)} = \pi \eta(x, g)$$

gesetzt wird, und $\eta(x, g)$ ist durch den Ausdruck gegeben:

$$\eta(x, g) = \frac{\lambda_g (e^{x\pi\lambda_g} - e^{-x\pi\lambda_g}) - 2\rho_g \sin(x\pi\rho_g)}{e^{x\pi\lambda_g} + e^{-x\pi\lambda_g} + 2 \cos(x\pi\rho_g)}.$$

Ebenso gehen aus den Gleichungen 16) und 17) bei ähnlicher Behandlung die Resultate hervor:

$$19) \frac{1}{1^n+x^n} + \frac{1}{3^n+x^n} + \frac{1}{5^n+x^n} + \frac{1}{7^n+x^n} + \dots$$

$$= \frac{\pi}{2nx^{n-1}} \left\{ \frac{e^{x\pi} - 1}{e^{x\pi} + 1} + 2 \sum_0^{\frac{n-2}{4}-1} \eta(x, g) \right\}$$

$$20) = \frac{\pi}{nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{4}-1} \eta(x, g).$$

Formel 19) ist gültig für $n = 4p + 2$ und 20) für $n = 4p$.

Für $n = 4$ und $n = 6$ erhält man aus den letzten zwei Gleichungen die speciellen Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^4+x^4} + \frac{1}{3^4+x^4} + \frac{1}{5^4+x^4} + \frac{1}{7^4+x^4} + \dots \\ = \frac{\pi}{4x^3\sqrt{2}} \cdot \frac{e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} - e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} - 2 \sin\left(x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{e^{x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} + e^{-x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}} + 2 \cos\left(x\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^6+x^6} + \frac{1}{3^6+x^6} + \frac{1}{5^6+x^6} + \frac{1}{7^6+x^6} + \dots \\ = \frac{\pi}{12x^5} \left\{ \frac{e^{x\pi} - 1}{e^{x\pi} + 1} + \frac{e^{\frac{x\pi}{2}} - e^{-\frac{x\pi}{2}} - 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}\right)}{e^{\frac{x\pi}{2}} + e^{-\frac{x\pi}{2}} + 2 \cos\left(\frac{x\pi}{2}\sqrt{3}\right)} \right\}. \end{aligned}$$

Es ist nach Gleichung 8):

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{1^n+x^n} + \frac{1}{2^n+x^n} + \frac{1}{3^n+x^n} + \frac{1}{4^n+x^n} + \dots \\ &= -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega(x, g) \end{aligned}$$

und wenn $\frac{x}{2}$ statt x substituirt wird, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} F\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2^n+x^n} + \frac{1}{4^n+x^n} + \frac{1}{6^n+x^n} + \frac{1}{8^n+x^n} + \dots \\ &= -\frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{2nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \omega\left(\frac{x}{2}, g\right). \end{aligned}$$

Durch Subtraction dieser Gleichung von 18) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^n+x^n} - \frac{1}{2^n+x^n} + \frac{1}{3^n+x^n} - \frac{1}{4^n+x^n} + \dots \\ = \frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{2nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} [\eta(x, g) - \omega\left(\frac{x}{2}, g\right)]. \end{aligned}$$

Die Functionen η und ω sind durch die Ausdrücke gegeben:

$$\eta(x, g) = \frac{\lambda_y(e^x - e^{-x}) - 2\rho_g \sin \beta}{e^x + e^{-x} + 2 \cos \beta}$$

$$\omega\left(\frac{x}{2}, g\right) = \frac{\lambda_y(e^x - e^{-x}) + 2\rho_g \sin \beta}{e^x + e^{-x} - 2 \cos \beta}$$

Dabei ist zur Abkürzung:

$$\alpha = x\pi\lambda_y \text{ und } \beta = x\pi\rho_g$$

Für die Differenz dieser zwei Functionen erhält man:

$$\eta(x, g) - \omega\left(\frac{x}{2}, g\right) = \frac{-4\rho_g \sin \beta (e^x + e^{-x}) - 4\lambda_y \cos \beta (e^x - e^{-x})}{e^{2x} + e^{-2x} + 2(1 - 2 \cos^2 \beta)}$$

$$= -4 \cdot \frac{e^{x\pi\lambda_y} \sin\left(x\pi\rho_g + \frac{2g+1}{n}\pi\right) + e^{-x\pi\lambda_y} \sin\left(x\pi\rho_g - \frac{2g+1}{n}\pi\right)}{e^{2x\pi\lambda_y} + e^{-2x\pi\lambda_y} - 2 \cos(2x\pi\rho_g)}$$

Es ist somit der Werth der Reihe mit regelmässigem Zeichenwechsel durch folgende Formel gegeben:

$$21) \quad \frac{1}{1^n + x^n} - \frac{1}{2^n + x^n} + \frac{1}{3^n + x^n} - \frac{1}{4^n + x^n} + \dots$$

$$= \frac{1}{2x^n} = \frac{2\pi}{nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} Q(x),$$

wobei abkürzend:

$$Q(x) = \frac{e^{x\pi\lambda_y} \cdot \sin\left(x\pi\rho_g + \frac{2g+1}{n}\pi\right) + e^{-x\pi\lambda_y} \cdot \sin\left(x\pi\rho_g - \frac{2g+1}{n}\pi\right)}{e^{2x\pi\lambda_y} + e^{-2x\pi\lambda_y} - 2 \cos(2x\pi\rho_g)}$$

gesetzt wurde. Wird ferner in 9) x durch $\frac{x}{2}$ ersetzt, so gibt dies:

$$- \frac{1}{2^n} F\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^n + x^n} + \frac{1}{4^n + x^n} + \frac{1}{6^n + x^n} + \frac{1}{8^n + x^n} + \dots$$

$$= - \frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{n \cdot x^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{4}-1} \omega\left(\frac{x}{2}, g\right)$$

Zieht man dies letzte Resultat von Gleichung 20) ab, so folgt:

$$\begin{aligned}
 22) \quad & \frac{1}{1^n+x^n} - \frac{1}{2^n+x^n} + \frac{1}{3^n+x^n} - \frac{1}{4^n+x^n} + \dots \\
 & = \frac{1}{2x^n} + \frac{\pi}{nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{4}-1} [\gamma(x, g) - \omega(\frac{x}{2}, g)] \\
 & = \frac{1}{2x^n} - \frac{4\pi}{nx^{n-1}} \sum_0^{\frac{n}{4}-1} Q(x); \quad n = 4p.
 \end{aligned}$$

Durch das analoge Verfahren gibt Gleichung 10) in Verbindung mit 19) für $n = 4p+2$ nachstehendes Resultat:

$$\begin{aligned}
 23) \quad & \frac{1}{1^n+x^n} - \frac{1}{2^n+x^n} + \frac{1}{3^n+x^n} - \frac{1}{4^n+x^n} + \dots \\
 & = \frac{1}{2x^n} - \frac{2\pi}{nx^{n-1}} \left[\frac{1}{e^{x\pi} - e^{-x\pi}} + 2 \sum_0^{\frac{n-2}{4}-1} Q(x) \right]
 \end{aligned}$$

Aus den letzten zwei Formeln gehen durch Substitution von $n = 4$ und $n = 6$ folgende specielle Resultate hervor:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1^4+x^4} - \frac{1}{2^4+x^4} + \frac{1}{3^4+x^4} - \frac{1}{4^4+x^4} + \dots \\
 & = \frac{1}{2x^4} - \frac{\pi}{x^3} \frac{e^{x\pi} \sqrt{\frac{1}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{4}(2x\sqrt{2}+1)\right] + e^{-x\pi} \sqrt{\frac{1}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{4}(2x\sqrt{2}-1)\right]}{e^{x\pi/\sqrt{2}} + e^{-x\pi/\sqrt{2}} - 2 \cos(x\pi/\sqrt{2})} \\
 & \frac{1}{1^6+x^6} - \frac{1}{2^6+x^6} + \frac{1}{3^6+x^6} - \frac{1}{4^6+x^6} + \dots = \frac{1}{2x^6} - \frac{\pi}{3x^5} \\
 & \left\{ \frac{1}{e^{x\pi} - e^{-x\pi}} + \frac{e^{\frac{x\pi}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{6}(3x\sqrt{3}+1)\right] + e^{-\frac{x\pi}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{6}(3x\sqrt{3}-1)\right]}{e^{x\pi} + e^{-x\pi} - 2 \cos(x\pi/\sqrt{3})} \right\}.
 \end{aligned}$$

Astronomische Untersuchungen über Finsternisse.

Von F. K. Ginzl,
Astronom zu Wien.

II. Abhandlung.

(Mit 4 Karten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juli 1883.)

Grundlagen aus historischen Sonnenfinsternissen zur Ableitung empirischer Correctionen der Mondbahn.

In der I. Abhandlung der vorliegenden Untersuchungen über Finsternisse (Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. LXXXV. Bd., II. Abth., März-Heft 1882) haben eine Reihe classischer Sonnenfinsternisse durch die Rechnung eine sehr befriedigende Darstellung gefunden. Es wurde diese Übereinstimmung, wie a. a. O. auseinandergesetzt ist, vornehmlich durch die Wirkung jener empirischen Correctionen erreicht, welche Herr Professor v. Oppolzer in seinen „Syzygientafeln für den Mond“ gegeben hat. Indessen liess sich auch nicht verkennen, dass diese Correctionen noch einer weiteren Verbesserung zugänglich seien, was insbesondere bei der nunmehr unzweifelhaft festgestellten Finsterniss des Plutarch (l. c. 40 — 44) hervortrat, da die Centralitätszone dieser Finsterniss noch etwas zu westlich von dem wahrscheinlichen Beobachtungsorte verblieb.

Ich war desshalb bemüht, die Oppolzer'schen Tafeln mit einer weiteren Reihe von Finsternissen zu vergleichen, um die von ersteren übrig gelassenen Fehler übersehen und hieraus die neuen Correctionen bestimmen zu können. Da die Beschaffung und, wie in der Folge klar werden wird, auch die Behandlung des hiezu nothwendigen historischen Materials sehr beträchtliche Zeit in Anspruch nahm, konnte die Vergleichung von Beobachtung und Rechnung erst in den letzten Monaten geschehen, und dieser Umstand möge dem verspäteten Erscheinen der vorliegenden

Abhandlung zur Entschuldigung dienen. Bei dem erheblichen Umfange des Beobachtungsmateriales muss ich mich auch begnügen, vorderhand nur die Publication der Ergebnisse zwischen Rechnung und Überlieferung vorzunehmen. Die Ableitung der empirischen Correctionen selbst wird in der III. Abhandlung ausgeführt werden.

In der Wahl der historischen Finsternisse bin ich von dem zumeist betretenen Wege, auf die uns von den römischen und griechischen Schriftstellern überlieferten Finsternisse zurückzugreifen, ganz abgegangen. Denn wenn auch diese Ereignisse den Vortheil haben, uns in eine mehr oder weniger entlegene Zeit zu führen, in welcher die zu bestimmenden Mondbahn correctionen der erheblicheren Abweichungen wegen sicherer zu ermitteln sind, so leiden sie doch vielfach an dem Mangel einer genauen Zeitbestimmung der Finsternisse und noch mehr an dem Mangel einer gehörigen Kenntniss des Beobachtungsortes. Wegen des ersteren Übelstandes ist ein grosser Theil der classischen Finsternisse des Alterthums nur zu chronologischen Untersuchungen und Feststellungen brauchbar. Noch unsicherer ist zumeist der Ort, auf welchen die Aufzeichnung des betreffenden Annalisten zu beziehen sei und man ist in dieser Beziehung nur zu oft auf blosser Annahmen hingewiesen. Da ausserdem für die Mehrzahl der Finsternisse nur Einzelberichte beibringbar sind, deren Richtigkeit man durch die Angaben anderer unabhängiger Autoren nicht zu controliren vermag, so erscheint der Verwendung der classischen Literatur zur Ableitung empirischer Correctionen gegenüber Vorsicht geboten. Man findet aus diesen Gründen unter den später folgenden Finsternissen von den zahlreichen Notizen bei Livius, Tacitus u. a. keinen Gebrauch gemacht. Nur eine Finsterniss des Alterthums kommt zur Verwendung, jene von — 660 Juni 27, von der wir aber die Gewähr haben, dass sie der Zeit wie dem Orte nach sicher steht.

Weit brauchbarer für einen scharfen Vergleich der berechneten Finsternisse mit Beobachtungen erscheinen die Geschichtsquellen des Mittelalters. Diese Quellen zeichnen sich betreffs der Naturerscheinungen, von denen sie berichten, durch ihre grosse Zahl und durch vorzügliche, genaue Angaben aus. Da sie ausserdem grösstentheils der historischen Kritik unterworfen sind, von welcher

bei den classischen Autoren nahezu keine Rede sein kann, so ist die Sicherheit, die sie in den Angaben für Zeit, Ort und Beschreibung der Finsternisse dem Astronomen bieten, nicht genug zu schätzen. Es erscheint desshalb befremdend, warum man bei ähnlichen Versuchen, statt von diesen werthvollen Materialien Gebrauch zu machen, auf das Alterthum zurückgegriffen hat. Struyck¹ ist in älterer Zeit der Einzige, der mittelalterliche Quellen anführt. Allein sein Zweck war nicht die Bestimmung empirischer Correctionen, sondern nur der allgemein gehaltene Nachweis, dass die einzelnen Finsternisse an bestimmten Orten der Rechnung gemäss gesehen worden sind. Von einer kritischen Verwendung des historischen Materials ist keine Rede. Letzteres hat sich seit Struyck ausserordentlich vermehrt. Die grossartige Schöpfung der „*Monumenta Germaniae*“, die in England und Frankreich publicirten Sammelwerke vaterländischer Chronisten und die zahlreichen Localchroniken gehören erst der neueren Zeit an. Celoria hat mit Hilfe dieses seit Struyck publicirten historischen Materials an zwei Finsternissen gezeigt, mit welchem Erfolge die mittelalterlichen Quellen von der Astronomie benützt werden können.

Es erschien mir desshalb sehr zweckmässig, die Beschaffung der historischen Grundlagen zum Zwecke der Correctionsbestimmung der Finsternisse in grossem Massstabe zu wiederholen, indem ich der Vermuthung Raum gab, es werde sich für die einzelnen Finsternisse immer eine Gruppe von Berichten finden, welche die gegenseitige und womöglich unabhängige Vergleichung mit den Rechnungsergebnissen gestatten würde. Diese Voraussetzung hat sich bestätigt. Die meisten der folgenden Finsternisse finden sich auf eine grössere Zahl von Quellen fundirt, und bei einer derselben habe ich deren 78 zusammengebracht. Von den Sammelwerken, welchen die einzelnen Chronisten entnommen wurden, nenne ich besonders die *Monum. Germaniae*, Muratori, Böhmer, Menken, die *Scriptores Brunsvic.*, *Script. rer. Prussic.*, die *Rer. Britannic. Script.*, die dänisch-schwedischen Sammlungen von Langebek und Fant, die österreichischen von Pez, Dobner, Schwandtner, die *Script. rer. Bohem.*, die *Fontes rer. austr.*

¹ Struyck: Inleiding tot de algem. Geogr. 1740, pag. 88—162.

die byzantinischen Geschichtsschreiber u. s. w. Die Durchsuhung mancher Werke, wie z. B. der *Script. rer. Silesic. u. a.* blieb ohne Ergebniss. Selbstverständlich waren nicht alle Finsternisse für die Bestimmung empirischer Correctionen entscheidend, indem entweder die Quellen die Rechnung nur bestätigten, oder indem sie gegenseitige Widersprüche oder Unzulänglichkeiten enthielten und darum keine Entscheidung bringen konnten. Desshalb macht auch das nachfolgende Verzeichniss keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es enthält im Vergleiche zu Lambert's Tafel historischer Finsternisse¹ manche Lücke, eben desshalb, weil ein grosser Theil dieser Finsternisse aus Mangel an entscheidendem Vergleichsmateriale für meine Zwecke nicht in Betracht kommt, es betrifft daher nur diejenigen Finsternisse, welche mir irgendwie Anlass zur Untersuchung gegeben haben und im Nachfolgenden mit Beobachtungen verglichen werden:

1. 660 vor Christi, Juni 27.
2. 346 nach Christi, Juni 5.
3. 418 " " Juli 18.
4. 538 " " Februar 14.
5. 540 " " Juni 19.
6. 563 " " October 2.
7. 590 " " October 3.
8. 592 " " März 18.
9. 601 " " März 9.
10. 664 " " Mai 1.
11. 693 " " October 4.
12. 733 " " August 13.
13. 787 " " September 15.
14. 840 " " Mai 5.
15. 878 " " October 29.
16. 891 " " August 7.
17. 939 " " Juli 18.
18. 968 " " December 21.
19. 1033 " " Juni 28.
20. 1039 " " August 22.
21. 1093 " " September 22.

¹ Sammlung von Tafeln, herausgeg. v. d. k. preuss. Akad. d. Wiss. Berlin. 1776, Bd. II.

22.	1113	nach Christi,	März 18.
23.	1124	" "	August 11.
24.	1133	" "	August 1.
25.	1140	" "	März 20.
26.	1147	" "	October 25.
27.	1153	" "	Jänner 25.
28.	1178	" "	September 12.
29.	1185	" "	Mai 1.
30.	1187	" "	September 3.
31.	1191	" "	Juni 22.
32.	1207	" "	Februar 27.
33.	1241	" "	October 6.
34.	1261	" "	März 31.
35.	1263	" "	August 5.
36.	1267	" "	Mai 24.
37.	1270	" "	März 22.
38.	1310	" "	Jänner 31.
39.	1321	" "	Juni 25.
40.	1330	" "	Juli 16.
41.	1339	" "	Juli 7.
42.	1344	" "	October 6.
43.	1354	" "	September 16.
44.	1385	" "	December 31.
45.	1406	" "	Juni 15.
46.	1415	" "	Juni 6.

Ausserdem habe ich eine Anzahl Finsternisse behandelt, bei welchen die Quellen, die ich aufgefunden, als unzureichend sich erweisen. Da bei der noch fortschreitenden Publication bisher unbekannter Quellenschriften sich aber möglicher Weise im Laufe der Zeit noch Entscheidendes vorfinden kann, so werden diese Finsternisse in der III. Abhandlung in Form eines Anhanges angehängt werden.

Die Bestimmung der Finsternisse geschah mit Hilfe der Oppolzer'schen „Syzygientafeln für den Mond“, und zwar, wie in der ersten Abhandlung, mit Zuziehung der daselbst gegebenen empirischen Correctionen. Es folgen für obige Finsternisse hier die Elemente, wobei die Bezeichnungen der genannten Tafeln beibehalten werden:

Nr.	T	L'	Z	ϵ	P	Q	$\log p$	$\log \Delta L$	$\log q$	u'_a	$\log f_a$
1	1480171.0843	87.464	- 1.32°	23.784	3.162	4.888	0.7365	9.7123	8.7136	0.5674	7.6633
2	1847590.7316	74.615	- 1.36	23.655	7.405	9.143	0.6976	9.7567	8.7517	0.5350	7.6624
3	1873931.9610	116.462	+ 0.73	23.643	4.044	6.152	0.7026	9.7513	8.7471	0.5388	7.6642
4	1917607.8606	328.665	+ 4.02	23.629	9.459	10.693	0.6982	9.7598	8.7566	0.5387	7.6726
5	1918463.8698	90.100	- 0.44	23.627	176.053	176.215	0.6901	9.7645	8.7597	0.5307	7.6627
6	1928968.8652	191.624	- 2.78	23.622	7.977	9.791	0.7351	9.7123	8.7153	0.5661	7.6730
7	1936831.9869	193.200	- 2.88	23.623	171.783	173.075	0.7400	9.7056	8.7096	0.5702	7.6731
8	1937363.8829	1.204	+ 1.82	23.623	8.168	10.714	0.6959	9.7575	8.7535	0.5378	7.6885
9	1940641.8471	352.160	+ 2.32	23.617	172.636	174.640	0.7015	9.7520	8.7488	0.5415	7.6697
10	1963705.1653	43.655	- 1.32	23.613	5.432	7.373	0.7004	9.7533	8.7489	0.5377	7.6639
11	1974453.8348	195.075	- 3.02	23.604	5.843	6.617	0.6906	9.7628	8.7598	0.5373	7.6731
12	1989011.9187	144.226	+ 0.56	23.601	5.889	3.696	0.7282	9.7220	8.7218	0.5569	7.6666
13	2008767.8539	176.413	- 1.68	23.593	4.263	1.936	0.7240	9.7262	8.7260	0.5567	7.6706
14	2027993.0033	48.724	- 1.39	23.586	174.907	175.234	0.6904	9.7643	8.7596	0.5315	7.6639
15	2042049.0581	220.571	- 3.80	23.580	11.056	9.475	0.6955	9.7572	8.7547	0.5418	7.6755
16	2046714.9267	139.181	+ 0.80	23.584	176.508	175.658	0.7427	9.7036	8.7071	0.5667	7.6657
17	2064226.8702	120.247	+ 1.06	23.574	4.981	5.603	0.6907	9.7639	8.7592	0.5318	7.6640
18	2074975.8959	276.534	+ 0.94	23.572	10.795	9.649	0.6917	9.7606	8.7582	0.5407	7.6773
19	2098540.9809	102.455	+ 0.53	23.562	4.318	2.034	0.7261	9.7250	8.7237	0.5630	7.6629
20	2100786.0021	159.992	+ 0.07	23.564	174.687	177.118	0.7189	9.7328	8.7301	0.5613	7.6671
21	2120541.9522	186.272	- 2.43	23.557	173.136	175.505	0.7228	9.7270	8.7263	0.5566	7.6711

26	2140297.9458	0.005	+	1.39	23.546	172.841	173.379	0.6905	9.7012	8.7566	0.5338	7.6650
27	2142216.9811	219.173	-	3.88	23.549	172.253	174.511	0.7265	9.7222	8.7598	0.5347	7.6690
28	2151577.9963	313.514	+	3.85	23.549	8.399	6.620	0.7353	9.7114	8.7146	0.5681	7.6749
29	2154000.0588	176.839	-	1.70	23.541	7.295	5.966	0.6942	9.7595	8.7562	0.5373	7.6698
30	2154855.9763	47.395	-	1.18	23.544	6.275	6.585	0.6902	9.7643	8.7594	0.5318	7.6645
31	2156243.9765	167.806	-	0.94	23.545	171.769	171.025	0.6909	9.7628	8.7586	0.5349	7.6686
32	2161972.9583	97.521	+	0.37	23.543	175.024	173.976	0.7420	9.7053	8.7081	0.5639	7.6627
33	2174612.0049	346.463	+	2.98	23.542	7.555	5.558	0.7324	9.7155	8.7171	0.5635	7.6716
34	2181728.8904	200.379	-	3.40	23.588	170.477	170.107	0.6894	9.7636	8.7603	0.5865	7.6726
35	2182585.0770	18.798	+	0.38	23.535	6.046	3.867	0.7290	9.7203	8.7201	0.5584	7.6677
36	2183973.8969	139.356	+	0.95	23.534	171.594	170.141	0.7388	9.7090	8.7110	0.5686	7.6652
37	2185006.7638	70.404	-	0.96	23.531	176.474	178.902	0.7158	9.7371	8.7340	0.5462	7.6631
38	2195566.0252	9.699	+	1.14	23.529	170.513	168.139	0.7228	9.7280	8.7270	0.5547	7.6689
39	2203729.7742	319.508	+	3.87	23.524	171.370	173.068	0.7362	9.7106	8.7141	0.5683	7.6750
40	2207037.1413	101.700	+	0.66	23.525	173.864	176.276	0.7201	9.7319	8.7293	0.5439	7.6627
41	2210315.0647	120.972	+	1.27	23.523	8.198	10.643	0.7149	9.7379	8.7349	0.5460	7.6636
42	2212233.7649	112.138	+	1.08	23.523	172.998	175.392	0.7217	9.7301	8.7278	0.5501	7.6630
43	2215865.9040	202.172	-	3.52	23.519	4.442	2.988	0.7386	9.7079	8.7118	0.5685	7.6726
44	2227294.9264	182.048	-	2.12	23.522	176.756	174.364	0.7108	9.7411	8.7385	0.5479	7.6701
45	2234765.7996	289.543	+	2.19	23.515	169.539	170.051	0.6895	9.7631	8.7608	0.5393	7.6771
46	2238043.7988	92.626	+	0.24	23.514	8.398	6.753	0.6968	9.7577	8.7527	0.5846	7.6626
		83.889	-	0.25	23.513	173.233	172.097	0.6930	9.7616	8.7566	0.5324	7.6627

Mit diesen Elementen wurden für jede Finsterniss jene Grenzen der Sichtbarkeit berechnet, innerhalb welcher die Bedeckung central wird. Diese Zone gibt im Vergleiche zu den Berichten die Grösse der Verschiebung. Bei der Vergleichung kommen zweierlei Umstände, sowohl zeitliche wie örtliche in Betracht.

Was zuerst die Zeitangaben der Quellen anbelangt, so finden sich zwischen den einzelnen für dieselbe Finsterniss geltenden Notirungen vielfache Unterschiede in der Jahreszahl, seltener in der Angabe des Tages. Diese Differenzen haben ihren Grund in Fehlern, die bisweilen aus einer Quelle in mehrere andere übergegangen sind, aber sie beruhen wohl auch bisweilen in einer mancher Quelle selbst eigenthümlichen Jahreszählung. Die Entscheidung, welches Datum als das richtige zu gelten hat, ist leicht zu treffen und es ist im Folgenden überall, wo die bestehenden Datumsunterschiede nicht besonders auseinandergesetzt erscheinen, diese Untersuchung als geschehen zu betrachten, so dass man also unter ein und derselben Überschrift der Finsternisse nur Quellen findet, die trotz ihrer Abweichungen in den Zeitangaben zu einer und derselben Finsternisserscheinung gehören. Wo hievon eine Ausnahme gemacht ist, wird das Nöthige erörtert. Auf die Quellenpublication habe ich zudem entweder die Angabe des richtigen Datums der Finsterniss (in btrg. Zeit der Quellen wegen) folgen lassen oder aber diejenige der Quellen namhaft gemacht, welche diese Datirung führt, und nach der also die anderen eventuell zu corrigiren wären. Dort, wo die Differenzen gross sind und chronologische Zweifel herrschen, ist der betreffende Fall besonders untersucht und auf das Zusammengehörige verwiesen. Was die Angabe der Tagesstunde der Finsterniss anbelangt, welche von sehr vielen Berichten bezeichnet wird, so wurde angenommen, dass die meisten mittelalterlichen Quellen von Sonnenaufgang ab zählen, was aber auch vielfach localen Modificationen unterworfen gewesen sein mag.

Bei dem Schlusse auf den Ort, aus welchem der Bericht einer Chronik herrührt, der gewichtigste Umstand, der für die Herstellung der empirischen Correctionen in Frage kommt, würde man Irrungen und geradezu das Resultat beeinflussenden Fehlern ausgesetzt sein, wenn man hier die Ergebnisse der historischen Kritik übersehen würde. Denn vielfach entlehnen einzelne

nisten auseinander, so dass beispielsweise leicht Totalitäts-
hte über Finsternisse aus Orten auftreten können, wo die
nicht total sein konnte. Insbesondere ist diese Unselbst-
igkeit des historischen Stoffes verbreitet in manchen Uni-
l- und Weltchroniken (wie z. B. in dem später oft zu citirenden
icon des Marian, des Sigebert und Ekkehard, dem
icon Alberici u. v. a.), welche, womöglich bis auf die Er-
ng der Welt zurückgehend, Ereignisse registriren, für die
ht authentisch sind und die sie aus älteren Geschichts-
ern entlehnen. Vielfache, oft nur bis zu einem bestimmten
me reichende Benützung fremder Quellen findet sich auch
reichen Klosterchroniken. Andererseits wäre es zu weit
en, wollte man zwei gleichlautende Stellen über ein und
e Finsterniss nur als abschriftliche Entlehnung betrachten,
it beide Quellen selbstständig sein können. Diese Umstände,
en hier nur der wichtigsten gedacht wurde, sind wohl dem
er geläufig, nicht aber dem Astronomen, für den doch vor-
h die gegenwärtige Untersuchung bestimmt ist, und
n darum in Erinnerung gebracht werden. Ich war
Ortsbestimmung der Finsternissberichte, soviel mir als
storiker möglich ist, auf die hier nur allgemein angedeutete
ss der Quellen bedacht und suchte den Eigenthümlich-
lerselben gerecht zu werden. Erleichtert wird die Be-
g im vorliegenden Falle durch zwei von selbst sich dar-
günstige Umstände: erstens kommen zufällig nur Quellen
schen Beachtung, die ihrer Zusammensetzung und Selbst-
eit nach bereits sehr gut bekannt sind; zweitens liegt in
ronnenen Rechnungsergebnissen selbst ein gewisser An-
kt über das Mass der zu erwartenden Correctionen, denn
er Rechnung zu Grunde liegenden Opperl'schen Cor-
der Wahrheit bereits nahe kommen, lässt sich das
einer an einem bestimmten Orte die Centralität behaup-
istorischen Quelle leicht erkennen. Damit man die vor-
nen Ortsbestimmungen ohne weiters verfolgen könne,
h am Fusse jedes Blattes neben den Sammelwerken der
n die Orte, auf welche sie Bezug haben und daneben
ngen, welche Definitionen über die Örtlichkeit und die
rdigkeit des Chronicons enthalten. Von diesen An-

merkungen sind so wenig als möglich angesetzt worden, um an Umfang zu sparen; indessen geben sie dem Leser eine hinreichende Leitung. Da sich unter den bestimmten Orten manche befinden, deren Positionen in den geographischen Verzeichnissen nicht enthalten sind, so folgt hier ein Verzeichniss derselben, nach welchem sie in den Karten eingetragen worden sind.

Ort	Länge v. Paris	Breite	Ort	Länge v. Paris	Breite
Aachen	+ 3°44'	+50°46'	Cluny	+ 2°17'	+46°27'
Admont	+12 9	+47 35	Colmar	+ 5 0	+48 5
Sanct Alban ..	- 2 39	+51 45	Cöln	+ 4 37	+50 56
Altaich	+10 22	+48 52	Como	+ 6 45	+45 48
Altzella	+10 56	+51 4	Constantinopel.	+26 39	+41 0
Saint Amand ..	+ 1 52	+51 3	Constanz	+ 6 50	+47 40
Angoulême ...	- 2 11	+45 39	Corvei	+ 7 4	+51 48
Arras	+ 0 26	+50 17	Cremona	+ 7 41	+45 8
Aschaffenburg.	+ 6 48	+49 58	Danzig	+16 19	+54 21
Asti	+ 5 52	+44 53	Saint-Denis....	+ 0 2	+48 56
Augsburg	+ 8 34	+48 22	Diessen	+ 8 47	+47 56
Auxerre	+ 1 14	+47 49	Dijon	+ 2 42	+47 19
Babylon	+42 10	+32 31	Disibodenberg .	+ 5 23	+49 47
Bamberg	+ 8 33	+49 43	Dunstable	- 2 53	+51 53
Bari	+14 33	+41 8	Durham	- 3 55	+54 47
Basel	+ 5 15	+47 33	Egmunde	+ 2 20	+52 38
Benevent	+12 25	+41 7	Eichstedt	+ 8 51	+48 54
Bergamo	+ 7 21	+45 42	Einsiedeln.....	+ 6 24	+47 7
Bermondsey			Ellwangen	+ 7 49	+48 57
(London) ...	- 2 26	+51 31	Engelberg.....	+ 6 5	+46 50
Bèze	+ 2 55	+47 28	Ensdorf	+ 9 35	+49 27
Sanct Blasien ..	+ 5 47	+47 46	Erfurt	+ 8 42	+50 59
Bologna	+ 9 0	+44 30	Esrom	+10 4	+56 0
Bonn	+ 4 45	+50 43	Essenbek	+ 7 47	+56 27
Bourbourg ...	- 0 9	+50 57	Este	+ 9 19	+45 13
Braunschweig .	+ 8 11	+52 16	Farfa	+10 22	+42 13
Brauweiler ...	+ 5 10	+49 48	Flavigny	+ 2 11	+47 33
Brescia	+ 7 53	+45 32	Fleury	+ 0 7	+47 40
Cambray	+ 0 54	+50 11	Floreffe	+ 2 27	+50 26
Monte Cassino .	+11 29	+41 29	Florenz	+ 8 55	+43 46
Chaves	- 9 52	+41 44	Sanct Florian ..	+12 8	+48 13
Clermont	+ 0 45	+45 47	Fossa-Nuova...	+10 50	+41 27

Ort	Länge v. Paris	Breite	Ort	Länge v. Paris	Breite
.....	+ 2°24'	+50°24'	Melk	+13° 2'	+48°13'
urg	+ 5 31	+47 59	Memphis	+29 1	+29 51
rg	+ 9 23	+48 24	Merseburg	+ 9 40	+51 21
.....	+ 7 20	+50 33	Metz	+ 3 50	+49 7
Gallen	+ 7 2	+47 25	Modena	+ 8 35	+44 38
a	+12 5	+48 2	Moissac	- 1 15	+44 7
oux	+ 2 22	+50 33	Mousson	+ 3 42	+48 52
Theben)	+30 19	+25 38	Nestved	+ 9 25	+55 13
ih	+13 18	+48 22	Neuberg	+13 13	+47 4
tadt ...	+ 8 43	+51 54	Neufmontier ...	+ 2 55	+50 32
g	+ 7 38	+53 33	Nevers	+ 0 49	+46 59
ld	+ 7 9	+53 27	Ninive	+40 19	+36 19
kreuz ..	+13 48	+48 4	Nürnberg	+ 8 45	+49 27
nn	+ 8 25	+49 20	Opatowitz	+14 21	+49 36
t	+15 8	+49 4	Osney (Oxford) .	- 3 36	+51 45
.....	+ 5 42	+52 11	Osterhofen ..	+10 41	+48 42
n	+32 55	+31 47	l'adua	+ 9 33	+45 24
euburg	+13 58	+48 18	Pavia	+ 6 49	+45 11
l	+12 4	+49 59	Pegau	+ 9 55	+51 10
rg	+18 10	+54 43	Petersberg	+ 9 38	+51 35
.....	+17 37	+50 4	Piacenza	+ 7 21	+45 3
nster .	+11 48	+48 3	Pisa	+ 8 4	+43 43
.....	+12 23	+40 42	Pöhlde	+ 8 1	+51 40
.....	+ 1 16	+49 34	Prag	+12 5	+50 5
.....	+12 45	+47 24	Prüm	+ 4 8	+50 13
.....	- 1 5	+45 50	Quedlinburg ...	+ 8 50	+51 47
.....	+ 1 55	+50 22	Regensburg ...	+ 9 45	+49 1
.....	- 2 26	+51 31	Reichenau	+ 6 45	+47 41
.....	+ 6 14	+49 39	Reichersberg ..	+11 3	+48 20
.....	+ 8 10	+43 50	Reikiavik	-24 15	+64 8
.....	+ 8 21	+53 52	Reims	+ 1 42	+49 15
.....	+ 3 10	+50 32	Riga	+21 48	+56 56
.....	+10 51	+55 39	Roeskilde	+ 9 44	+55 38
.....	+ 2 29	+45 46	Rom	+10 7	+41 54
.....	+ 9 18	+52 8	Rye	+ 7 12	+54 50
.....	+ 6 51	+45 27	Salerno	+12 27	+40 41
.....	+ 5 57	+50 1	Salona	+14 9	+43 31
.....	- 4 26	+51 35	Salzburg	+10 43	+47 48
.....	- 5 55	+51 30	Sazawa	+12 32	+49 52
.....	+16 40	+54 1	Schaffhausen ..	+ 6 18	+47 41






Ort	Länge v. Paris	Breite	Ort	Länge v. Paris	Breite
Schäftlarn	+ 9° 8'	+47°52'	Ursberg	+ 8° 6'	+48°16'
Scheyern	+ 9 10	+48 32	Verden	+ 6 52	+52 56
Sens.	+ 0 57	+48 12	Verona	+ 8 39	+45 26
Sigtuna	+15 16	+59 37	Venedig	+10 0	+45 26
Somerton	- 4 34	+51 3	Waverley	- 3 7	+51 17
Spalato	+14 5	+43 30	Weissenburg	+ 5 37	+49 3
Stade	+ 7 8	+53 36	Wien	+14 2	+48 12
Stawelot	+ 3 36	+50 23	Winchester	- 3 39	+51 4
Stederburg	+ 8 11	+52 9	Wisby	+16 0	+57 38
Strassburg	+ 5 25	+48 35	Worcester	- 4 34	+52 12
Stuhlweissen-			Worms	+ 6 3	+49 38
burg	+16 4	+47 10	Würzburg	+ 7 36	+49 48
Tewkesbury	- 4 30	+52 0	Xanten	+ 4 7	+51 40
Trier	+ 4 18	+49 45	Yperen	+ 0 33	+50 51
Troyes	+ 1 44	+48 18	Zwettel	+12 50	+48 37
Uexküll	+22 10	+56 51	Zweifalten	+ 7 17	+48 17

Die Beschreibung der beobachteten Finsternissphase findet sich in zahlreichen Quellen. Manche gebrauchen neben der Datumsangabe wohl nur den stereotypen Ausdruck „Eclipsis solis“, obwohl an den Orten, von denen sie herrühren, die Finsterniss central gewesen sein muss. Diese Art Berichte geben deshalb nur eine Anschauung für die ungefähre Ausbreitung der Schattengrenze. Viele dagegen beschreiben in selbstständiger Weise die Erscheinungen, welche den Eintritt der Finsterniss begleiteten. Diese die Correction bestimmenden Quellen sind auf die Weise mit der berechneten Zone verglichen, wie dies auf den dieser Abhandlung beigegebenen Karten ersichtlich ist. Es repräsentirt nämlich die centrale mit dichter Schraffirung hergestellte Partie der Finsternisszone den durch die Correction ungeändert bleibenden Theil, die mit weniger enger Schraffirung ausgeführte Zone bestimmt die berechnete Grenze, der hellgehaltene Streifen endlich, welcher an die Neutralzone sich anlehnt, bezeichnet die Grösse und die Richtung der vorgenommenen Verschiebung. Für eine Reihe von Finsternissen reichte es hin, nur den ungefähren Verlauf zu kennen. Für diese sind nur die Hauptcurven berechnet und auf Tafel V zur Darstellung gebracht worden.

1. — 660 Juni 27. 0^h 49^m 4, ringf. Ω

Wie schon Eingangs erwähnt, ist die vorliegende Sonnen-
 miss die einzige aus der vorchristlichen Zeit, welche ich für
 leitung empirischer Correctionen benütze. Sie findet sich
 syrischen Schrifttafeln unter den sogenannten „Annalen des
 anipal“ und schon Talbot hat auf sie aufmerksam gemacht.
 rt¹ hält diese Finsterniss für einen der wichtigsten Behelfe
 erstellung einer Chronologie der Zeit des Königs Assur-
 und setzt diese in Assyrien stattgefundene Naturerschei-
 auf den 27. Juni 660 v. Chr. Da die Inschrift sowohl den
 und auch die Tageszeit des Ereignisses erwähnt und zudem
 Textworten nur auf eine höchst bedeutende Verfinsternung
 ssen werden darf, so war die Finsterniss unschwer auf-
 1. Konnte man an der Oppert'schen Bestimmung Zweifel
 so sind dieselben vor kurzer Zeit durch eine speciell zur
 ung der in Rede stehenden Finsterniss unternommene
 von B. Schwarz² beseitigt worden. Schwarz zeigt
 durch cyclische Durchrechnung aller in Betracht kom-
 Finsternisse, dass die von der Tafel erwähnte thatsächlich
 Finsterniss von — 660 Juni 27. sein könne. Hiemit hat
 Finsterniss jene Sicherheit der historischen Bestimmung
 welche für die Ermittlung der empirischen Correctionen
 hwendigkeit ist, und ich habe es deshalb für geboten
 von diesem alten Zeugnisse der Naturbeobachtung
 h zu machen.

folgt zuerst die Inschrift mit der Übersetzung nach
 :

—					
As	arakhl	Tammuz	atalu	Sad	urri
<i>in the month</i>	<i>Tammuz</i>	<i>an eclipse</i>	<i>the Ruler of the day</i>		

ttinger gelehrt. Anzeig. 1880, Stück 47.

r. Unters. üb. e. v. Archilochus u. e. in einer assyr. Inschr.
 onnenfinsterniss (Sitzb. d. k. Akad. d. W. Wien, LXXXVII. Bd.,
 pril-Heft 1883).


asactions of the Society of Biblical Archaeology I, p. 350.



 Bil nuri ustanh (mutavit colorem)
the Lord of light darkened.



 Samsi erēb kima suātu-ma sašai
The evening sun like that one three




 tamni ustanh ana kit
days was darkened unto the lowest point



 bull ana sar Elamti khā (inabūt)
of existence. To the king of Elam it prophesied



 mat su annī ishbar su
his death but unto me the best of omens it was,



 sha la innū.
which not failed.

Oppert (a. a. O.) übersetzt dagegen: „Im Monate Tammuz fand eine Finsterniss des Herrn des Tages, des Gottes des Lichtes statt. Die untergehende Sonne liess davon ab, zu leuchten und wie diese liess auch ich davon ab, während Tage den Krieg gegen Elam zu beginnen“. Die Inschrift stammt wahrscheinlich aus Ninive. Der bedeutende Eindruck, welchen die Finsterniss daselbst hervorrief, ist wohl zweifellos. Erst im Monate Ab, dem Monde „des Sichtbarwerdens des Sirius“ begann Assurbanipal den Krieg gegen den elamitischen König Teumman.

Über die Finsterniss existirt noch ein zweites Täfelchen, welches einen Bericht an den König enthält und wahrscheinlich von dem Befehlshaber einer militärischen Expedition nach Egypten herrührt. Ich verzeichne die Inschrift nach Talbot's betreffs der letzten 7 Zeilen corrigirten Übersetzung¹:

¹ On an ancient eclipse. (Transact. of the Soc. of Biblic. Arch. I, p. 13 et p. 352.)



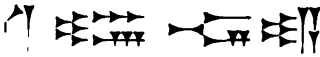
na Sar matati bil-ya
the king of the nations my Lord



urdu-ka Kukurū.
servant Kukurū (writes this).



shur Shamas u Marduk
shur the Sun and Marduk



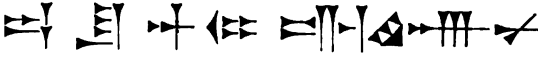
Sar belni-ya
the king my Lord



rubu! — Kharran ulta Sar bil
propitious! — The army (sent) from the king (my) Lord



mat Mitsir il-ili-lik
the land of Egypt has arrived.



rkhi Su atalu iskunnu
month Su¹ an eclipse happened



-ya sna malatbu sha mat Ashur
days for the welfare of Assyria

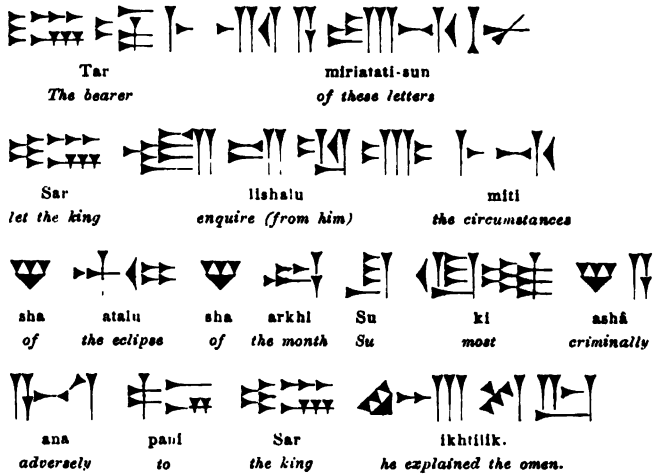


libbi-sun sinu anaimni u sumili
our hearts were concerned (scattered) to the right and left



par adū.
noticed the heavenly portent.

AMMUZ.



Nach dieser zweiten Darstellung wurde die Heeresabtheilung wahrscheinlich vor ihrer Ankunft in Ägypten, d. h. während des Marsches in der Wüste, von der Finsterniss überrascht.

Die Rechnung über die Centralitätszone der Finsterniss gibt mit Zuziehung der Oppolzer'schen Correctionen folgenden Verlauf für Westasien:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 36° 78' v. Par.	φ + 32° 44'	λ 36° 48' v. Par.	φ + 30° 94'
39·24	31·35	38·94	29·84
41·77	30·25	41·47	28·70
44·35	29·10	44·06	27·52
47·01	27·90	46·72	26·28
49·73	26·67	49·44	25·00
52·53	25·39	52·26	23·69.

Nach diesen Grenzen findet sich die Finsterniss auf Taf. VI eingetragen. Man sieht sofort, dass sie von Ninive zu weit westlich bleibt, als dass sie den bedeutenden Eindruck in Assyrien hätte bewirken können, wie er in der ersteren Inschrift geschildert ist. Es dürfte demnach die Zone zum mindesten bis an die Ufer der grossen Ströme Mesopotamiens zu verschieben sein; bei der vorbezeichneten Lage der Zone würde nach dem Ergebnisse des Herrn B. Schwarz die Finsterniss zu Ninive nur die Maximalgrösse von 9·9 Zoll haben erreichen können.

2. 346 Juni 5. 17^h 33^m 5, total Ω .

stantius et Constans imp. — Decimo anno Constantium Seleuceae Syriae construxit, montis magna parte disa, urbemque refecit. Condidit etiam Antaradum in venicia, et Constantiam nominavit. Eodem anno defectus solis fuit, sexta mensis Desij die, hora diei tertia. (*Georgii Armeni Hist. Comp. T. I, pag. 299.*)

solis facta est CCCXLVI et terrae motus multas urbes subvertit. (*Chronic. Monast. Mellicensis.*)¹

CCCXLVI. Eclipsis solis et terrae motus accidit. (*Chronic. Mellicensis.*)²

Das Finsterniss findet hier nur wegen einer zweiten Erwähnung, welche Cedrenus³ früher anführt und die einen Bericht enthält. Es heisst nämlich daselbst (ibi 285):

Im vigesimo imperii Constantini: Ea tempestate in Camera urbes XIII terrae motu prostratae sunt; tantusque solis defectus, ut meridie stellae viderentur. . . .

Das erste Finsterniss fällt in das 10. Jahr des Constantius, d. Chr. und ist schon von Calvisius bestimmt worden. Die Parallelitätszone verläuft, wie folgt:

Nordgrenze		Südgrenze	
$\varphi + 32 \cdot 36^\circ$	$\lambda 25 \cdot 16^\circ$	v. Par. $\varphi + 30 \cdot 03^\circ$	
33·87	27·78	31·49	
35·43	30·27	33·01	
36·98	32·74	34·53	
38·55	35·12	36·04	
40·13	37·42	37·55,	

Das Finsterniss ist auf Taf. VI eingetragen ist. Daraus ist ersichtlich, dass das Finsterniss zu Byzanz zwar sehr beträchtlich, aber nicht total ausfiel. Zu einer so bedeutenden Correction, dass die Sonne für Byzanz total erscheinen müsste, ist, wie aus den

¹ Script. rer. Austriac. I, 183.

² 325. — Beide Chroniken sind in dieser Zeitperiode noch nicht selbstständigem Werthe. Vide Note 2, pag. 105.

³ Cedrenus lebte wahrscheinlich unter Isaak Komnenus, im 11. Jahr-

weiteren Ergebnissen dieser Abhandlung hervorgeht, kein Grund vorhanden; auch wird die Totalität durch obigen Bericht nicht gefordert. Es hat aber Struyck¹ behauptet, die beiden Stellen aus Cedrenus seien zusammengehörig und Cedrenus beschreibe eine und dieselbe Finsterniss zweimal. Da in der zweiten Stelle das 20. Jahr Constantins genannt wird, so muss man bis auf 325 n. Chr. zurückgehen. Calvisius bezieht hierauf die ringförmige Finsterniss von 324 August 6., 2^h 4^m 8, deren Hauptcurve ich auf Taf. V dargestellt habe: für Byzanz bleibt die Erscheinung nur partiell. Die Untersuchung des Zeitraumes 324 bis 346 n. Chr. gibt keine weitere Finsterniss, die für Byzanz so beträchtlich werden könnte, wie Cedrenus fordert. Die für die nördliche Halbkugel der Erde, resp. Europa, in Betracht kommenden bedeutenderen Finsternisse während des gedachten Zeitraumes verlaufen nämlich wie folgt:

- 326 Dec. 10. 20^h 33^m 2 ringf. Zu südlich (vorz. Afrika)
 334 Juli 16. 23^h 33^m 8 ringf. (Taf. V)
 338 Mai 5. 21^h 36^m 9 ringf. Zu südlich (Afrika)
 339 Oct. 18. 19^h 59^m 8 tot. Zu nördl. (Skandin., Nordrussl.)
 341 März 3. 18^h 6^m 6 ringf.-tot. Zu südl. (Ostafr., ind. Meer).

Die zweite der aufgeführten Finsternisse würde der Zeit nach sehr gut stimmen, nur kann sie zu Byzanz, wenn auch beträchtlich, doch nicht total gewesen sein. Es ist dieselbe Finsterniss, welche *Julius Firmicus, lib. 1, cap. 2*, wie folgt beschreibt:

Sol medii diei tempore, lunae radiis quasi
 quibusdam obstaculis impeditus, fulgida
 splendoris sui lumina mortalibus denegavit.

3. 418 Juli 18. 23^h 3^m 8, total. Ω

Oström. Reich.

1. Indict. I. Honorio XII et Theodosio VIII. Coss. — Solis defectio facta est. (*Marcellini Comit. illyric. Chronicon.*)²

¹ Inleid. tot d. allg. Geog., p. 106.

² Thesaur. Temp. Eusebii Pamphili., vol. I, p. 38.

Chaves (Portugal).

CCXCIX, 2¹. . . . Solis facta defectio die decimo quarto Augusti qui fuit quinta feria. (*Idatii Episcopi Chron.*)²

Aquitanien.

esimus nonus Xistus Roman. Ecclesiam regit. Solis hoc facta defectio. Faramundus regnat in Francia. (*Prosperitani Chronicon.*)³

Byzanz

in Theodosio adolescentiae annos ingresso, mense quoque in decimam nonam progresso, circa octavam diei horam, deo defecerit, ut et stellae lucerent, et siccitas hos (solis) res secuta sit, sic ut multorum hominum aliorumque alium insuetam ubique mortem inferret. Cum autem defecit, fulgor quidam in coelo apparuit, conii formam, ferens, quem quidam per imperitiam astrum Cometem nuntiant (*Philostorgii Cappadociae Ecclesiasticae historiae lib. XII, c. 8.*)

Unselbstständige Chroniken.

Eclipsis solis 14. Kal. Augusti facta (*nach Marcell. Maximiani Aug. Chron.*)⁴

Eclipsis solis 14. Kal. Augusti. (*Bernoldi Chronicon.*)⁵

Eclipsis solis facta est XIV. Kal. Aug. et cometa usque inensem Septembris visa est. (*Chron. Monast. Mellic.*)⁶

Eclipsis solis facta est XIV. Kal. Aug. (*Chron. Salisburg.*)⁷

. sol deficit hora tertia XIV. Kal. Augusti, et apparuit stella ardens ab oriente usque Kal. Septemb. (*ales Esromenses.*)⁸

8 n. Chr.

Chron. Tempor. Eusebii Pamphili, vol. I, p. 22.

Thesne: Hist. Franc. Scriptorum I, 198.

Germ. Scr. V, 81.

, 409.

Scr. rer. Austr. I, 189.

327.

Zebeck. Script. rer. Danic. I, 221.

em.-naturw. Cl. LXXXVIII. Bd. II. Abth.

10. 418. Sol defecit hora 3, 14. Kal. Aug[usta]s, et apparuit stella ab oriente ardens usque ad Septembrem. (*Annales Chronographi vetusti.*)¹
11. 418. Indict. I. Honorio XII et Theodosio Jun. Aug. VIII Coss. — His Coss. solis eclipsis facta est mense Panemo, ex a. d. XIV. Kal. Augusti, feria VI hora VIII. (*Chronicon Paschale. Paris 1686, pag. 310.*)

Das Chronicon Paschale gibt das richtige Datum der Finsterniss an.

Die Centralitätszone (Taf. VI) verläuft gegen Byzanz wie folgt:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 20·85° v. Par.	φ + 41·86°	λ 20·70° v. Par.	φ + 40·28°
22·80	41·47	22·63	39·87
24·75	41·01	24·55	39·42
26·70	40·51	26·48	38·91
28·64	39·96	28·41	38·36
30·59	39·37	30·33	37·78
32·54	38·73	32·26	37·13.

Die Finsterniss war ausserdem in Südfrankreich und Spanien auffallend und wurde von Idatius² vielleicht selbst bemerkt. Wegen der Unbestimmtheit, ob Philostorgius³ hier von einem in Byzanz oder nur in seiner Heimat eingetretenen Ereignisse spricht, habe ich an die Finsterniss keine Correction angebracht. Die Finsterniss bleibt etwas zu südlich von Byzanz und würde eher für eine Aufzeichnung aus Cappadocien sprechen.

4. 538 Feber 14. 20^h 39^m 3 total. Ω

England.

1. An. DXXXVIII Her sunne aēostrede XIII. dagum aer Kl Martius fram ðer morgene oþ undern.	In this year the sun was eclipsed fourteen days before the Kalends of March from early morning till nine a. m.
---	---

(*Anglo-Saxon Chronicle, vol. I, 28, vol. II, 14.*)⁴

¹ Mon. Germ. Scr. XIII, 716.

² 379—468 n. Chr.

³ 370—430 n. Chr. Von seiner Kirchengeschichte ist noch der von Photius bearbeitete Auszug erhalten.

⁴ Rerum Britannic. medii aevi Scriptores. Nr. 23, 1861. Übersetzung nach B. Thorpe.

10 quingentesimo vicesimo octavo (528) eclipsis solis facta decimo quarto Kalendarum Martiarum ab hora prima usque tertiam. (*Epitome sive breviarium Bedae hist. eccles.*)¹ rici anno 5. obscuratus est sol a mane usque ad tertiam use Martio. (*Henrici archidiac. Huntinon. Histor. lib. II.*)² Cinric Post quadriennium autem regni eius curatus est sol a prima hora diei usque ad tertiam. (*Iron. Ethelwerdi lib. quat.*)³

Trier.

. Eclipsis solis facta est 14. Kal. Mart. ab hora prima ie ad tertiam. (*Annales Sancti Maximini Trevirensis.*)⁴ angegebenen Textstellen beziehen sich sämtlich auf n Morgenstunden des 15. Februar 538 stattgefundene sterniss. Die Centralzone wird durch die drei Punkte

	λ v. Par.	φ
Centr. bei ☉ Aufgang	345·5°	+27·1°
„ im Mittag	43·7	+51·9
„ bei ☉ Untergang	79·2	+74·2

und hatte also ungefähr den auf Tafel V dargestellten ie konnte desshalb in England nicht sehr auffällig sein. at betrug das um 20^h 3^m eingetretene Maximum der ng für London nur 8·3 Zoll. Die Zeitangaben stimmen nn die Stundenzählung mit dem Sonnenaufgang, der am Finsternisstage etwa um 19^h 2^m eintrat, begonnen : Jahrangabe der Epit. Bedae ist gänzlich verfehlt. insterniss hat übrigens hier nur wegen ihres Zusammen- der folgenden von 540 n. Chr. Erwähnung gefunden.

5. 540 Juni 19. 20^h 52^m 5 total. ☿

England.

DXL. Her sunne aþeo- | In this year the sun was eclipsed
on XII. Kl. Julii ʒ | on the twelfth of the Kalends fo

III, 148.

anglic. Script. Francof. 1601, pag. 314.

pag. 834.

Germ. Scr. IV, 6. — Alte Aufzeichnungen des Klosters u Trier.

steorran hie aetowdan ful- | July, and the stars appeared full nigh-
neâli healfe tîd ofer undern. | half an hour after nine a. m.

(*Anglo-Saxon Chronicle, vol. I, 28, vol. II, 15.*)¹

2. Anno quingentesimo quadragesimo (540) eclipsis solis facta est duodecimo Kalendas Julii et apparuerunt stellae pene hora dimidia ab hora diei tertia. (*Epitome sive breviarium Bedae hist. eccl.*)²
3. Kinrici anno septimo obscuratus est sol a tertia pene usque ad nonam, ita ut stellae apparent. (*Henrici archidiacon. Huntinon. Hist. lib. II.*)³
4. 540. . . Iterum post biennium sol obscuratus est post tertiae calculum dimidiam horam, ita ut stellae passim in firmamento cernerentur. (*Chron. Ethelwerdi lib. quat.*)⁴

Trier.

5. 540. Eclipsis solis facta est 12. Kal. Jul. et apparuerunt stellae pene hora dimidia ab hora tertia. (*Annales S. Maximi Trevirensis.*)⁵

Diese Finsterniss wird durch die Punkte

λ 326·7° v. Par.	φ + 23·0°
44·1	" + 43·3
114·7	" + 12·7

bestimmt und ist demnach, wie auf Taf. V ersichtlich, für England noch weniger bedeutend als die vorhergehende. Das Maximum der Phase war für London 7·78 Zoll um 19^h 58^m. Da die Sonne um 15^h 53^m aufging, stimmt die Zeitangabe. Von einer Totalität in England, wie sie in den Berichten gefordert wird, kann gar keine Rede sein.⁶ Eine solche würde so beträchtliche Correctionen

¹ *Her. Britann. Script. Nr. 28.*

² *Opera III, 148.*

³ *Her. anglic. Script. Francof. 1601, pag. 314.*

⁴ *Ibi pag. 834.*

⁵ *Mon. Germ. Scr. IV, 6.*

⁶ *S. J. Johnson [Month. Not. XXXIII, 402]* spricht seine Verwunderung aus, wie so eine Totalität in England gesehen worden sein soll, da die Zone doch so südlich lief. Selbstverständlich hat auch keiner der früheren Astronomen einer der beiden Finsternisse für England eine

sondbahn fordern, dass hiedurch die Darstellung der Finsternisse in Frage gestellt werden würde. Es bleibt nur die Annahme, dass entweder das Saxon-Chronicle Epit. Bedae (von den hier noch nicht entscheidenden 3, 4, 5 abgesehen) von der Totalität auf die Angabe der Totalität hin berichten, welche diese Totalität gar nicht in Betracht gezogen hat. Hier wäre die Frage gestattet, ob im Jahre 538 darauf, dass sowohl die vorstehende Finsterniss als auch die von Jahre 538 für Byzanz äusserst beträchtlich gewesen sind, die Angaben über beide Finsternisse nicht durch griechische oder römische Quellen in die englischen Annalen eintragen können? Für Byzanz würde allerdings das Maximum der Totalität 2 Stunden später fallen, als oben angegeben wurde. Wegen dieser Ursachen sind die Finsternisse für die Ermittlung der Correctionen ganz ungeeignet. Ihre Erwähnung ist nur deshalb, um der Meinung vorzubeugen, als könnten die Finsternisse für Zwecke der vorliegenden Art von Bedeutung

6. 563 October 2. 20^h 45^m 9, ringf. ♋

Clermont.

13. . Nam plerumque tres aut quatuor splendoros magni solem apparuerunt, quos rustici soles vocabant, testes: Ecce tres vel quatuor soles in coelo. Quadam vice in Calendis Octobribus ita sol obscuratus apparuit nec quarta quidem pars in eodem lucens remaneret, et aster atque decolor apparens, quasi saccus videbatur. et stella, quam quidam cometam vocant, radium sicut gladium habens, super regionem illam per annum apparuit et coelum ardere visum est, et multa alia

beschreiben können. So finden sich für die Finsterniss (England, doch zumeist für London)

	von 538	von 540
Johnson	8 Zoll	fast ebensoviel
Noberts Tafeln	8·4 "	8 Zoll
Struyck	8·4 "	8 "
Choiseul Hist. Coel.	8·4 "	6·9 "

signa apparuere. (*S. Gregorii Episcopi Turonensis Hist. Franc. lib. IVc, XXXI.*)¹

Die Finsterniss ist in richtiger Weise schon von Struyck (Inl. tot de allg. Geogr. pag. 113) festgestellt worden. Die Kometenerscheinung ging dem Tode Justinians I. vorher, die Finsterniss fällt also vor 565 und da um diese Zeit in dem Herbst nur die in Europa bedeutende Finsterniss vom 2. October 563 möglich ist, so unterliegt die richtige Bestimmung des Datums keinem Zweifel. Die Finsterniss hat den durch die Punkte

λ 345·0° v. Paris	φ + 65·7°
52·4	" + 47·3
113·7	" + 31·0

bezeichneten, in Taf. V dargestellten Verlauf. Vermöge dieser Lage der Centralitätscurve ist das Maximum für Clermont um 19^h 22^m nur 9·4 Zoll. Die Finsterniss war aber wahrscheinlich auffallender, wie man aus den Worten Gregors schliessen darf; in diesem Falle wäre eine Correction der Finsterniss nicht abzuweisen.

7. 590 October 3. 23^h 41^m 1, ringf. ☿

Byzanz.

1. Mauricius autem filium Theodosium Imperatorem appellat. . . Pace cum Persis facta, legiones ex Oriente in Thraciam revocavit et ipse Byzantina terra egressus, loca a Barbaris eversa contempleri voluit. Quo tempore Sol defecit. (*Joannis Zonarae monachi Annales.*)²
2. Mauricius Anno imperii sui nono, cum ver inciperet et agmina pervenissent ad Thracem, exivit cum eis Mauricius videre quae a barbaris essent eversa Solis eclipsis

¹ Bouquet: *Rer. Gallic. et Francic. Script.* II 218. — Gregor von Tours, seit 573 Bischof zu Clermont. Seine zehn Bücher fränkischer Geschichte gehören zu den besten auf Tradition und Selbsterlebtes sich stützende Geschichtsquellen. Sowohl diese wie auch die folgende Finsterniss fallen in seine Lebenszeit.

² Edition Du Cange, Paris 1686. T. II, p. 76. — Zonaras, ein Constantinopolitaner, lebte am Hofe zu Byzanz. starb als Mönch von Athos 1118.

ta est. (*Theophanis Chronographia. — Anastasii Hist. les.*)¹

...Eo die sol pene totus est obscuratus. Annus imperii nonus (**Mauricii**) tum agebatur. (*Theophylacti vocattae Hist. lib. VIII.*)²

Clermont.

. Sol eclipsim pertuit mense octavo mediante: et ita en eius minuit, ut vix quantum quintae lunae cornua ment, ad lucendum haberet. (*Gregorii Episc. Turon. Hist. lib. X, cap. XXIII.*)³

vorliegende Finsterniss kann leicht mit der nächst- in Collision gebracht werden. Zur Entscheidung des ob etwa Berichte über die letztere auf die eben in Rede von 590 Bezug haben können, sind die zwischen 590 ein für die nördliche Halbkugel in Betracht kommenden den Finsternisse näher untersucht worden. Die Finster- 591 März 30, 4^h 29^m 7, sowie 591 September 22, entfallen sofort nach dem auf Taf. V dargestellten e. Dagegen können die Finsternisse von 590 October 3 fäzr 18 beide für Byzanz sehr beträchtlich gewesen as neunte Jahr Mauricius 590 ist, so dürfte indessen Zweifel obwalten, dass die Stellen aus Simocatta, und Theophanes auf die erstere Finsterniss zu nd. Die Centralitätszone derselben ist durch folgende timmt und auf Taf. III ersichtlich gemacht:

Nordgrenze		Südgrenze	
v. Par.	$\varphi + 50 \cdot 89^\circ$	$\lambda 18 \cdot 41^\circ$	v. Par.
	48·73	19·96	43·51
	46·64	21·49	41·56
	44·59	22·97	39·64
	42·57	24·45	37·78
	40·69	25·92	36·00.

s script. Hist. Byzant. ed. Niebuhr, vol. XXVI, 2, p. 123. Die ichte des Anastasius ist zum Theile aus der Chronographie des geb. 758 in Constantinopel, gest. 817 in Samothrace) entlehnt. s Byzant. Hist. Paris 1648, lib V, cap. XVI. — Symocatta raclius, etwa 612 n. Chr. uet, II, 379. [Clermont.]

Byzanz fällt also ganz in die Zone, während es nach den Stellen 1, 2 und besonders nach 3 nicht scheint, als ob daselbst die Finsterniss von grossem Eindrücke gewesen ist. Gregor von Tours vergleicht das Phänomen mit der fünften Mondsichel, was etwa einer Erleuchtungsbreite von 0·26 gleichkommt; die Rechnung gibt für Clermont die Phase um 23^h 20^m mit 8·7 Zoll, demnach also 0·28 der Sonne unbedeckt blieben. Obwohl die Byzantiner Berichte eine Correction nicht abweisen würden, habe ich wegen der hinreichenden Übereinstimmung mit der Clermonter Beobachtung von einer Verbesserung Abstand genommen.

8. 592 März 18. 21^h 11^m 4, total. Ω

Dijon?

1. 592. Anno XXXII regni Guntramni ita a mane usque ad mediam diem sol minoratus est, ut tertia pars ex ipso vix appareret. (*Fredegarü Scholastici Chron. XIII.*)¹
2. Die wörtliche Wiedergabe dieser Stelle findet sich in *Aimoini monachi Floriacensis Hist. Franc. lib. IIIc. LXXX.*²
3. Ou XXXII. an du regne le Roi Gontrans, li cours du soleil devint si petis, que à paines em paroît-il la tierce partie: si dura cilz esclipses du matin jusques à midi. (*Chroniques de S. Denis, liv. IV, Li. VIII.*)³

Die durch die Punkte

λ 331·9°	v. Par.	φ + 15·4°
33·2	"	+ 54·0
116·5	"	+ 73·8

bezeichnete (Taf. V) und im Vorhergehenden festgestellte Finsterniss gibt für Dijon die Maximalverfinsterung 8·6 Zoll. Einer etwaigen Correction steht zu sehr die in der unten angesetzten Note 1 bezeichnete Unsicherheit des Beobachtungsortes entgegen.

¹ Bouquet. II, 419. — Fredegar dürfte seine Universalchronik um 660 n. Chr. verfasst haben. Über seine Person ist nichts bekannt und wird nur angenommen, dass er im Königreiche Burgund schrieb.

² Du Chesne. III, 87. — Die Hist. Franc. des Aimoino (seit 970 Mönch zu Fleury) hat keine Selbstständigkeit.

³ Bouquet. III, 255 (S. Denis).

9. 601 März 9. 20^h 19^m 8, total. ☿

Wegen der Freundlichkeit des Herrn Dr. J. Krall erhielt ich die Erlaubnis, die folgenden auf einem koptischen Steine des Museums enthaltenen Inschrift. (*Stern. Egypt. Zeitschr.* 8, 1878, pag. 12.)

ⲓⲟⲧ ⲙⲓⲡⲁⲓⲧⲉ ⲙ	Am Tage 14 des
ⲉⲡⲱⲙⲉ ⲧⲉⲥ	Phamenoth, der
ⲣⲧⲏⲥ ⲓⲛⲁⲓⲛ /	vierten Indiction
ⲓⲛ ⲣⲓⲁⲛⲉ ⲛ ⲛⲉⲓⲛ	verfinsterte sich die Sonne in der Stunde
ⲙ ⲡⲉⲣⲟⲟⲧ ⲛ	vier des Tages
ⲟⲛ ⲧⲉⲣⲟⲙⲡⲉ	und in dem Jahre
ⲉ ⲡⲉⲧⲣⲟⲥ ⲙ	es war Petros der Sohn
ⲟ ⲟ ⲛ ⲁⲗⲁⲥⲁⲛⲥ	des Palu Ortsvorsteher
ⲙⲉ ⲡⲣⲓⲧⲥ	von Gême in ihm....

hält dafür, dass der Stein dem 6. oder 7. Jahrhundert angehört. Bei der genauen Zeitangabe ist es unschwer, die Zeitangabe zu finden. Herr Krall setzt sie auf 601 März 10, 4. Phamenoth des Jahres 317 der diocletianischen Aera an. Dass wir in der That die richtige Finsterniss vorfinden, lehrt die Verbindung der drei Punkte

λ 345.4° v. Par.	φ + 22.0°
48.2	" + 39.2
118.5	" + 57.6,

sie auf Taf. V ersichtlich, die Finsterniss in Egypten vorkommt. Die genaue Zone der Totalität findet sich Taf. VI:

Nordgrenze		Südgrenze	
° v. Par.	φ + 28.87°	λ 26.77° v. Par.	φ + 27.47°
	29.41	28.00	27.99
	29.95	29.22	28.54
	30.54	30.43	29.10.

Das Maximum der Phase betrug in Theben um 21^h 53^m 6
11.04 Zoll.

Die Inschrift eines der Dörfer ist, welche an Stelle des alten Theben, und der Stein von daselbst stammt, so ist kein Finsterniss hier die Finsterniss bemerkt wurde. Auch die Zeit-

angabe der Inschrift stimmt, da die Sonne um etwa 18^h 6^m aufging. Über eine etwaige Correction der berechneten Finsterniss lässt sich nichts sagen, da nicht ersichtlich ist, von welcher Bedeutung die Erscheinung in Gême war.

10. 664 Mai 1. 3^h 58^m 0, total. ☉

England.

- | | |
|---|---|
| <p>1. An. DCLXIII. Her sunne aƿystrode on V. Non. Maii. Ʒ Arcenbriht Cantwara cyng forðferde. Ʒ Coloman mid his geferum for to his cyððe . . .</p> <p>(<i>Anglo-Saxon Chronicle</i>, vol. I, 54—56, vol. II, 30.)¹</p> | <p>In this year the sun was eclipsed on the V. of the Nones of May; and Earcenbryht, King of the Kentish people, died, and Colman with his companions went to his country . . .</p> |
|---|---|
2. (664) Eodem anno . . . facta est eclipsis solis die tertio mensis Maii, hora circiter decima diei: quo etiam anno subita pestilentiae lues, depopulatis prius australibus Britanniae plagis . . . (*Bedae Presbyteri Eccles. hist. gentis anglorum lib. III, c. XXVII.*)²
3. 664 . . . Post iam annos tres sol obscuratus est. (*Chron. Ethelwerdi lib. quat.*)³
4. (664) Anno sexcentesimo sexagesimo quarto eclipsis solis facta. Earcombertus rex Cantuariorum defunctus . . . (*Epitome sive breviarium Bedae hist. angl.*)⁴

Süddeutschland.⁵

5. 664 . . . Sequente anno facta est eclipsis solis, quam aetas nostra meminit, quasi hora 10 diei 5. Non. Maii. (*Mariani Scotti Chronicon.*)⁶
6. 664 . . . Eclipsis solis facta est hora 10, 5. Non. Maii, indict. 11. (*Ekkehardi Chronicon Wirzburgense.*)⁷

¹ *Rer. Brit. Script.*, Nr. 23.

² *Opera III*, 79, Coloniae 168². — Beda's Heimat ist die Grafschaft Durham.

³ *Rer. angl. Scr. Francof.* p. 837.

⁴ *Opera III*, 149.

⁵ Die folgenden süddeutschen Chroniken sind hier noch unselbstständig und copiren aus Beda.

⁶ *Mon. Germ. Ser. V*, 544 [Fulda].

⁷ *Ibi VI*, 25 [Würzburg].

14. Eclipsis solis 5. Non. Maii facta est hora quasi decima, indict. (*Herimanni Aug. Chron.*)¹

14. Eclipsis solis 5. Nonas Maii facta. (*Bernoldi Chronon.*)²

14 post solis et lunae eclipsim peste ac gravissima idem laboratum est. (*Hartmanni Schedeli Chron. Norimrgae.*)³

. . . . Eclipsis solis hora XV. Nonas Maii in festo sanctae crucis, indictione septima. (*Martini Minoritae Flores temporum.*)⁴

Österreich.⁵

2. Eclipsis solis facta est hora quasi decima, V. Non. Maii, l. VII. Inter Anglos et Scottos quaestio de Pascha ventata est et Scotti a Wilfrido Prebytero victi sunt (*Chron. Monast. Mellicensis.*)⁶

2. Eclipsis solis facta est. (*Chron. Salisburg.*)⁷

2. Eclipsis solis facta est hora quasi X, V. Non. Maii. (*Chron. Monast. Admontensis.*)⁸

Italien.

Vitalianus Papa sedit annis tribus et ultra. Saraceni conueniunt in Hierusalem templum in loco Item Siciliam aduunt et spoliunt. Solis facta eclipsis indictione VII. (*Vitaliani Ferrariensis sive alterius anonymi scriptoris compilatio Chronologica.*)⁹

. . . . His temporibus per indictionem octavam luna eclipsin passa est. Solis quoque eclipsis eodem pene tempore, hora diei quasi decima, quinto nonas Maias effecta est, quae subsecuta est gravissima pestis tribus mensibus,

1. Germ. Scr. V, 95 [Reichenau].

2. V, 415 [Schaffhausen].

3, fol. 156, 2.

4. *Card. Corpus hist. medii aevi*, I, 1601 [Südl. Württemberg].

5. Wenig selbstständig wie die vorherbezeichneten. Vide Note 2,

6, I, 202 [Melk].

7, 332 [Salzburg].

8, II, 168 [Admont].

9. *Vitaliani: Rer. Italic. Script.* IX, 228. — Vitalianus 657—672 n. Chr.

hoc est Julio, Augusto et Septembrio. (*Pauli Warnefridi Diaconi De Gestis Longobardorum lib. VI, cap. V.*)¹

16. Die vorstehende Stelle copirt im *Chronicon Brixianum auctore Mulvecio.*²

Diese in den Nachmittagsstunden (10. Tagesstunde der Annalen) stattgefundene Finsterniss ist bestimmt durch folgende Zone der Totalität:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ	v. Par. $\varphi +$	λ	v. Par. $\varphi +$
353·14°	56·25°	352·75°	54·74°
355·79	55·89	355·44	54·39
358·49	55·50	358·15	54·03
1·22	55·07	0·87	53·60
3·96	54·58	3·62	53·12
6·76	54·06	6·42	52·61
9·56	53·46	9·22	52·02
12·39	52·81	12·06	51·39
15·25	52·12	14·93	50·70

Die aufgeführten Berichte, insoweit sie als selbstständig zu betrachten sind, beweisen nur im Allgemeinen die Wahrnehmung dieser bedeutenden Finsterniss in England, Deutschland und Italien, ohne zu Verbesserungen Anlass zu geben (Taf. II).

Die unrichtige Festsetzung der Finsterniss auf den „V. Non. Maii“ (3. Mai) in den Annalen erklärt sich daher, dass die Chronisten den Angaben Bedas oder des Paul. Diac. gefolgt sind. Struyck hat gezeigt,³ dass die Stelle 15. trotz der Abweichung in der Angabe der Indiction auf die Finsterniss 664 Bezug hat; die Mondesfinsterniss ist Struyck geneigt auf den 30. September 665 zu setzen.

11. 693 October 4. 20^h 2^m 1, total. Ω

Byzanz.

1. Justinian imperator Anno nono tantus fuit solis defectus, ut astra visa fuerint . . . (*Georgii Cedreni Comp. histor.*)⁴

¹ Muratori: *Rer. Italic. Script.* I, 492 [Pavia].

² Ibi XIV, 838 [Brescia].

³ *Inl. tot. d. allg. Geogr.*, pag. 116.

⁴ T. I, 442.

Anno vero imp. Justiniani nono Hoc etiam anno defectio est solis effecta hora diei tertia, ita ut quaedam clarae tellae parerent. (*Theophanis Chronographia. — Anastasii Hist. eccl.*)¹

Pavia?

Anno nono imperii Justiniani, defectio solis effecta est hora diei tertia ita ut quaedam stellae clare apparerent. (*Hist. isc. Pauli Diac. lib. XIX.*)²

Universalchroniken.

Sigebertus Gembl.³ und das *Chronicon Alberici*⁴ copiren die vorstehende Stelle.

Dieses Finsterniss wird durch die byzantinischen Chronisten im neunten Jahr Justinian II. (685—695) gesetzt, fällt also in Italien und war in Constantinopel ohne Zweifel total. Die Latitudinalzone ist folgende (Taf. II):

Nordgrenze		Südgrenze	
76° v. Par.	$\varphi + 45 \cdot 02^\circ$	$\lambda 12 \cdot 02^\circ$ v. Par.	$\varphi + 43 \cdot 50^\circ$
47	44·47	14·74	42·90
14	43·86	17·40	42·28
77	43·23	20·00	41·61
34	42·55	22·56	40·92
86	41·86	25·06	40·18
33	41·12	27·52	39·41
75	40·34	29·92	38·61

Ob diese Darstellung wird der Überlieferung völlig genügt. Ob in Italien die Finsterniss total gewesen sein und ob es möglich, dass Paulus Diaconus (3.) auf Grund eines älteren Zeugnisses berichtet. Sigebert und das *Chronicon* sind hier nur Abschreiber der *Hist. miscella*.

¹ p. hist. Byzant., vol. XXVI, 2, pag. 187.

² *Historia* I, 140. — Paul. Diac. erhielt seine Erziehung zu Pavia, zuerst zu Mt. Cassino, seit 782 am Hofe Carl des Gr.

³ *Ann. Germ. Ser. VI*, 328.

⁴ *Ann. b. n. i. t. z. Access. Histor. II*, 66.

12. 733 August 13. 22^b 2^m 9, ringf. Ω

England.

- | | |
|---|--|
| <p>1. An. DCCXXXIII. Her Aþelbold geode Sumertun.] sunne aþeostrode.] wear-þ eall Pare sunnan trendel aelce sweart scyld.] Acca waes adriuen of þ. dome.</p> | <p>In this year Aethelbald captured Somerton, and the sun was eclipsed and all the sun's disc was like a black shield; and Acca was driven from his bishopric.</p> |
|---|--|

(*Saxon Chronicle*, vol. I, 77, vol. II, 40.)¹

2. (733.) Anno septingentesimo tricesimo tertio, eclipsis facta est solis, decimo octavo Kal. Septembris, circa horam diei tertiam, ita ut pene totus orbis solis quasi nigerrimo et horrendo scuto videtur esse coopertus. (*Epitome sive brev. Bedae.*)²
3. Dieselbe Stelle mit der Rectificirung: „XIX. Kal. Sept.“ findet sich in der *Chronica Magistri de Hoveden. Pars I.*³
4. 733. [De actu regis Aethelbaldi] In ipso anno quippe obscuratus est solis iubar. (*Chron. Ethelwerdi lib. quat.*)⁴

Belgien und Deutschland.

5. 733. Eclipsis solis facta est. (*Chron. Quedlinburg, Annales Weissenburgensis u. Lamberti Annales Aschafnaburgensis.*)⁵
6. 733. Eclipsis solis. (*Annales Laubacenses.*)⁶

Dänemark.

7. Die Stelle 2 findet sich wiedergegeben in den *Annales Esromenses.*⁷

Hoveden gibt das richtige Datum. Die Finsterniss ist bestimmt durch folgende Punkte:

¹ Rer. Brit. Scr., Nr. 23.

² Opera III, 150.

³ Rer. Brit. Script., Nr. 51, vol. I, 4. Vide Note 2, pag. 70.

⁴ Rer. angl. Scr. Francof., p. 840.

⁵ Mon. Germ. Scr. III, 34.

⁶ Ibi I, 9 [Lobbes.] Alte Jahrbücher (bis 885) des Klosters Lobbes.

⁷ Langebek, I, 223 [Esrom].

Nordgrenze		Südgrenze	
16·54° v. Par. $\varphi + 52·63^\circ$		λ 346·80° v. Par. $\varphi + 51·58^\circ$	
19·02	52·80	349·28	51·77
21·48	52·94	351·75	51·92
23·92	53·03	354·14	52·03
26·33	53·08	356·53	52·10
28·71	53·09	358·90	52·14
31·07	53·08	1·24	52·13
33·41	53·02	3·56	52·09
35·72	52·93	5·86	52·00.

die Sachsenchronik hier die unabhängigste Quelle repräsentiert, während die übrigen englischen Annalen aus dem Fortsetzer geschöpft, so bedarf die Finsternis einer Verschiebung (III), um sie im südlichen England, dem eigentlichen Sitz des „Anglo-Saxon-Chronicle“ bedeutender erscheinen zu lassen. Ich habe also der Finsternis eine südliche Verschiebung zugestanden (so dass sie für London central wird) u. zw. weitwilliger, als auch die überwiegende Zahl derjenigen erwähnenden Finsternisse, bei welchen sich der Mond zeigt, eine solche Tendenz zeigen.

13. 787 September 15. 20^h 29^m 6, ringf. Ω

Byzanz.

10 VII. Irene¹ aperta est Nicaea catholica. Non. Septembris quae dies fuit septimanae prima, hora quinta, timus solis defectus fuit . . . (*Cedrenus Histor. Comp.* 470.)

Italien.

Hoc anno facta est eclipsis solis Kal. Octob. die Lunae hora prima in horam quintam. (*Chron. Cavense.*)²

Frankreich.

eclipsis solis facta est hora secunda VII. Kal. Octobris, Dominica. Et in eodem anno Carolus rex venit

—
37 n. Chr.

Histori VII, 919. [La Cava.]

per Alemanniam (*Chron. vetus Moissiacensis cenobii.*)¹

Deutschland.

4. 786. Eclipsis solis facta est XV. Kal. Octob. ab hora diei prima usque ad horam quintam. Multa etiam referuntur signa eodem tempore apparuisse. (*Chron. Quedlinburgense.*)²
5. 787. Eclipsis solis facta est XV. Kal. Octob. (*Annales Franc. Fuldenses.*)³
6. 19. Jahr Carol. Magn. — Eclipsis solis facta est 15. Kal. Oct. hora quasi 2. (*Ekkehardi Chronicon.*)⁴
7. 787. Eclipsis solis facta est hora secunda 16. Kal. Oct. die dominica. (*Codex Laureshamensis.*)⁵
8. 787. Eclipsis solis facta est 15. Kal. Oct. (*Annalista Saxo.*)⁶
9. 787 et eclipsis solis facta est (*Annales Weissenburg. und Lamberti Annales.*)⁷
10. 787. Eclipsis solis 15. Kal. Oct. (*Herimanni Aug. Chronic.*)⁸
11. 787. Eclipsis solis facta est 15. Kal. Oct. (*Annales Sithiensis.*)⁹
12. 786. Eclipsis solis facta est 15. Kal. Oct., hora quasi 3. (*Chronicon Suevicum universale.*)¹⁰

Österreich.

13. 785. Eclipsis solis facta est XV. Kal. Octob. hora quasi III. Carolus iterum Romam perrexit. (*Chron. Mon. Mellicensis.*)¹¹

¹ Du Chesne III, 139. — [Moissac]. Aus Beda, den Lorscher Annalen, aquitanischen Quellen complicirt, mit selbstständigen Nachrichten

² Menken: Script. rer. Germanic. III, 175 [Quedlinburg].

³ Du Chesne II, 537. — Vide Note 5, pag. 37.

⁴ Mon. Germ. VI, 27 [Würzburg].

⁵ Ibi I, 33. — [Lorsch].

⁶ Ibi VI, 561. — Vide Note 2, pag. 63.

⁷ Ibi III, 39 [Weissenburg].

⁸ Ibi V, 100 [Reichenau].

⁹ Ibi XIII, 36. Unselbstständig, aus den Fuldaer Ann. abgeleitet.

¹⁰ Ibi XIII, 63.

¹¹ Pez I, 209 [Melk].

4. Eclipsis solis facta est. (*Chron. Salzburg.*)¹
 5. Eclipsis solis facta est hora quasi III. (*Chron. Mont. Admont.*)²

richtige Angabe der Finsterniss hat der Codex Laurensis, nach welcher die übrigen Quellen zu corrigiren sind. Diese schöpfen hier vielfach aus den Fuldaer Annalen. Die Ortszone der Finsterniss (Taf. II):

Nordgrenze		Südgrenze	
$\varphi + 41 \cdot 55^\circ$		$\lambda 358 \cdot 00^\circ$	$\varphi + 40 \cdot 48^\circ$
80° v. Par.	41 40	0 74	40 35
55	41 21	3 44	40 18
27	41 00	6 09	39 99
92	40 73	8 69	39 75
53	40 43	11 24	39 47
10	40 09	13 75	39 15
62	39 72	16 20	38 79
09	39 29	18 61	38 38
51	38 83	20 96	37 95
37	38 38	23 37	37 47.

Rechnung dürfte hier eine hinreichende Darstellung geben, denn die Finsterniss bleibt für Byzanz, obwohl nur dort doch noch so beträchtlich, wie es Cedrenus fordert. In südlichen Frankreich (Moissac) war die Finsterniss noch so bedeutend, dass sie dem blossen Auge auffiel. Einen Anlass zur Correction gibt sie nicht.

14. 840 Mai 5. 0^h 4^m 8, total. γ

Frankreich.

Eclipsis solis accidit in diebus laetaniarum, 3. Non.

4. feria circa horam diei octavam et permansit fere limidia; adeo obscura ut stellae in coelo clarissimo videntur. (*Annales Lugdunenses.*)³

¹, 334 [Salzburg].

² 170 [Admont].

³ Herm. Scr. I, 110 [Lyon].

2. 840. Eclipsis solis 3. Non. Mai. Unmittelbar darauf der vorstehende Bericht. (*Annales S. Benigni Divionensis.*)¹
3. 840 et eclipsis solis facta est 4. feria ante ascens. Dom. hora diei nona 3. Non. Mai. (*Annales sanctae Columbae Senonensis.*)²
4. 840 Eodem anno facta est eclipsis solis feria 4. ante ascens. Dom. hora diei nona 2. Non. Mai. (*Historia Francorum Senonensis.*)³
5. 840. 3. Nonas Maias, 4. feria, hora 8, eclipsis solis fuit. (*Chronicon Aquitanicum.*)⁴
6. 840. Tunc eclipsis solis fuit (*Ademari Historiarum libri III.*)⁵
7. 840. 3. Non. Mai 4. feria, hora 8. heclipsin solis efficitur. (*Annales Engolismenses.*)⁶
8. 840. Tenebrae factae sunt in universo orbe, et ipso tempore obiit Hludovicus imper. 11. Kal. Jul. (*Annales Flaviniacenses.*)⁷
9. 840. 3. Non. Mai, feria quarta, hora octava eclipsin solis efficitur (*Annales Nivernenses.*)⁸
10. 840. Hludovicus imperator obiit, et eclipsis solis facta est IV. feria ante ascensionem domini, hora diei IX, II. Non. Maii. (*Chronicon Floriacense.*)⁹
11. 839 In ipsa autem vigilia ascensionis domini, hoc est in IV. Idus Maii, eclipsis solis circa septimam et octavam horam diei facta est tam valida, ut etiam stellae propter

¹ Mon. Germ. Scr. V, 39 [Dijon]. Eine um 1053 geschriebene, später bis 1285 fortgesetzte Klosterchronik.

² Ibi I, 103. [Sens]. Alte Aufzeichnungen des Klosters der h. Columba zu Sens.

³ Ibi IX, 365 [Sens]. Eine in Sens abgefasste Geschichte der Franken.

⁴ Ibi II. 253.

⁵ Ibi IV, 120. Diese bis 1028 reichende Geschichte der Franken betrifft vornehmlich Aquitanien.

⁶ Ibi XVI, 485 [Angoulême].

⁷ Ibi III, 151 [Flavigny].

⁸ Ibi XIII, 89 [Nevers].

⁹ Du Chesne. III, 355 [Fleury].

obscuritatem solis visae sint, rebusque color in terris mutatur. (*Annales Francorum Metenses.*)¹

40 Eclipsis solis III. Non. Maii ante nonam diem oram multis in locis a plurimis visa est (*Annales Bertiniani.*)²

40 Qua in tempore deliquium solis contigit, tertia die aeternae maioris, insolito modo. In tantum enim lucis recessu nebulae praevaluerunt, ut nihil a noctis vetitate differere videretur. Stellarum namque rarus ordo ita cernebatur, ut nullum sidus lucis solaris hebetudinem pateretur, quia potius nebula, quae se ei adversam praebuerat, paulatim Orientem petendo primum corniculatim illi lumen a parte Occidentali constituerat, in morem sui, quando prima vel secunda cernitur, sic per augmenta totam venustatem tota rota solis reciperet. (*Vita Ludovici Pii.*)³

40 Eodem anno facta est eclipsis solis feria IV. ante ascensionem domini, hora diei nona, II. Nonas Maii. (*Chronicon Auctoris incerti.*)⁴

Deutschland.

10. Wörtliche Übereinstimmung mit der Stelle 11 in den *Annales Franc. Fuld.*⁵

10. Eclipsis solis quarto Idus Maii. (*Annales Ratisponenses.*)⁶

Eclipsis solis facta est 3. Non. Mai hora ante nonam. (*Ekkehardi Chron. Wirzburg.*)⁷

in Chesne. III, 301 [Metzer Diöcese]. Hier den Fuldaer Annalen.

in III, 197. Die Fortsetzung der Reichsannalen; von 835—861 von Hof Prudentius von Troyes geführt und in dieser Zeit schon auf die Troyer zu beziehen.

in Chesne. II, 318. Eine von einem am Hofe des Kaisers lebenden Mönchen abgefasste Lebensbeschreibung Ludwig des Frommen.

in III, 350.

in 547. Sind in diesem älteren Theile nicht als blosse Klosterannalen zu betrachten, sondern als Reichsannalen, deren Gesichtskreis das ganze deutsche Reich umfasst.

in Germ. Scr. XVII, 582 [Regensburg].

in VI, 27 [Würzburg].

18. 839. Eclipsis solis facta est. (*Annales Palidenses.*)¹
19. 840. Eclipsis solis facta est quarta feria ante ascensionem. (*Ann. S. Maxim. Trevirensis.*)²
20. 840. Eclipsis solis 3. Non. Maias inter octavam et nonam horam in vigilia ascensionis domini. (*Annales Weingartenses.*)³
21. 840 3. Non. Maii hora quasi 7. tenebrae diei fuerunt. (*Annales Weissenburgenses.*)⁴
22. 840. Eclipsis solis facta est III. Non. Maii hora ante nonam. (*Annalista Saxo.*)⁵
23. 840. Eclipsis solis facta 4. Non. Mai hora ante nonam. (*Chronic. suevicum univ.*)⁶
24. . . . Eclipsis solis III. Non. Maii hora VIII. Tunc Ludovicus obiit. (*Martini Minoritae Flores temporum.*)⁷
25. 840 . . . Quo tempore solis terrifica defectio 7. Idus Maias ingenti mortalium animos horrore perfudit. Ferunt, eum diem nocti parum absimilem, stellas in coelo conspicuas, lunae que fulgorem insigniter apparentem ostendisse, quasi praesagitent astra magnum propediem terris lumen esse subtrahendum. (*Boicae gentis Annal.*)⁸

Belgien, Niederlande.

26. Die Stelle 11 findet sich in den *Annales Yburgenses.*⁹
27. 839. Ludovicus obiit. Eclipsis solis 3. Non. Mai. (*Annales Formoselenses.*)¹⁰
28. 842. Audradus dicit ita: Mense tertio quinta et vicesima die, ebdomadis autem quarta dum annua consuetudine Letania-

¹ Mon. Germ. Scr. XVI, 59 [Pöhlde].

² Ibi IV, 6 [Trier].

³ Ibi I, 65. Alte bis 936 reichende Weingartner Aufzeichnungen.

⁴ Ibi I, 110 [Weissenburg].

⁵ Ibi VI, 575.

⁶ Ibi XIII, 64.

⁷ Eccard. I, 1608 [Südwürttemberg].

⁸ Pars I, lib. X, p. 244.

⁹ Mon. Germ. Scr. XVI, 436 [Yburg].

¹⁰ Ibi V, 35 [Vormeezele bei Ypern].

rum festa ab ecclesiis generaliter agerentur, sol conversus est in tenebras . . . (*Chronicon Alberici.*)¹

. . . tertia Mai . . . hora nona eclipsis solis, et stellae manifestae sunt visae in coelo velut noctis tempore. (*Ann. Xantenses.*)²

Schweiz.

140. Ludovicus imperator obiit et eclipsis solis III. Non. Mai. (*Chron. Breve Mon. S. Galli.*)³

140. Eodem etiam anno facta est solis eclipsis III. Non. Maii in vigilia ascensionis domini. (*Excerpta librorum de rigine et diversis casibus monast. S. Galli.*)⁴

Eclipsis solis 3. Non. Maias inter octavam et nonam horam in vigilia ascensionis domini. (*Annales Sangallenses maiores.*)⁵

140. Eclipsis solis 4. Non. Maias 7. hora. (*Annales regum Sangallenses.*)⁶

Die Stelle 32 in den *Annales Augienses*⁷ und *Annalium Lemannicorum contin. Augiensis.*⁸

Österreich.

139. Eclipsis solis facta est IV. Non. Mai, hora ante nonam. (*Chron. mon. Mellicense.*)⁹

139. Eclipsis solis accidit. (*Chron. Salisb.*)¹⁰

139. Eclipsis solis facta est IV. Non. Mai. (*Chron. mon. Admont.*)¹¹

accession. Histor. II, 2, pag. 178 [Neufmoutier], vide Note 5, pag. 100. Mon. Germ. Scr. II. 226 [Xanten].

de Chesne. III, 469 [S. Gallen]. Hier wurden die alten alemannischen bis 926 fortgesetzt.

de III, 483 [S. Gallen].

Mon. Germ. Scr. I, 76 [S. Gallen]. Dort entstandene Aufzeichnungen.

de XIII. 718 [S. Gallen].

de I, 68 [Reichenau].

de I, 49.

de z. I, 213 [Melk].

de I, 336 [Salzburg].

de II, 172 [Admont].

Italien.

38. 840. Questi fù un eclissi del sole si tremendo ed oscuro, che nel mancar della luce s'impossessarono in modo inusitato le tenebre, ed apparirono nel piu bello del giorno chiaramente le stelle. (*Tatti Annali sacri della citta di Como.*)¹
39. Ludovico patre anno 841 mortuo Moguntiae, tunc temporis sole obscuratio. (*Ludovici Cavitelli Cremonenses Annales.*)²
40. Indictione tertia sic fuit sol obscuratus in hoc mundo, et stellas in coelo apparebant 3. Non. Maias, hora nona in laetaniis domini, quasi media hora. Facta est tribulatio magna. Cumque hoc populus intenderent, multi extimabant, quod iam amplius hoc seculum non staret; sed dum haec angustia contemplant, refulsit sol et quasi tremidus in antea umbraculam fugire cepit. (*Andrae Bergomatis Chronicon.*)³
41. 840. . Tunc in mense Mai sexta hora diei sol obscuratus est et factus est eclipsis. (*Joannis Diaconi Chronic. Venetum.*)⁴
42. 840. . . . Eodem anno facta est eclipsis solis feria IV ante ascensionem domini, hora diei nona, II. Nonas Maii. (*Chronicon Romualdi.*)⁵

Die Annales Lugdunenses datiren die Finsterniss in richtiger Weise; nach denselben sind die übrigen Quellen zu berichtigen. Die auf Tafel II dargestellte Totalitätszone wird durch folgende Coordinaten bestimmt:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 355·25° v. Par.	φ +45·85°	λ 355·37° v. Par.	φ +43·25°
358·70	46·41	358·75	43·85
2·21	46·83	2·18	44·30
5·75	47·15	5·66	44·63
9·35	47·36	9·18	44·85.

¹ S. Zach: Zeitschr. f. Ast., Lindenau-Bohnenberger, III. 399 [Como].

² Graevi Thesaurus antiquit. et histor. Italiae, III, pars 2, p. 1274. [Cremona].

³ Mon. Germ. Scr. III, 235. Der Auszug Andreas von Bergamo ist 877 aus Paulus Diaconus gemacht.

⁴ Ibi VII, 17 [Venedig]. Im 10. Jahrh. begonnene Geschichte Venetiens bis 1008.

⁵ Muratori. VII, 158. — Weltchronik.

Die historische Überlieferung lässt durch die Stellen 1, 11, 25, 38, 40, keinen Zweifel übrig, dass die Finsternisse innerhalb des durch vorstehende Grenzen bezeichneten Raumes, sondern auch in den nördlichen Theilen des fränkischen Reiches, sowie in Bayern zu den bedeutendsten gehört hat. Insbesondere wird durch die Quellen 12, 13, 21, 25 eine nördliche Ausdehnung der Finsternisse gefordert. Es wurde mit Rücksicht auf dieses und das sonstige entscheidende Quellenmaterial eine Lösung von 1° acceptirt.

15. 878 October 29. 1^h 23^m 7, total. Ω

Island.

D) vard sol sua myrk vm skheid a himni.	880 hora circiter tertia pomeri- diana sol in coelo ita obscurus factus est.
--	--

Annales Islandorum vetustissimi.)¹

O. Sol hora diei IX. ita obscuratus est, ut stelle in coelo
parerent. (*Annales Islandorum regii.*)²

England.

. DCCCLXXXIX. J ilcan geare aþystrode seo ne an tid daeges.	... And that same year the sun was eclipsed one hour of the day.
---	---

Anglo-Saxon Chronicle, vol. I, 151, vol. II, 65.)³

3 Eodem vero anno immensus paganorum venit
rexitus de transmarinis partibus in Tamensi fluvio, et
edicto se cuneo sociavit, quo anno eclipsis solis facta est
inter nonam et vespas. (*Chronica Magistri Rogeri de
Cedon.*)⁴

. Eodem anno eclipsis solis inter nonam et vesperam,
propius nonam facta est. . . . (*Annales Joann. Asserii.*)⁵

Engelbæk. II, 187. — Die ersten Ansiedlungen entstanden zu

III, 29.

Brit. Scr., Nr. 23.

Nr. 51, vol. I. 43.

le. Hist. britann. et angl. scriptores. I, 168. — Asser (Ingenieur
anzugehöriger am Hofe Alfreds, später Bischof von Sherburne

).

6. 879. Et in ipsius anni decursu obscuratus est sol. (*Chron. Ethelwerdi.*)¹

Frankreich.

7. 878. 4. Kal. Nov. eclipsis solis 4. feria circa horam diei octavam et permansit fere hora dimidia adeo obscura, ut stellae clarissimae apparerent. (*Annales S. Benigni Divionensis.*)²
8. 878. Eclipsis lunae magna facta est mense Octobris, die XV. Item eodem mense eclipsis solis accidit die XXIX circa horam nonam. (*Annales Francorum Metenses.*)³
9. 878. . . . Eodem anno Idib. Octob. eclipsis lunae fuit cum . . . XIV et eclipsis solis secuta est eodem mense IV. Kal. Nov. luna XXVIII utroque sydere in XV diebus deficiente. (*Chron. Floriacense.*)⁴
10. Die Stelle 7 copirt in den (*Annales Besuenses.*)⁵
11. 878. . . . Ipso que mense fere mediante ecl. solis facta est hora diei 8, ind. 12. (*Annales Vedastini.*)⁶
12. 878. . . . Eodem quoque mense secuta est etiam solis eclipsis cum esset luna 23. (*Hugonis Floriacensis modern. regum Francorum actus.*)⁷
13. Die Stelle 9 in dem *Fragmentum historiae Francorum.*⁸
14. 878. . . . IV. Kal. Novemb. hora nona officii eclipsis solaris maxima, ut stellae apparerent et luna. (*Petri bibliothecarii Hist. Franc. abbreviata.*)⁹

¹ Rer. angl. Scr. 845.

² Mon. Germ. Scr. V, 39 [Dijon].

³ Du Chesne. III, 317.

⁴ Ibi III, 355 [Fleury].

⁵ Mon. Germ. Scr. II, 248 [Bèze]. Aus den Dijoner Annalen geschöpft.

⁶ Ibi I, 517. [Arras]. Jahrbücher des Klosters S. Vaast bei Arras (874—900).

⁷ Ibi IX, 378. Aus verschiedenen französ. Quellen geschöpfte Geschichte der Franken.

⁸ Du Chesne. II, 638.

⁹ Ibi III, 543.

Belgien.

75. 4 Kal. Nov. eclipsis solis facta est post horam diei
onam tam densa, ut etiam stellae apparent. (*Annales
Inonenses minores.*)¹

78. Karolus imp. obiit. Eclipsis solis. (*Annales Formo-
lenses.*)²

Stelle 11 in den *Annales Leobiensium fragmentum.*³

78 . . . et eclipsis solis facta est quarta Kal. Nov., 4. feria
hora 9 (*Folcwini Gesta abbatum S. Bertini Sithien-
um.*)⁴

80. Sol hora diei nona ita obscuratus est ut stellae in coelo
apparent. (*Chronicon Alberici.*)⁵

vorstehende Stelle in *Sigeberti Gemblacensis Chronicon.*⁶

Deutschland, Schweiz.

8. Teste Sigeberto sol hora diei IX ita obscuratus est, ut
stellae in coelo apparent. (*Erphurdianus antiq. variolog.
initio foundationis eiusdem civitatis sumens exordium.*)⁷

83. Eclipsis lunae facta est III. Id. eiusdem mensis, ultima
hora noctis. Sol quoque in IV. Kal. Nov. post horam nonam
obscuratus est per dimidiam horam, ut stellae in coelo
apparent et omnes sibi noctem imminere putarent. (*Ann.
inc. Fuldenses.*)⁸

83. Ludovicus obiit Eclipsis solis 4. Kal. Nov.
(*Ariani Scotti Chronicon.*)⁹

—

n. Germ. Scr. V, 19 [S. Amand] Klosterannalen.

V, 35 [Vormeezele].

II, 197 [Lobbes].

XIII, 622.

cess. Hist. II, 209. Vide Note 5, pag. 100.

n. Germ. Scr. VI, 342. Beide Weltchroniken copiren hier nach
der Annalen.

n. Germ. Scr. II, 470 [Erfurt].

Chesne. II, 571 [Fulda]. Nach dem Tode des Abtes Rudolf
treten diese Annalen allmählig mehr mit Klostersnachrichten auf.

n. Germ. Scr. V, 552 [Fulda].

24. 878. Eclipsis solis. (*Annales Corbeienses.*)¹
25. 878. Item eodem mense eclipsis solis accidit, die 29. circa horam nonam. (*Regionis Chronicon.*)²
26. 878 . . . et 4. Kal. Nov. eclipsis solis facta est. (*Annales Weingartenses.*)³
27. 879. Eclipsis solis facta est. (*Chronicon suev. univ.*)⁴
28. Stelle 26 in den *Annales Augienses.*⁵
29. 878 . . . Eodem mense (Octob.) die 28. eclipsis solis. (*Annales Einsiedlenses.*)⁶
30. 878. Sol eclipsatur ut hora diei nona stellae viderentur. (*Chronicon Engelhusii.*)⁷
31. 878. Hoc anno eclipsis solis fiebat. (*Annales Hildeshemenses.*)⁸
32. 878. Item eodem mense solis eclipsis accidit die 29. circa horam nonam. (*Annalista Saxo.*)⁹
33. 880. Anno Gerungi, abbatis 28 Anno praenotato sol hora diei nona ita obscuratus est, quod stellae viderentur in coelo tamquam si in medio noctis fuisset. (*Joannis Trithemii Annales Hirsauigienses.*)¹⁰

Österreich, Italien.

34. 879 . . . Ludovicus Balbus, filius Caroli, obiit. Eclipsis solis facta est. (*Chron. Mellic.*)¹¹
35. 879 Eclipsis solis facta est per tres horas. (*Chron. Salisburg.*)¹²
36. 878. Proximo anno utrumque sidus eodem mense hebetatum est, luna decimo sexto, sol vigesimo nono die Octobris. (*Tristani Calchi Historia Patriae.*)¹³

¹ Mon. Germ. Scr. III, 3. [Corvei].

² Ibi I, 590 [Prüm].

³ Ibi I, 66 [Weingarten].

⁴ Ibi XIII, 65.

⁵ Ibi I, 68 [Reichenau].

⁶ Ibi III, 104 [Einsiedeln].

⁷ Leibnitz: Script. Brunswic. II, 1068.

⁸ Ibi I, 716 [Hildesheim].

⁹ Mon. Germ. Scr. VI, 584. Weltchronik. Vide Note 2, pag. 63.

¹⁰ S. Gallen 1690, I, 34 [Hirschau].

¹¹ Pez. I, 215 [Melk].

¹² Ibi I, 336 [Salzburg].

¹³ Graevi Thesaur. antiq. et hist. Italiae. II, pars 1, col. 177.

Die richtige Datirung der Finsterniss ist: IV. Kal. Nov. feria IV.
Sonne für Fulda um 16^h 30^m aufging, fiel die Finsterniss
über Deutschland in die neunte Tagesstunde. — Berechnete
der Totalität:

Nordgrenze		Südgrenze	
16·93° v. Par.	$\varphi + 66·32^\circ$	$\lambda 836·98^\circ$ v. Par.	$\varphi + 62·57^\circ$
10·99	63·62	340·92	60·22
4·87	61·29	344·68	58·10
18·61	59·29	348·32	56·26
2·23	57·55	351·85	54·62
5·88	56·10	355·43	53·33
9·47	54·98	358·98	52·31
3·14	54·15	2·59	51·61
6·85	53·60	6·25	51·11
0·70	53·39	10·05	50·97
4·70	53·45	14·00	51·10
8·86	53·84	18·10	51·47
3·06	54·49	22·44	52·17.

Die Darstellung der Zone findet man auf Taf. I und IV. Von
den Orten sind besonders die Quellen 1, 2, 15, 22. Dieselben
zeigen die Nothwendigkeit einer südlichen Verschiebung der
Zone. Es wurde deshalb eine Correction von 1°
angebracht, so dass die Orte Fulda und S. Amand in den Bereich
der Totalität kommen, ferner Reikjawik in derselben verbleibt,
während die übrigen wegen weniger entscheidenden Nachrichten
ausgelassen sind.

Ein von einigen der Annalen angezeigtes Mondfinsterniss fand
am 10. October 878 statt.

16. 891 August 7. 22^h 14^m 4, ringf. ☾

Annus secundum imperante Leone, Angaeo Longobardiae
regis Franciae gener, cognita Basilii morte, a societate
Germanorum descivit, sibi que totam ditionem vindicavit.
Ira eum Leo Constantinum patricium, mensae praefectum,
in Occidentalibus mittit copiis. Commissa pugna Constan-
tinus succubuit, vixque caedem ipse evasit, exercitu suo
in ditione deleto. Sub idem tempus sol hora diei sexta ita
occidit, ut stellae viderentur. Extiterunt etiam vehementes

ventorum flatus, fulgura, tonitrua terribilia et ardentia fulmina, quibus septem viri in gradibus sancti Constantini in foro icti perierunt (*Cedrenus Historiar. Comp. II, 595.*)

2. . . . Itaque Leo patre rebus humanis exempto 26 annis imperavit. Cum Santabarenum ulcisci vellet, prius de Photio loco movendo consilium iniit, quod illum Santabareni patrocinium studiose suscepturum putaret. Nam rumor diditus erat. Photium cuidam suorum imperium tantum non despondentem hac ipsa de causa cum Santabareno consilia communicasse, contraque Leonem aliquid fraudis fuisse machinatum. Igitur eum Leo primum in exilium agit, deinde contumeliis affectum aliis, tandem oculis spoliatur. Existit iis temporibus tanta solis sub horam diei sextam eclipsis, ut ipsa etiam sidera conspicerentur. (*Michaelis Glycae annales.*)¹
3. Imperii Leonis anno secundo in seditionem mota Longobardia, missus est Constantinus mensae praepositus cum omnibus legionibus; consertaque pugna vix unus ille evadere potuit, reliquis qua necatis qua captis. Contigit vero etiam solis deliquium, ut et nox per horam tertiam esset et stellae apparerent. (*Symeonis magistri ac Logothetae annales.*)²
4. Stelle 1 im Wesentlichen in *Teophanes Continuatus lib. VI, 6.*)³
5. Leone Basilii filius 9. Tantum fuit solis deliquium, ut hora sexta stellae in coelo apparuerint. (*Georgii monachi Vitae Imperatorum Recentiorum.*)⁴

Struyck bezieht die byzantinischen Überlieferungen auf 2 verschiedene Finsternisse⁵ u. zw. 889 April 3 und 891 August 7. Die vorstehend gegebenen Quellen scheinen indessen zusammen zu gehören und auf ein und dieselbe Finsterniss Bezug zu haben. Es handelt sich um eine in den ersten Regierungsjahren Leo des

¹ Migne: Patrologiae curus completus. Tom. CLVIII, 554, Paris 1866. — Michael Glykas, ein Sicilier, lebte um 1140 unter Alexius in Byzanz.

² Niebuhr. Corpus Script. Hist. Byzant., vol. XXVI, 701, Bonn 1838.

³ Ibi XXVI, 356.

⁴ Ibi XXVI, 852.

⁵ Inleid. tot de alg. Geogr. p. 144.

(886—912) vorgefallene sehr bedeutende Finsterniss. Die Zeit der für Europa bis zur zweiten Finsterniss Struyck's nächst kommenden Eclipsen ergibt folgendes:

April	20	0 ^h 18 ^m 1	Total.	Hauptcurve: λ 296·6° v. Par. φ + 48·8°		
				" 353·5	" + 15·1	
				" 55·2	" - 1·9	
	14	15	36·3	Ringf.	" 64·3	" - 9·0
				" 119·6	" + 30·9	
				" 196·5	" + 42·9	
	3	16	50·0	Partiell.		
September	28	6	21·7	"		
Oktober	18	21	54·1	"		
	7	22	14·4	Ringf.	" 307·7	" + 41·7
				" 28·4	" + 36·7	
				" 81·9	" - 4·3	
November	1	20	15·2	Total.	" 353·1	" + 0·8
				" 54·3	" + 11·2	
				" 107·6	" + 45·7,	

Man auf Taf. V eingetragen findet. Nur die Finsterniss vom 7. kann für Byzanz von grosser Bedeutung gewesen sein, würde in das sechste Regierungsjahr Leo's fallen. Sie begann um 10 und 11 Uhr Vormittags, d. h. in der sechsten Stunde statt und hatte folgenden Verlauf:

Nordgrenze		Südgrenze	
1° v. Par. φ + 42·92°	λ 19·40° v. Par. φ + 40·91°		
7 42·04	21·22	40·02	
9 41·11	23·00	39·09	
6 40·11	24·74	38·08	
9 39·05	26·43	37·02	
7 37·93	28·07	35·89.	

Bei der Darstellung dieser Zone auf Taf. VI erhellt, dass die Finsterniss, um sie für Byzanz bedeutend zu machen, noch eine nördlichen Verschiebung von etwa 1° 35' bedarf.

17. 939 Juli 18. 20^h 53^m 1, total. Ω

Italien.

Ind. 12, 13. die stante mense Julio, feria 6, luna 29. Irratus est sol ab hora tertia usque pene ora 5. Aspicie-

- bamus nos solem, non habebat ullam fortitudinem, nec ad splendorem, nec ad colorem; videbamus vero coelum, et mutatum erat color illius, tamquam libidus; et alii dixerunt, ut viderent solem tamquam dimidium. (*Annales Casinates.*)¹
2. 939. Obscuratus est sol et apparuerunt stellae mense Julii ad stante tertia die, feria 3, hora 3, luna 29. (*Annales Lupi Barensis protospatae.*)²
 3. Hoc in tempore . . . sol magnam et cunctis terribilem passus est eclipsim sexta feria, hora diei tertia. Qua etiam die Abdaram rex noster a Radamiro rege christianissimo Galithiae in bello superatus est. Sed et in Italia octo continuis noctibus mirae magnitudinis cometa apparuit . . . (*Luitprandi Ticinensis ecclesiae Levitae Hist. sui temporis lib. V.*)³
 4. Stelle 1 im *Chronicon Cavense.*⁴
 5. 939. Eclipsis solis facta est XIV. Kal. Aug. VI. feria in VI. hora diei usque in ultimas partes terrae. (*Chronicon Pisanum.*)⁵
 6. 940. Eclipsis solis fit. (*Annales Farfenses.*)⁶

Chroniken aus anderen Ländern.

7. 939. Sol visus est in minutus tertia diei hora 4. Idus Julias. (*Annales Corbeienses.*)⁷
8. 940. Sol horribilem eclipsin patitur. (*Chron. Riddageshus.*)⁸
9. Stelle 3 in *Schedelii liber chron. Norimbergae.*⁹

¹ Mon. Germ. Scr. III, 172 [Mt. Cassino]. Sehr verlässliche Kloster-geschichte bis 1075.

² Ibi V, 54 [Bari].

³ Du Chesne. III, 613. Luidprand, Erzbischof von Cremona, früher am Hofe Berengars, später am Hofe des Kaisers Otto. Die Geschichte seiner Zeit ist 958 in Frankfurt begonnen.

⁴ Muratori VII, 962 [La Cava].

⁵ Muratori VI, 107 [Pisa].

⁶ Mon. Germ. Scr. XI, 588 [Farfa].

⁷ Ibi III, 4 [Corvei].

⁸ Script. Brunswic. II, 74 [Riddagshausen b. Braunschweig].

⁹ Fol. 179, 1 [Nürnberg].

39. Eclipsis solis facta est circa horam tertiam diei 14. Kal. ug. in 4. anno Ottonis regis in 6. feria, luna 29. (*Annales angallenses.*)¹

39. Sol visus est minutus. (*Annales Pragenses.*)²

14 Sol horribilem eclipsin passus est (*Chronographus Saxo.*)³

Seite 3 im *Annalista Saxo.*⁴

Seite 3 in *Sigeberti Gemblacensis Chronicon.*⁵

Das richtige Datum der Finsternis ist: Indict. 12. XIV. Kal. Iulia VI. Da die Sonne für Monte Cassino um 16^h 48^m aufging, so ist die Finsternis in die 4. Tagesstunde. Grenzcurven der Finsternis sind:

Nordgrenze		Südgrenze	
8·57° v. Par.	$\varphi + 42·12^{\circ}$	$\lambda 359·11^{\circ}$ v. Par.	$\varphi + 39·76^{\circ}$
0·96	42·84	1·50	40·44
3·32	43·48	3·85	41·09
5·67	44·08	6·18	41·68
7·99	44·63	8·48	42·23
10·29	45·14	10·77	42·74
12·57	45·61	13·03	43·21

Die Annalen von Monte Cassino (1.) lassen keinen Zweifel übrig, dass die Finsternis daselbst von grosser Auffälligkeit war, und würde die Zone (Taf. III) selbst bis Bari zu verschieben. In Rücksicht hierauf und mit Bezug auf 3. hat die Finsternisreaction von 1° 15' südlicher Verschiebung erhalten.

18. 968 December 21. 21^h 30^m 1, total. ☉

Byzanz.

Cephorus Phocas imperator. — Die mensis Decembris XXII, Iulia tertia, tantus fuit solis defectus, ut astra quoque aperuerint. (*Cedrenus Histor. Comp.*)⁶

Phocas urbem quoque mirifice affligebat, dum palatiorum aedificia substruebat. Id autem propterea faciebat, quod ea

¹ Mon. Germ. Scr. I, 78 [S. Gallen].

² ibi. III, 119 [Prag].

³ Freibnitz. Access. Histor. I, 159 [Magdeburg].

⁴ Mon. Germ. Scr. VI, 605.

⁵ ibi. VI, 348 [Gembloux].

⁶ 662.

quae vulgo ferebantur metueret; nam oraculo proditum erat futurum ut in palatio moreretur. Accidit tunc temporis circa tertiam horam diei tantus solis defectus, ut ipsa etiam sidera conspicerentur. (*Mich. Glycae annales.*)¹

3. Lib. IV, cap. 11. Haec dum ab Imperatore in Syria geruntur, sub solstitio hiberno solis fuit defectio qualis nunquam antea accidit, praeter illam quae in passione dominica terris inducta est ab Iudaeorum dementiam, qua occaecati aedificatorem universi cruci affixerunt. Defectus specie tali erat. Vicesimus secundus dies agebatur mensis Decembris hora diei quarta, coelo sereno, cum tenebrae terrae offusae sunt, stellaeque lucidiores omnes se aperuerunt. Poterat videre unusquisque solis orbem sine splendore, lucis expertem, fulgoremque aliquem obscurum ac tenuem, fasciae angustae instar, extremis partibus per oram orbis circumlucentem. Paulatim vero sol praetergrediens lunam (apparebat enim haec ad perpendicularum illum obducens) pristinos radios emisit, luceque denuo complevit terram. Que novo atque insolito spectaculo conturbati homines, numen, ut par erat, supplicibus votis placabant. (*Leonis Deaconi Caloënsis Historiae libri decem.*)²

Corfu.

4. 968. Igitur . . . decimoquinto ad Coriphus (Corfu insula) pervenimus, ubi ante navis egressionem occurrit nobis strategos quidam, Michael nomine, Chersionitis, a loco scilicet Chersona; homo ipse canus capite, facie hilarius, sermone bonus, risu semper iucundus, sed, ut post patuit mente diabolus; quod et Deus apertis mihi monstravit indicibus, se me tunc mens hoc potuisset conicere. Mox enim ut pacem, quam corde non ferebat, mihi osculo dedit, tota Coriphus, magna scilicet insula, tremuit; nec solum semel, sed ter eadem die pertremuit. Post quadriduum autem, undecimo scilicet Calendas Januarii, dum in mensa positus panem comederem,

¹ Migne. Patrologiae cursus compl., T. 158, p. 574, Paris 1866.

² Corpus script. Hist. Byzant. Bonnae 1828, vol. XI, 72. — Leo Diaconus war um 930 in Jonien geboren, lebte zu Constantinopel und schrieb die Geschichte seiner Zeit 959—971.

ni ampliabat super me calcaneum suum, vere cundatus sol
 einus tam indignum, lucis suae radios abscondit, et eclip-
 sa passus, Michaellem illum terruit, sed non immutavit.
*(Liudprandi relatio de legatione Constantinopolitana.)*¹

Italien.

8. Imperator cum exercitu longe per agros diffuso, Ca-
 briae fines tenebat, cum ecce repentinum omnes ingenti
 vore solis perculit deliquium. Namque ut audiui referentem
 mnum Wazonem episcopum, cum multum diei superesset,
 lent, deficiente paulatim sole, cum adhuc maturus foret,
 m quasi iam vesperascentem nigrescere, et ceu sub noc-
 1 greges peccorum a pascuis stabula aves que aviaria
 ere *(Herigeri et Anselmi Gesta Episcop. Leodiens-*
*m.)*²

3. Quodam ergo tempore invitatus ab imperatore, pro
 ni negotiis Calabriam venit; ubi dum esset mediante die
 idie eclipsis solis subito facta est, cunctisque stupentibus
 nimio terrore sole cadentibus, timor et tremor erat
 ubus. *(Ruperti Chronicon sancti Laurentii Leodiensis.)*³
 aclus preterea referre solitus erat, quod dum aliquando
 astris esset cum Ottone imperatore, qui adversum Grecos
 ipaverat Calabriam, subita solis obscuratio et horribile
 um sit deliquium. Nocturnas exercitus tenebras et chaos
 litum perhorruit, ac veluti urgeret ultimus seculi dies,
 ciique tempus instaret, cepit pavitare. Magnanimes
 as timidarum instar dammularum vidisses diffugere . . .
ineri monachi sancti Laurentii Leodiensis Opera historica:
*Evracii.)*⁴

1. Germ. Scr. III, 362. — Im Sommer 968 ging Liudprand als
 r Otto II. nach Constantinopel; sein Bericht endet mit der
 i Corfu, 7. Jänner 969.

2. II, 202. Lütticher Bisthumschronik.

3. III, 263. Geschichte des Lütticher S. Lorenzklosters bis 1095. —
 iken berichten hier, sowie die folgende, von einem von Augen-
 labrien beobachteten Ereignisse.

4. Germ. Scr. XX, 563. — Evraclus 959—971 Bischof von

8. 969. Hoc anno sol obscuratus est et magnus Otto Calabria ingressus est (*Annales Casinates.*)¹
9. 969. Otto rex intravit in Calabriam mense Octobris; et sol obscuratus est in mense Decembris. (*Lupi protospatae Annales Barensis.*)²
10. 969. Sol fuit in tenebris mense Decembris die 22. (*Annales Farfenses.*)³
11. 968. Sol obscuratus est decima die stante mense Decembris. (*Annales Beneventani.*)⁴
12. 969. Indict. 12. Hoc anno facta est eclipsis solis 11. Kal. Januarii hora diei inter tertiam et quartam. (*Chronicon Cavense.*)⁵

Frankreich.

13. 956. IV. Non. Septemb. luna versa est in sanguinem. Eodem quoque anno mense Junio signum mirabile in coelo apparuit, draco magnus scilicet et sine capite. Secuta est statim mors Hugonis Magni, Principis Francorum, Burgundionum, Britonum, atque Nortmannorum. Eclipsis solis XI. Kal. Januarii et stellae apparuerunt a prima hora usque tertiam. (*Chronicon Floriencense.*)⁶

Deutschland, Schweiz, Österreich.

14. 32. Jahr Otto d. Gr. (968): Eclipsis solis facta est 11. Kal. Decb. (*Ekkehardi Chron. Wirzburg.*)⁷
15. 968. Eclipsis solis 11. Kal. Dec. facta. (*Bernoldi Chronicon.*)⁸
16. Vorstehende Stelle in den *Annales Palidenses.*)⁹

¹ Mon. Germ. Scr. III, 172 [Mt. Cassino].

² Ibi V, 55 [Bari].

³ Ibi XI, 589 [Farfa].

⁴ Ibi III, 176 [Benevent].

⁵ Muratori. VII. 920 [La Cava].

⁶ Du Chesne. III, 355 [Fleury]. Hugo der Grosse starb im Juni 956.

⁷ Mon. Germ. Scr. VI, 29 [Würzburg].

⁸ Ibi V, 423 [Schaffhausen].

⁹ Ibi XVI, 29 [Pöhlde].

68. Hoc anno eclipsis solis facta est 11. Kal. Januar. una 28. hora diei 3. (*Annales Sangallenses majores.*)¹

68. Eclipsis solis 11. Kal. Decb. facta. (*Herimanni Aug. hron.*)²

68. Eclipsis solis 11. Kal. Dec. (*Chronicon suevic. univ.*)³

68. Eclipsis solis facta est XI. Kal. Dec. (*Chron. monast. Fellic.*)⁴

37. Hoc tempore eclipsis solis facta est XI. Kal. Decembris. Signum quodam his temporibus ignei coloris apparuit *Anonymi Leobiensis Chronicon.*)⁵

68. Eclipsis solis accedit. (*Chron. Salisburg.*)⁶

69. Eclipsis solis facta est. (*Chron. mon. Admont.*)⁷

Die Annales Sangallenses haben die richtige Datirung der Eklipse. Da die Finsterniss für Unteritalien etwa 2^h 10^m nach Aufgang eintrat, stimmt der Ausdruck „dritte Stunde des Tages“ — Von entscheidender Wichtigkeit für die beobachtete Eklipse in Constantinopel sind die Berichte 1, 2 und 3, welche das Datum feststellen, indem sie die Naturerscheinung in der Ordnung des Nicephorus vorangehen lassen. Der Gesandtenbericht des Bischofs Liudprand (4) zeigt die Totalität auf den Stellen 5, 6, 7 beweisen ausserdem die Totalität für Italien, wo eben der Krieg Otto's wegen der Anmassungen des Arnulf von Carinthien begonnen hatte. Betreffs der Stelle 13 hat schon Klaproth, der den gleichlautenden Bericht aus den Fragmenten entnimmt, darauf aufmerksam gemacht,⁸ dass hier der Finsterniss 968 December 21 die Rede sein kann; in der That findet sich keine andere Finsterniss, welche entsprechen würde. Zugleich zeigt die Stelle 13 die Totalität, wenn auch nicht zu Fleury selbst, so doch in Mittelfrankreich; die Eklipse ist auf 955 September 4 zu setzen.

¹ Ann. Germ. Scr. I, 79 [S. Gallen].

² V, 116 [Reichenau].

³ XIII, 68.

⁴ z. I, 219 [Melk].

⁵ I, 759 [Leoben].

⁶ I, 339 [Salzburg].

⁷ II, 175 [Admont].

⁸ Not. d. allg. Geogr., 122.

Gegentüber dem historisch festgestellten Totalitätsgebiete ergibt die Rechnung:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 359.77° v. Par.	$\varphi + 48.54^\circ$	λ 0.44° v. Par.	$\varphi + 46.07^\circ$
1.55	47.75	2.18	45.36
3.27	47.08	3.88	44.69
4.95	46.46	5.52	44.08
6.61	45.84	7.16	43.47
8.22	45.28	8.73	42.99
9.79	44.88	10.29	42.48
11.33	44.47	11.80	42.09
12.84	44.14	13.29	41.74
14.32	43.84	14.75	41.44
15.78	43.59	16.17	41.19
17.21	43.41	17.59	41.01
18.62	43.32	18.99	40.87
20.01	43.27	20.36	40.80
21.39	43.22	21.71	40.78
22.76	43.28	23.05	40.80
24.12	43.39	24.39	40.91
25.46	43.53	25.73	41.08
26.80	43.73	27.02	41.26

Die Finsterniss (dargestellt Taf. I) bedarf also einer südlichen Verschiebung. Es sind hiefür $1^\circ 20'$ angenommen worden.

19. 1033 Juni 28. 23^h 32^m 5, ringf. Ω

Frankreich.

1. 1033. Eclipsis solis fuit 3. Kal. Jul. luna 27. circa octavam horam. Apparuit enim circulus eius primum viridis, postea croceus, et sic movebantur hi duo colores, sicut solet moveri aurum vel argentum, quando purgantur immisso plumbo. Et inde vestimenta hominum et vultus videbantur quasi crocea. Cuius lumen reversum est ab occidente, sicut lumen lunae in prima et secunda et tertia et quarta; et postea insperato totum lumen rediit. (*Annales Elnonenses minores.*)¹

¹ Mon. Germ. Scr. V, 19 [S. Amand].

1033. Hoc anno eclipsis solis die festivitatis sanct. apost. Petri et Pauli feria 6. meridianis horis, et stella clara visa est. (*Annales S. Benigni Divionensis.*)¹

1033. Anno igitur eodem die dominicae passionis millesimo, die tertio Kal. Jul. sexta feria, luna vicesima octava, facta est eclipsis seu deliquium solis ab hora eiusdem diei sexta usque in octavam, nimium terribilis. Nam sole ipse factus est saphyrini coloris, gerens in superiori parta speciem lunae et sua reilluminatione quartae. Intuitus hominum in alterutum velut mortuorum pallor conspiciebatur. Res vero quaecumque sub aëre crocei coloris esse cernebantur. Tunc corda humani generis stupor ac pavor tenuit immensus. Quoniam illud intuentes intelligebant portendere quiddam fore superenturae cladis humano generi triste . . . (*Glabri Rudolphi, Luniacensis monachi Historiarum sui temporis lib. IV, c. IX.*)² ante suum [Robertus] sane sanctissimum obitum, qui tertio decimo Kal. Augusti extitit, die passionis apost. sanct. Petri et Pauli, sol ad similitudinem quartae lunae substractis radii uscatu apparuit in toto mundo, hora diei sexta palescens super homines. Quotum visus ita obnubilavit, ut nullus alium recognosceret, donec quoddam recognoscendi transiret patium. Quid autem portenderit, in proximo patuit, cum il nobis miserius aluit, quam de sua morte doloram intolerabilem reliquerit . . . (*Helgaldi Floriacensis monachi epitoma vitae Roberti regis.*)³

1039 [recte 1033] die Kalendarum Julii, 6 feria luna 28. facta est eclipsis solis. [Beschreibung nach Glaber.] (*Chron. Hugonis.*)⁴

1033 . . . Petri et Pauli 6. feria luna 28 facta est eclipsis seu deliquium solis ab hora 7. diei usque in horam nonam,

1) Mon. Germ. Scr. V, 41 [Dijon].

2) Du Chesne. IV, 49. Glaber, Mönch zu Cluny (vorher in andern Orten, namentlich Dijon), schrieb ein Werk über Begebenheiten um 1000 Chr., fortgeführt bis 1044 [Cluny].

3) Du Chesne. IV, 77 [Fleury].

4) Mon. Germ. Scr. VIII, 402 [Flavigny]. Hugo, seit 1096 Abt von Cluny, seine Weltchronik aus vielen Quellen und eigenen Erlebnissen

ita ut horribilius numquam dinoscatur contigisse. Nam ipsa species solis in modum lunae quarte a sui reaccensionem effigiata fuisse visa est. Ventidem vero safrini intuebatur coloris. Res quecumque sub coelo crocicolor humanis visibus apparebat. Retro et ante solem stelle claruere. (*Annales Besuenses.*)¹

7. 1029. 13. Kal. Mai eclipsis solis facta est ab hora 4 usque pene 6 non ut mos est, sed ita sole prius apparente ☉ deinde ita ☉ postea ita ☉. (*Annales Lemovicenses.*)²
8. 1033. In hoc anno 3. Kal. Jul. natal. apost. Petri et Pauli fuit eclipsis solis, scilicet hora inter tertiam et meridiem. (*Annales Nivernenses.*)³
9. 1033. Hoc anno contigit eclipsis solis 3. Kal. Jul. hora 6. (*Annales Blandinienses.*)⁴
10. 1033 sol obscuratus est natale S. Petri III. Kal. Julias. (*Ex chronico brevi Autissidorensi.*)⁵

Deutschland.

11. 1033. Eclipsis solis facta est III. Kal. Julii hora VI. (*Chron. Vetero-Cellense Minus.*)⁶
12. 1034. Eclipsis solis fit. (*Chron. Riddugshus.*)⁷
13. 1033. In dussem sulven jare was eyn eclipsis, dat sick de sunne verwandelde in sunte Peter unde Pauwelsdage. (*Bothonis Chron. Brunswic. pictur.*)⁸
14. 1033. Eclipsis solis III. Kal. Jul. feria IV. natali S. Petri apostoli, hora diei VI accidit. (*Annales Hildeshemenses.*)⁹

¹ Mon. Germ. Scr. II, 249 [Bèze].

² Ibi II, 252 [Limoges].

³ Ibi XIII, 90 [Nevers].

⁴ Ibi V, 26 [Blandigny].

⁵ Bouquet. XI, 292 [Auxerre].

⁶ Menken. II, 437 [Altzella].

⁷ Script. Brunswic. II, 76.

⁸ Ibi III, 324 [Braunschweig].

⁹ Mon. Germ. Scr. III, 99 [Hildesheim]. Werden erst mit 993 n. Chr. selbstständig.

1033 .. Eclipsis solis facta est 3. Kal. Julii, 6. hora. (*Annales Magdeburgenses.*)¹

Huius etiam temporibus eclipsis solis generalis facta est, anno videlicet Domini 1033, 3. Kal. Julii hora 6. (*Gesta Episcoporum Halberstadensium.*)²

1033. Eclipsis solis facta est 3. Kal. Julii hora 6. (*Annales Colonienses maximi.*)³

1033. In dem nuynden jare vor Keyser Conrad yn den Winter yn Burgundienlant, do vorgynch och de Sonne yn demselben jare. (*Chronicae regiae versio Germanica.*)⁴

1032. Eclipsis solis facta est circa meridiem 3. Kal. Julii. (*Ann. Remenses et Colonienses.*)⁵

1033. Eclipsis solis 3. Kal. Junii, et imperator in Burgundiam. (*Ann. Ratisponenses.*)⁶

1034. Eclipsis solis facta est 3. Kal. Jul. hora 6. (*Annales Wirziburgenses.*)⁷

3. Jahr Conrad.] Eclipsis solis facta est 3. Kal. Jul. hora 6. (*Ekkehardi Chron. Würzburg.*)⁸

1033. Eclipsis solis circa meridiem 3. Kal. Julii, luna 27. (*Ann. Purchenses.*)⁹

1033 et eclipsis facta est in nativitate apostolorum. (*Annal. Weissenburg. Continuatio.*)¹⁰

1033. Eclipsis solis 3. Kal. Julii. (*Ann. Augustani.*)¹¹

1033. Eclipsis solis 3. Kal. Jul. hora quasi 6. (*Chron. suev. nir.*)¹²

Ion. Germ. Scr. XVI, 170 [Magdeburg]. Im Kloster Bergen bei Burg abgefasste, früher als Chronographus Saxo bekannte, mit Selbstn vermischte grosse Compilation.

bi XXIII, 93.

bi XVII, 742 [Cöln].

Leccard. Corp. hist. I, 959 [Cöln?].

Ion. Germ. Scr. XVI, 731.

bi XVII, 584 [Regensburg].

bi II, 243 [Würzburg].

bi VI, 30 [Würzburg].

bi XVI, 602.

bi III, 70 [Weissenburg].

bi III, 125 [Augsburg]. Bis 1054 aus Herm. Contr.

bi XIII. 71.

Österreich, Schweiz.

27. 1033. Eclipsis solis III. Kal. Jul. hora quasi 6. (*Chron. mon. Mellic.*)¹
28. 1033. Selbe Stelle im *Chron. Claustro-Neoburgense.*²
29. 1033. Ebenso *Auctoris incertis Chron. Austria.*³
30. 1033. Eclipsis solis facta est. (*Chron. mon. Admont.*)⁴
31. 1033 Eclipsis solis 3. Kal. Jul. circa septimam diei horam facta. (*Hermanni Augiensis Chronicon.*)⁵
32. 1033. Eclipsis solis facta est circa meridiem. (*Sigeberti Gemblac. Chronic.*)⁶

Italien.

33. Per idem tempus mense Junio in die S. Petri et Pauli fervente meridie, eclipsis solis apparuit, tribus horis mundo inducens tenebras. Tempore post alio visa est noctu luna colore fuscata sanguines. (*Arnulphi Gesta Mediolanensium.*)⁷
34. 1034. Ind. 2. Solis pars maxima obscurata est in festo S. Petri. (*Chron. Cavense.*)⁸
35. 1033. Eclipsis solis mense Junio valde tenebrosa. (*Annales Beneventani.*)⁹
36. 1033. Quadriennio autem post, in ipsa die festivitatis s. Petri apost. solis pars maxima offuscata est. (*Leonis Marsicani et Petri Diaconi Chronica Mon. Casinensis.*)¹⁰
37. 1034. Sol obscuratus hora sexta. (*Annales Farfenses.*)¹¹

¹ Pez. I, 323 [Melk].

² Ibi. I, 437 [Klosterneuburg].

³ Ibi. I, 551.

⁴ Ibi. II, 176 [Admont].

⁵ Mon. Germ. Scr. V, 121 [Reichenau]. Weltchronik, von 1039 an eine Quelle ersten Ranges.

⁶ Ibi. VI, 357 [Gembloux].

⁷ Script. Brunswic. III, 733 [Mailand]. Ereignisse von 925—1077.

⁸ Muratori. VII, 920 [La Cava].

⁹ Mon. Germ. Scr. III, 178 [Benevent].

¹⁰ Ibi. VII, 668 [Mt. Cassino]. Petrus Diac. gehörte dem Kloster schon als Knaabe an.

¹¹ Ibi. XI, 589.

1034. Ind. II. fuit eclipsis solis in festivitate S. Petri
(*Romualdi Salernitani Chronicon.*)¹

Das Datum der Finsterniss ist 1033 Indict. I, III Kal. Jul.
(Am Feste Peter und Paul). Die Finsterniss fiel in Cluny, da
n Junction 6^h 57^m nach Sonnenaufgang eintrat, in die siebente
e. Die berechnete Zone der Centralität findet sich auf Taf. I:

Nordgrenze		Südgrenze	
359·49° v. Par. $\varphi + 46·50°$		λ 359·51° v. Par. $\varphi + 46·31°$	
1·49	46·64	1·49	46·46
3·48	46·74	3·48	46·55
5·47	46·80	5·47	46·60
7·46	46·81	7·46	46·61
9·45	46·75	9·44	46·56
11·44	46·67	11·43	46·48
13·44	46·54	13·42	46·35
15·43	46·36	15·41	46·16

ur die Beurtheilung der Sichtbarkeit dienen die Quellen
4, 6, 7. Bei der Quelle 7 ist sowohl Jahr als Tag verfehlt,
at sie auf die in Rede stehende Finsterniss Bezug. Die
ischen Quellen sind, ein so werthvolles Material sie hier
doch für eine Correction nicht entscheidend. Nach 2, 4 und 6
ie Zone in mässiger Weise nördlich zu verschieben, während
ganz unmögliche Correction erfordern würde. Da aber
nch Glaber, der hier sehr wahrscheinlich als Augenzeuge
von Bedeutung ist, so scheint es, dass die Finsternisszone,
auf Taf. I eingezeichnet ist, ziemlich richtig liegt. Ich
um den theilweisen Widersprüchen der Berichte auszu-
1, die Finsterniss schliesslich ohne Correction gelassen.

20. 1039 August 22. 0^h 3^m 0, ringf.-tot. ☿

Frankreich.

037). Iterum quoque post annos quatuor facta est eclipsis
olis undecimo die Kal. Septembr. feria quarta, hora sexta,
que ut semper fit luna vicesima octava. (*Glabri Rudolfi*
ist. sui temp. lib. IV, c. IX.)²

uratori. VII, 167. Weltchronik bis 1178. (Romuald 1153—1181
of von Salerno.)

ou Chesne. IV, 49 [Cluny].

2. 1039 die *Kal. Julii, IV. feria, luna XXVIII facta est eclipsis solis. Sol enim factus est saphiri coloris (*Ex Chronico Viridunensi Auctore Hugone abbate Flaviniacensi.*)¹
3. 1039. Hoc ipso autem quo diem clausit anno, eclipsis solis fuit pridie Idus Maii (*Ex Chronico Cameracensi et Atrabatensi.*)²
4. 1039. Hoc anno contigit eclipsis solis 11. Kal. Sept. a tertia hora usque ad sextam, luna 28. (*Annales Blandinienses.*)³
5. 1039. 11. Kal. Sept. sol contenebratus est. (*Annales Mosomagenses.*)⁴

Belgien.

6. 1039. Pridie Idus Maii eclipsis solis fuit, et pridie nonas Junii imperator obiit. Post quem Henricus filius eius imperavit annis 17. (*Sigeberti Gembl. Chronicon.*)⁵
7. 1038. Hoc anno contigit eclipsis solis undecimo Kal. Sept. a tertia hora usque ad sextam, luna XXVIII. (*Chronicon Alberici.*)⁶

Deutschland.

8. 1038. Eclipsis solis facta est XI. Kal. Septembr. (*Chron. Vetro-Cellense minus.*)⁷
9. 1039. X. Kal. Sept. Sol eclipsin passus est 7. hora. (*Excerpta necrologii Fuldens. antia.*)⁸
10. 1038. Eclipsis solis facta est. (*Annales Colonienses maximi.*)⁹
11. 1039 et fuit eclipsis solis 2. Idus Maii. (*Annales Remenses et Colonienses.*)¹⁰

¹ Bouquet. XI, 144 [Verdun].

² Ibi XI, 123.

³ Mon. Germ. Ser. V, 26 [Blandigny].

⁴ Ibi III, 161 [Mousson].

⁵ Ibi VI, 358 [Gembloux]. Weltchronik des Gemblouxer Mönches Sigebertus (1030—1112).

⁶ Access. Hist. II, pars 2. 69 [Neufmoutier].

⁷ Menken. II, 437 [Altzella].

⁸ Script. Brunsvic. III, 768 [Fulda].

⁹ Mon. Germ. Ser. XVII, 742 [Cöln].

¹⁰ Ibi XVI, 732 [Cöln].

1039. Eclipsis solis facta est. (*Chronica Regio S. Pantaleonis.*)¹

1039 In dem virtzeynden jare starph Keyser Conrad ynde vvard begraven zo Spire do vvas och de sonne vorgangen in demselben jare. (*Chronicae regiae versio Germanica.*)²

15. Jahr Conrad. — Eclipsis solis 11. Kal. Sept. (*Ekkehardi Chron. Wirzburg.*)³

1039 et universalis eclipsis XI. Kal. Sept. apparuit. (*Achilles Pirminii Gassari Annales Augsburg.*)⁴

1039. Eodem anno 11. Kal. Sept. eclipsis solis facta est. (*Annales Osterhovenses.*)⁵

038. Eclipsis solis 12. Kal. Sept. (*Annales Ellwangenses.*)⁶

039. Eclipsis solis facta est 11. Kal. Sept. (*Annales Altaenses maiores.*)⁷

039. Eclipsis solis 11. Kal. Sept. (*Chron. suev. univ.*)⁸

039 Et eodem anno XXII die mensis Augusti eclipsis ut solis. (*Ann. Hirsaujienses.*)⁹

039. Stelle 14 in *Annalista Saxo.*¹⁰

Österreich.

039. Eclipsis solis 11. Kal. Sept. (*Chron. mon. Mellic.*)¹¹

039. Eclipsis solis facta est 11. Kal. Sept. (*Chron. mon. Admont.*)¹²

039. Eclipsis solis 11. Kal. Sept. (*Auctoris incerti Chron. striae.*)¹³

eccard Corp. hist. I, 902 [Cöln].

si I, 960 [Cöln].

on. Germ. Scr. VI, 30 [Würzburg].

enken. I, 1393 [Augsburg].

on. Germ. Scr. XVII, 540 [Osterhofen].

i X, 18 [Ellwangen].

i XX, 793 [Altaich].

i XIII, 71.

ol. I, 175 [Hirschau].

on. Germ. Scr. VI, 683.

ez. I, 223 [Melk].

i II, 176 [Admont].

i I, 552.

Die *Annales Blandinienses* geben die Finsterniss in richtiger Weise an. Die Grenzen der äusserst schmalen Centralitätszone sind:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 356·78° v. Par.	φ + 46·91°	λ 356·78° v. Par.	φ + 46·86°
358·73	45·72	358·73	45·69
0·63	44·48	0·63	44·45
2·46	43·16	2·46	43·15
4·24	41·79	4·24	41·76
5·98	40·36	5·98	40·34
7·67	38·86	7·67	38·86

Die auf Taf. II zur Ansicht gebrachte Zone genügt vorstehenden Berichten. In Mittel- und Südfrankreich musste die Finsterniss nach den Quellen 1, 2 auffallend sein. Ein Anlass zur Correction liegt nicht vor.

21. 1093 September 22. 22^h 51^m 2, ringf. ☿

Frankreich, Belgien.

1. 1093. 9. Kal. Octob. 6 feria, hora 3 usque in horam 8. luna 28. indict. I epacta I, eclipsis solis facta est. (*Annales Blandinienses.*)¹
2. 1093. Eclipsis solis facta est nono Kal. Octobr. (*Chronicon Alberici.*)²
3. 1093. Sol eclipsim patitur. (*Annales Formoselenses.*)³

Deutschland.

4. 1093. Eclipsis solis facta est 3. hora diei et draco visus est. (*Chron. Sampetr. Erfurtense.*)⁴
5. 1093. Selbe Stelle: *Erfurdianus Antiquit. variloq.*)⁵

¹ Mon. Germ. Scr. V, 27, [Blandigny].

² Access. Hist. II, 2, pag. 141 [Neufmoutier].

³ Mon. Germ. Scr. V, 36 [Vormeezele].

⁴ Menken, III, 204. Beruhen auf den alten Erfurter Annalen und sind zu Erfurt fortgesetzt.

⁵ Ibi II, 475.

1093. Ind. XV. — V. Aug. circa vesperam eclipsis solis facta est 3. hora diei. (*Ann. Hildeshem.*)¹

1093. Eclipsis solis facta est 9. Kal. Oct. hora tertia, et mortalitas magna facta et draco visus est. (*Annalista Saxo.*)²

1093 Eclipsis solis facta est tertia hora diei et draco visus est. (*Ann. Magdeburg.*)³

Ebenso die *Annales Stadenses*)⁴

und die *Annales Rosenfeldenses.*⁵

1093. Eclipsis solis facta est 9. Kal. Oct. hora tertia et draco visus est. (*Ann. Colonienses maximi.*)⁶

Ebenso *Chronic. Regiae S. Pantaleones.*⁷

1093. In dem zeys unde dritzychden jare Do was och de unne vurgayn, unde sach man do och eynen drachen ophenare. Dar na starph des volches vile. (*Chron. reg. vers. Herm.*)⁸

1096. Signum in sole apparuit. (*Chron. Riddagshus.*)⁹

1093. Eclipsis solis facta est tertia hora diei (*Annales sancti Disibodi.*)¹⁰

1093 Hoc anno 9. Kal. Oct. circa tertiam horam diei facta est eclipsis solis, alteroque anno facta est mortalitas magna. (*Annales Sancti Blasii.*)¹¹

1093. Eclipsis solis hic facta est hora diei quarta. (*Annales sancti Trudperti.*)¹²

1094. Eclipsis solis 9. Kal. Oct. factam magna mortalitas minum sequitur. (*Annales Ratisponenses.*)¹³

Mon. Germ. Scr. III, 106 [Hildesheim].

Me card Corp. hist. I, 575 [Halberstadt]. Die Geschichte des Halberstadt findet sich in diesen vorzüglichen Annalen besonders wichtig.

Mon. Germ. Scr. XVI, 178 [Magdeburg].

XVI, 317 [Stade].

XVI, 101.

XVII, 744 [Cöln].

Me card. I, 909 [Cöln].

I 967 [Cöln].

Me pt. Brunsvic. II, 77 [Riddagshausen].

Mon. Germ. Scr. XVII, 14 [Disibodenberg].

XVII, 277 [S. Blasien].

XVII, 290.

XVII, 585 [Regensburg].

19. 1093 . . . Eclipsis solis facta Cal. Octob. mensis, mansit ferme tribus horis. (*Ann. Zwiefalt.*)¹
20. Stelle 8. in den *Annales Wirziburg.*)²
21. Stelle 4. in *Ekkehardi Chron. univers.*³
22. 1093. Solis eclipsis in meridie in libra, 8. Kal. Octob. (*Annales Augustani.*)⁴
23. 1093. Signum in sole factum est 9. Kal. Octob. ante meridiem, ut circulus quidam in illo appareret, et ipse in sereno coelo obscurissime luceret. Sed hoc magis quidam eclipsin quam signum fuisse putaverunt, praecipue cum luna esset vicesima octava ea die. . . . (*Bernoldi Chronicon.*)⁵
24. 1093 . . Anno etiam . . 23. die mensis Sept. solis defectio facta est, quam eclipsim Graeci vocant, mane hora diei tertia. Draco etiam volans per aërem apparuit, cuius spectaculum plures in admirationem et pavorem convertit. (*Trithemii Annales Hirsaugienses.*)⁶

Österreich.

25. 1092. Eodem anno facta est eclipsis solis 12. Kal. Octob. 6. feria post meridiem. (*Cosmae Pragensis Chronicae lib. III.*)⁷
26. 1093 obiit Wratizlaus rex . . . Bracizlaus successit. Eclipsis solis fuit. (*Anonymi excerpta ex Chronico a Chr. Dom. nativ. usque anno 1158.*)⁸
27. 1093. Eclipsis solis accidit. (*Chron. Salisburg.*)⁹

¹ Mon. Germ. Scr. X, 54 [Zweifalten].

² Ibi II, 246 [Würzburg].

³ Ibi VI, 207 [Würzburg].

⁴ Ibi III, 134 [Augsburg].

⁵ Ibi V, 457 [Schaffhausen]. Die Chronik des Bernold (Mönch zu S. Blasien, dann zu Schaffhausen, † 1100) stützt sich auf Beda, Herm. contr., von 1072 ab eigene Nachrichten.

⁶ Vol. I, 307.

⁷ Menken. I, 2072 [Prag]. Die Chronik des Dekans Cosmas († 1125) beruht vielfach auf Tradition. Von 1038 an beruft sich der Verfasser auf Augenzeugen und eigene Erfahrungen.

⁸ Dobner: Monumenta historica Bohemiae III, 23.

⁹ Pez. I, 342.

Italien.

1093. Ind. I. 8. Kal. Oct. sol obscuratus est hora sexta usque ad horam nonam. (*Chronicon Fossae Novae auct. anonym.*)¹ Das richtige Datum der Finsterniss ist IX Kal. Oct. feria VI. Conjunction trat für Schaffhausen 4^h 40^m nach Sonnenaufgang e Verfinsterung fiel also in die fünfte Stunde. Die Grenzcurven Centralität sind:

Nordgrenze		Südgrenze	
8·43° v. Par.	$\varphi + 53·94^{\circ}$	λ 8·39° v. Par.	$\varphi + 52·66^{\circ}$
0·64	52·51	10·58	51·27
2·78	50·99	12·70	49·77
4·82	49·42	14·73	48·22
6·84	47·79	16·69	46·59
8·74	46·09	18·58	44·98
10·57	44·35	20·39	43·21
12·34	42·57	22·13	41·43

Arnold's Bericht (23.) ist hier sehr von Gewicht, nur ist anzunehmen, dass die Zone (Taf. I) thatsächlich bis ausen zu verschieben sei. Wahrscheinlich hat man die Abbildung nur auf eine starke Partialität der Finsterniss zu-

Aber auch in diesem Falle zeigt die Zone die Nothwendigkeit einer Correction in westlichem Sinne. Man kann sich sowohl wie dem auffallenden Überwiegen der deutschen Beobachtung durch eine Correction von 1° Verschiebung wohl Genüge

Wegen der Unsicherheit der zu acceptirenden Correction ist die Verschiebungszone auf Taf. I. nicht eingetragen.

22. 1113 März 18. 17^h 53^m 8, total. Ω

Jerusalem.

Anno 1113 dum mense in Martio, lunam habebamus 28., vidimus solem a mane usque ad primam et eo amplius, deestione quadam ab una parte minorati. Et pars, quae limitus a summo tabescere coepit, tandem quasi in rotundo ima devenit. Attamen sol claritatem suam non amisit. Luna non minoratus est, nisi ut aestimo, a quarta parte suae

—
iratori. VII, 866 [Fossa-nuova].

formae aliquantum cornutus. (*Fulcheri Carnotensis Historia Hierosolymitana.*)¹

2. Anno 1113 facta est eclipsis solis mene Martio, luna 28. (*Oliveri scholastici Hist. regum terrae sanctae.*)²
3. 1113. Sol passus est eclipsim et terrae motus in Hierosolymitano Regno in illo leis exstitit anno. (*Sicardi Episcopi Cremon. Chronicon.*)³
4. In dem vyrden jare (vümfzen Kuninch Heynrich) was de sunne vurgayn. (*Chron. reg. versio German.*)⁴

Die vorliegende Finsterniss findet sich auf Taf. VI nach folgenden Totalitätsgrenzen eingetragen:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 34·40° v. Par.	$\varphi + 23·86^\circ$	λ 35·33° v. Par.	$\varphi + 21·19^\circ$
36·82	24·61	37·73	21·96
39 11	25·58	40·06	22·85
41·32	26·64	42·31	23·76
43·44	27·80	44·45	24·89

Die Verfinsterung stellte sich in Jerusalem nach Fulcherius Worten als eine partielle dar und dürfte für das freie Auge 9 Zoll betragen haben. Die Rechnung ergibt das in Jerusalem sichtbare Maximum: 19^h 15^m mit 10·3 Zoll. Da die Sonne um etwa 18^h aufging, so stimmt mit Fulchers Angaben auch die Zeit. Die Finsterniss scheint demnach für Jerusalem noch etwas zu gross zu bleiben.

23. 1124 August 11. 0^h 12^m 2, total. Ω

England.

1. 1124. Eclipsis solis, adeo ut sol videretur esse similis novae lunae. (*Chron. Thom. Wykes.*)⁵

¹ Du Chesne. IV, 860. — Fulcher, Mönch von Chartres, war Teilnehmer des 1. Kreuzzuges, später Caplan Balduins I. in Jerusalem.

² Eccard. II, 1363. — Der Cölnler Scholasticus Oliver († 1225) predigte das Kreuz und machte den Zug nach Damiette mit.

³ Muratori. VII, 590.

⁴ Eccard. I, 982.

⁵ Rer. Brit. Ser. Nr. 36. 4, pag. 18. — Wahrscheinlich zu Osney bei Oxford (gegr. 1129) geschriebene Chronik.

1124. Hoc anno VIII. idus Aprilis sol similis novae lunae apparuit. (*Ann. de Bermundeseiu.*)¹

1124 Obiit Calixtus papa, successit Honorius. Sol novilunio similis factus est. (*Matth. Parisiensis monachi S. Albani Historia Anglorum.*)²

Deutschland.

124 Eclipsis solis facta est III. id. Augusti hora diei 6. (*Chronicon Montis Sereni.*)³

124. Eclipsis solis facta est III. idus Augusti. (*Annales Hildeshem.*)⁴

125. Eclipsis solis IV. idus Augusti. Henricus V. obiit. (*Chronic. Stederburgense.*)⁵

124. Eclipsis solis facta est 3. Idus Aug. hora quasi sexta. (*Annales Magdeburg.*)⁶

124. Item III. Idus Aug. XI. hora diei solis eclipsis fuit . . . (*Annalista Saxo.*)⁷

123. IV. non. Aug. hora diei fere 8. eclipsis solis prodigioso iraculo contigit. Nam luna 27. in Cane posita in signo eonis sub sole inventa est: cum secundum rationem non si 30, primave luna id provenire debeat. (*Excerpta ex itulogo roman. pontific. et imper. Conradi coenob. Schyensis.*)⁸

124. Eodem anno magnae molis grando 9. Kal. Aug. cecidit et III. Id. Aug. solis eclipsis fuit, quam fames secuta est. (*Trithemii Ann. Hirsaug.*)⁹

er. Brit. Scr. Nr. 36, 3, pag. 433. — [Bermondsey]. Kloster des (gegr. 1082).

ii Nr. 44, 1, pag. 234 [S. Alban]. Vide Note 1, pag. 69.

enk en. II, 167 [Petersberg].

on. Germ. Scr. III, 115 [Hildesheim].

ript. Brunsvic. I, 854 [Stederburg].

on. Germ. Scr. XVI, 183 [Magdeburg].

ii VI, 761 [Halberstadt].

ez II, 408 [Scheyern].

ol. I, 379 [Hirschau].

11. (Kuninch Heynrich V.) In deme nuynzynden jare was de sunne vurgayn unde vylen och vyl groser stucke yses yn eme hagel. (*Chron. regiae versio Germ.*)¹

Polen und Böhmen.

12. Henricus V. Frederici filius imperavit ann. 8. Coronatus fuit mense Aprilis Et eodem anno sol obscuratus 9. Kal. Julii feria tertia, usque ad horam nonam. (*Continuatio Chron. Martini Poloni.*)²
13. 1124. Item eodem anno III. id. Aug., 11. hora diei, solis eclipsis fuit, et secuta est maxima pestilentia (*Cosmae Pragensis Chron. Bohem. lib. III.*)³
14. Vorstehende Stelle im *Chronicon Joannis Marignolae.*⁴

Jerusalem.

15. 1124. Deinde apparuit nobis sol per unam fere horam fulgore colorifero, in novam vel iactivam formam commutatus et in specie lunae tanquam eclipsi quadam biformis transmutatur. Hoc accidit quippe III. idus Augusti, hora diei iam praetereunte nona (*Fulcheri Carnot. Historia Hierosolymitana.*)⁵

Fulcher gibt die richtige Datirung der Finsterniss. Die Centralitätszone trat nach Mittag in Europa unter hohen Breiten ein und verlief in südlich sich neigender Richtung nach Centralasien. Für die Karte Taf. III kommen nur folgende Punkte in Betracht:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 10·53° v. Par.	$\varphi + 66·46^\circ$	λ 10·15° v. Par.	$\varphi + 63·73^\circ$
12·92	65·83	12·47	63·07
15·48	65·17	14·77	62·38
17·60	64·43	17·05	61·62

¹ Eccard. I, 985.

² Ibi I, 1415. Österr. Fortsetzung des Martin von Troppau, bis 1343 jedoch nur blosser Auszug aus der Geschichte Johannes von Victring.

³ Menken. I, 2126 [Prag]. Vide Note 7, pag. 64.

⁴ Dobner, Mon. hist. Boh. II, 200. Marignolas böhmische Geschichte stützt sich ganz auf die bis zum 14. Jahrhundert vorhandenen Quellen.

⁵ Du Chesne. IV, 879.

in den ganzen Verlauf, insbesondere das Verhalten der Finsternis in Jerusalem (Quelle 15) zu übersehen, findet sich auch die Punkte

$$\begin{array}{rcl} \lambda & 257\cdot4^\circ \text{ v. Par.} & \varphi + 61\cdot9^\circ \\ & 2\cdot3 & 66\cdot6 \\ & 80\cdot7 & 35\cdot9 \end{array}$$

Die Hauptcurve in Taf. V eingetragen. Die englischen Quellen, sowie Fulcher's Angabe zeigen nur, dass die Finsternis auch sowohl wie in Palästina partiell erschien, wodurch kein Grund zu einer Correction gegeben ist.

24. 1133 August 1. 23^h 55^m 4, total. ☾

England.

1133 tenebrae factae sunt in Anglia et terra mota est; motus quoque similis factus est lunae tertiae (*Matth. Parisiensis Hist. Anglor.*)¹

32 ipsa enim feria quarta qua rex transfretavit, sol oppressus eclipsim mentes hominum ex repentina sui detectione vehementer exterruit; proxima vero sexta feria, imo mane, tantus fuit terrae motus (*Annales de Wergun.*)²

32 Nam sol hora diei sexta adeo obscuratus est, ut non tam dies videretur esse quam nox; visaeque sunt stellae circa solem; sequenti vero die terrae motus factus est magnus (*Annales de Wintonia.*)³

33 Passus est sol eclipsim quarto nonas Augusti. (*Annales de Waverleia.*)⁴

33. Eodem anno facta est eclipsis solis adeo ut sol videretur similis tertiae lunae. (*Chronic. Thomae Wykes.*)⁵

er. Brit. Script. Nr. 44, 1, pag. 247. — Matthäus (seit 1217 der Abtei St. Alban angehörig) sammelt in seiner Geschichte sehr entfernte Nachrichten. Hier von keiner Entscheidung.

Nr. 36, 1, pag. 13 [Margan]. Kloster Margan in Glamorganshire

Nr. 36, 2, pag. 49 [Winchester]. (Stelle nach Will. Malmesbur.)

Nr. 36, 2, pag. 223. Waverly bei Farnham, gegr. 1128.

Nr. 36, 4, pag. 20. (Nach Math. Paris.)

6. 1132 Eclipsis formidabilis hora diei sexta et visae sunt stellae. (*Annales Prioratus de Wigornia.*)¹
7. 1134 Et facta et eclipsis solis quarto nonas Augusti, circa horam diei sextam, ita ut totus orbis solis quasi nigro scuto videretur obtectus. (*Chron. Magistri de Hoveden.*)²
8. 1133. Eclipsis solis tanta 4. Non. Aug., ut dies in noctem verteretur. (*Chron. regum Manniae.*)³
9. Anno 32. Henric non. Aug Nam et sol ipsa die hora sexta tetra ferrugine (ut poetae solent dicere) nitidum caput obtexit, mentes hominum eclipsi sua concutiens: et feria sexta proxima primo mane tantus terrae motus fuit, ut penitus subsidere videretur horrifico sono sub terris ante audito. Vidi ego et in eclipsi stellas circa solem et in terrae motu parietem domus, in qua sedebam, bifario impetu elevatum, tertio resedissee. (*Willemi monachi Malmesbur. Histor. novell. lib. I.*)⁴

Belgien, Niederlande.

10. 1133. 4 Nonas Augusti, luna 27. meridie facta est eclipsis solis fera dimidia hora et stellae visae sunt in coelo. (*Anselmi Contin. Sigeberti.*)⁵
11. Vorstehende Stelle im *Chronicon Alberici.*⁶
12. 1133. 4. Non. Aug. meridie ita sol obscuratus est, ut stelle apparerent. (*Annales Floreffenses.*)⁷
13. 1133. 4. Non. Aug. facta est eclipsis solis horribiliter circa meridiem, apparente luna contra orbem solis, micantibus

¹ *Rer. Brit. Ser. Nr. 36, 4, pag. 378.* [Worcester.] Gegr. 680 n. Chr.

² *Ibi Nr. 51, vol. I, 186* [Durham]. Hoveden (12. Jahrh.), Compiler und Fortsetzer northumberländischer Chroniken.

³ *Langebek. Script. rer. Danic. III, 222* [Insel Man]. Vornehmlich die auf dieser Insel gelegene Abtei Russin betreffend.

⁴ *Rer. anglic. Script. Francof. 177* [Malmesbury].

⁵ *Mon. Germ. Ser. VI, 384* [Gembloux]. Diese erste Fortsetzung der Univ. Chronik des Siegeburtus geschah bis 1135 durch den Abt Anselm zu Gembloux selbst.

⁶ *Access. Hist. II, 2, pag. 271* [Neufmoutier].

⁷ *Mon. Germ. Ser. XVI, 624* [Florefte].

stellis prae magnitudine tenebrarum, hominibusque maximo terrore concussis. (*Annales S. Jacobi Leodiensis.*)¹

14. 1133 . . . Eodem anno 4. Non. Augusti, sexta hora diei sol obscuratus est, non nubilus tectus, sed defectum sui passus, tantaeque tenebrae fuerunt, ut dies in noctem conversus videretur, et stellae nullo obstante nubilo sicut in nocte apparent . . . (*Annales Egmundani.*)²
15. 1133. Quarto non. Aug. meridie ita sol obscuratus est, ut stellae in coelo apparent. (*Annales Fossenses.*)³
16. 1133 . . . Post haec, mensibus tribus emensis, 4. Non. sequentis Augusti, feria 4. hora 6. diei, subito visibiliter obscurato sole, in omnem terram factae sunt tenebrae, et nobis divina agentibus, fere dimidiae horae spatii permansere. Quae res cum omnium mentes admiratione simul ac stupore concuteret, quidam quasi prudentiores eclipsim solis ex oppositate lunae dicebant accidisse . . . (*Chronicon S. Andrae castri Cameracesii.*)⁴
17. 1132 Eclipsis solis contigit 4. Non. Aug. (*Annales Blandinienses.*)⁵
18. 1133 Eclipsis solis facta est 4. Non. Aug. feria 6. hora 5. (*Sigebert. Auctarium Laudunense.*)⁶
19. 1132. Eclipsis solis 4. Non. Aug. (*Sigebert. Auctar. Mortui Maris.*)⁷
20. 1133. Sol obscuratus est 4. Non. Aug. hora 6. ita ut stelle in coelo apparent. (*Sigebert. Continuat. Burburgensis.*)⁸

Deutschland.

21. 1133. Eclipsis solis facta est 4. Non. Augusti. (*Chron. Pegaviensis Collation. et Continuatio.*)⁹

¹ Mon. Germ. Scr. XVI, 640 [Lüttich].

² Ibi XVI, 453 [Egmunda].

³ Ibi IV, 30 [Fosse]. Fortsetzung der Lütticher Ann. 1121—1389.

⁴ Monum. Germ. Scr. VII, 550. Eine dem Andreaskloster zu Cambray eigenthümliche Chronik (1001—1133).

⁵ Ibi V, 28 [Blandigny].

⁶ Ibi VI, 446 [Laon].

⁷ Ibi VI, 465 [Mortemer, Diöc. Rouen].

⁸ Ibi VI, 457 [Bourbourg].

⁹ Menken. III, 133 [Pegau].

22. 1133. Eclipsis solis facta est 4. Non. Aug. mediante hora 8. (*Annales Bosovienses.*)¹
23. Selbe Stelle im *Chron. Sampetrin. Erfurtense.*²
24. 1133. Obscuratus est sol 4. Non. Aug. in meridie, et tenebrae factae sunt, stellae quoque apparuerunt et terra rore maduit. (*Annales S. Petri Erphesfurdenses.*)³
25. Stelle 22 in den *Annales Erphesfurdenses.*⁴
26. Ebenso in den *Annales Lothariani.*⁵
27. 1133. Eclipsis solis facta est 4. Non. Augusti. (*Chron. Montis Sereni.*)⁶
28. 1133. Eclipsis solis fuit 4. Non. Augusti in meridie, et tenebrae factae sunt, stellae quoque apparuerunt et terra rore maduit. (*Chron. Vetero-Cellense minus.*)⁷
29. 1133. Eclipsis solis facta est 4. Non. Aug. circa horam sextam, in tantum, ut stellae in coelo apparerent. (*Annales Hildeshemenses.*)⁸
30. 1133. Eclipsis solis facta est 4. Non. Aug. in tantum, ut stellae apparerent. (*Ann. Palidenses.*)⁹
31. An. dom. 1133 ind. 11. epact. exstantibus 12, cicli quoque lunaris anno 13, 4. Nonas Augusti, luna 27, media die facta est eclipsis solis tam obscura, ut pene nocti coaequaretur et stellae plures cernerentur. (*Notae Corbeienses.*)¹⁰

¹ Eccard. I, 1010. [Pegau].

² Menken. III, 213 [Erfurt].

³ Mon. Germ. Scr. XVI, 19 [Erfurt]. Mit Nachrichten aus Ekkehard's Chron. und den Aachener Ann. bis 1169.

⁴ Ibi VI, 539 [Erfurt].

⁵ Böhmer. Font. rer. Germ. III, 578. Im Wesentlichen mit den Ann. Erphesfurd. identisch.

⁶ Menken. II, 174. Klostergeschichte von Petersberg bei Halle (1124—1225).

⁷ Ibi II, 438 [Altzella].

⁸ Mon. Germ. Scr. III, 115 [Hildesheim]. Die in diesen Ann. enthaltene Lücke von 1041—1101 n. Chr. wurde aus Mainzer Ann. ergänzt, von 1109—1137 sind sie in Paderborn fortgesetzt.

⁹ Mon. Germ. Scr. XVI, 79 [Pöhlde] behandelt vorz. Sachsen. Zu Grunde liegende Quellen: Ekkehard, Siegebertus, Chronogr. Saxo u. unbekannte.

¹⁰ Mon. Germ. Scr. XIII, 277 [Corvei].

Stelle 29 aus den Ann. Hildesh. im *Annalista Saxo*.¹

Ecl. sol. facta est 4. Non. Aug. hora diei sexta, in tantum ut stellae in coelo apparerent. (*Annales Colonienses maximi*.)²

Vorstehende Stelle im *Chronic. Godefridi Coloniensis*.³

.... Do was och de sunne vurgangen yn der seyster stunde van den daghe, also dat man de sterren seyn muchte (*Chronicae regiae versio Germanica*.)⁴

1133. Ecl. solis 4. Non. Aug. (*Annales Remenses et Colonienses*.)⁵

1133. Eclipsis solis facta. (*Annales Pruveningenses*.)⁶

1133. Obscuratus est sol 4. Non. Aug. in meridie, et tenebrae factae sunt; stelle quoque apparuerunt et terra rore maduit. (*Annales Aquenses*.)⁷

A. D. 1133 factae sunt tenebrae obscurato iam sole in toto orbe circa meridiem, quasi integra diei hora, luna existente [7. 4. Non. Augusti. Nam tunc velut in nocte apparuerunt stellae, et volucres coeli avolare, et terra maduit rore, concussique homines ingenti pavore, opinati sunt ultimum diem accidisse ... (*Annales Rodenses*.)⁸

1133. Hora sexta diei dies obscuratus est, et stellae apparuerunt. (*Annales Brunwilurenses*.)⁹

1133. In den Tiden to Palborne Desselven Dages samme Nontit verbarn de Stat vil na al, unde de Dom garlike: De Sunne verging also sere, dat men de Sternen sach V. Non. August. (*Chronicon Luneburgicum*.)¹⁰

Mon. Germ. Scr. VI, 768.

[ibi XVII, 756 [Cöln].

3öhmer. Font. rer. Germ. III, 420 [Cöln]. Sog. Königschronik v. aleon, sicher in der Cölnner Diöcese entstanden. Ekkehard u. die Ann. kommen darin bis 1139 vor.

Eccard. I, 987. Aus dem 14. Jahrh. stammende Übersetzung der ehenden.

Mon. Germ. Scr. XVI, 732.

[ibi XVII, 606.

[ibi XVI, 685 [Aachen]. Von 1125--1169 reichend.

[ibi XVI, 710 [Klostrerath].

[ibi XVI, 726 [Brauweiler].

Eccard. I, 1374. Beruht vornehmlich auf den Pöholder Annalen.

42. 1133. In hoc anno 4. Non. Aug. hora diei quasi nona eclipsis solis facta est tanta, ut stellae videri possent in coelo. (*Mariani Scotti Chron. Contin. I.*)¹
43. 1133. Eodem anno ecl. solis facta est 4. Non. Aug. media die, tanta obscuritate, ut stellae quasi media nocte apparerent per totam terram. (*Annales Herbipolenses.*)²
44. Eodem anno 4. Non. Aug. 27. luna, sol obscuratus est 7. hora diei, et tenebrae factae sunt, ita ut stellae in coelo apparerent. (*Annales Sancti Disibodi.*)³
45. 1133 Est autem hoc ipso anno mense Augusto eclipsis solis dira non parva populi admiratione hic visa. (*Achilles Pirmini Gassari Annales Augsburg.*)⁴
46. 1133. Maximum signum in sole apparuit. (*Annales Ellwangeses.*)⁵
47. 1133. Eclipsis solis 3. Non. Aug. circa horam sextam. (*Annales Zwiefaltenses.*)⁶
48. A. D. 1133 decennovenalis autem cycli 13°, Liuthero pio imperatore regni gubernacula tenente, 4. Non. Aug. feria 4. die iam ad nonam vergente, sol in uno momento instar picis niger factus est, dies in noctem mutatus, stellae visae sunt plurimae, res in terra sicut noctu assolet apparuit, aquarum rivi a suo cursu stetisse ferebantur (*Annales Halesbrunnenses.*)⁷
49. 1133. Fuit illa magna eclipsis solis 4. Non. Aug. circa medium diem, luna 27. existente, 13. decennovalis cicli anno. Post meridiem inter horam septimam et octavam visa est ecl. solis in leone, si tamen non fuit prodigium et signum in sole. Perhibent enim physici, defectum solis non fieri nisi in luna novissima vel prima, sed nunc in illarum neutra.

¹ Mon. Germ. Scr. V, 562 [Fulda]. Fortsetzung der Univers. Chronik des Schotten Marian (1028—1083).

² Ibi XVI, 2 [Würzburg]. Annalistische Würzburger Fortsetzungen der Chronik Ekkehard's bis 1145.

³ Ibi XVII, 25 [Disibodenberg].

⁴ Menken. I, 1417 [Augsburg].

⁵ Mon. Germ. Scr. X, 19 [Ellwangen].

⁶ Ibi X, 55 [Zweifalten].

⁷ Ibi XVI, 13 [Heilsbronn]. Klosterannalen 1099—1178.

Nam potius in 27^a, cum adhuc superesset 28^a et 29^a predicti mensis luna, plurimae iuxta solem stellae visae sunt, plurimorum corda luce desperata compuncta sunt, sol quasi non esset omnino latuit, per horam fere dimidiam instar noctis fuit, facies mundi miserabilis, horribilis, nigra, mirabilis . . . (*Magni Presbyteri Annales Reicherspergenses.*)¹

50. 1132. Eclipsis solis facta est 4. Non. Aug. hora 9. (*Gundehari Liber Pontificalis Eichstetensis.*)²
51. 1133. Hoc anno 4. Non. Aug. luna 27, circa meridiem serena die tenebrae factae sunt ut stellae apparent. (*Annales S. Stephani Frisingensis.*)³
52. 1133 eclipsis solis facta est. (*Burchardi et Cuonradi Urspergensium Chronicon.*)⁴
53. 1133. Eclipsis solis facta est 4. Non. Aug. (*Annales Scheftlarienses.*)⁵
54. 1133. Factae sunt tenebrae 4. Non. Aug. (*Notae Altaheneses.*)⁶
55. 1133. Hoc anno 4. Non. Aug. hora diei fere octava eclipsis solis prodigioso miraculo contigit. Nam luna 27^a in cancro posita in signo leonis sub sole inventa est, cum secundum rationem non nisi 30^a primave luna id provenire debeat. (*Annales Ratisponense.*)⁷
56. 1133. Eclipsis solis facta est circa horam nonam. (*Annales S. Petri Babenbergenses.*)⁸
57. 1133. Eclipsis solis facta est 4. Non. Aug. (*Ex codice Ens-dorfensi.*)⁹

¹ Mon. Germ. Ser. XVII, 454 [Reichersberg]. Bis 1195 reichende Annalen der Bearbeitung des Priesters Magnus. Die ursprünglichen Annalen stammen möglicher Weise aus einem anderen Kloster, die Fortsetzung geschah aber in Reichersberg.

² Mon. Germ. Ser. VII, 251 [Eichstedt].

³ Ibi XIII, 53 [Freising].

⁴ Ibi XXIII, 343 [Ursberg].

⁵ Ibi XVII, 336 [Schäftlarn].

⁶ Ibi XVII, 421 [Altaich].

⁷ Ibi XVII, 585 [Regensburg].

⁸ Ibi XVII, 637 [Bamberg].

⁹ Ibi X, 3.

58. 1133. 4. Non. Aug. eclipsis solis, hora quasi 6. (*Annales Sancti Blasii.*)¹
59. 1133 Eodem anno IV. Non. Aug. sol obscuratus est sexta hora diei et tenebrae factae sunt. (*Annales Argentinenses.*)²
60. Selbe Stelle in den *Annales Marbacenses.*³
61. 1133. Anno praenotato 4. Non. Aug. luna 22. hora diei sexta, defectio solis, quam eclipsin Graeci nominant facta est magna, ita quod stellae clare viderentur apparere in coelo. Aëris deinde magna inae qualitas et pluviarum inundatio multa subsecuta est. (*Annales Hirsaug.*)⁴

Österreich.

62. 1133. Eclipsis solis facta est et tenebrae factae sunt 4. Non. Aug. hora nona. (*Paltrami seu Vatzonis Chron. Austriac.*)⁵
63. 1133. Eclipsis solis facta est et tenebrae factae sunt 4. Non. Aug. hora nona. (*Chron. Claustro-Neoburgense.*)⁶
64. 1133. Eclipsis solis facta est horribilis 4. Non. Aug. hora quasi 9. feria 4. (*Chron. Mellic.*)⁷
65. Stelle 63 in *Anonymi coenob. Zwetlicensis Chron.*⁸
66. 1133. Eclipsis solis facta est 4. Non. Aug. hora nona. (*Chron. Zwetlense vetustius.*)⁹
67. 1133. Hoc anno 4. Non. Aug. circa meridiem facta est ecl. id est defectus solis, tantus ut apparentibus stellis, tenebrae factae sunt per universam terram una hora. (*Chron. monast. Admont.*)¹⁰

¹ Mon. Germ. Ser. XVII, 278 [S. Blasien].

² Böhmer. Font. rer. Germ. III, 72. Strassburger Ann. mit vielen Elsässer Aufzeichnungen.

³ Mon. Germ. Ser. XVII, 159. Elsässer Ann. von Marbach.

⁴ Vol. I, 397 [Hirschau].

⁵ Pez. I, 707 [Wien]. Paltram, zwischen 1260 u. 1300 Rathsherr in Wien.

⁶ Pez. I, 444 [Klosterneuburg].

⁷ Ibi I, 229 [Melk].

⁸ Ibi I, 975 [Zwettel].

⁹ Ibi I, 522 [Zwettel].

¹⁰ Ibi II, 185 [Admont].

Vide Note 2, pag. 733.

68. 1129. Stelle 63 in *Anon. Leobiensis Chron.*¹
69. 1133. Eclipsis solis facta est 4. non. Aug. (*Chron. Salzburg.*)²
70. 1133. Eclipsis solis facta est horribilis 4. non. Aug. hora quasi 9. feria 4. luna 26. (*Auctoris incerti Chron. austriac.*)³
71. 1133 Isto anno facta est eclipsis solis 4. Non. Aug. hora 9. (*Annales Gotwicenses.*)⁴
72. 1133 Sol visus est minutus. (*Annales Pragenses.*)⁵
73. 1133. 4. Non. Aug. eclipsis solis mirum in modum apparuit, qui paulatim deficiens in tantum diminutus est, ut corona quasi crescentis lunae ad meridianam plagam perrexerit, quae postea in orientem convertit, dehinc in occidentem, tandem in pristinum statum reformatus est. (*Canonici Wissegradensis contin. Cosmae.*)⁶
74. 1133. 4. Non. Aug. ecl. sol. factus est et tenebrae factae sunt. (*Ann. Bohemiae brevissimi.*)⁷
75. 1135 fuit ecl. solis 4. non. Aug. (*Heinrici de Heimburg Annales.*)⁸
76. 1133 Eodem anno ecl. sol. fuit media die. (*Monachi Sazavens. contin. Cosmae Prag.*)⁹
77. 1133. 4. Non. Aug. ecl. solis 10. hora diei facta est. (*Annales Gradicenses.*)¹⁰

Italien.

78. 1133. Ind. 11 . . . Sol obscuratus est et terrae motus grandis. (*Chronic. Fossae Nuove Auct. anonym.*)¹¹

¹ Pez. I, 780 [Leoben].

² Ibi I, 343 [Salzburg].

³ Ibi I, 557.

⁴ Mon. Germ. Scr. IX, 602 [Göttweih].

⁵ Ibi III, 120 [Prag].

⁶ Ibi IX, 138 [Prag]. Die Fortsetzung des Cosmas bis 1142 rührt von einem Wysehrader Domherrn her.

⁷ Ibi XVII, 719. }

⁸ Ibi XVII, 713. } [Böhmen.]

⁹ Ibi IX, 157. Weitere bis 1162 reichende Contin. des Comas eines Sazawaer Mönches.

¹⁰ Ibi XVII, 651 [Hradisch]. Bis 1145. Von etwa 1130 an selbstständig.

¹¹ Muratori VII, 869.

} Vide Note 2. pag. 733.

Die richtige Datirung der Finsterniss ist Indict 11. 1133, IV. Non. Aug. IV. feria. Die Verfinsterung fand um Mittag statt und gehört zu den bedeutendsten, welche Mitteleuropa während des Mittelalters aufzuweisen hat. Die Centralitätszone verlief wie folgt (Taf. III):

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 351·11° v. Par.	φ +58·04°	λ 351 04° v. Par.	φ +55·58°
353·44	57·42	353·33	54·94
355·72	56·73	355·56	54·22
357·97	56·00	357·76	53·45
0·20	55·22	359·92	52·63
2·77	54·34	2·05	51·73
4·51	53·43	4·14	50·78
6·62	52·44	6·19	49·76
8·68	51·39	8·20	48·69
10·70	50·28	10·17	47·55
12·69	49·10	12·09	46·35
14·63	47·86	13·99	45·09
16·54	46·56	15·85	43·76
18·41	45·20	17·69	42·37
20·25	43·78	19·49	40·94

Wenn auch die englischen Annalen (1—9) theilweise von einander abhängig sind, so beweisen sie doch in ihrem Zusammenhalte eine bedeutend grössere Auffälligkeit der Finsterniss in Süd-England und auf der Insel Man, als es nach der berechneten Zone der Fall sein konnte. Für die hieraus hervorgehende Tendenz zu einer Verschiebung nach Westen spricht besonders die Gruppe der Quellen aus der Lütticher Diöcese 10, 12, 13, 15, da einige derselben auf unmittelbaren Aufzeichnungen beruhen. Der Altenzeller Bericht (28) hat hier kein Gewicht, da diese Annalen bis ins 12. Jahrhundert Unselbstständigkeit zeigen. Aus demselben Grunde (Note 8, pag. 700) sind die Hildesheimer Annalen (29) abzuweisen. Hingegen treten die Quellen 16, 44, 59, 61 der Verschiebung bei. Als Correction wurde eine Verrückung der Zone nach Westen um 55' acceptirt. Es wird hiedurch allen Berichten Gentlye geleistet.

25. 1140 März 20. 1^h 40^m 2, total. ☿

England.

- | | |
|--|---|
| <p>1. 1140. On þis gaer wolde þe king Steph. taecen Rodbert eorl of Gloucestre. þe kinges sune Henries. ac he ne rayhte for he wart it war. þerefter in þe Lengten þestrede þe sunne ȝ te daei abuton nontid daeies. þa men eten. þ me lihtede candles to aeten bi ȝ þat was XIII. Kl. April. waeron men suythe ofwundred.</p> | <p>In this year king Stephen would take Robert earl of Gloucester, the son of King Henry; but he could not, for he was aware of it. Afterwards in Lent, the sun and the day darkened about the nontide of day, when men were eating, and they lighted candles to eat by; and that was on the XIII. of the Kal. of April. Men were greatly wonderstricken.</p> |
|--|---|
- (*Anglo-Saxon Chronicle, vol. I, 383, II, 233.*)¹
2. 1139. Et hoc anno eclipsis facta est solis XIII. Kal. Aprilis, mediante hora nona, et mansit fere per spatium unius horae, et apparuerunt stellae plurimae circa solem. (*Annales de Bermundeseia.*)²
 3. 1140 Concessa sunt privilegia et abbates habere monachis abbatae Sarum. Eclipsis solis facta est, et visae sunt stellae circa solem. (*Annales de Wintonia.*)³
 4. 1140 Facta est eclipsis solis die Sancti Cuthberti. (*Ann. prioratus de Wigornia.*)⁴
 5. 1140. Turstanus Eboracensis archiepiscopus obiit Eclipsis solis facta est. (*Ann. de Theokesberia.*)⁵
 6. 1140. In Quadragesima XIII. Kl. Aprilis, hora nona, feria quarta, eclipsis solis facta est, hominibus iam ad mensas sedentibus, et nimio stupore mentis attonitis; sed re cognita progredientes, stellas circa solem intuebantur. (*Annales de Margan.*)⁶
 7. 1140. Eo anno in Quadragesima 13. Kal. Aprilis, hora nona, feria IV. fuit eclipsis solis per totam Angliam, ut accepi.

¹ Rer. Brit. Script. Nr. 23.

² Ibi Nr. 36, 3, pag. 436 [London].

³ Ibi Nr. 36, 2, pag. 52 [Winchester].

⁴ Ibi Nr. 36, 4, pag. 379 [Worcester]. Kuthbert = 20. März.

⁵ Ibi Nr. 36, 1, pag. 47 [Tewkesbury]. Gegr. 715.

⁶ Ibi Nr. 36, 1, pag. 14 [Margan].

Apud nos certe et apud omnes vicinos nostros ita notabiliter solis deliquium fuit, ut homines (quod tunc fere ubique accidit) mensis assidentes primum antiquum chaos timerent, mox re cognita progredientes stellas circa solem cernerent. (*Willelmi monachi Malmesbur. Hist. nov. lib. II.*)¹

8. 1140. Eodemque anno eclipsis solis facta est per totam Angliam horribilis et tenebrosa, ut imis corpora coelestia in suo defectu concordarent. (*Matthaei Parisiensis Hist. Anglorum.*)²

Belgien, Frankreich.

9. 1140. Eclipsis solis facta est IV. Nonas Aprilis ad vespascente iam die et coelo serenissimo existente, sol quasi tetro velamine videbatur circumfusus egyptica caligine. (*Contin. Gemblacensis Sigeb. Chron.*)³
10. Vorstehende Stelle im *Chronicon Alberici.*⁴
11. 1140. Eclipsis solis ante incognito modo in equinoctio veneri temporis accidit, et tonitrua insolita in vigilia paschae. (*Annales Blandinienses.*)⁵

Deutschland.

12. 1140. Hoc anno eclipsis solis contigit 13. Kal. Aprilis hora diei quasi 10, luna 28. (*Annales Sancti Blasii.*)⁶
13. 1140. Eclipsis solis 13. Kal. Aprilis, hora quasi decima. (*Annales Stadenses.*)⁷
14. 1140 Et 4^o Kal. Aprilis tenebrae factae sunt per totum orbem. (*Ann. Ryenses.*)⁸
15. Tertio anno Conradi, qui est Dom. 1142, eclipsis solis magna facta est XIII. Kal. April. hora IX. (*Hermannii Corneri Chronica novella.*)⁹

¹ *Rev. anglie. Script. Francof.* 186 [Malmesbury].

² *Rev. Brit. Script. Nr. 44, 1, pag. 266* [S. Albans].

³ *Mon. Germ. Scr. VI, 386* [Gembloux]. Die Gemblouxer Fortsetzung des Sigebert reicht bis 1148.

⁴ *Access. Histor. II, 2, pag. 287* [Neufmoutier].

⁵ *Mon. Germ. Scr. V, 29* [Blandigny].

⁶ *Ibi XVII, 278* [S. Blasien].

⁷ *Ibi XVI, 324* [Stade].

⁸ *Ibi XVI, 401* [Rye].

⁹ *Eccard. II, 687* [Westphalen].

Dänemark, Schweden.

16. 1137 (al. 1144). Tenebrae fuerunt in quadragesima per universam terram, nullus movebat se de loco, in quo erat, sed multum angustiabatur, donec evanuerunt. (*Petri Olai Minoritae Roskildensis Annales rerum Danicarum.*)¹
17. 1136 Et tenebrae factae sunt in quadragesima per universam terram. (*Annales Esromenses.*)²
18. 1137 Tenebrae erant in XL^{ma} per universam terram. (*Ann. minor. Wisbyenses.*)³
19. 1140. XII. Kal. April. feria IV post nonam factae sunt tenebrae. (*Necrologium Lundense.*)⁴
20. 1144. Tenebrae factae sunt super omnem terram. (*Calendar. monast. b. Petri Nestvediensis.*)⁵
21. Stelle 17 im *Chronol. rer. memorab.*⁶
22. Tenebre fuerunt super universam terram temp. Quadr. (*Chronologia vetusta ab an. 880 ad an. 1430.*)⁷
23. Selbe Stelle in der *Chronologica ab an. 266 ad an. 1430.*)⁸

Die richtige Datirung der Finsterniss ist XIII. Kal. Apr. feria IV. Die Finsterniss fand in Südengland 8^h nach Sonnenaufgang statt, fiel also in die neunte Stunde. Die nordländischen Quellen 16. bis 23. beziehen sich trotz der in ihnen herrschenden Verwirrung der Zeitangaben auf die vorliegende Sonnenfinsterniss. Der stereotype Ausdruck „in Quadragesima“ mag aus Will. Malmesbur. entnommen sein, indessen fällt dieses Fest 1140 auf den 25. Februar, zudem gibt es zwischen 1136 und 1144 keine andere Finsterniss um diese Festzeit, welche entsprechen würde.

¹ Langebek. Scr. rer. Danic. I, 175 [Roeskilde].

² Ibi I, 240 [Esrom]. Klosterannalen bis 1307.

³ Ibi I, 252 [Wisby].

⁴ Ibi III, 433 [Lund].

⁵ Ibi IV, 287 [Nestved].

⁶ Ibi II, 521.

⁷ Fant. Script. rer. Suecic. I, 61. Unbek. Autor.

⁸ Ibi I, 23. Ob zu den Anu. Sigtun. zu zählen, zweifelhaft.

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 352·86° v. Par.	φ + 52·57°	λ 352·63° v. Par.	φ + 50·26°
355·30	53·10	355·02	50·81
357·76	53·58	357·46	51·33
0·26	54·00	359·93	51·79
2·79	54·44	2·43	52·24
5·36	54·83	4·98	52·65
7·96	55·17	7·55	53·03

Nach dieser Darstellung (Taf. III) genügt die Finsterniss den Quellen hinreichend. Den Gemblouxer Bericht (9.) darf man jedenfalls nicht auf Totalität deuten, nach welcher Ansicht ich die Finsterniss uncorrectirt gelassen habe.

26. 1147 October 25. 22^h 42^m 0, ringf. ☿

England.

1. 1147. Illustris comes Glocestriae Robertus obiit. Eclipsis facta est . . . (*Annales de Theokesberiu.*)¹

Belgien, Niederlande.

2. 1147. 7. Kal. Nov. in dominica solis deliquium a tertia pene hora diei usque in plenam sextam erubescente sole videre tantum sanguinem christianorum qui fundendus erat. (*Annules S. Jacobi Leodiensis.*)²
3. 1147. Eclipsis solis facta est circa tertiam horam diei, 7. Kal. Nov. Necdum quoque ad purum redintegrato solari lumine, sed adhuc circumfuso eclyptica caligine, stellam conspicabilem in aere multi suspexerunt. Fuerunt etiam alii, qui dixerunt, se in ipso orbe solis maiestatem divinam vidisse, eo modo quo a pictoribus in libris depingi solet. (*Continuatio Gemblac. Sigeb. Chron.*)³
4. 1147. Ecl. solis fuit 8. Kal. Nov. die dominica, ab hora 2. usque in horam 5. (*Sigebert. Continuat. Praemonstratensis.*)⁴

¹ Rer. Brit. Ser. Nr. 36, 1, pag. 47 [Tewkesbury].

² Mon. Germ. Ser. XVI, 641 [Lüttich].

³ Ibi VI, 389 [Gembloux].

⁴ Ibi VI, 453 [Gembloux].

5. 1147 sol obscuratus est tertia hora diei usque ad sextam mense Octobris. (*Annales Egmundani.*)¹

Deutschland.

6. 1147. Eclipsis solis facta est 7. Kal. Nov. (*Annales Colonienses maximi.*)²
7. 1147. Eclipsis solis facta est 7. Kal. Nov. circa horam die pene 4. (*Chronica Regia S. Pantaleonis.*)³
8. 1147. 6. Kal. Nov. fuit ecl. solis ab hora 3 usque ad 6. (*Annales Aquenses.*)⁴
9. 1147. 7. Kal. Nov. die dominica, accidit eclipsis solis a tertia hora, et perseveravit usque post sextam, qua defectione horam pene integram fixus et immobilis, ut in horologio notatum est, stetit In qua hora circulus quem obiectio- nem estimant maximo rotatu ferebatur diversis coloribus obductus. (*Ann. Brunwilarenses.*)⁵
10. 1147. Obscuratus est sol 7. Kal. Nov. die dominica circa horam diei sextam. (*Annales Rodenses.*)⁶
11. 1147 in sunte Simon unde Jude dage vorgingk de sonne, dat se so clene vvart also eyn seckelin . . . (*Bothonis Chronic. Brunsvic. pictur.*)⁷
12. 1147. Eclipsis solis 7. Kal. Nov. hora diei tertia facta est usque ad sextam . . . (*Chronic. Sampetrinum Erfurtense.*)⁸
13. 1147. Eclipsis solis 7. Kal. Nov. (*Annales Stederburgenses.*)
14. 1147. Eodem anno 5. Kal. Nov. eclipsis solis ferme die medio horribile catigine mundum obtexit, adeo ut circulus in modum falcis videretur, ipsum qui eo tempore fundebatur humani generis sanguinem designans. (*Ann. Magdeburgenses.*)¹⁰

¹ Mon. Germ. Scr. XVI, 456 [Egmunde].

² Ibi XVII, 761 [Cöln].

³ Eccard. I, 932 [Cöln].

⁴ Mon. Germ. Scr. XVI, 686 [Aachen].

⁵ Ibi XVI, 727 [Brauweiler].

⁶ Ibi XVI, 719 [Klosterrath].

⁷ Script. Brunsv. III, 344 [Braunschweig]. Simon u. Juda = 28. Oct.

⁸ Menken. III, 217 [Erfurt].

⁹ Mon. Germ. Scr. XVI, 207 [Stederburg].

¹⁰ Ibi XVI, 188 [Magdeburg].

15. 1147. Ecl. sol. facta est 7. Kal. Nov. hora diei 6^a. (*Annales Palidenses.*)¹
16. Stelle nach 12 in dem *Chron. Pegaviensis.*²
17. 1147. Eclipsis solis facta est 7. Kal. Nov. media die. (*Chronicon Montis Sereni.*)³
18. 1147. Ecl. solis 7. Kal. Nov. hora diei sexta facta est. (*Annales Bosovienses.*)⁴
19. In deme zynden jare (des dritten Kunings Conrads) was de sunne vurgayn. (*Chronicue regiae versio Germanica.*)⁵
20. [Kreuzzug Conrads.] Darna quemen se an ene Wostenunge, dis vvas vertein Dage-Weide lang, dar verdarf dat Volc almeistich: se irdrunken, se storven Hungeres, se worden oc van den Heidenen geslagen, unde gefangen, unde gescoten. Do verging de Sunne in dem miden Morgene VII. Kal. Nov. (*Chronicon Luneburgicum.*)⁶
21. 1148 Eodem anno eclipsis solis fuit V. Kal. Nov. (*Excerpta ex catalogo rom. pontif. et imper. Conradi coenob. Schyrensis.*)⁷
22. 1147. Eodem anno ecl. solis contigit 7. Kal. Nov. hora diei 3. luna 28. (*Ann. Engelberg.*)⁸
23. 1148. Ecl. solis facta est 5. Kal. Nov. (*Annales Scheftlarienses maiores.*)⁹
24. Eclipsis solis facta est hoc ipso expeditionis anno, videlicet 1147, 7. Kal. Nov. hora 6, luna 28, die dominica in festo sancti Amandi confessoris. (*Ann. Herbipolensis.*)¹⁰
25. 1147. An. Volmari abb. XXVII. Eclipsis solis facta est sexta et vicesima die mensis Oct. circa horam diei quartam (*Trithemii Annales Hirsaugienses.*)¹¹

¹ Mon. Germ. Scr. XVI, 83 [Pöhlde].

² Menken. III, 138 [Pegau].

³ Ibi II, 180 [Petersberg].

⁴ Eccard. I, 1013.

⁵ Ibi I, 990.

⁶ Ibi I, 1380.

⁷ Pez. II, 409 [Scheyern].

⁸ Mon. Germ. Scr. XVII, 279 [Engelberg].

⁹ Ibi XVII, 336 [Schäftlarn].

¹⁰ Ibi XVI, 7 [Würzburg]. Amandus = 26. Oct.

¹¹ Vol. I, 414 [Hirschau].

Die Ann. Brunwilarenses verzeichnen Tag und Stunde der Finsterniss in richtiger Weise. Die Zone der Centralität ist folgende (Taf. I und VI):

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 352·06° v. Par.	φ + 60·47°	λ 352·55° v. Par.	φ + 57·52°
354·80	59·01	355·23	56·09
357·46	57·50	357·81	54·60
0·06	55·90	0·35	53·03
2·57	54·22	2·79	51·41
5·00	52·51	5·14	49·73
7·33	50·73	7·40	48·00
9·57	48·91	9·57	46·27
11·72	47·08	11·65	44·49

Da der Bericht 20. sich möglicher Weise auf den Orient beziehen kann, so folgen auch noch einige Punkte für den Verlauf daselbst:

28·62	+30·20	28·30	+28·15
30·15	28·77	29·72	26·75

Von besonderer Wichtigkeit für die Entscheidung, ob der Finsterniss eine Verschiebung zu ertheilen sei, sind die Stellen 2. 3. 9. sowie 11. und 14. Da die Contin. Sigeberti hier sehr ins Gewicht fällt, zudem von den Lütticher Annalen unterstützt wird, so lässt sich eine Correction in Form einer geringen westlichen Verschiebung nicht abweisen. Es sind hierfür 0° 37' angenommen worden, wodurch bewirkt wird, dass nicht nur das Lütticher Gebiet in die Zone der Centralität kommt, sondern auch zufolge 11. und 14. in Braunschweig und Magdeburg die Sonne sichelartig verfinstert bleibt.

27. 1153 Januar 25. 23^h 32^m 8, ringf. Ω

Frankreich.

1. 1153. Septimo Kal. Febr. eclipsis solis exstitit. (*Annales Camerucenses.*)¹

¹ Mon. Germ. Scr. XVI, 525.

2. 1153. Eclipsis solis facta est 7. Kal. Febr. in 2. feria, 5. Idus Februarii in 2. feria tonitruum auditum est. (*Sigeberti Auctarium Aquicinense.*)¹
3. Selbe Stelle übergegangen in d. *Auctarium Affligemense.*²

Deutschland.

4. 1153. Signum in sole apparuit 7. Kal. Febr. eo modo. (*Chron. Sampetr. Erfurt.*)³
5. Selbe Stelle in den *Annales Sancti Disibodi.*⁴
6. 1153. Eclipsis solis facta est 7. Kal. Febr. (*Annales Paldenses.*)⁵
7. 1153. Eclipsis solis facta est 7. Kal. Febr. (*Chron. Godefridi Coloniensis.*)⁶
8. 1153. Eclipsis solis accidit. (*Hermannii Altaheensis Annales.*)⁷
9. Nach den vorstehenden die *Annales Osterhovenses.*⁸
10. 1153. 7. Kal. Febr. eclipsis solis facta est circa horam sextam manens fere usque ad vesperam. (*Annales Zwifaltenses.*)⁹
11. 1153. Eclipsis solis 7. Kal. Febr. luna 27. facta est. (*Annales Elwangenses* und *Chronicon Elwangense.*)¹⁰
12. 1153. Hoc anno facta est eclipsis solis 7. Kal. Febr. post meridiem, cum luna esset 27. secundum computationem lunarem. (*Annales S. Stephani Frisingensis.*)¹¹
13. 1153 Des Jares verging de Sunne VII. Kal. (*Chron. Luneburg.*)¹²

¹ Mon. Germ. Scr. VI, 396 [Anchin]. Contin. des Sigebert 1149—1237 aus Anchin im Artois.

² Ibi VI, 401.

³ Menken. III, 218 [Erfurt].

⁴ Mon. Germ. Scr. XVII, 28 [Disibodenberg].

⁵ Ibi XVI, 86 [Pöhlde].

⁶ Böhmer. Font. rer. Germ. III, 427 [Cöln].

⁷ Mon. Germ. Scr. XVII, 383 [Altaich].

⁸ Ibi XVII, 541.

⁹ Ibi X, 56 [Zweifalten].

¹⁰ Ibi X, 21 u. 36 [Ellwangen].

¹¹ Mon. Germ. Scr. XIII, 54 [Freising].

¹² Eccard. I, 1383.

14. In dem andern, 2. jare was de sunne vurgayn. (*Chron. reg. versio Germanica.*)¹

Österreich, Italien.

15. 1153. Eclipsis solis accidit. (*Chron. Salzburg.*)²
 16. 1153. Eclipsis solis facta fuisse dicitur. (*Chron. monast. Admont.*)³
 17. Interim imperator isto anno eodem, scilicet 1155 Terdonensem civitatem destruxit: quod Mediolanensibus summe displicuit. Eodem anno sol obscuratus est (*Chronica Mediolani auctore Gualv. de la Flamma.*)⁴

Datum der Finsterniss: VII. Kal. Febr., feria II. Die Centralitätszone ist folgende:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ	4·74° v. Par. φ + 48·32°	λ	4·98° v. Par. φ + 43·60°
	6·78 50·32		6·93 45·44
	8·92 52·32		8·94 47·28
	11·17 54·31		11·05 49·14
	13·53 56·35		13·26 51·00
	16·00 58·35		15·57 52·82
	18·57 60·31		17·98 54·64

Die Vergleichung dieser Zone (Taf. I) mit obigen Berichten gibt zu keinen Correctionen der Finsterniss Anlass.

28. 1178 September 12. 23^h 54^m 7, total. Ω

England.

1. 1178. Contigit solis eclipsis id. Septemb. post sextam horam diei. (*Annales de Margan.*)⁵
 2. 1178 Eodem anno sol patitur eclipsim. (*Annales de Dunstaplia.*)⁶

¹ Eccard I. 994.

² Pez I, 344 [Salzburg].

³ Ibi II, 188 [Admont].

⁴ Muratori XI, 634 [Mailand].

⁵ *Rev. Brit. Script.* Nr. 36, 1, pag. 17 [Margan].

⁶ Ibi Nr. 36, 3, pag. 22 [Dunstable].

3. 1178. Eclipsis solis in vigilia exaltationis Sanctae Crucis per totam horam sextam. (*Annales de Osencia.*)¹
4. 1177. Ventus vehemens, nix et grando; et sol passus est eclipsim. (*Annales prioratus de Wigornia.*)²
5. 1181. Eodemque anno, vigilia exaltationis sanctae Crucis, facta est eclipsis solis, hora tertia. (*Matth. Parisiensis Hist. Angl.*)³

Nordländische, deutsche und belgische Chronisten.

6. 1178. Eskillus fit archiepiscopus. Eodem anno sol obscuratus est in vigilia sanctae Crucis feria quarta. (*Annales Ryenses.*)⁴
7. 1177 Eclipsis solis pridie S. Crucis, qui fuit dies Mercurii. (*Laurentii Stralii Annales.*)⁵
8. 1180. Idus Septembris hora nona sol eclipsim passus est. (*Burchardi et Cuonradi Urspergensium Chronicon.*)⁶
9. 1178. Eclipsis solis facta est Idibus Septembris, ante 6. horam. (*Sigeberti Contin. Aquicinct.*)⁷
10. 1178. Eclips. sol. facta est mense Septemb. in vigilia sanctae crucis, quarta feria, hora sexta. (*Chronicon Alberici.*)⁸

Italien.

11. Sequenti anno (i. e. 1178) mense Septem. solis fuit eclipsis vehemens. (*Chron. Brixianum auctore Jac. Malvecio, Dist. VII, cap. LI.*)⁹
12. 1178. Sol obscuratus est ex magna parte media die. (*Chronicon Cavense.*)¹⁰

¹ Rer. Brit. Scr. Nr. 36, 4, pag. 38 [Osney]. S. Cruc. = 14. Septb.

² Ibi Nr. 36, 4, pag. 383 [Worcester].

³ Ibi Nr. 44, 1, pag. 423 [S. Albans].

⁴ Mon. Germ. Scr. XVI, 403 [Rye].

⁵ Langebek. III, 306 [Rye].

⁶ Mon. Germ. Scr. XXIII, 358 [Ursberg].

⁷ Ibi [Anchin].

⁸ Access. Histor. II, 2, pag. 359 [Neufmontier].

⁹ Muratori. XIV, 881 [Brescia].

¹⁰ Ibi VII, 925 [La Cava].

13. 1178 Id. Septemb. sol obscuratus est. (*Chron. Fossae Nuovae Auct. anon.*)¹
14. 1178 Secunda autem die stante ejusdem mensis, luna in signo Virginis post mediam noctem passa est eclipsim et pene in tertia parte sui obscurata est. Tertio decimo vero die intrantis mensis Sept., Ind. XII sol in signo Virginis circa horam (*Chron. Romualdi Salernitani.*)²

Das Datum der Finsterniss ist: Idibus Sept., feria IV. Die im Berichte 14. erwähnte Mondfinsterniss fand am 29. August statt. Berechnete Centralitätszone:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 353·99° v. Par.	$\varphi + 48\cdot09^\circ$	λ 353·91° v. Par.	$\varphi + 46\cdot01^\circ$
356·09	47·26	356·02	45·15
358·28	46·40	358·07	44·27
0·24	45·51	0·08	43·35
2·26	44·60	2·07	42·43
4·23	43·66	4·01	41·48
6·18	42·69	5·92	40·52
8·11	41·72	7·81	39·54
9·99	40·74	9·66	38·55
11·87	39·74	11·50	37·54
13·72	38·74	13·33	36·55
15·56	37·73	15·14	35·55

Die Finsterniss findet sich auf Taf. I dargestellt. Die Berichte sind für eine eventuelle Correction nicht entscheidend, auch darf man Anstand nehmen, auf die unbestimmte Bezeichnung in 11 und 12 hin eine Verbesserung zu befürworten.

29. 1185 Mai 1. 1^h 17^m 5, total. Ω

England.

1. 1185. Interim Kal. Maii, ipso die Apostolorum Philippi et Jacobi, circa meridiem visa est eclipsis solis totalis, quam secuta sunt tonitrua cum fulgore et tempestate magna. (*Chronica Magistri Rogeri de Hoveden.*)³

¹ Muratori. VII, 874 [Fossa nuova].

² Ibi VII, 244.

³ Ber. Brit. Script. Nr. 51, II. 304 [Durham].

2. 1185. Fuit eclipsis Kal. Maii circa horam nonam, sole post eclipsim colore sanguineo quodam mirabili modo rubente... (*Annales de Margan.*)¹
3. 1185. 17. Kal. Maii terrae motus magnus per multa loco Angliae. Sol mutans vel simulans eclipsim Kal. Maii splendorem suum contra solitum mutavit (*Annales de Waverleia.*)²
4. 1185 Eodem anno fit terrae motus apud Lincolniam et sol patitur eclipsim Kal. Maii (*Annales de Dunstaplia.*)³
5. 1185. Eclipsis solis particularis. Terraemotus factus est magnus apud Lincolniam. (*Annales prioratus de Wigornia.*)⁴
6. 1185. Eclipsis solis die Philippi et Jacobi. (*Chronicon Regum Manniae.*)⁵

Hoveden führt die richtige Datirung. Die Rechnung gibt folgende Curven der Totalität (Taf. I):

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 344·63° v. Par.	φ + 57·85°	λ 344·73° v. Par.	φ + 55·09°
346·98	58·40	347·01	55·68
349·33	58·90	349·32	56·22
351·73	59·34	351·66	56·70
354·14	59·75	354·03	57·14
356·59	60·10	356·41	57·51
359·04	60·41	358·82	57·85
1·52	60·67	1·27	58·13

Da die Finsterniss von Hoveden als eine totale bezeichnet wird und in Northumberland jedenfalls sehr bedeutend gewesen sein muss, ausserdem nach 2. und 3. aber auch in Südengland noch beträchtlich erschien, so nehme ich hier, obwohl der Mangel an bestimmteren Angaben die Festsetzung einer genauen Verschiebungsgrenze erschwert, eine Correction in südlicher Richtung von wenigstens 1° an.

¹ Rer. Brit. Script. Nr. 36, 1, pag. 17 [Margan].

² Ibi Nr. 36, 2, pag. 244 [Waverley].

³ Ibi Nr. 36, 3 pag. 23 [Dunstable].

⁴ Ibi Nr. 36, 4, pag. 385 [Worcester].

⁵ Langebek. III, 224 [Insel Man].

30. 1187 September 3. 23^h 25^m 9, total. ☾

Frankreich.

1. 1187. Hierusalem capta Eclipsis solis 2. Non. Sept. (*Annales Blandinienses.*)¹
2. 1187 quarta die Septemb. hora tertia fuit eclipsis solis particularis, in XVIII. gradu Virginis, et duravit per duas horas. (*Rigordo De Gestis Philippi Augusti Francorum regis.*)²

Dänemark, Schweden.

3. 1187. Jerusalem a Saladino capitur Eclipsis solis eodem die. (*Ann. Esromenses.*)³
4. 1187. Pridie Nonarum Septembr. solis defectio incidit tanta, luna orbem subeunte, ut coelestia sidera interdiu perinde ac noctu micuerint. Annales, quas mihi communicavit Langius, annotant hoc deliquium cujus Gerardus Mercator et Vincencius meminerunt. (*Hamsfortii Chronol. secunda.*)⁴
5. 1187. Occisus est Joannes archiep. Upsalensis pridie augusti Tunc etiam incensa est Sichtononia a paganis eisdemet ordinatum est officium ecclesiae Lundensis. Eclipsis solis et pestilentia hominum facta est. (*Chronol. ab an. 266 ad 1430.*)⁵
6. 1187 Eodem anno facta est eclipsis solis. (*Chron. Danorum praecipue Sialandiae.*)⁶

¹ Mon. Germ. Scr. V, 30 [Blandigny].

² Du Chesne. V, 24.

³ Langebek. I, 242 [Esrom].

⁴ Ibi I, 282. — Die Annalen Hamsforts sind eine Compilation aus frisischen, holsteinischen, schleswig'schen u. a. Quellen. Die in ihnen ebenfalls aufgenommenen und auf obige Finsterniss bezughabenden Annalen des Johannes Langius reichen bis 1314, sind aber erst im 16. Jahrhundert abgefasst. Langius (gest. um 1604), ein Freund des Cornelius Hamsfort, war zu Assen auf Fünnen geboren, Professor der Theologie in Lund, zuletzt Pastor in Horne auf Fünnen. Es ist also möglich, dass sein Bericht alten fünnschen Aufzeichnungen entstammt, kann aber auch leicht aus Lundischen Quellen geschöpft worden sein.

⁵ Fant. Script. rer. suecic. I, 24 [Sigtuna].

⁶ Langebek. II, 622 [Seeland].

7. 1187. Breviarium Danicum compositum est. Eclipsis solis fuit. (*Chronol. rer. memorab. ab 1020—1323.*)¹
8. 1187. Obiit Suno Ebbonis. Eclipsis solis. (*Breve chronic. Danicum.*)²
9. 1187. Hierosolyma capitur a Soldano et Saracenis. Eclipsis solis. (*Laur. Stralii Annales.*)³

Deutschland.

10. 1187. Eclipsis solis facta est. (*Chronic. Erici regis.*)⁴
11. 1187. Sol obscuratus in modum scil. lunae, quoniam est 24. coelo existente sereno, 2. Non. Sept. hora diei sexta fuit. (*Chron. Sampetr. Erfurtense.*)⁵
12. 1187. Eclipsis solis media 3. Non. Sept. (*Chron. Pegaviensis.*)⁶
13. 1187. Eclipsis solis media die 3. Non. Sept. (*Annales Bosovienses.*)⁷
14. 1187. Ecl. solis circa festum sancti Lamberti ab hora sexta usque ad octavam. (*Annales Colonienses maximi.*)⁸
15. 1187. Eclipsis solis facta est 2. Non. Sept. (*Annales Scheftlarienses majores.*)⁹
16. 1187. Ecl. solis ab hora sexta in horam nonam est facta. (*Ann. Augustani minores.*)¹⁰

Österreich, Polen.

17. 1188. Ecl. solis facta est 2. Non. Sept. hora quasi nona. (*Chron. Mellicens.*)¹¹

¹ Langebek. II, 524 [Essenbeck].

² Ibi III, 630.

³ Ibi III, 306 [Rye].

⁴ Ibi I, 164 [Rye].

⁵ Menken. III, 230 [Erfurt].

⁶ Ibi III, 151 [Pegau].

⁷ Eccard. I, 1023.

⁸ Mon. Germ. Ser. XVII, 793 [Cöln]. S. Lambert 17. September.

⁹ Ibi XVII, 337 [Schäftlarn].

¹⁰ Ibi X, 9 Augsburger Annalen (1137—1321).

¹¹ Pez. I, 234 [Melk].

18. 1187. In mense Septemb. eclipsis solis accidit. (*Chron. Salisburg.*)¹
19. 1186. Ecl. solis feria quinta; mortalitas hominum facta est. (*Annales Pragenses und Canonorum Pragensium contin. Cosmae Prag.*)²
20. 1186 Item eodem anno sol patiebatur eclipsim, et magna mortalitas hominum est secuta. (*Cronica Przbiconis de Tradenina.*)³
21. 1187. Eclipsis solis facta est in meridie, et stellae visae sunt. (*Continuatio Cremifanensis.*)⁴
22. Selbe Stelle: *Contin. Garstensis.*)⁵
23. 1186. Eclipsis solis notabilis fuit, quam secuta fuit pestis in Polonia et in Russia. (*Mathiae de Michoviu Chron. Polon. lib. III.*)⁶

Italien.

24. 1186. Et eodem tempore Saladinus cepit Hierusalem, et sol obscuratus est a tertia usque ad nonam. (*Chron. Cremonense.*)⁷
25. 1187. Eodem anno 4. Sept. capitur Ascalon a Turchis. Ipsa die fit eclipsis solis particularis in decimo octavo gradu Virginis et duratione duabus horis apparuerunt etiam stellae in die sicut in nocte. (*Chron. Francisci Pipini Bononiensis.*)⁸
26. 1186. Anno sequente (1187) tunc interdiu conspectus in aere stellis, aere obscurato et sole obtenebrato (*Ludovici Cavitelli Cremon. Annales.*)⁹
27. 1187 Hoc eodem tempore obscuratus est sol duravitque a tertia usque ad nonam. (*Ptolomaei Lucensis Histor. Ecclesiast. lib. XX, c. XXXVIII.*)¹⁰

¹ Pez. I, 346 [Salzburg].

² Ibi III, 121 et IX, 166 [Prag].

³ Dobner. Mon. hist. Bohem. III, 198.

⁴ Mon. Germ. Scr. IX, 547 [Kremsmünster].

⁵ Ibi IX, 594 [Garsten].

⁶ Polonicae Hist. Corpus II, 75 [Krakau].

⁷ Muratori VII, 635 [Cremona].

⁸ Ibi IX, 627 [Bologna].

⁹ Graevii Thesaur. antiq. et histor. Italiae. III, 2. col. 1317.

¹⁰ Muratori XI, 1114.

Die Datirung der Finsterniss ist: Pridie Non. Sept. feria VI.
Centralitätszone der Finsterniss:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ	$\varphi + 61.98$	λ	$\varphi + 58.77^\circ$
9.75° v. Par.	60.64	9.45° v. Par.	57.38
12.06	59.24	11.68	55.92
14.30	57.73	13.83	54.37
16.46	56.17	15.92	52.78
18.55	54.52	17.95	51.09
20.59	52.78	19.91	49.37
22.55	51.02	21.81	47.60
24.46		23.64	

Mehrere der aufgeführten Quellen beziehen ihre Berichte jedenfalls auf Jerusalem, woselbst die Finsterniss noch sehr beträchtlich war, wie aus Taf. V ersichtlich ist. Das Auftreten von Sternen (21, 22, 25, 26) in Italien und Österreich ist hier nur als eine mit dem Phänomen der Finsterniss zusammenhanglose Erscheinung zu betrachten; sehr bedeutend und unzweifelhaft vom Hervortreten der Sterne begleitet, war die Finsterniss dagegen in Schweden und dem östlichen Dänemark. Der hier wichtigen Quelle 4. stehen leider die in der Anmerkung berührten Schwierigkeiten wegen der Ortsbestimmung entgegen. Indessen würde in beiden in der Anmerkung bezeichneten Fällen, wenn nämlich der Bericht aus Fünfen oder aus Lund stammt, wie aus dem Gange der auf Taf. I ersichtlichen Zone erhellt, die Finsterniss zu östlich laufen und eine Correction im westlichen Sinne nicht ganz abzuweisen sein. Ich habe der Finsterniss deshalb eine Correction von $1^\circ 15'$ zugestanden, so dass sie dem Gebiet von Lund näher liegt, doch wird diese Correction mit einem geringeren Gewichte in Rechnung gezogen.

31. 1191 Juni 22. 23^h 26^m 2, ringf. ☿

England.

1. 1191. Mense Junii, die dominica in vigilia nativitatis S. Joann. Bapt. nono Kal. Julii, luna 27, hora diei nona, sol passus est eclipsim et duravit per tres horas; ita quod obscuratus est sol et tenebrae factae sunt super terram, et apparuerunt stellae in coelo, et cum eclipsis recessisset, sol redit in

- pristinum decorem suum. (*Chronica Magistri Rogeri de Hoveden.*)¹
2. 1191. Facta est eclipsis solis in die dominica in vigilia S. Joann. Bapt. circa horam VI. Civitas Accon a Christianis capta est. (*Annales de Margan.*)²
3. 1191. Eclipsis solis facta est 9. Kal. Julii (*Annales de Theokesberia.*)³
4. 1191 Stelle 2 in den *Annales de Waverleia.*)⁴
5. 1191. Anno eodem contigit eclipsis solis. (*Chronic. Thomae Wykes.*)⁵
6. 1191 Eclipsis solis. Clemens papa obiit. (*Annales prioratus de Wigornia.*)⁶
7. 1191. Eodem anno, mense Junio, in vigilia S. Joann. Bapt. die dominica, eclipsis solis apparuit circa diei horam sextam et perduravit usque ad octavam. (*Matth. Parisiensis Hist. Angl.*)⁷

Frankreich, Belgien.

8. 1191 fuit eclipsis solis universalis in vigilia S. Joann. Bapt. dominica die, septimo gradu cancri, luna existente in sexto gradu ejusdem signi et cauda draconis in duodecimo, circa meridiem et duravit per quatuor horas. (*Chronicon Alberici.*)⁸
9. 1191. Hoc anno contigit eclipsis solis in vigilia beati Joann. Bapt. (*Ann. Fossenses.*)⁹
10. 1191. Eodem anno facta est eclipsis solis mirabilis, 9. Kal. Jul. in meridiano. (*Annales Elnonenses maiores.*)¹⁰

¹ Rer. Brit. Script. Nr. 51, vol. III, 115 [Durham]. — Johann Bapt. = 24. Juni.

² Ibi Nr. 36, 1, pag. 21 [Margan].

³ Ibi Nr. 36, 1, pag. 54 [Tewkesbury].

⁴ Ibi Nr. 36, 2, pag. 247 [Waverley].

⁵ Ibi Nr. 36, 4, pag. 46 [Osney].

⁶ Ibi Nr. 36, 4, pag. 387 [Worcester].

⁷ Ibi Nr. 44, 2, pag. 23 [S. Albans].

⁸ Access. Histor. II, 2, pag. 390 [Neufmoutier].

⁹ Mon. Germ. Scr. IV, 31 [Fosse].

¹⁰ Ibi V, 16 [S. Amand].

11. Stelle 8 in *Rigordus de Gestis Philippi Augusti Francorum regis.*¹
12. 1191. Eclipsis solis facta est 9. Kal. Julii, die dominica, hora 6 in vigilia beati Joann. baptiste, fulgore eius in aquilonari parte remanente, iuxta quantitatem tertiane lune. (*Sigebert. Contin. Aquicinctina.*)²
13. 1191. 9. Kal. Julii facta est eclipsis solis. (*Annales S. Vincentii Mettensis.*)³

Deutschland.

14. Celest. III Circa illud tempus fuit eclipsis 8. Kal. Julii et totus aër factus est purpureus: tantae pluviae, cum tonitru et tempestate factae sunt, quantas nulla neminit hominum aetas. (*Chron. Engelhusii.*)⁴
15. 1191 Im demselben Jare verlore die Sonne auch Ihren scheyn auff S. Johann: abent zu halben mittage. (*Adami Ursini Molybergensis Chron. Thuringiae.*)⁵
16. 1191. Eclipsis solis facta est in vigilia S. Joann. Bapt. hora 6. (*Chron. Sampet. Erfurt.*)⁶
17. 1191. Ecl. sol. in vigilia Johannis Bapt. (*Excerpta ex Catal. pont. et imp. Conradi cenob. Schyrensis.*)⁷
18. 1191. Hoc anno in vigilia S. Joa. Bap. dominica die, sol sexta diei hora aere serenissimo, quasi oppanso panno, radios suos contrahens, quasi imminutus visus est. (*Annales Sancti Trudperti.*)⁸
19. 1191. Eclipsis solis in mense Junio, luna existente XXX. (*Chron. Godefridi Coloniensis.*)⁹
20. 1191. In vigilia sancti Joann. bapt. generalis eclipsis solis facta est. (*Annales Breves Wormatienses.*)¹⁰

¹ Du Chesne. V, 33.

² Mon. Germ. Scr. VI, 427 [Anchin], vide Note 1, pag. 714.

³ Ibi III, 159 [Metz].

⁴ Script. Brunsvic. II, 1111.

⁵ Menken. III, 1274.

⁶ Ibi III, 232 [Erfurt].

⁷ Pez. II, 410 [Scheyern].

⁸ Mon. Germ. Scr. XVII, 292 [Freiburg i. Br.].

⁹ Böhmer. Font. rer. Germ. III, 469 [Cöln].

¹⁰ Mon. Germ. Scr. XVII, 75 [Worms].

21. 1191. Ipso anno facta est eclipsis solis in vigilia Joann. bapt. (*Annales Argentinense pleniores.*)¹
22. Selbe Stelle in den *Ann. Marbacenses.*²
23. 1190. 8. Kal. Julii facta est eclipsis solis circa horam sextam. (*Ann. Zwiefaltenses.*)³
24. 1191. Eclipsis solis facta est 9. Kal. Julii die dominica circa horam nonam. (*Annales S. Stephani Frisingenses.*)⁴
25. 1191. Eclipsis solis accidit 8. Kal. Julii circa mediam diem et totus aer factus est purpureus. (*Hermannii Altahensis Annales.*)⁵
26. 1191. Anno Henrici Abb. III in vigilia J. Bapt. magna fuit obscuratio solis, quam eclipsin Graeci appellant, et secuta est fames ingens in omni terra. (*Trithemii Annales Hiersaugienses.*)⁶
27. 1191. Ecl. sol. facta est ipso eodem anno 9. Kal. Julii, dominica die, hora meridiana, luna 27. existente, 14. decemnovalis cycli anno. (*Magni Presbyteri Annales Reicherspergenses.*)⁷
28. Henric. VI. . . . Anno regni eius primo eclipsis solis 9. Kal. Julii a tertia usque ad nonam duravit. (*Martini Minoritae Flores temporum.*)⁸
29. 1191. Et in eodem anno sol obscuratus est 9. Kal. Julii fere a tertia usque ad nonam. (*Martini Oppaviensis Chronicon Imperatorum.*)⁹
- Österreich.**
30. 1189 eodem anno sol obscuratus est 9. Kal. Julii, fere a tertia usque ad horam nonam. (*Chron. Leob.*)¹⁰

¹ Böhmer. III, 86 [Strassburg].

² Mon. Germ. Scr. XVII, 165 [Elsass].

³ Ibi X, 57 [Zweifalten].

⁴ Ibi XIII, 55 [Freising].

⁵ Ibi XVII, 385 [Altaich].

⁶ Vol. I, 481 [Hirschau].

⁷ Mon. Germ. Scr. XVII, 518 [Reichersberg].

⁸ Eccard. I, 1623.

⁹ Mon. Germ. Scr. XXII, 470.

¹⁰ Pez. I, 797 [Leoben].

31. 1193. Eclipsis solis facta est 9. Kal. Jul. hora quasi 7. (*Chron. monast. Mellicensis.*)¹
32. 1191. Eclipsis solis accidit 9. Kal. Junii, circa mediam diem. (*Chron. Salisburg.*)²
33. 1191. Ecl. solis facta est 7. Kal. Julii circa meridiem, et totus aer factus est purpureus. (*Ann. Salisburg. additamentum.*)³

Livland.

34. 1191 Idem frater missus in Estoniam, propter eclipsin solis, quae in die Johannis Baptistae visa fuit, a paganis plurima passus est vitae pericula, dicentibus, ipsum solem comedere. (*Chronicon Livonicum vetus: Gesta Meinardi Livoniensis Episcopi.*)⁴

Italien.

35. Anno primo Henric. . . . qui fuit A. D. 1191, vigesima tertia Junii fuit eclipsis solis in 7. gradu Cancri et duravit per quatuor horas. (*Chron. Pipini Bononiensis.*)⁵
36. 1190 Eo anno 9. Kal. Julias facta est solis eclipsis ab hora tertia in horam nonam. (*Riccobaldi Ferrariensis sive alterius anon. script. Compilatio Chronologica.*)⁶
37. Selbe Stelle in *Riccobaldi Historia Imper. rom. german.*⁷
38. 1191. Ipso anno mense Julii sol eclipsim passus est. (*Chron. Brixianum.*)⁸
39. Alii dicunt, quod 1192 et sub Coelestino, quo anno, nono Kal. Julii sol est obscuratus, multumque duravit. (*Ptolomaei Lucensis Histor. Eccles. lib. XX, c. 44.*)⁹

¹ Pez. I, 235 [Melk].

² Ibi I, 347 [Salzburg].

³ Mon. Germ. Scr. XIII, 229.

⁴ Scriptores rer. Livonicarum. Riga u. Leipzig, 1853. Vol. I, 54 [Uexküll].

Der Bischofsitz war bis 1201 Uexküll, später Riga.

⁵ Muratori. IX, 635 [Bologna].

⁶ Ibi IX, 246.

⁷ Ibi IX, 125.

⁸ Ibi XIV, 887 [Brescia].

⁹ Ibi XI, 1117.

40. 1190 Eodem anno in Kal. Julii sol obscuratus est et duravit a tertia usque ad nonam. (*Annales Ptolomaei Lucensis.*)¹

Die Contin. Sigeberti führt die richtige Datirung der Finsterniss.

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 355·44° v. Par.	$\varphi + 54·39^\circ$	λ 355·53° v. Par.	$\varphi + 52·73^\circ$
357·58	54·28	357·63	52·64
359·70	54·14	359·71	52·49
1·80	53·97	1·78	52·31
3·90	53·74	3·84	52·08
5·98	53·45	5·89	51·80
8·05	53·14	7·92	51·47
10·10	52·76	9·94	51·09
12·14	52·36	11·95	50·68
14·16	51·89	13·93	50·21
16·17	51·37	15·90	49·60

Von Wichtigkeit bezüglich der Correction dieser Finsterniss (Taf. III) sind ausser dem Totalitätsberichte 1 die Quellen 14, 18, 34. Nach der ersteren Nachricht ist kein Zweifel, dass die Finsterniss in Northumberland von grossem Eindrücke gewesen ist, ja dass sie auch in Esthland (34.) noch von ziemlicher Auffälligkeit war, während sie zu Anchin, Freiburg deutlich partiell erschien. Die Vergleichung neigt daher zu einer Correction in nördlicher Richtung; es wurde für letztere 0° 40' angenommen, wodurch den Quellen besser genügt wird.

32. 1207 Feber 27. 23^h 0^m 0, ringf. Ω

England.

1. 1207. Hoc anno facta est eclipsis solis 2. Kal. Martii circa horam sextam, et duravit usque ad nonam. (*Annales de Bermundeseia.*)²

¹ Muratori XI, 1275.

² *Rev. Brit. Ser.* Nr. 36, 3, pag. 450 [Bermondsey].

2. 1208. Monstra visa sunt in Anglia; quia sol et luna simul pugnauerunt. Et item eclipsis horribilis apparuit. (*Annales de Dunstaplia.*)¹
3. 1207. Eodemque anno sol passus est eclipsim, ab hora sexta usque ad nonam. Necnon et luna eclipsim passa est anno sub eodem, forte in triste praesagium rerum proximo futurarum. (*Mutth. Parisiensis Hist. Angl.*)²

Frankreich, Belgien.

4. 1206. 2. Kal. Martii ecl. solis a tertia hora diei usque in horam nonam. (*Ann. des Blandinienses.*)³
5. 1206. Pridie Kal. Martii fuit eclipsis solis particularis hora sexta diei, in 16. gradu piscium. (*Rigordus De gestis Philippi Augusti Franc. regis.*)⁴
6. 1207. Pridie Kal. Martii fit eclipsis solis particularis in 16. gradu piscium, hora diei quinta. (*Chron. Alberici.*)⁵

Deutschland.

7. 1206. Eclipsis solis facta est 2. Kal. Martii, hora diei decima. Nam plurimi humanum caput in sole se vidisse testantur. (*Godefridi Colon. Chron.*)⁶
8. 1207. Eclipsis solis facta est 2. Kal. Martii. (*Annales Schäftlarienses maiores.*)⁷
9. 1207. 2. Kal. Martii facta est ecl. solis ab hora sexta diei usque nonam. (*Annales Zwifaltenses.*)⁸
10. 1207. Hoc anno facta est eclipsis solis pridie Kal. Martii circa mediam diem. (*Ann. S. Stephani Frisingensis.*)⁹

¹ Rer. Brit. Scr. Nr. 36, 3, pag. 80 [Dunstable].

² Ibi Nr. 44, 2, pag. 113 [S. Albans].

³ Mon. Germ. Scr. V, 30 [Blandigny].

⁴ Du Chesne. V, 48.

⁵ Access. Hist. II, 2, pag. 444 [Neufmoutier]. Albericus war Mönch zu Neufmoutier bei Huy a. Maas. Seine grosse Weltchronik ist aus den verschiedensten Autoren zusammengesetzt, enthält aber 1221—41 auch selbstständige Nachrichten.

⁶ Böhmer. Fontes rer. Germ. II, 342 [Cöln].

⁷ Mon. Germ. Scr. XVII, 337 [Schäftlarn].

⁸ Ibi X, 58 [Zweifalten].

⁹ Ibi XIII, 55 [Freising].

11. 1206. Eodem quoque anno, ultima die mensis Februarii facta est circa horam ferme diei tertiam solis defectio, quam eclipsim Graeci nun cupant, et multi quidem humanum se caput in sole vidisse, testabantur. (*Trithemii Annales Hirsau-gienses.*)¹

Böhmen, Livland.

12. 1206. Sol etiam eclipsim passus est. (*Chron. Bohem. auctore Neplachone.*)²
 13. 1207. Sol eclipsim passus est. (*Canonicorum Pragensium Contin. Cosmae.*)³
 14. 1207. Preterea hoc anno sol in coelo patiebatur eclipsim. (*Chron. Przbiconis de Tradenina.*)⁴
 15. 1207 Eodem hyeme facta est eclipsis solis per magnam horam diei horrende obscurati. (*Chronicon Livon. vetus: Gesta Alberti, Livoniensis Episcopi.*)⁵

Das Chron. Alberici hat die richtige Datirung der Finsterniss. (Die Mondfinsterniss fand am 5. Feber 1208 statt.) Die Centralitätszone ist folgende:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ	v. Par. $\varphi + 43 \cdot 71^\circ$	λ	v. Par. $\varphi + 40 \cdot 89^\circ$
2·18	45·64	2·73	42·78
3·90	47·58	4·43	44·66
5·75	49·47	6·20	46·51
7·67	51·33	8·04	48·31
9·66	53·14	9·97	50·08
11·74	54·91	11·99	51·82
13·92	56·61	14·08	53·49
16·18	58·23	16·26	55·08
18·53	59·78	18·53	56·61
20·96	61·23	20·87	58·05

Die Darstellung der Finsterniss (Taf. II) scheint eine hinreichende zu sein und nur mit Rücksicht auf die Stellen 7 und

¹ Vol. I, 512 [Hirschau].

² Pez. II, 1030 [Opatowitz].

³ Mon. Germ. Scr. IX, 170.

⁴ Dobner. Mon. hist. Boh. III, 206.

⁵ Script. rer. Livonic. Riga u. Leipzig 1853, I, 110 [Riga].

15, welche eine Verschiebung im östlichen Sinne beanspruchen sowie im Hinblick auf den Umstand, dass eine solche Tendenz bei den meisten von jenen in Behandlung stehenden Finsternissen, welche im aufsteigenden Knoten sich befinden, vorherrscht, wurde eine Correction von $0^{\circ} 30'$ in Aussicht genommen. Hiedurch wird die Finsterniss für Riga bedeutender und für Cöln geringer.

33. 1241 October 6. $0^h 7^m 1$, total. γ

Diese Finsterniss ist mit Benützung eines reichen Quellenmaterials von G. Celoria behandelt worden.¹ Ausserdem ist sie von Prof. v. Oppolzer bei der Herstellung der in dessen „Syzygientafeln für den Mond“ enthaltenen empirischen Correctionen (p. 34) benützt. Da diese Correctionen auch den hier zur Veröffentlichung gelangenden Rechnungsergebnissen zu Grunde liegen, so ist selbstverständlich, dass die Zone der Rechnung mit jener der Berichte eine vorzügliche Übereinstimmung zeigen muss. Es war deshalb nicht meine Absicht, die Finsterniss nochmals mit der Überlieferung zu vergleichen und über sie Quellen zu sammeln. Indessen habe ich doch einige Berichte bemerkt, welche bei Celoria nicht notirt sind und die ich den dort publicirten² hinzuffüge. Es sind folgende:

England.

1. 1241. Eclipsis solis die Sanctae Fides virginis. (*Chron. Thom. Wykes.*)³
2. 1241. Ipso quoque anno, pridie nonas Octobris, videlicet die sanctae Fides, passus est sol eclipsim. (*Matth. Parisiensis Hist. Angl.*)⁴

Deutschland.

3. 1241 pridie non. Octob. facta est eclipsis solis generalis hora undecima. (*Chronic. Sampetr. Erfurtense.*)⁵

¹ Sugli eclissi solari totali del 3. Giugno 1239 e del 6. Ottobre 1241. (Public. del reale osserv. di Brera. XI.)

² Ibi pag. 364—370.

³ *Rer. brit. Ser.* Nr. 36, 4, pag. 89 [Osney]. — Fides = 6. Octob.

⁴ Ibi Nr. 44, 2, pag. 457 (S. Albans).

⁵ *Menken.* III, 259 [Erfurt].

4. 1241 Eodem anno, Sergi et Bacchi, sol patiebatur eclipsim. (*Ann. Moguntini.*)¹
5. 1241. Facta est eclipsis solis in octava S. Michaelis. (*Excerpta Chronologica de Ducibus Brunsvic. et de reliquiis eccl. Colleg. S. Blasii.*)²
6. Darnach in den dritten jahr
Bannet der Bapst allegleich
Den hohen Keyser Friederich.
Darnach über zwey jahr
Liess ihrem schein die sonne klar
Auff Sanct Michaelis achten tag.
(*Chronic. Principum Brunsvic. Rythmic. antiquum.*)³
7. Caeterum an. D. 1241 alii duos minus numerant, secundo nonas Octobris die dominico, tantam solis eclipsim statim a meridie annales nostri fuisse perhibent, ut stellae coeli aequae ac nucla nocte hic admodum terrificae sint visae. (*Achill. Pirm. Gassari Annales Augsburgensis.*)⁴
8. 1240/1. Eclipsis solis 4. non. Oct. ita ut per dimidiam horam obscuraretur in similitudinem noctis in toto orbe; unde quam plurimos maximus pavor occupavit, et merito, quia tenebrosos dies tenebrosa tempora sequebantur. (*Annales Schäftlarienses maj.*)⁵
9. 1242. Pridie non. Octobris sol obscuratus est in meridie usque ad tres horas. (*Annales Seldentalenses.*)⁶

Böhmen, Preussen, Dänemark.

10. 1241. Obscuratus est sol nimis, et fecit tenebras magnas. (*Chronicon Francisci.*)⁷
11. 1241. Eodem anno 3. Non. Decemb. facta est post meridiem solis eclipsis. (*Chron. Przibiconis de Tradenina.*)⁸

¹ Mon. Germ. Scr. XVII, 2 [Mainz].

² Script. Brunsvic. II, 61 [Braunschweig]. — S. Michael = 29. Septb.

³ Script. Brunsvic. III, 133.

⁴ Menken. I, 1444 [Augsburg].

⁵ Mon. Germ. Scr. XVII, 341 [Schäftlarn].

⁶ Böhmer. Font. rer. Germ. III, 527 [Landshut].

⁷ Script. rer. Bohem. II, 6 [Prag].

⁸ Dobner. Mon. hist. Boh. III, 217.

12. 1241. Da die sunne vergienc, tusedt zweihundert ein unde vierczec. (*Annales Pelplinenses.*)¹
13. 1240. Obiit rex Waldemar et eclipsis solis eodem anno fuit. (*Ann. Esromenses.*)²
14. Eclipsis solis seu magne tenebre fuit in dominica post festum S. Michaelis anno dom. 1240. (*Canonici Sambiensis epitome gestor. prussic.*)³

Dalmatien.

15. 1241. Eodem autem tempore sexto die intrante Octob. die dominica, iterum factus est solis defectus, totusque aer obscuratus est, fuitque horror magnus in omnibus, velut in ea eclipsi, quae facta est tertio anno praecedente, ut supra testigimus. (*Thomae archidiaconi Historia Salonitana.*)⁴

Die Centralitätszone der Finsterniss (Taf. III) ist durch folgende Punkte gegeben:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ	$2 \cdot 31^\circ$ v. Par. $\varphi + 59 \cdot 44^\circ$	λ	$1 \cdot 93^\circ$ v. Par. $\varphi + 55 \cdot 40^\circ$
	4·47		4·00
	57·31		53·31
	6·54		5·99
	55·16		51·24
	8·53		7·91
	53·03		49·16
	10·44		9·75
	50·87		47·13
	12·38		11·54
	48·76		45·10
	14·07		13·39
	46·73		43·13
	15·81		15·00
	44·70		41·22

Die Vergleichung mit den vorstehenden und den Celoria'schen Quellen zeigt kaum mehr das Bedürfniss einer Correction; höchstens dass den Schäftlarer Annalen (Celoria p. 386 und Stelle 8 der obigen Berichte) noch etwas besser zu genügen wäre) was einer westwärts gehenden Correction um 10' gleich kommt.

¹ Script. rer. Prussic. ed. Strehlke et al. I, 271. Wahrscheinlich von einem Niedersachsen verfasst.

² Langebek. I, 244 [Esrom].

³ Script. rer. Prussic. I, 280. Auf Samland (ev. Königsberg) zu beziehen, da die Landesgeschichte vornehmlich berücksichtigt ist. Der Verfasser, ein samländischer Domherr, scheint bis 1338 geschrieben zu haben.

⁴ Schwandtner. Scr. rer. Hungar. III, 602. [Salona bei Spalato]. Die Finsterniss, auf welche sich der Nachsatz des Berichtes bezieht, ist die von 1239, Juni 3, von welcher sich a. a. Orte (pag. 592) gleichfalls ein Totalitätsbericht vorfindet. — Erzdiaconus Thomas starb 1268 n. Chr.

34. 1261 März 31. 21^h 22^m 2, ringf. ☉

Italien.

1. 1261 mense Januari praedictum fuit a fratre Lanfranco perito Philosopho Praedicatorum Ordinis, quod in vigilia Ascensionis, sequentis circa nonam pars solis per universum mundum obscura fieret. Eodem die vidi in platea Guttuariorum plures viros congregatos expectantes hoc signum, si fieret, et posito speculo in quodam amirello pleno aqua, ibi apparuit circa medietas solis obscura. Non post multum tempus aliquantum lunam in partem mediam et quasi totam obscuram vidi. (*Memoriule Guilielmi Venturæ, civis Astensis, c. III.*)¹

Österreich.²

2. 1261 Eodem anno facta est eclipsis solis circa horam tertiam, in octava annunciationis, quae tunc sexta feria habebatur. (*Paltrami Chron. Austr.*)³

¹ Muratori XI, 156 [Asti].

² Da bei den österr. Annalen bisher keine Anmerkung über ihren selbstständigen Werth angebracht wurde, so erscheinen einige Worte hierüber nunmehr nothwendig. Im Allgemeinen zeigt sich bei der österr. Analistik eine Unselbstständigkeit bis ins dreizehnte Jahrhundert. Vielfach nimmt man eine Quelle wahr, die wahrscheinlich um 1180 in Salzburg mit Hilfe des verschiedenartigsten Materials (Paulus Diac., Fredegar, Regino, Fulda u. s. w.) verfasst worden ist. Auf diese Weise erklärt sich das frühzeitige Auftreten und der gleichlautende Bericht über viele der vorstehenden Finsternisse (Nr. 2, 3, 10, 13 u. s. w.). Erst spät gewinnen die Annalen allmählig an Selbstständigkeit. In *Garsten* beginnt 1182 eine selbstständige Fortsetzung; von 1199—1213 sind sie aus den Melker und Admonter Annalen ergänzt. Die *Admonter* sind bis 1136 mit den Melker verbunden und zeigen bis 1186 noch vielfache Übereinstimmung mit Salzburg und Garsten. Die *Salzburger* zeigen, indem sie auf einer gemeinsamen Grundlage mit den Melker, Admonter, Garstener Annalen ruhen, bis 1186 dieselbe Unselbstständigkeit und sind erst von da ab von Salzburger Domherren und Mönchen von St. Peter bis 1286 fortgesetzt. In den Annalen von *Zwettel, Heiligenkreuz, Wien, Lambach, St. Florian, Neuberg, Kremsmünster* zeigen sich vielfach Überarbeitungen und Fortsetzungen der Melker. Mit Vorsicht werden auch die Finsternissberichte des *Anon. Leobensis Chron.* (bei Pez) aufzunehmen sein, denn die Urschrift dieser Chronik stammt aus dem Kloster Vietring am Wörthersee, wurde von einem Unbekannten umgearbeitet und mit Zugaben Leobener Dominikaner und Klosterneuburger Bemerkungen versehen.

³ Pez, I, 715 [Wien]. Maria Verkündigung = 25. März.

3. Selbe Stelle in *Anon. Leobiensis Chronic.*¹ und *Anon. coenob Zwettlens. Chron.*²
4. Ebenso das *Chron. Claustro-Neoburg.*³ und die *Contin. Sarrucensis secunda.*⁴

Die Mondesfinsterniss (1) fand am 7. März 1262 statt. Die Centralität dieser vornehmlich in Griechenland sichtbaren Sonnenfinsterniss (Taf. II) läuft wie folgt:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 16·73° v. Par. φ +34·22°		λ 17·12° v. Par. φ +32·98°	
18·24	35·97	18·61	34·73
19·76	37·73	20·12	36·47
21·32	39·44	21·67	38·19
22·93	41·11	23·25	39·87
24·57	42·76	24·88	41·50

Die Finsterniss gibt zu keinen Correctionen Anlass.

35. 1263 August 5. 1^h 50^m 9, ringf. ☿

England.

1. 1263 Hoc anno contigit eclipsis solis in die S. Dominici confessoris* circa horam nonam, et duravit spatio unius refec-tionis et amplius et fuit tunc luna XXVII. (*Annales de Waverleia.*)⁵
2. 1263. Eodem anno nonis Augusti facta est eclipsis solis hora diei sexta. (*Chron. Thom. Wykes.*)⁶

Deutschland.

3. 1263 Item non. Augusti post horam nonam fuit eclipsis solis generalis, ut videri poterat in Teutonica regione. (*Chron. Sampetr. Erfurt.*)⁷

¹ Pez. I, 826 [Leoben].

² Ibi I, 983 [Zwettel].

³ Ibi I, 463 [Klosterneuburg].

⁴ Mon. Germ. Scr. IX, 645 [Heiligenkreuz].

⁵ *Rer. brit. Scr.* Nr. 36, 2, pag. 355 [Waverley]. * 11. Sonntg n. Pfingsten.

⁶ Ibi Nr. 36, 4, pag. 139 [Osney].

⁷ *Menken.* III, 269 [Erfurt].

4. Selbe Stelle in der *Chronica S. Aegidi Brunsvic.*¹
5. 1263. Non. Aug. fuit ecl. solis post meridiem. (*Chron. Vetro-Cellense minus.*)²
6. 1263. Item eclipsis solis in die dominica et in die Oswaldi regis. (*Ann. Hamburgenses.*)³
7. 1263. Frater Lutoldus, Predicatorum lector, astrologus, predixit eclipsim solis, factam die S. Dominici. (*Annales Colmarienses minor.*)⁴
8. 1264 Item hoc anno eclipsis solis facta est in die Oswaldi. (*Ann. S. Steph. Frisingensis.*)⁵
9. 1263. Non. Aug. ecl. sol. post meridiem. (*Martini Minoritae Flores temporum.*)⁶

Italien, Frankreich.

10. 1263 Die quinto intrante Augusto, cum esset luna vigesima septima, fuit eclipsis solis ante horam aliquantulum vespertinam. (*Monachi Patavini Chronicon de Rebus gestis in Lombardia praecip. et Marchia Tarvisina.*)⁷
11. Gesang auf Urban V.:
 Sextoque Calendas
 Augusti
 Anno praeterito, praedicto mense, dieque
 Quinta, quae Domini dicitur esse dies,
 In vespertina fuit hora solis eclipsis,
 Pene duabus erat partibus ipse minor.
 (*Vitae roman. Pontificum: Ex papirii Massoni Lib. V. De episcopis urbe Romae.*)⁸
12. 1263. Hoc anno facta est ecl. solis non. Aug. circa horam 10.
 (*Ann. Blandinienses.*)⁹

¹ Script. Brunsvic. III, 591.

² Menken. II, 440 [Altzelle].

³ Mon. Germ. Scr. XVI, 385 [Hamburg]. Oswald = 5. Aug.

⁴ Ibi XVII, 191 [Colmar].

⁵ Ibi XIII, 57 [Freising].

⁶ Eccard. I, 1626.

⁷ Muratori. VIII, 722 [Padua].

⁸ Ibi III, part. 2, pag. 419 [Rom].

⁹ Mon. Germ. Scr. V, 31 [Blandigny].

Nordische und polnische Chronisten.

13. 1262. Regina rediit. Eclipsis solis. (*Chron. Danicum 980—1286.*)¹
14. 1262. Dux de Brunswie fuit in Dacia. Eclipsis solis non. Aug. (*Ann. Ryenses.*)²
15. 1262. Eclipsis solis facta est mense Augusto. (*Chron. Danorum praec. Sialandiue.*)³
16. 1263. Eclipsis solis n. Kal. Aug. (*Annales minorum Wisbyenses.*)⁴
17. 1263. Eclipsis solis in die S. Dominici fuit, quam siccitas, charistia et fames, maxima in Bohemia sequuta est. (*Math. de Michova Chron. Polonorum, lib. III c. LVI.*)⁵

Österreich.

18. 1263. Item hoc anno fuit eclipsis solis, dominica confessoris, post meridiem. (*Paltrami Chron. Austr.*)⁶
19. Selbe Stelle im *Chron. Claustro - Neoburgense*,⁷ *Anon. Leobiens. Chron.*⁸ und der *Contin. Sancrucensis secunda*.⁹
20. 1263. Ecl. solis particularis facta est . . (*Chron. Salzburg.*)¹⁰

Das richtige Datum der Finsterniss ist: Non. Aug., feria I. Die Verfinsterung fand in Thüringen etwa 9 Stunden nach Sonnenaufgang statt. Centralitätszone (Taf. II):

Nordgrenze		Südgrenze	
λ	9 31° v. Par. φ +61·62°	λ	7·71° v. Par. φ +57·57°
	11·09		59·71
	12·80		57·72
	14·49		55·73
	16·17		53·70
	17·84		51·67
	19·54		49·66
			9·45
			11·16
			12·82
			14·50
			16·19
			17·91
			55·69
			53·81
			51·84
			49·87
			47·95
			46·02

¹ Langebek. II, 438.

² Mon. Germ. Scr. XVI, 409 [Rye].

³ Langebek. II, 631 [Seeland].

⁴ Ibi I, 255 [Wisby].

⁵ Polonicae Histor. Corpus. II, 115 [Krakau].

⁶ Pez. I, 716 [Wien].

⁷ Ibi I, 464 [Klosterneuburg].

⁸ Ibi I, 827 [Leoben].

⁹ Mon. Germ. Scr. IX, 645 [Heiligenkreuz].

¹⁰ Pez. I, 369 [Salzburg].

Die Berichte bestätigen nur die Richtung der Zone, ohne zu Änderungen der Sichtbarkeitsgrenzen Anlass zu geben.

36. 1267 Mai 24. 21^h 31^m 5, total. ☿

Constantinopel.

1. [Mich. Palaeologus.] Sub hoc tempus luna solem obscuravit, cum is quartam Geminorum partem praeteriret, sub horam ante meridiem tertiam, 25. die Maii, anni d. 1267. Fuit tota eclipsis punctorum fere 12 (Gr. digitorum). Tante autem sub medium tempus illius eclipseos tenebrae circa terram extiterunt, ut multae stellae apparent (*Niceph. Gregor. Hist. Byzant. Lib. IV c. VIII.*)¹
2. Imperante Palaeologo, 25. die Maii, anni 6775 (= 1267) sub horam ante meridiem tertiam Sonst dieselbe Stelle wie vorstehend: *Glycanorum annalium contin. auct. Joanne Leunclavio.*)²

Italien.

3. 1267 Et tunc illa hora obscuratus est sol et passus est eclipsim. (*Annales Placentini Gibellini.*)³

Deutschland.

4. 1267. Eclipsis solis vigilia Urbani, predicta a fratre Gotfrido astronomo ordinis Predicatorum in Wornatia. (*Ann. Basileenses.*)⁴
5. 1267. Item sol obscuratus est in vigilia ascensionis. (*Ann. Scheftlarienses minores.*)⁵
6. 1268. Eclipsis solis in octavo gradu geminorum in die Urbani. (*Ann. Saxonici.*)⁶

¹ Paris 1702. Nicephorus Gregoras um 1365 n. Chr.

² Patrologiae cursus completus. T. 158, pag. 638.

³ Mon. Germ. Scr. XVIII, 521 [Piacenza].

⁴ Ibi XVII, 193. [Basel]. St. Urban = 25. Mai.

⁵ Ibi XVII, 341 [Schäftlarn]. Christi Himmelfahrt = 26. Mai 1267.

⁶ Ibi XVI, 431.

Österreich.

7. 1267 et Urbani papae facta est eclipsis solis ante meridiem. (*Paltrami Chron. Austriac.*)¹
8. 1267. Terrae motus accidit circa horam diei tertiam, eclipsis vero solis postmodum subsequenter. (*Chron. Salisburg.*)²
9. 1267. Ecl. solis fit in festo beati Urbani sub meridie et durabat usque ad vespervas. (*Contin. Zwettlensis tertia.*)³

Nachdem die Conjunction für Constantinopel etwa 4^h 54^m nach Sonnenaufgang eintrat, fiel die Finsterniss in die 5. Tagesstunde. Die Centralitätszone findet sich auf Taf. I:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 10·81° v. Par.	φ + 36·85°	λ 10·92° v. Par.	φ + 36·23°
12·75	37·49	12·86	36·86
14·68	38·07	14·78	37·44
16·61	38·61	16·70	37·97
18·52	39·10	18·61	38·45
20·43	39·55	20·51	38·89
22·35	39·92	22·42	39·28
24·26	40·29	24·31	39·62
26·17	40·57	26·22	39·91
28·08	40·82	28·12	40·17

Die Finsterniss läuft für Constantinopel, wo sie total erschien, noch zu südlich; es wurde deshalb eine nördlich gehende Correction von 0° 35' acceptirt.

37. 1270 März 22. 18^h 19^m 9, ringf. ☿

Österreich.

1. 1270. Item eodem anno facta est ecl. solis circa horam primam, in proxima dominica ante annunciationem S. Marie. (*Contin. Vindobonensis.*)⁴
2. Selbe Stelle in *Anon. Leobiens. Chron.*⁵ und *Anon. coenob. Zwetlic. Chron.*⁶

¹ Pez. I, 716 [Wien].

² Ibi I, 370 [Salzburg].

³ Mon. Germ. Scr. IX, 657 [Zwettel].

⁴ Mon. Germ. Scr. IX, 703 [Wien]. Maria Verkündigung = 25. März.

⁵ Pez. I, 833 [Leoben].

⁶ Ibi I, 984 [Zwettel].

3. 1270. Hoc anno ecl. sol. facta est X. Kal. April. circa horam primam. (*Chron. Claustro-Neoburg.*)¹

Nordländische Chroniken.

4. 1270. Eclipsis solis fuit in mane Laetare Jerusalemo. (*Annales Ryenses.*)²
 5. 1270. Ecl. sol. dominica in Quadragesimis. (*Laurentii Stralii Annales.*)³
 6. 1270. Eo anno fuit ecl. solis in dominica Laetare. (*Annales Lubicensis.*)⁴
 7. 1270. Eclipsis solis contigit in dominica Laetare circa horam primam. (*Chronologia ab an. 266 ad 1430.*)⁵

Die richtige Datirung der Finsterniss ist X Kal. April. die dominic. laetare. Die Centralitätszone (Taf. II) wird durch folgende Coordinaten gegeben:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 6·81° v. Par.	φ + 44·01°	λ 7·51° v. Par.	φ + 42·34°
9·61	44·36	10·30	42·73
12·34	44·78	13·02	43·18
14·98	45·29	15·64	43·72
17·55	45·85	18·21	44·28
20·06	46·45	20·69	44·94
22·48	47·15	23·11	45·65.

Die Finsterniss gibt, wie man aus den Berichten ersieht, keinen Beitrag zur Bestimmung einer Correction.

38. 1310 Jan. 31. 0^h 36^m 3, ringf. ☿

Italien.

1. Eclipsis solis fuit an. suprascripto 1310 die Sabbati ultimo Januarii post horam nonae, et quasi medietas dicti solis obscurata fuit, existente coelo clarissimo et sereno. (*Memoriale Guilielmi Venturae civis Astensis c. LIV.*)⁶

¹ Pez. I, 465 [Klosterneuburg].

² Mon. Germ. Scr. XVI, 409 [Rye].

³ Langebek. III, 313 [Rye].

⁴ Mon. Germ. Scr. XVI, 413 [Lübeck]. Laetare = 23. März.

⁵ Fant. Script. rer. suecic. I, 25 [Sigtuna?].

⁶ Muratori. XI, 226 [Asti].

2. 1310 Dicto tempore die ultimo Januarii die Sabbati in vespera fuit eclipsis in sole, ita quod est obscuratus per tres partes. (*Chronicon Mutinense.*)¹
3. 1310. Sol et luna tunc passis defectum, et insoliti sideris facie, ac luna tergemina cum faciebus variis, et circulis. . . . (*Ludovici Cavitellii Annales Cremonenses.*)²
4. 1310, ultima die Januarii in octava hora diei apud Avinionem fuit eclipsis solis, et eclipsatus est ultra medietatum, fitque notabiliter scintillatis, sicut apparet de nocte in casu unius stellae, secundum vulgi opinionem. Notabilis tunc vero hemisperio visa fuisset, duravitque ultra horam nonam. Eodem anno 14. die Februarii circa occasum solis fuit eclipsis lunae, post quae haec duo male exorta sunt. (*Ptolomaei Lucensis Hist. eccles. lib. XXIV.*)³

Deutschland.

5. 1309. Eodem anno facta est ecl. solis particularis in vigilia S. Brigittae. (*Chron. Sampetr. Erfurtense.*)⁴
6. Eodemque anno 1309 ultima die Januarii circa meridiem fuit eclipsis solis, non tamen tanta quod dies notabiliter fuerit obscurata, quae a plerisque major futura erat publicata. (*Theodorici de Niem Vitae pontif. romanorum.*)⁵
7. 1310. 2 Kal. Febru. fuit eclipsis solis ante horam vespertinam et cessavit in primo pulsu. (*Canonici Sambiensis epit. gestor. Prussic. cap. 8: De rebus Prussie et Germanie.*)⁶
8. 1310. Eclip. solis valida in fine Januarii quod est in vigil. Brigittae circa horam vespertin. (*Ann. Augustani.*)⁷

¹ Muratori. XV, 569 [Modena].

² Graevii Thesaur. antiq. et histor. Italiae. III, pars 2, col. 1360 [Cremona].

³ Muratori. XI, 1232 [Avignon].

⁴ Menken. III, 322 [Erfurt]. Brigitta = 1. Feber.

⁵ Eccard. I, 1477 [Westphalen?]. Niem, um 1362 Canonicus zu Bonn, gest. zw. 1416—20.

⁶ Script. rer. Prussic. I, 285. [Königsberg]. Um 1338 geschrieben. Der Verfasser der Chronik war seit 1313 Canonicus von Samland.

⁷ Mon. Germ. Scr. X, 10 [Augsburg].

Österreich, Polen.

9. 1310. Sabbatho ante Purificationem circa vesperam facta est eclipsis solis. (*Paltrami Chron. Austr.*)¹
 10. 1310. Selbe Stelle: *Continuatio Sancrucensis tertia.*²
 11. Et in anno 1310 eclipsata est luna et sol semel. (*Contin. Florianensis.*)³
 12. 1310. Eodem anno ecl. solis facta est circa meridiem 2. Kal. Febr. (*Contin. Canonico. S. Rudberti Salisburg.*)⁴
 13. 1310 Sol quoque ultima Januarii eclipsim passus est. Ex his magna sterilitas subsequuta (*Math. de Michova Chron. Polonor. lib. IV c. XIII.*)⁵

Nordische Chroniken.

14. 1310. In ultima die Januarii facta est eclipsis solis hora 9. et combusta est civitas Upsalensis. (*Chronol. ab an. 266 ad 1430.*)⁶
 15. Selbe Stelle *Chronol. vetusta ab an. 1298 ad 1473.*⁷
 Datum der Finsterniss: Kal. Febr. die Sabb. (Datum der Mondfinsterniss: 14. Feber, 3^h 36^m, Grösse 10·1 Zoll.) Die Grenzen der Zone sind:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 0·56° v. Par. φ +52·30°		λ 0·12° v. Par. φ +47·82°	
2·92	53·53	2·35	48·95
5·34	54·75	4·66	50·11
7·84	55·99	7·05	51·27
10·42	57·22	9·51	52·41
13·06	58·41	12·04	53·56
15·77	59·61	14·63	54·67
18·55	60·75	17·30	55·80

Wie aus Taf. III ersichtlich ist, konnte die Finsterniss zu Avignon (Quelle 4), wenn auch nicht total, so doch sehr bedeutend sein. Richtig scheinen die Notirungen aus Cremona (3), Asti (1)

¹ Pez. I, 726 [Wien]. Mariä Reinigung = 2. Feber.

² Mon. Germ. Scr. IX, 735 [Heiligenkreuz].

³ Ibi IX, 753 [S. Florian].

⁴ Ibi IX, 820 [Salzburg].

⁵ Poloniae Hist. Corpus. II, 148 [Krakau].

⁶ Fant. Script. rer. suecic. I, 27.

⁷ Ibi I. 93.

und Modena (2). Da die letztere Quelle sagt, es seien 3 Theile der Sonne verfinstert worden, so dürfte die Verfinsternung etwa 9 Zoll betragen haben. Ich finde aus den Elementen der Finsterniss den Eintritt des Maximums für Modena 2^h 19^m w. Zt. mit

9·61 Zoll.

Es scheint demnach die Finsterniss keiner Correction zu bedürfen.

39. 1321 Juni 25. 18^h 34^m 8, ringf.-tot. ☿

Deutschland.

1. 1321 Eodem anno facta est eclipsis solis hora prima in die S. Joannis et Pauli. (*Chron. Sampetr. Erfurt.*)¹
2. 1321. Eclipsis solis die S. Petri et Pauli, et secutae sunt cicadae multae et magnae ac locustae (*Chronic. Engelhusii.*)²
3. 1321. Hoc anno in die Joann. et Pauli facta fuit eclipsis solis universalis in tota Alemannia, durans ab hora prima usque ad horam tertiam. (*Chron. Ellwangense.*)³
4. 1321. Eclipsis solis universalis et tenebrae super faciem terre per totam Alemanniam in Junio in die Joannis et Pauli, sub missa magna, feria sexta. (*Annales Augustani minores.*)⁴

Österreich.

5. 1321. In die Joannis et Pauli eclipsis solis facta est. (*Chron. Mellic.*)⁵
6. 1322. In festo Joannis et Pauli eclipsis solis fuit hora diei secunda et duravit usque ad horam quartam. (*Chron. Bohem. auctore Neplachone.*)⁶
7. 1321. Eodem anno in die Apost. Petri et Pauli feria VI fuit eclipsis solis ab hora prima usque ad horam tertiam, quam

¹ Menken. III, 326 [Erfurt].

² Script. Brunsvic. II, 1126. Peter und Paul = 29. Juni.

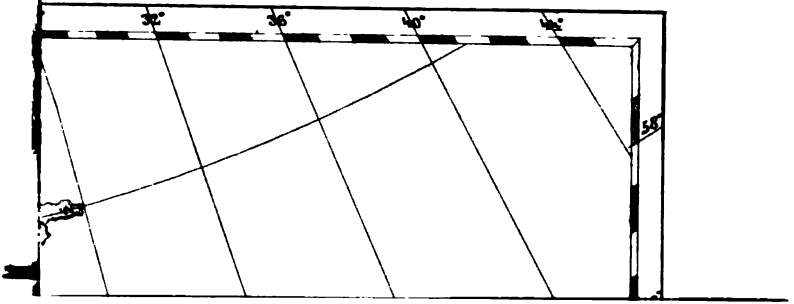
³ Mon. Germ. Scr. X, 39 [Ellwangen]. Johann = 24. Juni.

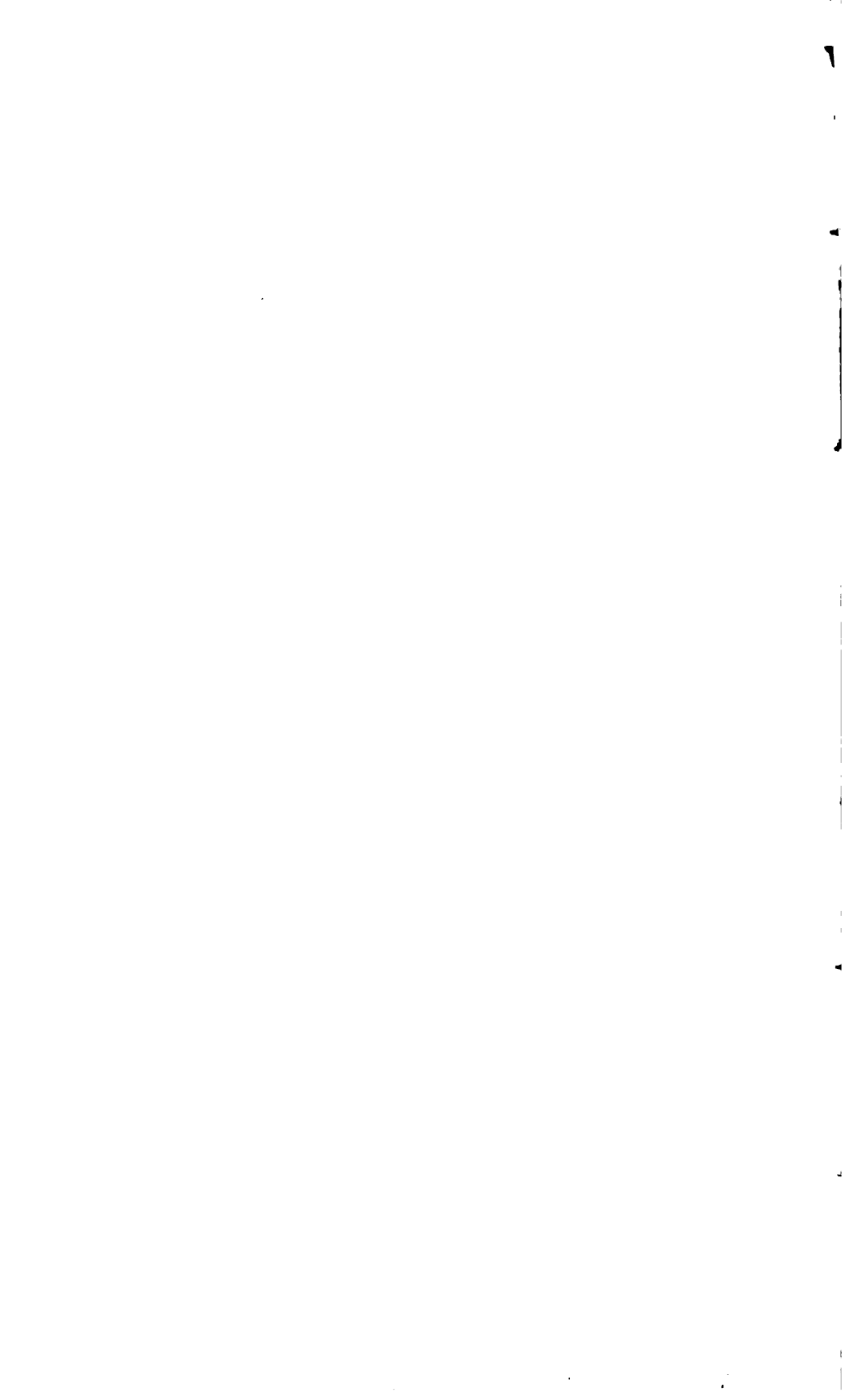
⁴ Ibi X, 11 [Augsburg].

⁵ Pez. I, 245 [Melk].

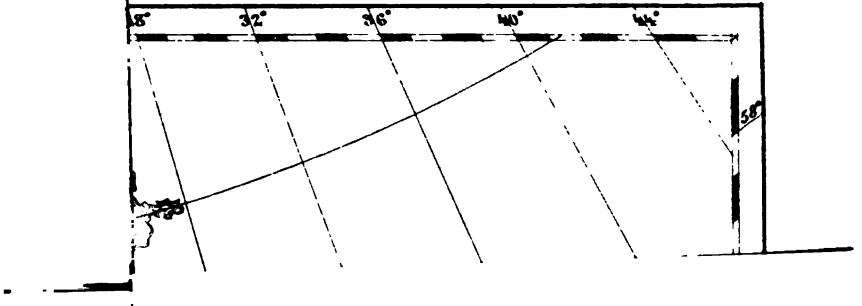
⁶ Ibi II, 1038 [Opatowitz].

Taf. I.

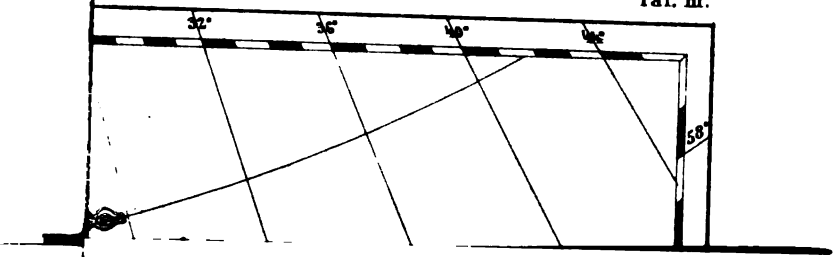




Taf. II.



Taf. III.



2

4

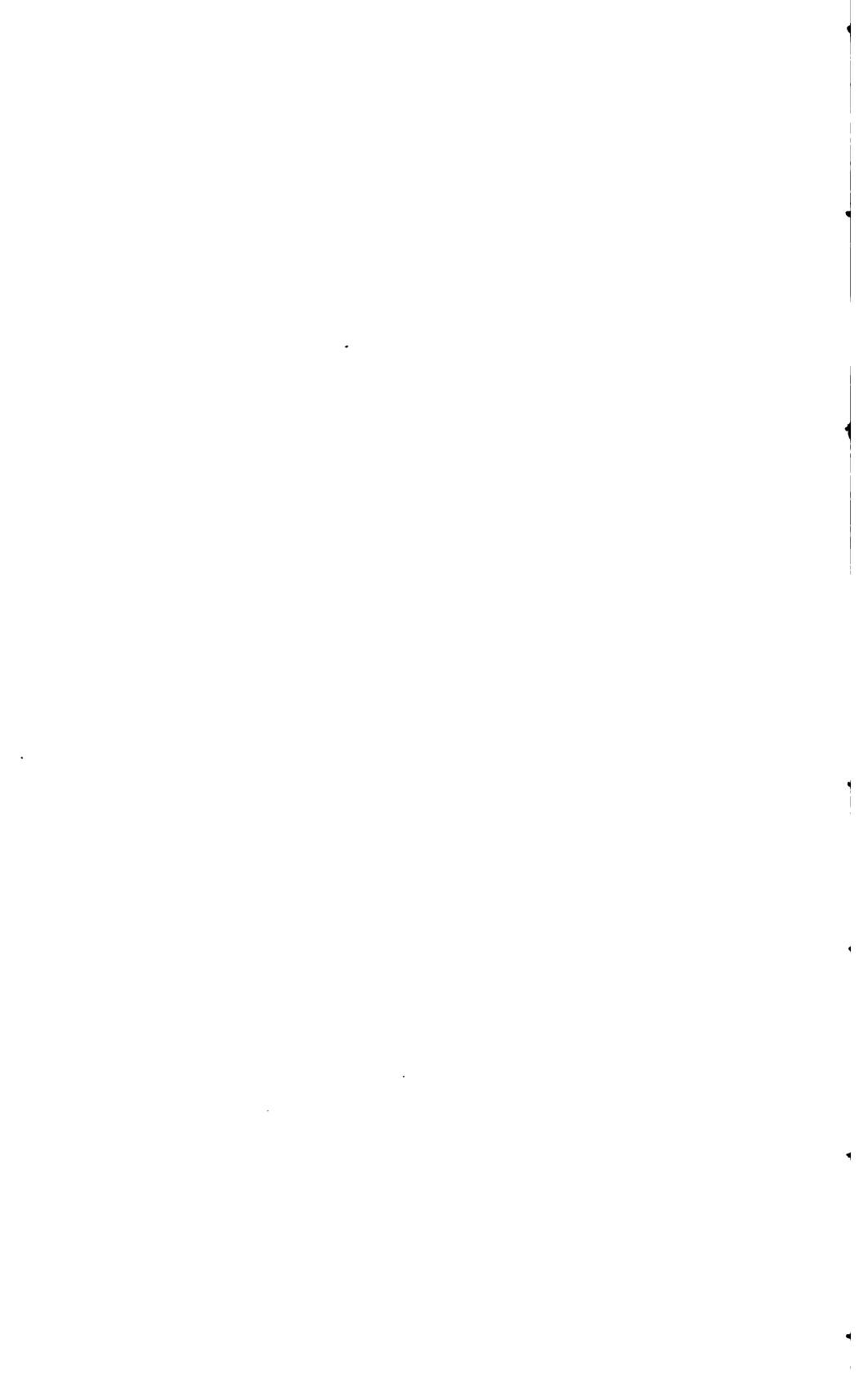
5

LA

1



bth. 188



secuta est aliqualis sterilitas et aquarum inundatio. (*Chron. Benessii de Weitmil.*)¹

8. 1321. Hoc anno in die beatorum Johannis et Pauli Martyrium feria sexta eclipsis solis exstitit, que ab hora prima usque ad horam tertiam perduravit, qua facta statim postea omnium in terra nascentium grana et semina, que ante optime fuerunt disposita, sunt quasi visibiliber diminuta. (*Chronicon Aula regiae.*)²
9. Selbe Stelle im *Chronicon Francisci.*³

Samland und Dänemark.

10. Item a. d. 1321 fuit ecl. solis in die beatorum martir. Johannis et Pauli hora tertia (*Canonici Sambiensis epit. pruss. cap. 8.*)⁴
11. 1320. Olavus episcopus Roeschildensis obiit Eclipsis solis VI. Kal. Julii circa tertiam. (*Annales Danici.*)⁵
12. 1320. Eclipsis solis fuit VI. Kal. Julii circa tertiam horam diei. (*Contin. Chronici Danorum et praeec. Sialandiae.*)⁶

Die Datirung VI. Kal. Jul. ist die richtige. Im centralen Böhmen fiel die Finsterniss in die dritte Tagesstunde. Die Grenzen der schmalen Centralitätszone (Taf II) sind:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ	v. Par. $\varphi + 45 \cdot 85^\circ$	λ	v. Par. $\varphi + 45 \cdot 72^\circ$
4·14	47·01	4·16	46·92
6·82	48·11	6·83	48·05
9·45	49·14	9·47	49·10
12·07	50·14	12·07	50·11
14·62	51·08	14·62	51·08
17·17	51·96	17·16	51·99
19·69	52·79	19·67	52·84.

¹ Script. rer. Bohem. II, pag. 244 [Prag]. Als Fortsetzung der alten Prager Annalen zu betrachtende selbstständige Chronik des Domherrn Benesch Krabice (gest. 1375). Die Fortsetzung durch Benesch beginnt 1283 und reicht bis 1374.

² Dobner. Mon. hist. Boh. V, 381 [Königsaal]. Von den Äbten Otto und Petrus von Zittau (gest. um 1338) geschrieben. Die letzten Theile zumeist gleichzeitig mit den Ereignissen entstanden.

³ Script. rer. Bohem. II, 129. Copie der vorstehenden werthvollen Chronik.

⁴ Script. rer. Prussic. I, 286 [Königsberg].

⁵ Langebek. IV, 285.

⁶ Ibi VI, 521.

Die böhmischen Berichte bestätigen sowie die übrigen die ungefähr richtige Lage der Zone, ohne aber zu entscheidenden Correctionen Anlass zu geben.

40. 1330 Juli 16. 3^h 23^m 5, total. Ω

Constantinopel.

1. (1330.) Tunc autem circa horam duodecimam, die Julii 16., solis obscuratio facta est non minor decem digitis; observata nempe ab eo qui in parallelo per Byzantium ducto habitaret: quo tempore sol partem Cancri 24. pertransibat. Ejus porro eclipseos observandae initium a medio Jagpyga et Thracia, finis ab initio fere Subsolanus fuit. (*Niceph. Gregoras. Hist. Byzant. lib. IX c. XII.*)¹

Böhmen und Preussen.

2. 1330 Eodem anno Idus Julii fuit eclipsis solis, et bladum atque vinnm male provenerunt. (*Chronic. Benessii de Weitmil.*)²
3. 1330. Eodem anno Idus Julii octava hora diei sol in tantum eclipsatur, ita quod de corpore eius tantum una parva extremitas ad modum lune trium noctium videbatur (*Chronicon Aulae regiae.*)³
4. 1330. Eodem anno Idus Julii hora diei 8. fuit solis eclipsis et siligo in multis locis periit. (*Chron. Francisci.*)⁴
5. Item eclipsis facta est a. d. 1330, XVII. Kal. Aug. (*Canonici Sambiensis epit. gest. pruss. cap. 8.*)⁵
6. 1330. In des selbin jâres vrist darnâch dî sunne leit gebrist in dem heumânde sô man list, daz der oust kumftig ist,

¹ Paris 1702.

² Script. rer. Bohem. II, 258 [Prag].

³ Dobner. Mon. hist. Boh. V, 442 [Königsaal].

⁴ Script. rer. Bohem. II, 165.

⁵ Script. rer. Prussic. I, 287 [Königsberg].

unde pflit sich wenden
 im sibenzên Kalenden;
 an des tagis sechzênder stunt
 wart dirre gebreche kunt.

(*Nicol. von Jaroschin: Kronike von Pruzinlant.*)¹

7. 1330 dicta XVII Kal. Aug. in die apostolorum, post vesperas ante completorium eclipsatus est sol, cuius formam describit in multis verbis ociosis, unde sol in medio propter interpositionem lune niger apparuit et extrema candida ut aurum et duravit in tertiam unius hore. (*Chronik Wigands von Marburg.*)²

Italien, Dalmatien.

8. 1330. Solis et lune eodem anno facta defectio. (*Annale Florentini.*)³
9. 1330. Nel detto anno a dì 16. del mese di Luglio, alquanto dopo l' hora di Vespro, securò il sole quasi la metade nella fine del signo del Cancro, et la opposizione andata dinanzi alla luna, e il sole, scuro la luna nel Sagittario. E poi adè 26. di Decembre vegnente securò tuta la luna nel segno del Cancro (*Histor. Fiorentine di Giovanni Villani, lib. X, c. CLIX.*)⁴
10. 1330. A dì 10. di Luglio il sole oscurosso passato Nona, e non rimase se non la quinta parte, che rendesse splendore. (*Chronica di Bologna.*)⁵

¹ Script. rer. Prussic. I, 620 [Marienburg]. Nicolaus, Caplan des Hochmeisters des deutschen Ordens (14. Jahrh.). Die Chronik hat neben Selbstständigem Vieles aus der Chronik des Peter von Duisburg, deutschen Ordenspriester, über dessen Aufenthaltsort nur Muthmassungen vorhanden sind.

² Ibi II, 475 [Marienburg]. Die Vespera beginnt um etwa 4 Uhr Nachm. das Completorium um 8 Uhr Abends. Wigand (14. Jahrh.) soll Herold des Ordens gewesen sein. Das Werk ist 1394 geschrieben und behandelt vorzüglich die Kriegsgeschichte des Ordens. Beide Chroniken, diese wie die vorhergehende, wurden auf Marienburg bezogen, doch bleibt diese Ortsbestimmung eine höchst unsichere.

³ Böhmer. Font. rer. Germ. IV, 677. [Florenz]. Bis 1364 Auszug aus der folgenden.

⁴ Muratori XIII, 701 [Florenz]. Vorzügliche Geschichte Florenz bis 1363.

⁵ Ibi XVIII, 435 [Bologna].

11. 1330. Sol obscuratus est illo tempore, medio die, et factus est opacus, et obscurus ut luna VIII. patiens eclipsis omnibus de orbe patentibus manifeste. (*Mich. Madii Hist. de Barbaranis, de Spalato c. XXIX.*)¹

Datum der Finsterniss: XVII Kal. Aug. Die in 8 und 9 erwähnte Mondesfinsterniss fand am 23. December 1330 statt. Centralitätszone (Taf I):

Nördgrenze		Südgrenze	
λ	$6 \cdot 89^\circ$ v. Par. $\varphi + 52 \cdot 88^\circ$	λ	$6 \cdot 62^\circ$ v. Par. $\varphi + 52 \cdot 17^\circ$
	9·18		51·68
	11·51		50·47
	13·84		49·20
	16·25		47·96
	18·69		46·70
	21·19		45·42
	23·75		44·15
	26·37		42·85
			8·92
			11·23
			13·61
			16·03
			18·48
			20·99
			23·57
			26·21
			51·00
			49·80
			48·61
			47·38
			46·15
			44·90
			43·65
			42·41.

Der Correctionsbestimmung stehen hier einige Schwierigkeiten entgegen. Die Verfinsterung soll im Parallele von Byzanz zehn Zoll betragen haben; der Beobachtungsort ist nicht genannt, aber wohl dürfte die Beobachtung auf dem Festlande geschehen und also ein Ort westlich von Byzanz gemeint sein. Die beiden Quellen 6. und 7. sind wegen der Unsicherheit der Ortsbestimmung nicht entscheidend. So bleiben zur Entscheidung nur Petrus von Zittau (vermuthlich Zeitgenosse) und die Stadtchronik von Bologna. Da zu Königsaal nach 3. die Finsterniss keinesfalls total war, wie es nach der berechneten Zone der Fall sein würde, sondern vielleicht kaum 11 Zoll betrug, während zu Bologna die Phase immerhin mehr als $9\frac{3}{4}$ Zoll erreicht haben kann, so würde man den bezeichneten Umständen genügen, wenn eine Verschiebung im westlichen Sinne um die Breite der Zone selbst vorgenommen wird, so dass die neue Nordgrenze von der Südgrenze der gerechneten Zone gebildet wird. Da hiemit die Tendenz der in Behandlung befindlichen Finsternissart vom aufsteigenden Knoten in Übereinstimmung steht, so ist die beschriebene Correction von $0^\circ 32'$ acceptirt worden, erhält aber wegen der obwaltenden Unsicherheiten ein geringeres Gewicht.

¹ Schwandtner. Script. rer. Hungar. III, 653 [Spalato].

41. 1339 Juli 7. 1^h 33^m 2 ringf.-total. ☿

Österreich, Deutschland, Island.

1. 1339. Eodem anno non. Julii circa horam vesperam facta fuit eclipsis solis universalis. (*Chron. Claustro-Neoburg.*)¹
2. Selbe Stelle *Contin. Novimontensis.*²
3. 1339 in crastino octavae sancti Petri et Pauli circa horam vesperarum sol eclipsim passus est. (*Chronic. Benessii de Weitmil.*)³
4. 1339. Item anno predicto nonas Julii sol usque ad tertiam partem eclipsim passus est post meridiem et ante vespere fere ad unam horam. (*Chronic. Heinric. Dapifer de Diessenhoven.*)⁴
5. 1339. Anno item praescripto die mensis Julii octava, quae fuit S. Kiliani Martyris festivitàte solemnis, circa meridiem solis defectio fuit et duravit ad spatium ferme duarum horarum (*Trithemii Ann. Hirsaugienses.*)⁵
6. 1339. Eclipsis solis. (*Annales Islandorum regii.*)⁶

Italien.

7. 1339. Eodem anno VII. Julii fuit maxima obscuratio solis paulo post nonas, et in tantum quod vix LX pars solis videbatur. (*Chron. Veronense.*)⁷
8. Nell'anno 1339 a dì 7. di Luglio tra la nona, e vespro scurò il sole nel segno del Cancro più che le due parti; ma perchè fu dopo il meriggio al dicrinare del sole, non si mostrò la scurità, come se fosse notte, ma pure si vede assai tenebroso. (*Historie Fiorentine di Giovanni Villani, lib. XI, c. XCIX.*)⁸

¹ Pez. I, 489 [Klosterneuburg].

² Mon. Germ. Scr. IX, 672 [Neuberg].

³ Script. rer. Bohem. II, 276.

⁴ Böhmer. IV, 33 [Constanz]. Heinrich von Diessenhofen hielt sich von 1338 ab sehr wahrscheinlich in der Constanzener Diözese auf.

⁵ Vol. II, 185 [Hirschau]. Kilian = 8. Juli.

⁶ Langebek. III, 134.

⁷ Muratori. VIII, 653 [Verona].

⁸ Ibi XIII, 833 [Florenz].

Die Zone der Finsterniss findet sich auf Taf. II eingetragen.

Nordgrenze		Südgrenze	
λ	v. Par. $\varphi + 57 \cdot 68^\circ$	λ	v. Par. $\varphi + 57 \cdot 53^\circ$
356·93	56·69	358·97	56·55
359·01	55·66	1·04	55·53
1·07	54·58	3·05	54·43
3·10	53·41	5·08	53·30
5·12	52·20	7·04	52·08
7·09	50·92	9·02	50·82
9·06	49·59	10·98	49·50.
11·02			

Die Lage dieser Zone wird durch die angeführten Quellen nur im Allgemeinen bestätigt. Auf den Florentiner Bericht allein hin lässt sich kaum eine sichere Correction wagen.

42. 1344 October 6. 18^h 21^m 5, ringf. Ω

1. 1344. De eclipsatione solis, nec non et aliorum multorum terribilium in mundo eventorum fuit delusa et frustrata nihil omnino apparuit. (*Chron. Claustro-Neoburg.*)¹
2. 1344. Prophecia de eclipsatione solis et aliorum terribilium eventorum, sicut dudum religiosi et litterati astronomi die et hora certa evenire affirmaverant, sic fuit delusa, ut nihil penitus novi aliquid appareret. (*Contin. Novimontensis.*)²
3. A. D. 1344, mense Sept. propter eclipsim solis terribilem plus solito, futuram seu imminentem VII. die sive nonis Octobris, secundum tenorem epistolae assertive doctorum astronomorum, directum et divulgatum, per plures regiones lamentabilis processiones, devotissima jejunia, aemosynarum largitiones, orationes et obsecrationes obnixissime, praecipue apud Rhenum a populo fiebant (*Johann. Vitodurani Chronicon.*)³

Diese Finsterniss ist, wie schon Struyck bemerkt, nichts weiter als eine nicht eingetroffene Prophezeiung und für die Ver-

¹ Pez. I, 489.

² Mon. Germ. Scr. IX, 673.

³ Eccard. I, 1905.

gleichung mit der Überlieferung völlig unbrauchbar. Denn da die Punkte der Centralität, wie folgt, liegen:

λ	24·0° v. Par.	φ	+40·6°
	83·6		+17·4
	142·2		+ 8·7,

so ist, wie aus Taf. V ersichtlich, die Finsterniss in Europa unsichtbar.

43. 1354 September 16. 21^h 41^m 8, ringf.-total. ☿

Italien.

1. A D. XII. di Settembre 1354 cadde sopra Mompolieri
Et poi a di XVII. del detto mese, fu scurazione del sole, e durò a Firenze una terza ora, coperto nella maggiore parte il corpo solare. Di sua influenza poco potemmo vedere et comprendere, salvo che asciutto e freddo seguitò tutto il verno singularmente. (*Istorie di Matteo Villani Cittadino Fiorentino, lib. IV, c. XXIV.*)¹
2. 1354. Infinitus prope locustarum numerus in Africa Ciproque apparuit Solis facta defectio. (*Annales Florentini.*)²
3. 1354. A di 17. di Settembre in Mercoledì passata mezza Terza si oscurò forte il sole, e durò per ispazio di un' ora e più. (*Chronica di Bologna.*)³
4. 1354. Eodem anno die XVII. Sept. in terris fuit eclipsis solis, durans quasi duabus horis (*Theoderici de Niem Vitae pontif. roman.*)⁴

Die Finsterniss fällt vorzugsweise nach Afrika und den indischen Ocean. Es wurde deshalb keine genauere Zone gerechnet, sondern es genügt für die Beurtheilung der Sichtbarkeit die Angabe der drei Hauptpunkte

λ	326·1° v. Par.	φ	+46·0°
	33·7		+18·5
	93·6		—12·3,

¹ Muratori. XIV, 252 [Florenz].

² Böhmer. IV, 680 [Florenz].

³ Muratori. XVIII, 436 [Bologna].

⁴ Eccard. I, 1506 [Rom].

welche auf Taf. V sich verbunden finden. Das Maximum für Florenz war um 21^h 15^m w. Z. = 10·1 Zoll. Wenn der Ausdruck des Villani „coperto nella maggiore parte il corpo solare“ auf eine starke Bedeckung, etwa auf eine 11zöllige Verfinsternung gedeutet werden muss, so bedürfte die Finsterniss einer entsprechenden Correction.

44. 1385 December 31. 22^h 14^m 0, total. 7

Italien.

1. 1386. Die primo Januarii Dominus Sanctus de Daynisiis Legum Doctor decessit morte naturali hora prandii, et tunc sol obscuratus fuit tali modo, quod oportuit teneri candelas accensas in prandio per totam Bononiam et omnes dicebant, quod erat amore dicti Domini Sancti quia reputabatur non bene legalis. (*Math. de Griffonibus Memoriale hist. de rebus Bononiensium.*)¹
2. Italienische Übersetzung der vorstehenden Stelle in der *Chronica di Bologna*.²
3. Eodem anno scilic. 1389, die primo Januarii sol eclipsatus est fere toto existente tempore nubiloso: quo . . . hora tertiarum necesse fuit accendere lumina in amplissimis domibus et apertis, sicut in aulis Principum et in refectoriis Religiosorum et in Ecclesiis. (*Johannis de Mussis Chron. Placentinum.*)³
4. 1389. Eodem anno de mense Octob. fuit eclipsis solis, taliter quod hora tertiarum fuit necesse accendere luminaria in domibus magnis, in Castro, . . . Et hoc vidi ego in Mediolano. (*Annales Mediolanenses anon. auctoris.*)⁴

Ungarn.

5. Anno vero sexto coronationis in Italia, idem Carolus tertius Ungariae regno potitus, uti profusius infra scribetur, in Alba regali, adstantibus universis regni principibus et episcopis, praesenteque Elisabeta, et Mariae Lodovici regis filia, et

¹ Muratori XVIII, 196 [Bologna].

² Ibi XVIII, 526.

³ Ibi XVI, 552 [Piacenza].

⁴ Ibi XVI, 813 [Mailand].

utraque consentiente, legitime coronatus est: eoque die, qui nonis Decembris erat, tantus solis defectus apparuit, ut nunquam nostro seculo maior exstiterit: quod ad breve tempus regnaturum esse pertendit. (*Antonio Bonfinii Rer. Ungaric. decades quatuor.*)¹

Um die in den Quellen bestehende Verwirrung der Jahresangaben zu beheben, muss bemerkt werden, dass innerhalb des Zeitraumes, welcher hier in Frage kommt, nur folgende drei in Europa sichtbare Finsternisse passend befunden werden können:

	Centralpunkte	
1) 1384 Aug. 17. 1 ^h 6 ^m 2 ringf.-total ²	λ 264·5° v. Par.	φ +47·1°
	347·0	+44·7
	52·8	+16·9
2) 1385 Dec. 31. 22 14·4 total	338·6	+52·9
	23·0	+40·2
	63·4	+57·0
3) 1389 Oct. 19. 5 25·7 partiell		

Demnach verwechselt die Quelle 4 die partielle Finsterniss 3) mit der totalen 2), dagegen gehören die Quellen 1, 2, 3, 5 ein und demselben Objecte an, nämlich der Finsterniss 1385 December 31. Dass sich der Bericht des Bonfinius thatsächlich auf die letztere Finsterniss bezieht, geht daraus hervor, dass Karl von Durazzo nach seiner am 11. September 1385 erfolgten Landung am 31. December desselben Jahres zu Stuhlweissenburg gekrönt wurde. Auf denselben Tag fällt auch die in Rede stehende Finsterniss. Ihre Centralitätszone (Taf. III) ist folgende:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 9·56° v. Par.	φ +42·39°	λ 9·84° v. Par.	φ +39·88°
11·65	42·04	11·89	39·49
13·70	41·74	13·91	39·21
15·73	41·57	15·89	39·02
17·73	41·50	17·86	38·96
19·72	41·51	19·81	38·96
21·71	41·63	21·77	39·08

¹ Basel 1568. Decad. II, lib. IX, pag. 339. Bonfinius, ein Italiener, lebte am Hofe des Mathias Corvinus. Seine Schrift reicht bis 1495.

² Diese Finsterniss findet sich in den Ann. Fossenses (Mon. Germ. Scr. IV, 35) unter der Jahreszahl „1389, mense Augusti, die 17“ erwähnt; die Quelle bedarf daher der Correctur.

Die ausserordentliche Dunkelheit zu Bologna und Piacenza kann zum Theil durch das neblige Wetter (siehe 3) erklärt werden. Doch wird mit Rücksicht auf die unabhängige Stelle 5 noch eine nördliche Correction der Finsterniss nöthig sein. Es wurden $0^{\circ} 40'$ angenommen und dieser Correctur ein geringeres Gewicht beigelegt.

45. 1406 Juni 15. 19^h 11^m 4, total. Ω

Deutschland.

1. 1406. Eclipsis altera die viti. (*Johannis Stadtweg Pappendikensis Chronicon.*)¹
2. 1406. In dussen jare vvas eyne eclipsis der sunnen, so dat der sunnen vorgingk ör schyn, vor primen tyt dages in sunte Vitesdage, dat vvert so düster dat sick de lude eyne den anderen nicht bekennen konden. (*Bothonis Chron. Brunsvic. pictur.*)²
3. A. D. 1406 eclipsis solis fuit in crastina vice hora septima de mane. (*Chron. St. Aegidii in Brunsv.*)³
4. 1406. Facta est eclipsis solis in die sancti Viti martiris hora tertia. (*Notae Altaenses.*)⁴
5. 1406. 16. Kal. Jul. eclipsis solis in crastino sancti Viti. (*Gundechari liber pontif. Eichstetensis.*)⁵
6. 1406 facta est eclipsis solis, proxima die post festum S. Viti martyris. (*Andrae Ratisbonensis et J. Chrafti Chronicon.*)⁶
7. 1406. Anno Friderici, abb. VI. in die S. Viti mane circa horam septimam solis magna fuit eclipsis sive defectio, quam in annis sequentibus praelia, et in comoda plure in regno subsecuta sunt. (*Trithemii Ann. Hirsaugienses.*)⁷
8. A. D. 1406 auf s. Vitustag war dy grosse vinsternisse ober all. (*Bernt Stegmunnns Hanseatische Chronik.*)⁸

¹ Script. Brunsvic. III, 276.

² Ibi III, 395 [Braunschweig].

³ Ibi III, 595 [Braunschweig].

⁴ Mon. Germ. Ser. XVII, 424 [Altaich]. S. Veit = 15. Juni.

⁵ Ibi VII, 253 [Eichstädt].

⁶ Eccard. I, 2126 [Regensburg].

⁷ Vol. II, 324 [Hirschau].

⁸ Script. rer. Pruss. V, 495 [Danzig]. Stegmann war Danziger Bürger.

9. 1406. Ecl. solis notabilis valde facta est in die S. Viti, hora quasi sexta de mane cum magnis et inconsuetis tenebris, ita ut fere nox putaretur, et duravit per quartale unius horae. Homines autem ob insolitam obscuritatem prius non perceptam in stagnalibus partibus multum consternati sunt et territi, timentes mundi finem imminere. (*Hermannii Corneri Chronicon novella.*)¹

Italien.

10. 1406. A di 16. di Giugno fu l'eclisse del sole, e s'oscurarono quasi le tre parti del sole. (*Contin. Chronici Bonon.*)²
 11. 1406. Die XVI. Junii circa decimam horam fuit eclipsatio solis, quae paulo longius quam per horae dimidium perduravit. (*Ann. Estenses Jacobi de Delayto.*)³

Die Darstellung der Finsterniss findet man auf Taf. II:

Nordgrenze		Südgrenze	
λ 0·10° v. Par.	$\varphi + 50\cdot 30^\circ$	λ 1·16° v. Par.	$\varphi + 47\cdot 42^\circ$
2·52	51·74	3·62	48·79
4·93	53·12	6·04	50·14
7·29	54·48	8·42	51·47
9·63	55·80	10·77	52·75
11·95	57·04	13·11	53·99
14·26	58·27	15·42	55·19.

Diese Zone stellt die Berichte befriedigend dar, ein besonderer Anlass zu einer Correction ist nicht gegeben.

46. 1415. Juni 6. 19^h 10^m 3, total. γ

Deutschland.

1. 1415. Facta est eclipsis solis tenebrosa, ita quod sol omnino emisit lumen suum quasi ad duo Miserere-mei, hora sexta diei, septima die mensis Junii. (*Notae Altahense.*)⁴

¹ Eccard. II, 1189 [Westphalen]. Herford's Chronik. Insbesondere westphälische Notizen.

² Muratori. XVIII, 590 [Bologna].

³ Ibi XVIII, 1041 [Este].

⁴ Mon. Germ. Scr. XVII, 424 [Altaich].

2. 1415. 7. Idus Junias visa est eclipsis solis hora diei 7. (*Notae Dissenses.*)¹
3. 1415. Visa autem VII. die Junii apud nos solis eclipsis hora 7. ante meridiem est. (*Achill. Pirmin. Gassari Annales Augsburg.*)²

Österreich, Polen.

4. Item Anno decimo quinto fuit eclipsis solis sexta feria post octavas Corporis Christi, hora sexta de mane quasi media hora. (*Anon. Viennens. Breve Chronic. Austriacum.*)³
5. 1415. Léta božieho 1415, ten pátek po S. Bonifacii ráno proměnilo se slunce a zatmělo. (*Stafj letopisowé česťj od roku 1378 do 1427.*)⁴
6. 1415 Et eodem die hora undecima infra eandem sessionem sol fuit eclipsatus et quasi tenebre facte, de quo non modicum licet naturaliter contingebat territi fuerunt quam plures. (*Chronicon Universitatis Pragensis.*)⁵
7. 1415. VI. tertia post octavam corporis Christi, XI. hora vel quasi fuit sol obscuratus. (*Ex cod. univers. Prag.*)⁶
8. 1415. Item septima die menses Junii, quae erat feria VI. post Bonifacii hora XI. eclipsatus est totus sol, ita quod non poterant misse sine luminibus celebrari. In signum quod sol iustitiae Christus in cordibus Prelatorum multorum ad mortem magistri Johannis Hus de proximo per Concilium mortificandi anhelantium, fuit obscuratus. (*Magister Laurentius de Březina. De gestis et variis accidentibus regni Boemiae.*)⁷
9. 1415. Anno quo supra feria sexta post Corporis Christi, hora tertiarum, adeo notabilis eclipsis solis fuit, ut alites subita caligine deterrite, in terram deciderent. Et sidera

¹ Mon. Germ. Scr. XVII, 327 [Diessen].

² Menken. I, 1555 [Augsburg].

³ Pez. II, 549. Frohnleichnam = 30. Mai.

⁴ Script. rer. Bohem. III, 20. Bonifacius = 14. Mai.

⁵ Fontes rerum austriacarum Script. II, part. 1, pag. 34 [Prag].

⁶ Ibi VI, 64 [Prag].

⁷ Ibi II, part. 1, pag. 333 [Prag.] Handelt an dieser Stelle von spez. Prager Ereignissen.

non secus, quam nocte collucerent. (*Math. de Michova Chron. Polonorum, lib. IV c. LI.*)¹

Italien.

10. 1415 Eodem anno fuit eclipsis solis parva, die VIII. Junii, die Veneris, in revolutione lunae: et sol tunc erat in signo Geminorum in gradu 23, et fuit ad duas horas diei. (*Chron. Foroliviense.*)²

Datum der Finsterniss: VII. Idus Jun. feria VI. Die Finsterniss fiel im centralen Böhmen 3^h 14^m nach Sonnenaufgang, also in die 4. Tagesstunde. Centralitätszone (Taf. III):

Nördlich		Südlich	
λ 9·61° v. Par.	φ + 49·26°	λ 10·48° v. Par.	φ + 46·56°
12·04	50·25	12·89	47·55
14·43	51·20	15·27	48·50
16·83	52·11	17·65	49·41
19·21	52·98	20·02	50·28
21·58	53·80	22·36	51·10.

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist hier eine hinreichende.

¹ Polonicae Histor. Corpus. II, 204 [Krakau].

² Muratori. XIX, 885.

Zur Kenntniss der Azyline.

Von E. Lippmann und F. Fleissner.

(Mittheilung aus dem Universitäts-Laboratorium im Conviktgebäude
in Wien.)

III. Mittheilung.

(Mit 1 Holzschnitt.)

Einwirkung von Methyljodid auf Diäthylanilinazylin.

Dieselbe verläuft wesentlich verschieden wie jene des Äthyljodids, welche wir bereits in einer früheren Mittheilung¹ beschrieben haben. Das Azylin wird mit vier Molekülen Jodmethyl und etwas Methylalkohol im zugeschmolzenen Rohre auf 100° erhitzt. Der Röhreninhalt färbt sich zuerst grün, dann braun und erstarrt schliesslich zu einer Krystallmasse, welche, nachdem sie in Wasser gelöst, zur Syrupconsistenz eingedampft wurde.

Hierbei scheidet sich ein harzartiger Rückstand aus, der wiederholt mit Wasser ausgekocht wurde, welche Lösungen bis zum Beginn der Krystallisation eingedampft mit Alkohol ausgefällt wurden.

Nach wiederholtem Umkrystallisiren aus Weingeist erhielt man weisse glänzende Nadeln, die sich unter dem Mikroskop als durchsichtige vierseitige Prismen präsentirten, vom Schmelzpunkt 218° C. und als Dijodmethylat des Dimethyldiäthylparaphenylen-diamins anzusehen sind.

- I. 0·2729 Grm. gaben 0·35 Grm. Kohlensäure und 0·1284 Grm. Wasser.
 II. 0·2305 Grm. gaben 0·2975 Grm. Kohlensäure und 0·1185 Grm. Wasser.
 I. 0·3077 Grm. gaben 0·302 Grm. Jodsilber.
 II. 0·2265 „ „ 0·2220 Grm. Jodsilber.

¹ Diese Monatshefte Aprilheft.

In 100 Theilen:

	Gefunden:		Berechnet für:
	I	II	$C_{14}H_{26}N_2J_2$
C	34·98	35·2	35·29
H	5·22	5·7	5·46
J	53·40	53·03	53·30

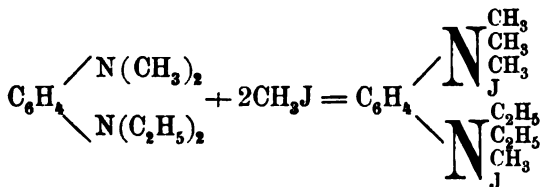
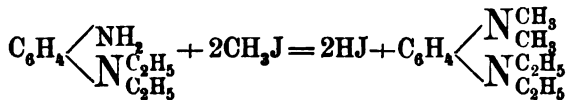
Dieses Jodid gibt mit Cadmiumjodid Quecksilberjodid in Jodkalium gelöst gut charakterisirte Verbindungen. Die Cadmiumverbindung krystallisirt in weissen, seideglänzenden in heissem Wasser löslichen Nadeln, die aus letzterem Mittel umkrystallisirt werden konnten.

0·2468 Grm. gaben mit Schwefelsäure befeuchtet und erhitzt 0·0600 Grm. Cadmiumsulfat.

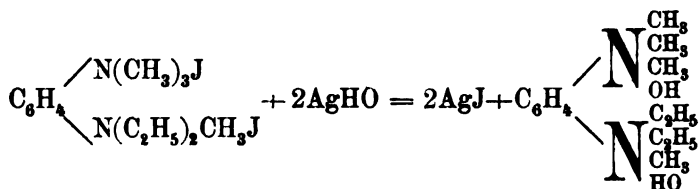
0·3398 Grm. gaben 0·2443 Grm. Kohlensäure, 0·0973 Grm. Wasser.

	Gefunden	Berechnet für:
		$C_{14}H_{26}N_2J_2 + CdJ_2$
C	19·7	19·95
H	3·1	3·08
Cd	13·07	13·30

Die Bildung dieses Ammoniumjodids ist leicht verständlich, wenn man annimmt, wie wir dies bereits in unserer früheren Mittheilung thaten, dass das Azylin durch secundäre Einwirkung der Jodwasserstoffsäure zunächst in das Diäthylparaphenylen-diamin verwandelt wird, hierin die beiden Wasserstoffe durch Methylgruppen ersetzt werden, sich aber an die beiden Stickstoffatome gleichzeitig zwei Moleküle Jodmethyl anlegen.



Das Tetramethyldiäthylparaphenylenammoniumjodid ist in H_2O sehr leicht, in Alkohol schwer, in Äther unlöslich, kann durch concentrirte Kalilauge nicht, wohl aber mit Silberoxyd sofort zersetzt werden, wodurch eine Base in Lösung geht, die stark alkalische Reaction zeigt, rasch Kohlensäure aus der Luft anzieht, auf die Haut gebracht ätzend wirkt; Silber, Blei, Kobaltsalze fällt kurz den prägnanten Charakter der Ammoniumbasen besitzt. Dampft man rasch eine wässrige Lösung der Base ein, so erhält man ein ausserordentlich hydropisches, dickes Öl, das Tetramethyldiäthylparaphenylenammoniumoxydhydrat.



Chloroplatinat. Dasselbe stellt orangerothe Kryställchen vor, die aus salzsäurehaltigem Wasser umkrystallisirt wurden.

0·2322 Grm. gaben 0·2203 Grm. Kohlensäure und 0·0825 Grm. Wasser.

0·2685 Grm. gaben geglüht 0·0827 Grm. Platin.

0·3635 Grm. gaben mit Ätzkalk geglüht etc. 0·4927 Grm. Jod-silber.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{14}H_{26}N_2PtCl_6$
C	27·04	26·7
H	4·23	4·1
Pt	30·80	30·88
Cl	33·53	33·8

Goldsalz. Versetzt man das Chlorhydrat der Ammoniumbase mit Goldchlorid, so fällt sofort ein hellgelber, in Wasser schwer löslicher Niederschlag heraus, der nur durch Umkrystallisiren aus sehr viel heissem Wasser in schönen gelben Blättchen erhalten werden kann.

0·2885 Grm. gaben geglüht 0·1346 Grm. Gold.

Gefunden	Berechnet für $C_{14}H_{26}N_2Cl_2Au_2Cl_6$
Au 43·68	43·6

Pikrat. Dieses ebenfalls in kaltem Wasser schwer lösliche Salz wurde durch Fällen der Ammoniumbase oder des entsprechenden Jodids durch Pikrinsäurelösung und Umkrystallisiren in hellgelben Nadelchen, die unter Zersetzung bei 235° C. schmelzen, dargestellt.

I. 0·1623 Grm. gaben 0·2742 Grm. Kohlensäure und 0·0683 Grm. Wasser.

II. 0·2325 Grm. gaben 0·3934 Grm. Kohlensäure und 0·0960 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $C_{14}H_{26}N_2 + 2C_6H_2(NO_2)_3O$
	I	II	
C	46·07	46·1	46·01
H	4·67	4·58	4·45

Darstellung der Ammoniumbase aus Diäthylparaphenyldiamin.

War die oben angeführte Ansicht über die Constitution der Ammoniumbase richtig, so sollte dieselbe durch Methylierung des Diäthylphenyldiamins unter gleichzeitiger Anlagerung zweier Moleküle Jodmethyl erhalten werden können. Dieses letztere musste zunächst in das noch nicht dargestellte Dimethyldiäthylphenyldiamin übergeführt werden, zu diesem Zwecke wurde das Diaethylphenyldiamin mit Holzgeist und Salzsäure auf 200° C. erhitzt (10 Grm. Base mit 8 Grm. Holzgeist und 8 Grm. Salzsäure).

Der flüssige Röhreninhalt wird mit Kalilauge gefällt, das sich abscheidende Öl getrocknet und fractionirt.

Der bei 263—65 siedende Antheil erwies sich als die gewünschte Base.

0·1417 Grm. gaben 0·3875 Grm. Kohlensäure und 0·135 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_4 \begin{matrix} N(C_1H_5)_2 \\ N(CH_3)_2 \end{matrix}$
C.....	74·57	75·00
H.....	10·57	10·41

Dieselbe erhält man als schwach gelb gefärbtes Öl, welches sich an der Luft bräunt und wie die übrigen Derivate des Paraphenyldiamins gegen Oxydationsmittel ein sehr charakteristisches Verhalten zeigt. Mit Kupfersulfat, Kaliumchromat, Jod, Chlorkalklösung etc. erhält man eine tiefblaue Färbung.

Als wir nun dieses Dimethyldiäthylphenyldiamin neuerdings mit Jodmethyl in der Wärme behandelten, erhielten wir ein in kleinen Nadelchen krystallisirendes Jodid. Dasselbe erwies sich nach wiederholtem Umkrystallisiren aus Weingeist als Tetramethyldiäthylparaphenylencimmoniumjodid

I. 0·3070 Grm. gaben 0·3012 Grm. Jodsilber.

II. 0·3110 „ „ 0·3066 „ „

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $C_{14}H_{26}N_2J_2$
	I	II	
J... ..	53·19	53·15	53·30

Mit Silberoxyd erhielten wir hieraus die identische Ammoniumbase, deren Platin und pikrinsaures Salz wir untersuchten.

Chloroplatinat. I. 0·3028 Grm. gaben beim Glühen 0·0934 Grm. Pt.

II. 0·297 Grm. gaben beim Glühen 0·0918 Grm. Pt.

	Gefunden		Berechnet für $C_{14}H_{26}N_2 + PtCl_6$
	I	II	
Pt.....	30·84	30·91	30·88

Pikrat. 0·2122 Grm. gaben 0·3583 Grm. Kohlensäure und 0·0778 Grm. H₂O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{14}H_{26}N_2 + 2C_6H_5(NO_2)_3O$
C.....	46·02	46·01
H.....	4·07	4·45

Oxydation des Diäthylanilinazylins.

Die Azyline sind gegen schwache Oxydationsmittel sehr beständig, an der Luft verändern sie sich, selbst über ihren Schmelzpunkt erhitzt, beinahe gar nicht. Kaliumpermanganat wirkt in alkalischer Lösung langsam, in saurerer hingegen heftig ein. Chromsäure, Braunstein und Schwefelsäure, sowie Bleisuperoxyd bewirken stürmische Reaction.

Zu 10 Grm. des Azylins, welches in Wasser suspendirt war, wurde langsam eine Lösung von bekannten Mengen Kaliumpermanganat zuffliessen gelassen, wobei die Farbe der Flüssigkeit verschwindet. Da die Reaction bald träge wurde, musste sie durch Erwärmen unterstützt werden.

Nach Verlauf von zwei Tagen hatte man 60 Grm. Permanganat verbraucht, wo dann die klare Lösung roth gefärbt war.

Nachdem die abfiltrirte Flüssigkeit, welche stark alkalisch reagirte, und kohlensaures, essigsäures, sowie oxalsaures Kalium und freies Ammon enthielt, auf dem Wasserbade eingeeengt war, wurde ein aliquoter Theil desselben mit Phosphorsäure destillirt. Das stark sauer reagirende Destillat wurde nach der Neutralisation mit NH_3 mit Silbernitrat gefällt und der Niederschlag, silberglänzende Blättchen, erwies sich bei der Analyse als Silberacetat.

0·3035 Grm. gaben geglüht 0·1955 Grm. Silber.

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für $\text{C}_2\text{H}_3\text{AgO}_2$
Ag. 64·4	64·67

Der Nachweis der Äthylgruppe ist durch jenen der Essigsäure, welche sich hierbei in beträchtlicher Menge bildet, als erbracht anzusehen.

Die Oxalsäure wurde durch die Analysen des Silber- wie Calciumoxalates identificirt. Das erstere zeigte beim Glühen die für dasselbe so sehr charakteristische explosive Eigenschaft.

Silberoxalat. 0·303 gaben 0·2857 Grm. ClAg .

Gefunden	Berechnet für $C_2O_4Ag_2$
A. 70·83	71·05

Calciumoxalat. 0·3234 gaben, heftig wiederholt geglüht, 0·124 Grm. Ätzkalk.

Gefunden	Berechnet für C_2O_4Ca
CaO 38·34	38·36

Verwendet man als Oxydationsmittel Chromsäure oder ein Gemenge von Kaliumbichromat und Schwefelsäure, so bilden sich unter Schäumen und eigentümlichem, dem Chlor ähnlichen Geruche kleine, gelbe mit Wasserdampf leicht flüchtige, in Äther lösliche Nadeln, die wahrscheinlich Chinon sind. Ihre Ausbeute ist aber eine spärliche.

Verhalten des Diäthylanilinazylin gegen Salpetersäure.

Trägt man in stark abgekühlte, rothe Salpetersäure, von 1·5 Dichte, langsam das Azylin ein, so löst sich dieses auf und man erhält beim Verdünnen der Lösung mit Wasser rothe, glänzende Nadeln mit braunen unerquicklichen Nebenproducten verunreinigt. Ihre Analyse zeigte, dass hier das Dinitroderivat des Diäthylanilins entstanden sei.

Viel leichter und bei weit besserer Ausbeute erfolgt dieselbe Reaction, wenn man gewöhnliches Salpetersäurehydrat in eine eisessigsäure, gut gekühlte Azylinlösung einträgt, man fällt mit Wasser und krystallisirt aus Alkohol. Man erhält orangerothe Nadeln, Schmelzpunkt $80^\circ C.$, die leicht löslich in heissem Alkohol, Benzin, Äther, schwer dagegen von Ligroin aufgenommen werden.

I. 0·1763 Grm. gaben 0·325 Grm. CO_2 und 0·0899 Grm. Wasser.

II. 0·2248 Grm. gaben 0·4131 Grm. CO_2 und 0·1153 Grm. Wasser.

0·1555 Grm. gaben bei $30^\circ C.$ und 745 Mm. Barometerstand 25·5 CC. Stickstoff.

	Gefunden		Berechnet für
	I.	II. ¹	$C_6H_3(NO_2)_2(C_2H_5)_2N$
C	50·23	50·11	50·26
H	5·66	5·69	5·44
N	17·45	—	17·60

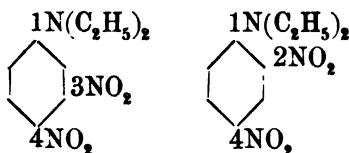
Platinsalz. Fällt man eine stark salzsaure Lösung des Dinitrodiäthylanilins mit Platinchlorid, so erhält man einen lichtgelben krystallinischen Niederschlag, der mit concentrirter Salzsäure gewaschen wurde.

0·239 Grm. gaben geglüht 0·0523 Grm. Platin.

Gefunden	Berechnet für
	$[C_6H_3(NO_2)_2(C_2H_5)_2NHCl]_2 + PtCl_4$
Pt 21·88%	21·9

Ist nun dieses Dinitrodiäthylanilin identisch mit einem schon bekannten Nitroproduct und welche Stellungen nehmen die beiden NO_2 Gruppen ein?

Nachdem wir bereits früher bei der Einwirkung der salpetrigen Säure bewiesen haben, dass dem Azylinstickstoff die Parastellung zukommt, und man, ohne gewagte Hypothesen zu machen, annehmen kann, dass die durch Oxydation entstandene Nitrogruppe dieselbe Stellung beibehält, so waren nur zwei Isomere möglich, als 1, 3, 4 und 1, 2, 4.



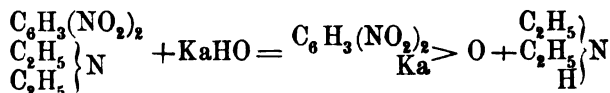
P. von Romburgh hat vor einiger Zeit ein solches bei 80° schmelzendes Dinitrodiäthylanilin beschrieben².

Derselbe stellte es dar durch Einwirkung von 3 Vol. rother Salpetersäure (1·48) auf 1 Vol. Diäthylanilin in 2 Vol. concen-

¹ Dieses Präparat war, wie aus Folgendem ersichtlich wird, durch Nitriren von Diäthylanilin bereitet worden.

² Ber. d. deutsch. chem. Ges. 16. 1496, 1376.

trirter Schwefelsäure gelöst. Wir haben dieses so bereitete Nitroproduct mit jenem aus Azylin dargestellten verglichen. Wir fanden Schmelzpunkt-Verhalten gegen Kali vollkommen gleich bei beiden Präparaten. Nach Romburgh's Erfahrungen spaltet sich durch kochende Lauge das Dinitroderivat:



in Dinitrophenol und Diäthylamin. Wir haben nun das aus Azylin dargestellte Präparat einer gleichen Behandlung unterworfen. Nur sehr contrirte Lauge zersetzt dieses unter Bräunung; gleichzeitig entweicht ein Gemenge von Ammoniak und Diäthylamin, gleichgiltig, ob man von einem aus Diäthylanilin oder Azylin bereiteten Dinitroproduct ausgeht. Ebenso bildet in beiden Fällen der Rückstand eine dunkle, durch Harz verunreinigte, schwer fassbare Masse. Die hierbei entweichenden, stark alkalisch reagirenden Dämpfe wurden von verdünnter Salzsäure absorbirt, zur Trockne eingengt, mit Platinchlorid ausgefällt, der Niederschlag aus sehr viel heissem Wasser umkrystallisirt.

Wir erhielten eine schöne Krystallisation, die sich als Platinsalmiak erwies.

I. 0·3005 gaben geglüht 0·131 Grm. Platin.

II. 0·451 " " 0·1977 Grm. Platin.

	Gefunden		Berechnet für
	I ¹	II ²	(NH ₄ Cl) ₂ +PtCl ₄
Pt.	43·6	43·83	43·82

In der Mutterlauge befand sich ein weit löslicheres Platinsalz, welches, organischer Natur, mit Natronlauge gekocht, ein brennbares Gas lieferte.

I. 0·3094 Grm. gaben geglüht 0·1072 Grm. Platin.

II. 0·2486 " " " 0·0861 " "

¹ Aus Diäthylanilin bereitet.

² Aus Azylin dargestellt.

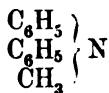
Gefunden		Berechnet für
I ¹	II ²	$\left[\begin{array}{l} \text{C}_9\text{H}_5 \\ \text{C}_2\text{H}_5 \\ \text{H} \end{array} \right] \text{NHCl} \Big]_2 + \text{PtCl}_4$
Pt. 34·64	34·64	35·0

Da nun nach Romburgh das bei dieser Reaction entstehende Dinitrophenol, das gewöhnliche ist (1, 2, 4), Schmelzpunkt 113—14° C., so muss die Stellung der Nitrogruppen im entsprechenden Anilinderivat ebenfalls mit 1, 2, 4 bezeichnet werden.

Azyline der tertiären Diphenylamine.

Das zu diesem Zweck nothwendige Methyl- und Äthylderivat wurden nach der Methode von Girard dargestellt. Nachdem man Diphenylamin mit der entsprechenden Menge des Alkyljodids und Alkohol erhitzt hatte, wurde der feste Röhreninhalt mit Kalilauge versetzt, die sich als Öl ausscheidende Base, mit etwas unverändertem Diäthylamin gemengt, abgehoben, dieses Gemenge mit concentrirter Salzsäure behandelt, wodurch das Diphenylamin zurtückbleibt, während die tertiäre Base im Filtrate mit Kalilauge gefällt wird.

Die so dargestellte Methylverbindung



zeigt den bekannten Siedepunkt 282° C., während die analoge Äthylverbindung constant bei 285—87° C. anstatt, wie allgemein angegeben wird, bei 295—97° C. übergang.

Leitet man Stickoxyd durch eine alkoholische Lösung eines solchen tertiären Diphenylamins, so färbt sich der Alkohol bald braunroth, nach längerer Zeit erfolgt eine krystallinische Ausscheidung des Azyline, hierauf oder vielmehr gleichzeitig, die

¹ Aus Diäthylanilin bereitet.

² Aus Azylin dargestellt.

Bildung von farbigen, secundären Nebenproducten, welche die Ausbeute an Azylin sehr beeinträchtigen.

Die Azyline dieser Reihe sind schwach basische Körper, bilden keine Salze oder Doppelverbindungen, mit Salzsäure entsteht eine blauviolette, mit Essigsäure eine grüne Färbung, welche Reactionen einen grossen Grad von Empfindlichkeit besitzen.

Methyldiphenylaminazylin.

Gelbe Krystalle, die unzersetzt bei 150° C. schmelzen, in kalten Alkohol sehr schwer, dagegen in Chloroform und Benzol leicht löslich sind.

0·1955 Grm. gaben 0·5701 Grm. Kohlensäure und 0·1095 Grm. Wasser.

0·1577 Grm. gaben bei 30° C. und 745 Mm. Barometerstand 21·5 Cm. Stickstoff.

In 100 Theilen:

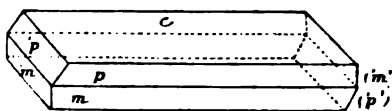
	Gefunden	Berechnet für $C_6H_4N=NC_6H_4$ $\left. \begin{matrix} C_6H_5 \\ CH_3 \end{matrix} \right\} NN \left\{ \begin{matrix} C_6H_5 \\ CH_3 \end{matrix} \right.$
C	79·51	79·52
H	6·22	6·12
N	14·50	14·28

Äthyldiphenylaminazylin.

Dasselbe scheidet sich in rothen Krystallen aus einer alkoholischen Lösung aus, dieselben schmelzen unzersetzt bei 178° C. Herr F. Schorschmidt, der die Messung desselben im mineralogischen Museum des Herrn Prof. Schrauf vorgenommen, theilt mir hierüber Folgendes mit:

Die Substanz liegt in 4—8 Mm. grossen röthlichbraunen Krystallen vor, die nach der Basisfläche tafelförmig entwickelt sind und gut ausgebildete Flächen mit genau messbaren Winkeln aufweisen. Der Charakter derselben ist monosymmetrisch; die einfache Form ist eine Combination von der tafelförmigen Basisfläche *c*(*oos*) einer Hemipyramide *p*(111) und dem Prisma *m*(110) und dessen Gegenflächen. Das Axenverhältniss ist $a : b : c = 0·206106 : 1 : 1·1826 \eta = 92^\circ 29' 30''$.

	Beobachtet	Gerechnet
$cp..$	$52^{\circ} 16' 7''$	—
$cm..$	$88^{\circ} 53' 40''$	—
$'m:m..$	$127^{\circ} 27' 30''$	—
001:101..	—	$29^{\circ} 14' 9''$
100:001..	—	$87^{\circ} 30' 10''$
101:111..	—	$45^{\circ} 11' 22''$
$p:p..$	$90^{\circ} 18'$	$90^{\circ} 22' 44''$



Die einzelnen Individuen erscheinen im Mikroskope mit kleineren Kryställchen besetzt, die gut zur Entwicklung gekommen sind. Die Doppelbrechung ist sehr stark, in

Folge dessen bekommt man je ein unterseits anklebendes Kryställchen wie beim Kalkspath in zwei Bildern zu sehen, die verschieden gefärbt sind. Die Axen treten an der Basisfläche nicht aus. Schwingungen parallel der Symmetrieebene rufen einen braunen (Radde 3 Zinnober k), solche parallel zur Orthoaxe einen hell gelben (Radde 6 Orange 2 Übergang nach Gelb s) Farbenton hervor.

Analysen. 0·1607 Grm. gaben 0·4704 Grm. Kohlensäure und 0·1003 Grm. Wasser.

0·1537 Grm. gaben bei 29° C. und 743 Mm. Barometerstand 19 CC. Stickstoff.

In 100 Theilen:

Gefunden	Berechnet für
C	$C_6H_4N = NC_6H_4$
H	$C_6H_5 \left. \begin{array}{l} \text{NN} \\ C_2H_5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} C_6H_5 \\ C_2H_5 \end{array}$
N	
79·83	80·0
7·11	6·66
13·1	13·4

Versuche über den Stoss von Kautschukcylindern.

Von **Victor Hausmaninger**,
Assistent am physikalischen Institute in Graz.

(Mit 2 Holzschnitten.)

Herr Reg. Prof. Boltzmann hat im LXXXIV. Bande der Wiener Sitzungsberichte (II. Abth. Dec.-Heft 1881) „einige Experimente über den Stoss von Cylindern“ veröffentlicht, aus denen zweifellos hervorgeht, dass der Erfolg des Stosses zweier prismatischer Stäbe im Sinne einer bekannten Theorie von Cauchy (Soc. phil. 1826) und St. Venant (C. r. LXIII 1108, LXIV 1009, 1192, LXVI 650, 877 Lionv. Jo. XII 237) ausser von den Massen auch von der Zeit der Rückkehr der Longitudinalwelle bedingt ist, die durch den Stoss in jedem Stabe entsteht und an den freien Stabenden reflectirt wird.

Aus den Versuchsergebnissen folgt jedoch zugleich, dass dieser Einfluss bei weitem kein so bedeutender ist, als ihn die genannte Theorie erfordert. Seitdem hat Herr W. Voigt (W. Voigt, „die Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe“ Wiedem. Ann. Bd. XIX n. F. p. 44; Berl. Berichte 22. Juni 1822) eine grosse Anzahl werthvoller Beobachtungen über diesen Gegenstand publicirt, welche qualitativ mit diesen Versuchen insofern übereinstimmen, als sie ebenfalls eine Abweichung von den gewöhnlichen Stossformeln im Sinne der St. Venant'schen Theorie ergeben, die jedoch viel kleiner ist, als es durch letztere Theorie gefordert würde. Herr Voigt schliesst seinen Versuchen eine Theorie an, welche den Übergang zwischen den alten Stossformeln und den Cauchy-St. Venant'schen zu vermitteln vermag. Da Herr Voigt gegen die Boltzmann'schen Versuche den Einwurf erhebt, dass bei denselben das Verhältniss der Querdimensionen gegen die Längsdimensionen zu gross gewesen sei,

nahm ich auf Veranlassung des Herrn Prof. Boltzmann die Versuche mit ähnlichen Kautschukstäben, wie sie derselbe benützt hatte, aber mit grösseren Längendimensionen wieder auf. Das Verhältniss des Durchmessers zur Länge war bei den dickeren Stäben 1:10, bei den dünneren 1:28·5.

Eine noch weitere Verkleinerung des Verhältnisses ist wegen der Schwierigkeit, so lange Stäbe aus Kautschuk auch nur einigermassen gerade zu erhalten, kaum möglich.

Die Stäbe waren auch aus möglichst frischem und weichem Kautschuk fabricirt; um einen etwaigen Einfluss des Materials zu constatiren, machte ich auch Versuche mit den zu den früheren im Jahre 1881 angestellten Beobachtungen benutzten und schon etwas hart gewordenen Stäben, welche jedoch noch genau die alten Resultate lieferten.

Die Aufhängevorrichtung zur Erzielung eines möglichst coaxialen Stosses und die Methode der Versuche war im Allgemeinen dieselbe, wie früher. Jedoch schien es bei der doppelt so grossen Länge, um eine etwaige Verbiegung der hängenden Stäbe auf ein Minimum zu reduciren, zweckmässig, dieselbe statt an zwei, an vier Paaren feinen Zwirnsfäden aufzuhängen.

Die Beinblättchen, mit denen die Stäbe an einem Ende wieder versehen waren, besaßen an der einen, freien Seite eine ziemlich convexe Oberfläche, so dass die Berührung nahezu in einem Punkte geschah, was jedoch bei der viel grösseren Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Bein nicht hinderte, dass beim Stoss die ganzen Endflächen der Stäbe aufeinander drückend wirkten. Der stossende Stab wurde in derselben Weise wie früher mittelst eines horizontalen Fadens um ein gemessenes Stück H (die Hubhöhe) aus seiner Ruhelage entfernt und losgelassen, der Ausschlag S des gestossenen Stabes aber in folgender Weise beobachtet:

Unmittelbar unter den Stäben, parallel mit ihrer Axe war eine aus sehr glattem Glanzpapier bestehenden Millimeterscala aufgestellt, auf deren Theilung ein kleiner, rechtwinklig gebogener und zur Vermeidung einer Verbiegung mit einer schrägen Stütze versehener Streifen (Fig. 1) aus sehr glattem, steifem Papier unmittelbar vor der Endfläche des gestossenen Stabes etwa beim Theilstrich a auf-



gesetzt und durch den gestossenen Stab mit minimaler Reibung vor sich hergeschoben werden konnte. Wurde der Papierstreifen etwa bis zum Theilstrich *b* verschoben, wo er natürlich ruhig stehen blieb, so gab die Differenz *b*—*a* unmittelbar den Ausschlag *S* des gestossenen Stabes an.

Controlversuche ergaben, dass die Dämpfung, welche der gestossene Stab durch die Reibung des auf der Scala gleitenden Papierstreifens erfuhr, eine verschwindend kleine war. Ich konnte auf diese Weise die Bewegung des gestossenen Stabes ganz ignoriren und dafür das Zurückspringen respective Nachgehen des stossenden Stabes mittelst Fernrohr bequem beobachten.

In den Tabellen gibt *s* die Strecke an, um welche der stossende Stab dem gestossenen stets nachging. *P* bedeutet die Differenz zwischen dem aus je drei Beobachtungen resultirenden mittleren Ausschlag und der Hubhöhe in Percenten der letzteren ausgedrückt, also

$$P = \frac{H - S}{H} \cdot 100.$$

Die Dimensionen der Stäbe waren folgende:

	Länge	Durchmesser	Gewicht
Stab <i>A</i>	198 Mm.	20 Mm.	69·81 Grm.
" <i>A'</i>	201·3	20	69·85
" <i>B</i>	399·5	14	70·13
" <i>B'</i>	397·0	14	70·19
	ohne Beinblättchen		samt Aufhängehaken und Beinblättchen

$$H = 100 \text{ Mm.}$$

Stäbe gleich lang				Stäbe ungleich lang			
Stab	<i>S</i>	<i>s</i>	<i>P</i>	Stab	<i>S</i>	<i>s</i>	<i>P</i>
<i>A</i>	85·5	10	14·7	<i>A</i>	78·5	18	21·7
auf	85·5	11		auf	78·0	18	
<i>A'</i>	85·0	10		<i>B'</i>	78·5	18	

Stäbe gleich lang			
Stab	<i>S</i>	<i>s</i>	<i>P</i>
<i>A'</i>	85	12	} 15·0
auf	85	13	
<i>A</i>	85	12	
<i>B</i>	83·5	14	} 16·2
auf	84	14	
<i>B'</i>	84	13	

Stäbe ungleich lang			
Stab	<i>S</i>	<i>s</i>	<i>P</i>
<i>B'</i>	78	18	} 22·0
auf	78	18	
<i>A</i>	78	18	
<i>A'</i>	77·5	18	} 22·5
auf	77·5	18	
<i>B'</i>	77·5	18	

H = 100 Mm.

Stäbe gleich lang			
Stab	<i>S</i>	<i>s</i>	<i>P</i>
<i>B'</i>	83·5	14	} 16·2
auf	84·0	14	
<i>B</i>	84·0	13	

Stäbe ungleich lang			
Stab	<i>S</i>	<i>s</i>	<i>P</i>
<i>B'</i>	77·0	17	} 22·7
auf	77·5	17	
<i>A'</i>	77·0	17	
<i>A'</i>	77	16	} 23·4
auf	76·5	16	
<i>B</i>	76·5	17	
<i>B</i>	77	17	} 23
auf	77	16	
<i>A'</i>	77	16	

$$H = 50 \text{ Mm.}$$

Stäbe gleich lang				Stäbe ungleich lang			
Stab	<i>S</i>	<i>s</i>	<i>P</i>	Stab	<i>S</i>	<i>s</i>	<i>P</i>
<i>A</i>	42	5	} 16	<i>A'</i>	38·5	10	} 22·8
auf	42	5		<i>auf</i>	38·5	11	
<i>A'</i>	42	5		<i>B'</i>	39·0	11	
<i>A'</i>	42	6	} 16	<i>B'</i>	38·0	9	} 23·4
auf	42	6		<i>auf</i>	38·5	9	
<i>A</i>	42	5		<i>A'</i>	38·5	9	
<i>B</i>	41	6	} 18	<i>A'</i>	38·5	11	} 23·4
auf	41	6		<i>auf</i>	38·5	11	
<i>B'</i>	41	6		<i>B</i>	38·0	11	
<i>B'</i>	41·5	7	} 17	<i>B</i>	38·0	12	} 24
auf	41·5	6		<i>auf</i>	38·0	11	
<i>B</i>	41·5	6		<i>A'</i>	38·0	11	

Obige Zahlen zeigen noch deutlicher, als dies bei den Versuchen mit den kürzeren Stäben der Fall war, dass bei ungleicher Länge der gestossene Stab eine geringere Geschwindigkeit erhielt, als bei gleicher Länge. Aber der Unterschied ist noch immer ein zu geringer, als dass er mit der St. Venant'schen Theorie in Einklang zu bringen wäre.

In der citirten Abhandlung erklärt Herr Voigt, dass beim Stosse ein nicht unwesentlicher Einfluss der umgebenden Luft in der Weise sich geltend mache, dass bei Beginn des Stosses eine Verdichtung, während der Trennung aber eine und zwar energischere Verdünnung entstehe und gründet seine Behauptung auf die bei zweien seiner Stäbe auftretende Thatsache, dass der stossende Stab dem gestossenen etwas nachging. Dafür

spricht allerdings und zwar in noch grösserem Masse das auch bei meinen Versuchen consequent auftretende, namentlich bei ungleich langen Stäben ziemlich bedeutende Nachgehen des stossenden Stabes.

Herr Voigt corrigirt in diesem Falle seine Resultate einfach dadurch, dass er den Betrag, um den der stossende Stab nachgeht, zum Ausschlag des gestossenen addirt. Ich habe aber eine derartige Correction vorläufig unterlassen, da mir noch zu wenig Anhaltspunkte für ihre Berechtigung vorzuliegen scheinen. Es ist dies der Grund, wesshalb ich immer Stäbe von gleicher Masse stossen liess, da in diesem Falle kaum eine Ursache vorhanden sein dürfte, wesshalb die durch den Luftwiderstand oder durch andere störende Umstände veranlassten Fehler für Stäbe von gleicher Länge andere sein sollten als für Stäbe von ungleicher Länge. Die Differenz, die ich für diese zwei Fälle fand, dürfte also jedenfalls von inneren durch die Elastizität bedingten Vorgängen in den Stäben herrühren, wenn auch die absoluten Beträge der Ausschläge vielleicht durch äussere Ursachen modificirt sind.

Auffallend ist der Umstand, dass bei ungleichlangen Stäben der stossende um ein bedeutend grösseres Stück nachging als bei gleichlangen, es ist aber kein Grund vorhanden, anzunehmen, dass in dem einen Falle die Luftverdünnung eine stärkere sei als in dem andern.

Herr Voigt wendet übrigens Stäbe aus glashartem Stahl an, wobei natürlich der Einfluss der Luft ein viel geringerer ist als beim viel leichteren Kautschuk.

In der citirten Theorie des Herrn Voigt spielt die Dauer des Stosses eine wesentliche Rolle; ich bestimmte daher dieselbe nach einer zuerst von Pouillet angewandten Methode aus dem Verhältniss des stationären und Momentanausschlages einer Galvanometernadel nach der Formel:

$$t = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{(Wz + Wg) Wn}{(Wg + Wn) Wz} e^{\frac{1}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}$$

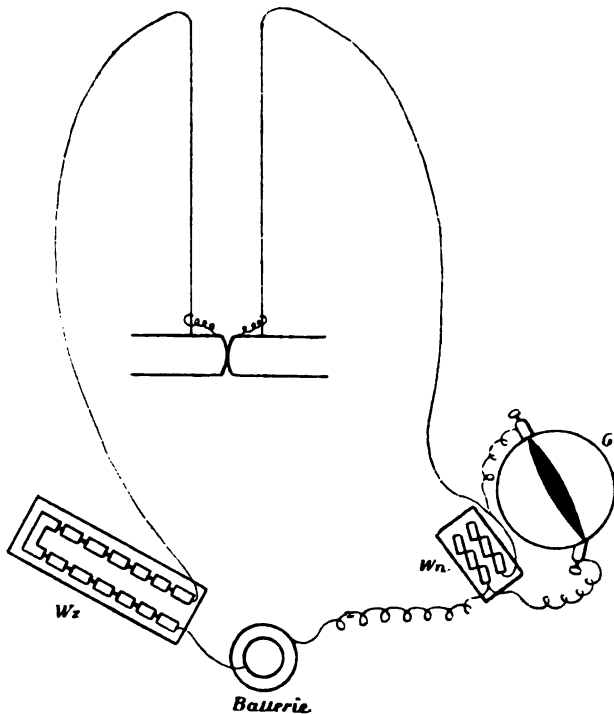
Darin bedeutet:

- | | |
|---|----------------|
| t die Stoss-, recte Contactdauer in Secunden, | } der Galvano- |
| T die Schwingungsdauer | |
| λ das logarithmische Decrement | |

β den dauernden Ausschlag } der Galvano-
 α den Momentanausschlag } meternadel
 W_z den Widerstand der Zuleitungsdrähte sammt
 einem gewissen durch einen Stöpselreostaten
 eingeschalteten Widerstand, } ausgedrückt
 W_n einen gewissen Widerstand einer Neben- } in Siemens-
 schliessung } einheiten
 $W_g = 46$ Siemenseinheiten

den Widerstand des Galvanometers. — Es wurde auf jedes Beinblättchen ein Scheibchen von sehr feinem Platinblech angeklebt, das sich vollkommen glatt an die Beinfläche anschmiegte. Dasselbe war mit einem streifenförmigen Fortsatz versehen, der mit dem nächsten Aufhängehäkchen gut leitend verbunden war. Von diesen Häkchen führte je ein sehr feiner Messingdraht zu-

Fig. 2.



nächst parallel den Aufhängefäden aufwärts bis nahe zu deren Befestigungspunkten und von da weiter in der aus nebenstehendem Schema (Fig. 2) ersichtlichen Weise zu einer Batterie von vier Danielelementen. Eine theilweise Wiederholung der früheren einfachen Stossversuche ergab, dass die Resultate durch die Platinblättchen und die Leitungsdrähte nur in verschwindend kleinem Masse alterirt wurden. Die Ausschläge α und β wurden nun bei verschiedenen W_z und W_n bei verschiedenen Stäben beobachtet und die Stossdauer nach der obigen Formel berechnet, wobei sich bei einem und demselben Stäbepaar für die verschiedensten Widerstände von 8000 bis 1000 S. E. und drei verschiedene Hubhöhen nahezu gleiche Werthe ergaben, nämlich:

A' auf A.

Secunden		Secunden
0·0068	} <i>H</i> = 100	0·0063
0·0071		0·0070
0·0065		0·0069
0·0067		0·0070
0·0070		0·0071
Mittel: 0·0068		Mittel: 0·0068

Secunden	
0·0067	} <i>H</i> = 30
0·0070	
0·0070	
Mittel: 0·0069	

B' auf A.

Secunden		Secunden
0·0109	} <i>H</i> = 100	0·0113
0·0111		0·0112
0·0113		0·0114
Mittel: 0·0111		Mittel: 0·0114

Secunden	
0·0112	} <i>H</i> = 30
0·0109	
Mittel: 0·0110	

A auf B'.

Secunden		Secunden
$\overbrace{0\cdot0109}^{\quad}$	} H = 100	$\overbrace{0\cdot0112}^{\quad}$
$0\cdot0109$		$0\cdot0112$
<hr style="width: 100%;"/> Mittel: 0·0109		<hr style="width: 100%;"/> Mittel: 0·0112
Secunden		
$\overbrace{0\cdot0111}^{\quad}$	} H = 30.	
$0\cdot0114$		
<hr style="width: 100%;"/> Mittel: 0·0112		

Diese Werthe geben allerdings nur dann die Stossdauer an, wenn man berechtigt ist, anzunehmen, dass der Stoss zugleich mit dem Contacte beginnt und endet. Beträchtliche Unterschiede zwischen diesen Zeitmomenten anzunehmen, ist wohl kaum gestattet, da die Platinblättchen vollkommen blank polirt waren und bei der blossen Berührung einen stets constanten, dauernden Ausschlag der Nadel ergaben. Auch könnte sonst unmöglich die Contactdauer bei ungleich langen Stäben merklich grösser sein, als bei gleich langen, wie dies die Tabelle zeigt. Jedenfalls geht daraus hervor, dass die Stossdauer sehr klein ist.

Um die Dauer des wirklichen Stosses (d. h. die Zeit, während welcher erhebliche Wechselwirkungen zwischen den beiden Stäben stattfinden) und zugleich das Gesetz dieser Wechselwirkung direct experimentell bestimmen zu können, schlägt Herr Prof. Boltzmann vor, in ähnlicher Weise, wie derselbe die Vocalcurven photographirte, auf einer rotirenden Glasscheibe Curven zu photographiren, deren Abscysen die Zeit und deren Ordinaten die Wege eines der stossenden Stäbe während der Dauer des Stosses selbst sind. Die oben gefundenen Werthe lassen ein derartiges Verfahren nicht als aussichtslos erscheinen.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, einige Formeln, die sich auf die Voigt'sche Stosstheorie beziehen und welche mir Herr Prof. Boltzmann mittheilte, hier anzuführen. Herr Voigt hat bloss gezeigt, dass seine Formeln mit dem Verschwinden der von ihm mit c bezeichneten Grösse in die alten Stossformeln übergehen. Um zu prüfen, in wie weit Voigt's Theorie die Differenz zwischen den alten Stossformeln und den beobachteten Werthen

wiedergibt, muss man die Annäherung um einen Grad weiter treiben. Bezeichnen wir die kleinste Wurzel der Voigt'schen Gleichung 7) mit μ , so ist für kleine Werthe von c

$$\mu = \sqrt{cn} \left(1 - \frac{cn}{6} \dots\right)$$

wobei

$$n = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Für das erste System der übrigen Wurzeln setzen wir

$$\nu = \frac{a_1}{l_1} (h\pi + \delta_h),$$

für das zweite System

$$\nu = \frac{a_2}{l_2} (h\pi + \varepsilon_h),$$

so wird in erster Annäherung

$$\delta_h = \frac{l_1 c}{b_1 h \pi}, \quad \varepsilon_h = \frac{l_2 c}{b_2 h \pi}.$$

Bezeichnen wir ferner mit C den zu μ gehörigen, mit D_h und E_h die zu den beiden übrigen Wurzelsystemen gehörigen Werthe der Voigt'schen Constanten A , so ist

$$C = (V_1^0 - V_2^0) \frac{\mu}{n} \left[1 - \frac{c^2 n}{45} \left(\frac{l_1^2}{a_1^2 b_1} + \frac{l_2^2}{a_2^2 b_2} \right) \right]$$

$$D_h = \frac{2(V_1^0 - V_2^0) l_1^2 c^2}{\pi^2 h^3 a_1 b_1}$$

$$E_h = \frac{2(V_1^0 - V_2^0) l_2^2 c^2}{\pi^2 h^3 a_2 b_2}.$$

Zur Bestimmung des Zeitmomentes des Endes des Stosses, den wir mit

$$t = \frac{\pi}{\mu} + \tau$$

bezeichnen wollen, dient die Gleichung

$$b_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)_{z=0} = - \Sigma A \sin \nu t = 0.$$

Dieselbe liefert nach Substitution von μ und den beiden Wurzelsystemen für ν , wobei dann natürlich statt A zu setzen ist C respective D_h und E_h

$$\tau = \frac{2c}{\pi^3} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^3} \left(\frac{l_1^2}{a_1 b_1} \sin \frac{\pi^2 a_1 h}{l_1 \sqrt{cn}} + \frac{l_2^2}{a_2 b_2} \sin \frac{\pi^2 a_2 h}{l_2 \sqrt{cn}} \right).$$

Für die Schwerpunktschwindigkeiten der beiden Stäbe im Momente des Endes des Stosses folgt:

$$V_1 = \frac{1}{l_1} \int_{-l_1}^0 v_1 dz, \quad V_2 = \int_0^{l_2} v_2 dz$$

also nach Voigt's Gleichungen 6)

$$V_1 = \Sigma \frac{a_1^2}{\nu} A \cos \nu t + B$$

$$V_2 = - \Sigma \frac{a_2^2}{\nu} A \cos t + B.$$

Substituirt man hier für ν einmal μ , dann die beiden Wurzelsysteme und für t den Werth $\frac{\pi}{\mu} + \tau$, so folgt, unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung c^3 :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{(m_1 - m_2) V_1^0 + 2m_2 V_2^0}{m + m_2} + \frac{(V_1^0 - V_2^0) c^2}{45} \left(\frac{l_1^2}{b_1^2} + \frac{l_2^2 m_2}{b_2^2 m_1} \right) + \\ &+ \frac{2(V_1^0 - V_2^0) c^2}{\pi^4} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^4} \left(\frac{l_1^2}{b_1^2} \cos \frac{\pi^2 a_1 h}{l_1 \sqrt{cn}} + \frac{l_2^2 m_2}{b_2^2 m_1} \cos \frac{\pi^2 a_2 h}{l_2 \sqrt{cn}} \right) \\ V_2 &= \frac{2m_1 V_1 + (m_2 - m_1) V_2^0}{m_1 + m_2} - \frac{c^2 (V_1^0 - V_2^0)}{45} \left(\frac{l_1^2 m_1}{b_1^2 m_2} + \frac{l_2^2}{b_2^2} \right) - \\ &- \frac{2c^2 (V_1^0 - V_2^0)}{\pi^4} \sum \frac{1}{h^4} \left(\frac{l_1^2 m_1}{b_1^2 m_2} \cos \frac{\pi^2 a_1 h}{l_1 \sqrt{cn}} + \frac{l_2^2}{b_2^2} \cos \frac{\pi^2 a_2 h}{l_2 \sqrt{cn}} \right). \end{aligned}$$

Die Summen können folgendermassen mittelst der Fourier'schen Reihe ausgerechnet werden. Nach dem Fourier'schen Lehrsatz ist zwischen den Grenzen 0 und π

$$x^3 - \frac{x^4}{4\pi} - \pi x^2 = -\frac{2\pi^3}{15} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{12}{\pi h^4} \cos hx.$$

Man müsste daher von der Grösse $\frac{\pi^2 a_1}{l_1 \sqrt{cn}}$ ein solches Vielfaches von π abziehen, dass der Zahlenwerth der Differenz, welchen wir mit u_1 bezeichnen wollen, zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Ebenso müsste von der Grösse $\frac{\pi^2 a_2}{l_2 \sqrt{cn}}$ ein solches Vielfaches von π abgezogen werden, dass der Zahlenwerth u_2 der Differenz zwischen denselben Grenzen liegt. Es ist dann

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{(m_1 - m_2) V_1^0 + 2m_2 V_2^0}{m_1 + m_2} \\
 &+ c^2 (V_1^0 - V_2^0) \left[\frac{l_1^2}{b_1^2} \left(\frac{2}{45} + \frac{u_1^3}{6\pi^3} - \frac{u_1^4}{24\pi^4} - \frac{u_1^2}{6\pi^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{l_2^2 m_2}{b_2^2 m_1} \left(\frac{2}{45} + \frac{u_2^3}{6\pi^3} - \frac{u_2^4}{24\pi^4} - \frac{u_2^2}{6\pi^2} \right) \right] \\
 V_2 &= \frac{2m_1 V_1^0 + (m_2 - m_1) V_2^0}{m_1 + m_2} \\
 &- c^2 (V_1^0 - V_2^0) \left[\frac{l_1^2 m_1}{b_1^2 m_2} \left(\frac{2}{45} + \frac{u_1^3}{6\pi^3} - \frac{u_1^4}{24\pi^4} - \frac{u_1^2}{6\pi^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{l_2^2}{b_2^2} \left(\frac{2}{45} + \frac{u_2^3}{6\pi^3} - \frac{u_2^4}{24\pi^4} - \frac{u_2^2}{6\pi^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

ein Resultat, welches sich auch durch directe Verfolgung der an der Berührungsstelle entstehenden und an den freien Stabenden reflectirten Wellen ohne Benützung der periodischen Reihen ergeben würde. Um die Grössenordnung der Correctionsglieder zu schätzen, beachte man, dass

$$\frac{c^2 l_1^2}{b_1^2} = \frac{\pi^4 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \left(\frac{l_1}{\lambda_1} \right)^4$$

ist, wobei λ_1 die Strecke bezeichnet, welche die Wellen im ersten Stabe während der ganzen Zeitdauer des Stosses zurücklegen. Die Correctionsglieder sind $V_1^0 - V_2^0$ proportional, ihr Verhältniss zu den Hauptgliedern wächst also nicht, wie Herr Voigt zu vermuthen scheint, mit der absoluten Geschwindigkeit der Stäbe. Um Beobachtungen zu erklären, welche ein derartiges Wachstum ergaben, müsste über die Wechselwirkung der Stäbe während des Stosses eine andere Hypothese gemacht werden.

Bei meinen Beobachtungen ist die Länge l der Stäbe 200 Mm. und 400 Mm. Setzt man nach Stefan und Exner die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in Kautschuk = 40 Met., so wäre die oben mit λ_1 bezeichnete Grösse 270 Mm. respective 440 Mm. und es hätte keine weitere Schwierigkeit, nach den obigen Formeln V_1 und V_2 zu berechnen; doch scheint, wenn die Dauer des Stosses so klein ist gegen die Zeit, welche die Welle braucht, um die ganze Länge eines Stabes zu durchlaufen, die Anwendung der Voigt'schen Theorie kaum erlaubt zu sein.

NACHTRAG.

Nachdem die vorstehende Arbeit bereits der Akademie überreicht war, machte ich noch Versuche über die Dauer des Stosses cylindrischer Glasstäbe, deren stossende Endflächen convex zugeschliffen und sowie bei den Kautschukstäben mit feinen Platinblättchen etc. versehen waren. Ihre Dimensionen waren folgende:

Stab	Gewicht	Länge	Durchmesser
<i>A'</i>	43·97 Grm.	135 Mm.	13 Mm.
<i>B'</i>	44·00	272	9
<i>B</i>	44·00	272	9

Ich fand hiebei folgende Werthe für die Stossdauer in Sekunden:

Stab *B* auf *B'*

0·00025 } $H = 100$	0·00047 } $H = 50$	0·00070 } $H = 30$
0·00026 }	0·00044 }	0·00068 }

Stab *A'* auf *B'*

0·00019 } $H = 100$	0·00032 } $H = 50$	0·00047 } $H = 30$
0·00019 }	0·00034 }	0·00043 }

Stab *B'* auf *A'*

0·00021 } $H = 100$	0·00046 } $H = 50$	0·00063 } $H = 30$
0·00023 }	0·00043 }	0·00061 }

Die Stossdauer ist also — wie sich das übrigens ja voraussehen liess — bei Glasstäben noch viel kleiner als bei Kautschukstäben. Ausserdem aber ist aus obigen Zahlen ersichtlich, dass beim Glas die Stossdauer auch von der Hubhöhe abhängig ist, und zwar ist sie um so kleiner, je grösser die Hubhöhe ist. Wäre die Contactdauer der Platinbleche wesentlich verschieden von der Zeit der Wechselwirkung der Stäbe, so würden gerade bei grösseren Hubhöhen auch grössere Werthe zu erwarten sein, indem eine die Wechselwirkung etwa vermittelnde verdichtete Luftschichte gerade bei grosser Geschwindigkeit rascher durchbrochen werden müsste.

Ferner scheint die Stossdauer bei ungleich langen Glasstäben merklich kleiner zu sein als bei gleich langen, während ich bei den Kautschukstäben gerade das Gegentheil fand. Auch scheint ein Unterschied zu existiren, wenn der längere auf den kürzeren und umgekehrt wenn der kürzere auf den längeren Stab stösst, indem im ersteren Falle die Stossdauer sich merklich grösser ergibt als im zweiten. Auch darin weichen also die Glasstäbe von den Kautschukstäben ab.

Es würde sich der Mühe lohnen, Stäbe von verschiedenstem Material bezüglich der Stossdauer zu untersuchen und vielleicht auch zur Controle sich einer anderen Methode der Zeitbestimmung, etwa eines Pendelmyographions, zu bedienen.

Zu einer endgiltigen Lösung des Stossproblems wäre die allerdings schwierige praktische Ausführung des bereits erwähnten Vorschlages des Herrn Prof. Boltzmann das geeignetste Mittel.



<i>Hönig u. Zatek</i> , Mittheilungen aus dem Laboratorium für allgemeine Chemie an der technischen Hochschule zu Brünn. Zur directen Bestimmung der Kohlensäure bei Gegenwart von Sulfiden, Sulfiten und Thiosulfaten der Alkalien.	516
— Über die Einwirkung von Kaliumpermanganat auf einige Schwefelverbindungen	521
<i>Habermann</i> , Über einige basische Sulfate. (Vorläufige Mittheilung	536
— Über das Arbutin	537
<i>Puckta</i> , Über gewisse mechanisch erzeugbare Curven und Flächen höherer Ordnung. (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.]	571
<i>Mildner</i> , Beitrag zur Auswerthung unendlicher Producte und Reihen. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	591
<i>Ginzel</i> , Astronomische Untersuchungen über Finsternisse. — II. Abhandlung. (Mit 4 Karten.) [Preis: 2 fl. = 4 RMk.] .	629
<i>Lippmann u. Fleissner</i> , Zur Kenntniss der Azyline. III. Mittheilung. (Mit 1 Holzschnitt.)	756
<i>Hausmaninger</i> , Versuche über den Stoss von Kautschukcylindern. (Mit 2 Holzschnitten.) [Preis 20 kr. = 40 Pfg.] .	768

Preis des ganzen Heftes: 4 fl. 40 kr. = 8 RMk. 80 Pfg.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden drei gesonderten Abtheilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

- I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.
- II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.
- III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften“ herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.]

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

KADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH - NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVIII. BAND. III. bis V. HEFT.

Jahrgang 1883. — October bis December.

(Mit 10 Tafeln und 7 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Inhält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie,
Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

1884.

I N H A L T

des 3. bis 5. Heftes October bis December 1883 des LXXXVIII. Bandes,
 II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

	Seite
XX. Sitzung vom 11. October 1883: Übersicht	785
<i>Vogel</i> , Einige spectralanalytische Untersuchungen an Sternen, ausgeführt mit dem grossen Refractor der Wiener Sternwarte. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.]	791
XXI. Sitzung vom 18. October 1883: Übersicht	816
<i>Winckler</i> , Reduction der Bedingungen des Euler'schen Kriteriums der Integrabilität auf eine einzige Gleichung. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.]	820
<i>Boltzmann</i> , Zur Theorie der Gasdiffusion, II. Theil. Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	835
— Über das Arbeitsquantum, welches bei chemischen Verbindungen gewonnen werden kann. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	861
<i>Jarolinek</i> , Über die Gravitation. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] . .	897
<i>Smolka</i> , Über Isobutylbiguanid und seine Verbindungen . .	912
XXII. Sitzung vom 25. October 1883: Übersicht	930
XXIII. Sitzung vom 8. November 1883: Übersicht	935
<i>Simony</i> , Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. Schluss. (Mit 6 Tafeln.) [Preis: 1 fl. = 2 Rmk.]	939
<i>Gegenbauer</i> , Über die Bessel'schen Functionen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.]	975
<i>Kortweg</i> , Über die von Prof. Wolf vermuthete Doppelperiode der Sonnenfleckenhäufigkeit. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.]	1004
<i>Palisa</i> , Bericht über die während der totalen Sonnenfinsterniss vom 6. Mai 1883 erhaltenen Beobachtungen. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.]	1018
XXIV. Sitzung vom 16. November 1883: Übersicht	1032
XXV. Sitzung vom 22. November 1883: Übersicht	1036
<i>Waelsch</i> , Über die Bestimmung von Punktgruppen aus ihren Polaren. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.]	1039
XXVI. Sitzung vom 6. December 1883: Übersicht	1049
<i>v. Hepperger</i> , Über die Schweifaxe des Kometen 1874 III (Coggia). (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.]	1053
<i>Holetschek</i> , Über die Bahn eines Kometen, der während seiner günstigen Helligkeit nicht aus den Sonnenstrahlen hervortreten kann. (Mit 5 Holzschnitten.) [Preis: 60 kr. = 1 Rmk. 20 Pfg.]	1099

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVIII. Band. III. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

**Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie,
Mechanik, Meteorologie und Astronomie.**

XX. SITZUNG VOM 11. OCTOBER 1883.

Der Vicepräsident der Akademie Herr Hofrath Ritter v. Brücke führt den Vorsitz und begrüsst die Mitglieder bei ihrem Wiederezusammentritte.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie durch das am 10. August d. J. erfolgte Ableben ihres Ehrenmitgliedes Herrn Vice-Admirals Bernhard Freiherrn v. Wüllerstorff-Urbair erlitten hat.

Ferner gibt der Vorsitzende Nachricht von dem am 5. October l. J. erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe Herrn Dr. Joachim Barrande.

Die Versammlung gibt ihrem Beileide über diese Verluste durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär bringt die eingelangten Dankschreiben für die diesjährigen Mitgliederwahlen zur Kenntniss, und zwar:

- Von den Herren Director Dr. Richard Owen in London und geheimen Hofrath Dr. Wilhelm Eduard Weber in Göttingen für ihre Wahl zu Ehrenmitgliedern dieser Classe im Auslande;
- von den Herren Prof. Dr. Carl Senhofer in Innsbruck und Oberbergrath Dr. Edmund Mojsisovics v. Mojsvár in Wien für ihre Wahl zu inländischen correspondirenden Mitgliedern und
- von Herrn Director Julius Schmidt in Athen, ferner von dem kaiserl. russ. wirkl. Staatsrath Herrn Dr. Herrmann von Abich, d. Z. in Wien, und von Herrn Geheimrath Dr. Ferdinand Zirkel in Leipzig für ihre Wahl zu ausländischen correspondirenden Mitgliedern dieser Classe.

Ferner legt der Secretär ein Dankschreiben von Herrn Dr. Vincenz Hilber in Graz für die ihm zur Vollendung seiner Arbeit über chinesische Landschnecken gewährte Subvention.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt die von der oberösterreichischen Statthalterei eingelieferten graphischen Darstellungen der Eisverhältnisse an der Donau im Winter 1882—1883 nach den Beobachtungen zu Aschach, Linz und Grein.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt den officiellen Bericht der von der argentinischen Republik an den Rio Negro entsendeten militär-wissenschaftlichen Expedition. (Geolog. Theil. Buenos Aires 1882).

Das k. und k. Reichs - Kriegs - Ministerium übermittelt das von dem technischen und administrativen Militär-Comité bearbeitete militär-statistische Jahrbuch, und zwar für das Jahr 1877 — I. Theil und für das Jahr 1878 — II. Theil.

Die Direction des k. k. militär-geographischen Institutes übermittelt 22 Blätter Fortsetzungen (24. Lief.) der neuen Specialkarte der österr.-ungar. Monarchie (1:75000).

Herr Dr. A. Brezina, Custos am k. k. mineralogischen Hofcabinete und Privatdocent an der Wiener Universität, überreicht den im Drucke vollendeten ersten Band seiner von der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften mit dem Freih. v. Baumgartner'schen Preis gekrönten, durch einen methodologischen Theil vermehrten Preisschrift unter dem Titel: „Krystallographische Untersuchungen an homologen und isomeren Reihen“. (I. Methoden.)

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung: „Über die genetische Gliederung der Flora Neuseelands“.

Das c. M. Herr Prof. R. Maly in Graz übersendet eine Untersuchung aus seinem Laboratorium von dem Assistenten Herrn A. Smolka: „Über Isobutylbiguanid und seine Verbindungen.“

Herr A. Grunow in Berndorf übersendet seine im Auftrage der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften ausgeführten Arbeiten über die von der österr.-ungar. Nordpolexpedition gesammelten „Diatomeen von Franz Joseph's Land.“

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über die Gravitation“, von Herrn J. Jarolimek, Fabriks-director in Hainburg, zugleich behufs Wahrung der Priorität des Verfassers.
2. „Über die Bessel'schen Functionen“, von Prof. L. Gegenbauer an der Universität zu Innsbruck.
3. „Über die Bestimmung von Punktgruppen aus ihren Polaren“, von Herrn Emil Waelsch, Hörer an der deutschen technischen Hochschule in Prag.

Der Secretär legt ferner behufs Wahrung der Priorität folgende versiegelte Schreiben vor:

1. Von Herrn Prof. Th. Maryniak an der technischen Hochschule in Lemberg mit der Aufschrift: „Streng mathematisch durchgeführte Theorie der Propeller-Schraube.“
2. Von Herrn Dr. Th. Gross in Berlin mit der Aufschrift: „Experimente über Selen.“
3. Von einem Anonymus mit der Aufschrift: „Angabe eines antiseptischen Mittels als Ersatz für Salicylsäure und dessen Präparate.“
4. Von einem Einsender, dessen Petschaft die Initialbuchstaben „D. C. v. A.“ führt, ohne Inhaltsangabe.

Das w. M. Herr Director Dr. Weiss bespricht die am 2. September d. J. gemachte Kometenentdeckung von Brooks in Cambridge. Die Elemente und Ephemeriden des Kometen wurden von dem Adjuncten der Triester Sternwarte, Herrn Alois Palisa, berechnet und in dem von der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften am 11. September ausgegebenen Kometen-Circular Nr. L publicirt.

Ferner überreicht Herr Director Weiss eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. H. C. Vogel, Director der Sternwarte in Potsdam: „Über Spectraluntersuchungen einiger Sterne des Typus III' am grossen Refractor der Wiener Sternwarte.

Das w. M. Herr Director Dr. Hann theilt die ersten Ergebnisse der Aufzeichnungen eines registrirenden Anemometers auf dem Gipfel des Obir in Kärnten mit.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

- Académie der Wissenschaften, königl. Preussische:** C. G. Jacobi's gesammelte Werke, I. Band von C. W. Borchartdt. Berlin, 1881; 4°. — II. Band von K. Weierstrass. Berlin, 1882; 4°.
- Académie de Médecine:** Bulletin. 47^e année, 2^e série. Tome XII. Nrs. 29—39. Paris, 1883; 8°.
- Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna:** Memorie. Ser. IV. Tome III. Bologna, 1881; 4°.
- Ackerbau-Ministerium, k. k.:** Statistisches Jahrbuch für 1882. I. Heft: Production aus dem Pflanzenbau. Wien, 1883; 8°.
- Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher:** Leopoldina. Heft XIX. Nrs. 13—14 & 15—16. Halle a. S., 1883; 4°.
- — Verhandlungen. XLIV. Band. Halle, 1883; gr. 4°.
- Amerling Karl, Dr.** Die Idiotenanstalt des St. Anna-Frauen-Vereines in Prag nach ihrem zwölfjährigen Bestande vom J. 1871—1883. Prag, 1883; 8°.
- Apotheker-Verein, allgemeiner - österr.:** Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. Nr. 21—28. Wien, 1883; 8°.
- British Museum:** Catalogue of the Birds. Volumes VII. & VIII. London, 1883; 8°.
- Central-Commission. k. k. statistische:** Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1881, II. & VII. Heft. Wien, 1883; 8°.
- — Nachrichten über Industrie, Handel & Verkehr. XXVI. Band. I. Heft. Wien, 1883; 8°.
- Chemiker-Zeitung:** Central-Organ. VII. Jahrgang. Nrs. 50—78, Cöthen, 1883; 4°.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences:** Tome XLVII. Nos. 2—13. Paris, 1883; 4°.
- Duboué, Dr.:** Des Effets comparés de divers traitements de la Fièvre thyphoïde et de ceux produits en particulier par l'Ergot de seigle de bonne qualité. Paris, 1883; 8°.
- Elektrotechnischer Verein:** Elektrotechnische Zeitschrift. IV. Jahrgang. 1883. VII.—IX. Heft. Berlin; 4°.

- Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVII. Jahrgang. Nr. 12 & 13. Berlin, 1883; 8°.
- k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVI. Nr. 6—8, Wien, 1883; 8°.
- österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XVIII. Band. August-, September- und October-Heft, 1883. Wien; 4°.
- Gewerbe-Verein nied.-österr.: Wochenschrift. XLIV. Jahrgang. Nr. 26—40. Wien, 1883; 4°.
- Ingenieur- und Architekten-Verein, österreichischer: Wochenschrift. VIII. Jahrgang. Nr. 29—40. Wien, 1883; 4°.
- — Zeitschrift. XXXV. Jahrgang. 1883. II.—V. Heft. Wien. gr. 4°.
- Institute, the Anthropological of Great Britain und Ireland: The Journal. Vol. XIII. Nr. 1. London, 1883; 8°.
- Meteorologia italiana: Annali dell' Ufficio centrale. Ser. II. Vol. II. 1880. Roma, 1882; gr. 4°. Vol. III. Parte I—III. Roma 1882—83; gr. 4°.
- Militär - Comité k. k. technisches & administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1883. V.—VIII. Heft. Wien, 1883; 8°.
- Mittheilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXIX. Band, 1883. VIII. & IX. und Ergänzungsheft Nr. 72. Gotha; 4°.
- Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 27^e année, 3^e série. — Tome XIII. 500^e—502^e livraisons. Paris, 1883; 8°.
- Mueller, Ferdinand Baron von: Systematic Census of Australian Plants with chronologic. literary and geographic Annotations. Part I. Vasculares, Melbourne, 1882; 4°.
- Nature. Vol. XXVIII. Nos. 716—727. London, 1883; 8°.
- Observatorium, astrophysikalisches zu Potsdam: Publicationen. III. Band. Potsdam, 1883; 4°.
- Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen, 1883. Nr. 10 bis 12. Wien; 8°.
- Société mathématique de France: Bulletin. Tome XI. Nr. 3. Paris, 1883; 8°.
- des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des travaux. 36^e année, 4^e série, 5^e et 6^e cahiers. Paris, 1883; 8°.

- Société philomathique de Paris: Bulletin.** 7^e série tome VII. Nr. 3. 1882—1883. Paris, 1883; 8^o.
- Society the American philosophical: Proceedings.** Vol. XX. Nr. 112. Philadelphia, 1882; 8^o.
- the royal astronomical: **Monthly notices.** Vol. XLIII. Nr. 8. June 1883. London; 8^o.
- the royal geographical: **Proceedings and Monthly Record of Geography.** Vol. V. Nrs. 7—9. July—September 1883. London; 8^o.
- the royal microscopical: **Journal.** Ser. II. Vol. III. Part 4. August, 1883. London & Edinburgh; 8^o.
- the zoological of London: **Proceedings of the scientific meetings for the year 1883.** Part II. London; 8^o.
- Verein, militär-wissenschaftlicher in Wien: Organ.** XXVI. Band. 5. Heft. 1883, Wien; 8^o. — XXVII. Band 1. Heft 1883. Wien; 8^o.
- Wiener Medizinische Wochenschrift.** XXXIII. Jahrgang. Nr. 29 bis 40. Wien, 1883; 4^o.
- Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter.** IV. Jahrgang. Nr. 10—12 und ausserordentliche Beilagen Nr. 7 und 8. Wien. 1883; 8^o.
- Zeitschrift für physiologische Chemie.** VII. Band, 6. Heft-Strassburg, 1883; 8^o.
-

Einige spectralanalytische Untersuchungen an Sternen, ausgeführt mit dem grossen Refractor der Wiener Sternwarte.

(Mit 1 Tafel.)

Von H. C. Vogel.

Herr Director Weiss hatte die besondere Güte gehabt, mir auf mein Ersuchen für mehrere Wochen den Refractor der Wiener Sternwarte von 68^{cm} Öffnung — gegenwärtig das grösste derartige Instrument der Welt — zur Verfügung zu stellen. Ich beabsichtigte damit einige spectroscopische Beobachtungen vorzüglich an solchen Sternen vorzunehmen, deren Lichtschwäche eine genaue Untersuchung mit geringeren optischen Hilfsmitteln nicht mehr zulässt. Ganz besonders aber war mein Streben darauf gerichtet, Spectra der Classe III^b zu untersuchen, um Gewissheit über die Lage der breiten, einseitig nach Violett verwaschenen Banden, die diese Spectra charakterisiren, zu erlangen. Frühere, darauf gerichtete Untersuchungen¹ hatten mich zu der Vermuthung geführt, dass die stärksten Banden in diesen Spectren mit denen des Kohlenwasserstoffes übereinstimmen. Leider sind aber die Sterne, welche Spectra der Classe III^b zeigen, lichtschwach; der hellste (Schjellerup's Catalog rother Sterne Nr. 152) ist 5·5ter Grösse. Mit den mir zu Gebote stehenden Hilfsmitteln war in Folge dessen voranzusehen, dass eine wesentliche Förderung in der Erkenntniss der Natur dieser interessanten Spectra nicht zu erwarten war, und habe ich daher weitere Beobachtungen ganz unterlassen. Mit dem grossartigen

¹ Berichte der k. sächs. Gesellsch. d. Wiss. 12. Dec. 1873, p. 552, und noch nicht veröffentlichte Beobachtung aus Bothkamp.

Wiener Instrumente, welches etwa die vierfache Helligkeit des Potsdamer Refractors besitzt, schien dagegen eine erfolgreiche Weiterführung der Untersuchungen gesichert, und habe ich mit besonderem Interesse die früheren Beobachtungen wieder aufgenommen.

Bei meinem längeren Aufenthalte in Wien im Mai und Juni 1883 hatte ich Gelegenheit, ausser spectroscopischen Beobachtungen Untersuchungen über das Objectiv des grossen Fernrohres, sowie auch verschiedene andere astronomische Beobachtungen anzustellen, deren Veröffentlichung ich mir für später vorbehalte.

Im Folgenden beehre ich mich der k. k. Akademie die Resultate derjenigen Beobachtungen vorzulegen, die ich für die wichtigsten halte, und beschränke mich in Folge dessen lediglich auf die Mittheilung einiger spectroscopischen Untersuchungen.

Der Spectralapparat, dessen ich mich zu den nachstehenden Beobachtungen bedient habe, ist Eigenthum des Potsdamer Observatoriums. Er ist aus der Werkstätte der Herren Repsold & Söhne in Hamburg hervorgegangen. Ich behalte mir vor, später, an anderer Stelle, eine eingehendere Beschreibung des Apparates zu geben und will hier nur anführen, dass die Objective von Collimator und Beobachtungs-Fernrohr eine Öffnung von 21 Mm. haben. Das Beobachtungsrohr ist sowohl aus freier Hand, als auch durch Tangentialschraube beweglich, und ist die Bewegung an einem Theilkreis von 95 Mm. Durchmesser, von 10' zu 10' getheilt, durch Mikroskope ablesbar. Die Mikroskope gestatten eine directe Ablesung von 10'', eine Schätzung bis auf 1''. Ich habe meist nur ein einfaches stark zerstreues Prisma angewandt und Einstellungen auf das Minimum der Ablenkung gemacht. Der Apparat war jedoch so eingerichtet, dass auch mit Leichtigkeit ein sehr stark zerstreues Rutherford'sches Prisma eingesetzt werden konnte.

Die mannigfachen Constructionen, die den zusammengesetzten Spectralapparaten in neuerer Zeit gegeben worden sind, haben mich in letzter Stelle nicht befriedigt, und bin ich deshalb versuchsweise zu der älteren Form des Spectrometers und

der Beobachtungsmethode, für jede Linie das Minimum der Ablenkung zu bestimmen, zurückgekehrt. In der Vollkommenheit, in der die Verfertiger den Apparat hergestellt haben, bietet er den Vortheil, dass man die Fehler des Apparats durch passende Anordnung der Beobachtungen umgehen oder genau ermitteln kann. Die Handhabung des Instrumentes ist eine überaus bequeme und leichte, und kann ich den Versuch als wohlgelungen bezeichnen. Es ist eine bekannte Thatsache, dass Objecte, wenn sie in Bewegung sind, sich leichter erkennen lassen, und nicht ohne Vortheil für die Wahrnehmung schwacher Linien ist es daher, dass man, ohne die Einstellung auf das Minimum der Ablenkung zu verändern, dem Spectrum eine schnelle Bewegung durch Drehung des Prismas ertheilen kann. Der Apparat ist mit einer vorzüglichen Beleuchtungsvorrichtung versehen. Eine kleine, vollkommen eingeschlossene Öllampe, die seitlich am Apparat, nach zwei senkrecht auf einander stehenden Richtungen hin beweglich, angebracht ist, beleuchtet nicht nur die Theilung und den Mikrometerfaden, sondern auch die Trommeln an den Mikroskopen. Hierdurch sind nun die Messungen mit grösster Leichtigkeit auszuführen und ist eine Blendung des Auges ganz ausgeschlossen.

Die Genauigkeit, welche sich bei lichtstarken Objecten erreichen lässt, ist sehr gross. Der w. F. einer Beobachtung einer Linie des Sonnenspectrums beträgt $\pm 6''$, was bei dem einfachen Prisma einem Wellenlängenunterschied von durchschnittlich ± 0.15 Mill. Mm., bei dem Prismensatz von ± 0.07 Mill. Mm. entspricht. Bei lichtschwachen Sternen ist die Genauigkeit natürlich eine viel geringere, aber immerhin noch sehr befriedigend.

Aus zahlreichen Messungen an Linien des Sonnenspectrums ist der Zusammenhang zwischen Minimum der Ablenkung und Wellenlänge abgeleitet worden. Ich setze für die beiden Prismen nur denjenigen Theil der Reductionstafel hin, der bei der Berechnung der folgenden Beobachtungen zur Anwendung kommt.

I. Einfaches Prisma.

Für $T = +22^{\circ}\text{C}$.

Minim. der Ablenk.	W. L.	Minim. der Ablenk.	W. L.
47°20'	597·1 _{2·1}	48° 0'	525·8 _{1·4}
21	595·0 _{2·1}	1	524·4 _{1·4}
22	592·9 _{2·1}	2	523·0 _{1·4}
23	590·8 _{2·1}	3	521·6 _{1·4}
24	588·7 _{2·1}	4	520·2 _{1·4}
25	586·6 _{2·1}	5	518·8 _{1·3}
26	584·5 _{2·1}	6	517·5 _{1·4}
27	582·4 _{2·1}	7	516·1 _{1·3}
28	580·3 _{2·1}	8	514·8 _{1·4}
29	578·2 _{2·0}	9	513·4 _{1·3}
47°30'	576·2 _{2·0}	48°10'	512·1 _{1·3}
31	574·2 _{2·0}	11	510·8 _{1·3}
32	572·2 _{2·0}	12	509·5 _{1·3}
33	570·2 _{1·9}	13	508·2 _{1·3}
34	568·3 _{1·9}	14	506·9 _{1·3}
35	566·4 _{1·9}	15	505·6 _{1·2}
36	564·5 _{1·9}	16	504·4 _{1·3}
37	562·6 _{1·8}	17	503·1 _{1·2}
38	560·8 _{1·8}	18	501·9 _{1·2}
39	559·0 _{1·7}	19	500·7 _{1·2}
47°40'	557·3 _{1·7}	48°20'	499·5 _{1·2}
41	555·6 _{1·6}	21	498·3 _{1·2}
42	554·0 _{1·7}	22	497·1 _{1·2}
43	552·3 _{1·6}	23	495·9 _{1·2}
44	550·7 _{1·7}	24	494·7 _{1·2}
45	549·0 _{1·6}	25	493·5 _{1·1}
46	547·4 _{1·7}	26	492·4 _{1·2}
47	545·7 _{1·6}	27	491·2 _{1·1}
48	544·1 _{1·6}	28	490·1 _{1·1}
49	542·5 _{1·6}	29	489·0 _{1·1}
47°50'	540·9 _{1·6}	48°30'	487·9 _{1·1}
51	539·3 _{1·6}	31	486·8 _{1·1}
52	537·7 _{1·6}	32	485·7 _{1·1}
53	536·1 _{1·5}	33	484·6 _{1·1}
54	534·6 _{1·5}	34	483·5 _{1·1}
55	533·1 _{1·5}	35	482·4 _{1·1}
56	531·6 _{1·5}	36	481·3 _{1·1}
57	530·1 _{1·4}	37	480·2 _{1·0}
58	528·7 _{1·5}	38	479·2 _{1·1}
59	527·2 _{1·4}	39	478·1 _{1·0}

Minim. der Ablenk.	W. L.	Minim. der Ablenk.	W. L.
48°40'	477·1 1·1	48°50'	467·2 1·0
41	476·0 1·0	51	466·2 0·9
42	475·0 1·0	52	465·3 1·0
43	474·0 1·0	53	464·3 0·9
44	473·0 1·0	54	463·4 0·9
45	472·0 1·0	55	462·5 0·9
46	471·0 1·0	56	461·6 0·9
47	470·0 0·9	57	460·7 0·9
48	469·1 1·0	58	459·8 0·9
49	468·1 0·9	59	458·9 0·8
		49° 0'	458·1

II. Zusammengesetztes Prisma.

Für $T = +15^{\circ} \text{C.}$

Minim. der Ablenk.	W. L.	Ände- rung für 1° C.	Minim. der Ablenk.	W. L.	Ände- rung für 1° C.
49°20'	595·4 1·0	+0·06	49°40'	577·0 0·9	+0·06
21	594·4 0·9	0·06	41	576·1 0·9	0·06
22	593·5 1·0	0·06	42	575·2 0·9	0·06
23	592·5 0·9	0·06	43	574·3 0·9	0·06
24	591·6 0·9	0·06	44	573·4 0·9	0·06
25	590·7 0·9	0·06	45	572·5 0·8	0·05
26	589·8 1·0	0·06	46	571·7 0·9	0·05
27	588·8 0·9	0·06	47	570·8 0·9	0·05
28	587·9 0·9	0·06	48	569·9 0·9	0·05
29	587·0 0·9	0·06	49	569·0 0·8	0·05
49°30'	586·1 1·0	0·06	49°50'	568·2 0·9	0·05
31	585·1 0·9	0·06	51	567·3 0·8	0·05
32	584·2 0·9	0·06	52	566·5 0·9	0·05
33	583·3 0·9	0·06	53	565·6 0·8	0·05
34	582·4 0·9	0·06	54	564·8 0·9	0·05
35	581·5 0·9	0·06	55	563·9 0·8	0·05
36	580·6 0·9	0·06	56	563·1 0·8	0·05
37	579·7 0·9	0·06	57	562·3 0·8	0·05
38	578·8 0·9	0·06	58	561·5 0·8	0·05
39	577·9 0·9	0·06	59	560·7 0·8	0·05

Minim. der Ablenk.	W. L.	Ände- rung für 1° C.	Minim. der Ablenk.	W. L.	Ände- rung für 1° C.
50° 0'	559.9	+0.05	50°40'	530.8	+0.05
1	559.1	0.05	41	530.1	0.05
2	558.3	0.05	42	529.5	0.05
3	557.5	0.05	43	528.8	0.05
4	556.7	0.05	44	528.2	0.05
5	555.9	0.05	45	527.5	0.05
6	555.2	0.05	46	526.9	0.05
7	554.4	0.05	47	526.2	0.05
8	553.7	0.05	48	525.6	0.05
9	552.9	0.05	49	525.0	0.05
50°10'	552.2	0.05	50°50'	524.4	0.05
11	551.4	0.05	51	523.7	0.05
12	550.7	0.05	52	523.1	0.05
13	549.9	0.05	53	522.5	0.05
14	549.2	0.05	54	521.9	0.05
15	548.4	0.05	55	521.3	0.05
16	547.7	0.05	56	520.7	0.05
17	547.0	0.05	57	520.1	0.05
18	546.3	0.05	58	519.5	0.05
19	545.5	0.05	59	518.9	0.05
50°20'	544.8	0.05	51° 0'	518.3	0.05
21	544.1	0.05	1	517.7	0.05
22	543.4	0.05	2	517.2	0.05
23	542.6	0.05	3	516.6	0.05
24	541.9	0.05	4	516.0	0.05
25	541.2	0.05	5	515.4	0.05
26	540.5	0.05	6	514.9	0.05
27	539.8	0.05	7	514.3	0.05
28	539.1	0.05	8	513.7	0.05
29	538.4	0.05	9	513.1	0.05
50°30'	537.7	0.05	51°10'	512.6	0.05
31	537.0	0.05	11	512.0	0.05
32	536.3	0.05	12	511.5	0.05
33	535.6	0.05	13	510.9	0.05
34	534.9	0.05	14	510.4	0.05
35	534.2	0.05	15	509.8	0.04
36	533.5	0.05	16	509.3	0.04
37	532.8	0.05	17	508.7	0.04
38	532.2	0.05	18	508.2	0.04
39	531.5	0.05	19	507.6	0.04
			51°20	507.1	0.04

Die Hauptbanden und Linien des Kohlenwasserstoffspectrums sind ebenfalls öfter mit beiden Prismensystemen gemessen

worden. Wegen des innigen Zusammenhanges mit einigen der folgenden Beobachtungen an Sternen mögen auch die Resultate aus diesen Messungen hier Platz finden.

Wellenlänge Mill. Mm.	Bemerkung
{ 563·1	Linie, Anfang einer nach Violett verwaschenen Bande.
{ 558·0	
{ 516·2	Linie, Anfang einer nach Violett verwaschenen Bande.
{ 512·6	
{ 473·4	Linie.
{ 471·6	Erste und letzte Linie einer Gruppe von 4 Linien. Die erste bildet den Anfang einer nach Violett verwaschenen Bande.
{ 467·2	

Beobachtungen und Resultate.

I. Spectra der Classe III^b.

* 5.5 Gr.; $\alpha = 12^h 39^m 38^s$ $\delta = +46^\circ 4'.7$ (1883).

Schjell. 152. B. D. $+46^\circ$. Nr. 1817.

1883, Mai 26. Luft leidlich. Fadenbeleuchtung im Spectroskop war anfänglich zu hell, wurde später abgeschwächt. Spalt eng. ¹ Temp. in der Kapsel des Prismas = 22° C.

Die Messungen sind Abstände von der *D*-Linie, positiv nach der brechbareren Seite genommen. Die Einstellung auf die künstlich erzeugte Natriumlinie geschah am Anfang und Ende jeder Beobachtung, oft auch noch zwischen den Beobachtungen.

¹ Bei der meist angewandten geringeren Zerstreung erscheinen die *D*-Linien nur bei ganz enger Spaltstellung getrennt. Bei der Beobachtung am 26. Mai flossen die beiden Linien in eine Linie zusammen.

- + 2' 42" Ende einer nach Roth verwaschenen Bande.
- + 7' 10" Breite dunkle Linie, etwas verwaschen.
- +15' 0" } Anfang einer intensiv dunklen, nach Violett ver-
- 14' 18" } waschenen Bande. In dieser dunklen Bande konnte
wiederholt eine dunkle Linie, etwa 3' vom Anfang
entfernt, wahrgenommen werden.
- +42' 39" Anfang einer intensiven, nach Violett verwaschenen
Bande.

Die Beobachtungen mussten unter sehr unbequemer Lage für den Beobachter ausgeführt werden. Das Uhrwerk hielt an diesem Abend sehr schlecht, und da der Spalt senkrecht auf die Richtung der täglichen Bewegung gestellt werden musste, verschwand der Stern fortwährend aus dem Spalte und musste durch einen Gehülften wieder zurückgebracht werden, was im höchsten Grade aufregend wirkte.

In einem kleinen Ocularspectroskop waren fünf Banden im Spectrum zu erkennen, von denen jedoch die beiden äussersten mit dem Spectrometer nicht gemessen werden konnten, da sie zu lichtschwach waren. Ich bemerke noch, dass ich bei den Messungen keine Cylinder-Linse angewandt habe, da in dem schmalen Spectrum, welches ohne Cylinder-Linse entsteht, die dunklen Banden sehr gut markirt waren.

Mai 28. Luft schlecht. Beobachtungen oft durch Wolken unterbrochen. Spalt sehr eng. Temp. = 20° C.

- 0' 2" }
- + 0' 12" } Dunkle breite Linie nahe am Ende einer Bande.
- +14' 55" } Anfang einer dunklen Bande, durch eine Linie mar-
- 15' 5" } kirt.
- +43' 42" } Anfang einer Bande. Sehr deutlich durch eine dunkle
- 44' 16" } Linie markirt. Eine zweite dunkle Linie wurde in
dieser Bande wiederholt gesehen.

Neben dem Spectrum des Natriums erschienen noch ganz schwach zwei Banden des Alkoholspectrums, die vollkommen mit den dunklen Banden des Sternspectrums zu coincidiren schienen. Der Anfang der ersten Bande des Alkoholspectrums

wurde zu $+14' 37''$ gemessen. Auf den Anfang der zweiten Bande wurde wiederholt der Faden gestellt, und coincidirte jedesmal der Faden so vollkommen als möglich mit der Bande im Sternspectrum. Auch directe Vergleichen zwischen Alkoholspectrum und Sternspectrum konnten gemacht werden, da das Sternspectrum hell genug war und sich ganz gut von den das ganze Gesichtsfeld durchsetzenden mattleuchtenden Banden des Alkoholspectrums abhob.

Eine Zeichnung des Sternspectrum, wie es in einem schwachen Ocularspectroskop erschien, wurde angefertigt.

Auch an diesem Tage sind die Messungen ohne Cylinderlinse ausgeführt worden. Obgleich, wie anfänglich erwähnt wurde, der Luftzustand sehr ungünstig war, war durch die Vorbereitung am Tage zuvor die Stellung des Beobachters eine etwas bequemere. Das Uhrwerk functionirte sehr gut, und die Schwierigkeiten bei der Beobachtung waren im Vergleich zu denen am ersten Beobachtungsabend nur gering.

Mai 30. Der ganze Horizont mit Wolken bezogen; in der Nähe des Zeniths leichtere, schnell vortiberziehende Wolken, zwischen denen wenigstens zwei sichere Messungen des Anfangs der einen Bande gelangen. Spalt eng. Temp. = 22° C.

$+43' 24''$ } Dunkle, breite Linie. Anfang einer nach Violett verwaschenen Bande. Eine oder zwei Linien waren in der Bande noch wahrzunehmen.
 $42' 55''$ }

Es wurde bald so trübe, dass die Beobachtungen eingestellt werden mussten. Anfänglich erschien oft das Spectrum in ganz besonderer Klarheit.

Juni 1. Vorzüglich klare Luft. Spalt ziemlich eng. Temp. = 22° C. Die Messungen sind mit Anwendung der Cylinderlinse vor dem Spalt ausgeführt.

$+ 0' 6''$ } Dunkle Linie nahe am Ende einer dunklen Bande.
 $- 0' 4''$ } Durch directe Vergleichung die Coincidenz dieser
 $- 0' 7''$ } Linie mit der Natriumlinie zweifellos.
 $+ 0' 8''$ }

- + 1'33" Ende einer dunklen Bande, die nach Roth etwas weniger scharf begrenzt ist.
- + 7'38" Dunkle, breite Linie, etwas verwaschen an den Rändern. Sie steht isolirt in dem hellsten Theile des Spectrums.
 7'23"
 8'19"
 7'57"
- +13'27")
 13'42")
 13'28") Anfang einer dunklen Bande, durch eine dunkle Linie markirt.
 14'17")
 14' 5")
- +43'22" Dunkelste Bande des Spectrums, nach Violett verwaschen. Anfang durch eine dunkle, breite Linie gebildet. Eine zweite dunkle Linie im Abstand +45'36" von den *D*-Linien.
 43'19"
 43'10"
 43'55"
- +82'37") Ende des sichtbaren Spectrums. Ziemlich scharf begrenzt. Den Beobachtungen mit schwächerer Zerstreuung zufolge der Anfang einer dunklen, nach Violett verwaschenen Bande.
 82'23")
 81'35")

Bei den Vergleichen mit dem Natrium- und Alkoholspectrum wurde wiederholt die Überzeugung gewonnen, dass eine Coincidenz mit den Natriumlinien, sowie mit den beiden stärksten Banden des Kohlenwasserstoffspectrums im Spectrum der Flammen und des Sterns stattfand.

Ich setzte an diesem Abend, da der Himmel besonders günstig war, noch das stark zerstreute Rutherford'sche Prisma ein und konnte damit wenigstens die beiden stärksten Banden im Sternspectrum messen und wiederum durch directe Vergleichung die absolute Coincidenz der hellsten Bande des Kohlenwasserstoffspectrums mit einer Bande des Sternspectrum beobachten.

Die Messungen sind folgende:

- +30'47")
 29'40") Anfang einer dunklen Bande.
 30'11")

+30' 13" }
 97' 0" } Anfang einer dunklen Bande.
 96' 54" }
 97' 49" }

Mehrere Zeichnungen vom Spectrum sind noch ausgeführt worden.

Juni 7. Luft anfänglich unruhig, aber durchsichtig. Der Stern wurde zuerst mit dem kleinen Spectroskop beobachtet, und wurden Zeichnungen vom Spectrum ausgeführt. Der Himmel bezog sich aber bald und wurde erst nach Mitternacht wieder vollkommen klar. In Folge des etwas grösseren Stundenwinkels, unter dem der Stern beobachtet werden musste, wurde die Lage des Beobachters ausserordentlich unbequem. Die Messungen sind dadurch ganz beträchtlich beeinflusst worden. Ein gleichzeitiger Gebrauch beider Hände war nämlich nicht möglich, da die eine Hand zur Stützung und zum Halt des Körpers gebraucht werden musste. Es konnten deshalb die Bewegungen am Prisma und am Beobachtungsfernrohr nur hinter einander gemacht werden, was zeitraubend und bei dem häufigen Verschwinden des Sterns aus dem Spalt, in Folge der Unvollkommenheiten im Gange des Uhrwerks, sehr aufregend war. Die Messungen sind mit Cylinderlinse ausgeführt. Temperatur in der das Prisma umschliessenden Kapsel 18° C.

+13' 43" }
 13' 30" } Anfang einer dunklen Bande.
 13' 7" }
 13' 51" }
 13' 22" }

+43' 55" }
 44' 10" } Anfang einer dunklen Bande.
 43' 14" }
 43' 58" }
 43' 28" }

Im Mittel aus allen Beobachtungen ergibt sich für Schjell. 152 Folgendes:

(Minimum der Ablenkung für *D*-Mitte = $47^{\circ}23'36''$ bzw. = $49^{\circ}27'0''$.)

a. Einfaches Prisma.

Minima der Ablenk.	Wellenlänge Mill. Mm.	Bemerkungen
$47^{\circ}23'38''$	589·5	} Dunkle Linie nahe am Ende einer matten Bande.
$47^{\circ}25'44''$	585	
$47^{\circ}31'4''$	574	Ende der matten Bande. Breite, dunkle, etwas verwaschene Linie.
$47^{\circ}37'27''$	562	} Dunkle Linie. ¹ Anfang einer nach Violett verwaschenen Bande.
$48^{\circ}7'10''$	516	
$48^{\circ}9'12''$	513	} Dunkle Linie. ¹ Anfang der intensivsten Bande des Spectrums.
$48^{\circ}45'48''$	471	
		} Anfang einer nach Violett verwaschenen Bande.

b. Prismensatz.

Minima der Ablenk.	Wellenlänge Mill. Mm.	Bemerkungen
$49^{\circ}57'13''$	562·5	} Linie. Anfang einer dunklen Bande.
$51^{\circ}4'14''$	516·3	
		} Linie. Anfang einer dunklen Bande.

Vergleicht man diese Beobachtungen mit den Seite 797 angeführten des Kohlenwasserstoffes so ergibt sich zweifellos das Vorhandensein von Kohlenwasserstoff in der Atmosphäre des Sternes. Ferner coincidirt die dunkle Linie nahe am Ende einer Bande (W. L. 589·5 Mill. Mm.) mit Natrium. Die breite, verwaschene und ganz isolirt im hellsten Theile des Spectrums befindliche Linie (W. L. 574 Mill. Mm.) lässt keine Deutung zu.

¹ Den Beobachtungen vom Mai 26 und 28 ist halbes Gewicht gegeben worden.

Es dürfte auffallen, dass die im Sternspectrum gemessenen Banden, im Vergleich zu den entsprechenden des Kohlenwasserstoffspectrums, sämmtlich etwas nach Violett verschoben sind. Wie ich mich überzeugt habe, ist der Grund hiervon lediglich darin zu suchen, dass die Einstellung auf das Minimum der Ablenkung nicht mit der nöthigen Ruhe und Sicherheit ausgeführt werden konnte, in Folge der meist sehr unbequemen Stellung des Beobachters. Ist nämlich bei der Drehung des Prismas während der Einstellung auf das Minimum der Punkt der Umkehr nicht ganz genau erreicht, so werden dadurch die Ablenkungswinkel stets nur in einer Richtung hin afficirt und immer etwas zu gross gefunden.

Auf der beifolgenden Tafel Fig. 1 ist das Spectrum des Sternes Schjell. 152 dargestellt, wie es aus den mehrfach angefertigten, gut übereinstimmenden Zeichnungen zusammengesetzt werden konnte. Die Lage der nicht gemessenen Banden und Linien ist so genau als möglich, durch Vergleichen der Abstände der Banden unter einander, geschätzt worden.

* 8·1 Gr.; $\alpha = 12^{\text{h}} 19^{\text{m}} 16^{\text{s}}$ $\delta = +1^{\circ} 25'.9$ (1883).

Schjell. 145. B. D. $+1^{\circ}$. Nr. 2694.

1883, Juni 3. Im Spectrum dieses Sternes, ebenfalls zu Classe III^b gehörend, waren mit Hülfe eines Ocularspectroskopes fünf Banden zu erkennen, zwei im Roth und Orange, von denen die letztere die intensivste war, eine Bande im Hellgrün, die dunkelste im ganzen Spectrum, eine Bande im Dunkelgrün und eine im Blau. Ein Vergleich der relativen Lagen der Banden in diesem Sternspectrum mit dem Spectrum von Schjell. 152 liess keinen Zweifel aufkommen, dass beide Spectra genau gleiche Zusammensetzung haben. In günstigen Momenten erschien sogar die isolirte dunkle Linie im Gelb ganz deutlich. Nur in Bezug auf die relative Intensität der Banden schien der Unterschied zu bestehen, dass bei Schjell. 145 die Bande (Anfang W. L. 562 Mill. Mm.) die intensivste war, während in Schjell. 152 die darauf folgende die grösste Dunkelheit zeigte. Eine Messung der Banden mit Hülfe des Spectrometers war bei der Schwäche des Sternes nicht möglich.

* 6.2 Gr. $\alpha = 21^{\text{h}} 37^{\text{m}} 5^{\text{s}}$ $\delta = +34^{\circ} 58'.5$ (1883).
B. D. $+34^{\circ}$. Nr. 4500.

Juni 25. Luftzustand wechselnd, während der Beobachtung dieses Sternes jedoch recht gut. Der helle Mondschein war etwas störend. Die Beobachtungen wurden sonst unter sehr günstigen Verhältnissen für den Beobachter ausgeführt, auch hielt das Uhrwerk recht gut.

Das Spectrum war sehr ähnlich dem von Schjell. 152. Nur geringe Unterschiede in der relativen Intensität der Banden konnten wahrgenommen werden. Eine Darstellung des Spectrums ist in Fig. 2 gegeben. Spalt sehr eng. Temp. $= 16^{\circ} \text{C}$.

Die Messungen mit dem Spectrometer mit einem Prisma, bezogen auf die *D*-Linien, sind folgende:

+ 0' 0"	} Dunkle Linie in einer zarten dunklen Bande.
0' 9"	
+ 6' 59"	} Dunkle Linie, recht scharf begrenzt.
6' 59"	
+ 14' 1"	} Schmale, scharfe Linie am Anfang einer zarten, nach Violett verwaschenen Bande.
13' 43"	
14' 0"	
+ 35' 28"	Gruppe zarter Linien.
+ 42' 3"	} Sehr starke dunkle Linie am Anfang einer sehr dunk- len, nach Violett verwaschenen Bande.
43' 59"	
43' 58"	
43' 32"	
+ 79' 21"	Anfang einer dunklen Bande.

Im Mittel resultirt aus diesen Beobachtungen:

Minima der Ablenk.	Wellenlänge Mill. Mm.	Bemerkungen
47° 23' 41"	589.3	Dunkle Linie.
47° 30' 35"	575	Dunkle Linie.
47° 37' 31"	562	Linie am Anfang einer Bande.
47° 59' 4"	527	Gruppe zarter Linien. ¹
48° 6' 59"	516	Linie am Anfang einer Bande.
48° 42' 57"	474	Anfang einer Bande.

¹ Fällt nahe mit *E* des Sonnenspectrums und den zahlreichen Linien in der Nähe von *E* zusammen.

Die Übereinstimmung mit den Streifen des Kohlenwasserstoffs und die Coincidenz einer breiten Linie mit den Natriumlinien scheint zweifellos, wenn man in Betracht zieht, welche Genauigkeit überhaupt mit dem Apparat zu erwarten ist.

Ich lasse hier noch im Auszug meine früheren Beobachtungen,¹ die ich an einem Sterne 6·2ter Grösse der Cl. III^b, B. D. +2° Nr. 4709, Schjell. 273, ausgeführt habe, folgen.

Wellenlänge
Mill. Mm.

656	Breite, verwaschene Bande.
622	Breite, dunkle Bande, nach beiden Seiten, aber vorzüglich nach Roth verwaschen.
606·5	Mitte eines Streifens.
589	Ende eines nach Roth allmählich an Intensität abnehmenden Streifens.
578	Dunkle Linie.
564	Anfang einer allmählich nach dem Violett hin verlaufenden Bande.
552	Linie.
529	Linie.
516	Anfang der dunkelsten, ebenfalls nach Violett verlaufenden Bande.
472	Anfang einer dunklen nach Violett verlaufenden Bande.

Wenngleich diesen Beobachtungen nicht jener Grad von Genauigkeit zugeschrieben werden kann, wie den oben mitgetheilten, so geht doch daraus mit Sicherheit hervor, dass das Spectrum von Schjell. 273 im Wesentlichen von derselben Zusammensetzung ist, wie das der kürzlich mit dem Wiener Refractor untersuchten Sterne.

Ich glaube, auf Grund der mitgetheilten Beobachtungen folgende Sätze aufstellen zu können:

1. Die Banden-Spectra III^b zeigen in Bezug auf die Lage der Banden keine Verschiedenheiten; solche sind nur in geringem Maasse in der relativen Intensität der Banden anzutreffen.

¹ A. a. O. p. 553.

2. Die charakteristischen Banden dieser Sternspectra scheinen durch die Absorption von Kohlenwasserstoffen, die in der Atmosphäre der betreffenden Sterne vorhanden sind, hervorgebracht zu werden.
3. Den Spectren der Cl. III^b ist eine breite, dunkle Linie eigenthümlich, von der Wellenlänge 575 Mill. Mm., deren Natur jedoch bisher nicht zu ergründen war.
4. In den Spectren der Classe III^b sind Linien zu erkennen, die auf Anwesenheit von Metalldämpfen in der Atmosphäre der betreffenden Sterne schliessen lassen; mit Bestimmtheit ist die Gegenwart von Natrium nachgewiesen worden.

Ich lege dem Nachweis von Kohlenwasserstoffen¹, also von chemischen Verbindungen, in den Atmosphären der Sterne grossen Werth bei, da hierdurch der Ansicht, dass sich in dem Spectrum eines Sternes seine Entwicklungsphase documentirt, eine ganz sichere Stütze verliehen wird. Im besten Einklang damit stehen die spectralphotometrischen Untersuchungen,² nach welchen die Temperatur der rothen Sterne verhältnissmässig eine sehr geringe sein muss.

Es ist bekannt, dass die Spectra chemischer Verbindungen durch einseitig verwaschene Bänder charakterisirt sind. Nun zeigen die Spectra der Cl. III^a und III^b in vorzüglich ausgeprägter Weise derartige Bandenspectra, und schien daher die Annahme, dass die Atmosphären der betreffenden Sterne so weit abgekühlt seien, dass sich chemische Verbindungen halten können, sehr wohl berechtigt, da es jedoch bisher nicht gelungen

¹ Ob die Voraussetzung vieler Physiker, dass das Spectrum, welches man erhält, wenn man ölbildendes Gas, Benzindämpfe u. dgl. in Geissler'sche Röhren einschliesst, oder welches man in dem centralen Theil einer Flamme von Leuchtgas beobachtet, nicht das des Kohlenwasserstoffs sei, in Folge dessen auch die Existenz von Kohlenwasserstoff in den Cometen nicht nachgewiesen wäre, richtig ist, mag dahingestellt sein; jedenfalls steht fest, dass chemische Verbindungen, wie wir sie hier an den oben erwähnten Gasen beobachten, in den Cometen sowohl als in den Sternen von Classe III^b vorkommen.

² H. C. Vogel, Resultate spectralphotometr. Unters. Monatsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1880, Oct. 21.

war, in den hellen und schön ausgeprägten Spectren der Cl. III^a die Verbindungen zu erkennen, welche die dort auftretenden, eigenthümlichen Absorptionsspectra hervorbringen, auch über die Deutung der Banden der Spectra III^b nur Beobachtungen vorlagen, die einer Bestätigung und Befestigung harrten, waren Zweifel nicht ausgeschlossen. Ähnlich wie im Absorptionsspectrum unserer Atmosphäre durch viele, eng zusammenstehende Linien der Eindruck von Banden hervorgebracht wird, lag nämlich immer noch die Möglichkeit vor, dass die einseitig verwaschenen Banden in den Sternspectren zufällig gebildet seien, durch das Zusammentreten von Absorptionslinien glühender Dämpfe in völliger Dissociation befindlicher Elemente.

II. Spectra der Classe II^b.

Zu den interessantesten Objecten, welche die Spectralanalyse aufzuweisen hat, gehören die Spectra der Classe II mit hellen Linien. Die hellsten derartigen Spectra haben die sogenannten neuen Sterne gezeigt, von denen, seit die Spectralanalyse Anwendung auf Himmelskörper erfahren hat, zwei, nämlich der am 12. Mai 1866 von Birmingham in Tuam in der Krone und der am 24. November 1876 von Schmidt in Athen im Schwan entdeckte Stern, beobachtet werden konnten. Bei dem letzteren war es mir möglich, die Untersuchungen über einen längeren Zeitraum auszudehnen und zu beobachten, dass das anfänglich intensive continuirliche Spectrum, durchzogen mit dunklen und vielen hell leuchtenden Linien, sich auf eine einzige helle Linie mit schwachen Spuren von continuirlichem Spectrum reducirte.¹ Schwächere Sterne, die zu dieser Classe gehören, waren längere Zeit nur drei im Sternbilde des Schwans bekannt. Vor Kurzem hat jedoch Pickering noch zwei Sterne, Arg. Öltzen 17681 und Lalande 13412 aufgefunden, welche Spectra der Classe II mit hellen Linien zeigen. Im Juni 1881 und Januar 1882 habe ich beide Sterne in Potsdam beobachtet, die Beobachtungen jedoch noch nicht veröffentlicht, da ich hoffte, durch weitere Messungen noch grössere Sicherheit erhalten zu können. Ich theile diese Beobachtungen weiter unten mit.

¹ Monatsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1877 Mai u. April.

* 8.0 Gr. $\alpha = 18^h 1^m 28^s$ $\delta = -21^\circ 16'.0$ (1883).

Arg. Öltzen 17681.

Juni 1. gelang mir die erste Beobachtung dieses Sternes mit dem Wiener Refractor. Die Luft war vorzüglich, die Lage des Beobachters aber, bei dem tiefen Stande des Sternes, eine sehr unbequeme. Spalt am Spectrometer eng.

Das Spectrum ist gebildet aus zwei hellen Linien, von denen die erste etwas brechbarer als *D*, breit aber scharf begrenzt erscheint, die zweite, in Blau gelegen, sehr breit und verwaschen ist, und einem schwachen continuirlichen Spectrum zwischen beiden Linien, welches, von der ersten Linie ausgehend, sich nicht ganz bis zur Linie im Blau verfolgen lässt.

Die Messungen ergeben folgende Abstände der ersten Linie von den *D*-Linien:

+4' 46"
4' 39".

Wegen starker Morgendämmerung mussten weitere Beobachtungen aufgegeben werden.

Im kleinen Ocularspectroskop war ausser den hellen Linien das continuirliche Spectrum sehr schwach aber besser sichtbar als im Spectrometer. Es erstreckte sich nur wenig über beide Linien hinaus. Vor der breiten Linie (also nach Roth) war eine breite dunkle Absorptionsbande gelegen.

Juni 2. Ebenfalls gute Luft. Wegen des geringen Raumes zwischen der Gallerie in der Kuppel und dem Ocularende des Spectralapparates waren die Messungen äusserst erschwert.

+ 4' 40"	} Erste helle Linie, bei verschiedenen Spaltöffnungen gemessen.
4' 38"	
3' 53"	
3' 41"	
3' 49"	
3' 36"	
3' 54"	} Anfang des hellen Streifens im Blau.
+ 83' 47"	
83' 13"	
82' 12"	
84' 40"	

+87'37" } Hellste Stelle dieses Streifens, nahe mit der Mitte
 87'42" } desselben zusammenfallend.
 +92'30" } Ende des hellen Streifens. Etwas besser begrenzt als
 92'35" } der Anfang.
 93'38" }

Das continuirliche Spectrum bricht im Abstand von +66' von den *D*-Linien plötzlich ab.

Im Mittel ergibt sich aus den Beobachtungen, wenn man noch den Beobachtungen vom Juni 1 halbes Gewicht giebt:

Minima der Ablenk.	Wellenlänge Mill. Mm.	Bemerkungen
47°27'43"	581	Helle Linie.
48°29'36"	488	Anfang } einer dunklen Bande.
48°46'36"	470	Ende }
48°47' 4"	470	Anfang.
48°51'16"	466	Hellste Stelle, nahezu Mitte der hellen Linie.
48°56'30"	461	Ende.

} Helle breite Linie,
 } verwaschen nach
 } Roth, besser be-
 } grenzt nach Vio-
 } lett.

Aus den in Potsdam angestellten Beobachtungen folgt:

W. L. 582·4 Mill. Mm. Helle Linie.
 465·5 „ „ Mitte einer breiten hellen Linie.

Die Zeichnung stimmt vollkommen mit der am Wiener Refractor angefertigten überein. Eine Abbildung des Spectrums ist auf der beifolgenden Tafel in Fig. 3 gegeben.

*7·0 Gr. $\alpha = 6^h 49^m 20^s$ $\delta = -23^\circ 46'.7$ (1883).
 Lal. 13412.

Ich habe diesen zweiten von Pickering gefundenen Stern in Potsdam 1882, Jan. 15 und 16 beobachten können und lasse die Beobachtungen hier folgen, da das Spectrum ein hübsches Verbindungsglied zwischen dem Spectrum des Sternes Arg. Öltzen 17681 und denen der drei Sterne im Schwan bildet.

In dem schwachen continuirlichen Spectrum waren 4 Linien zu erkennen. Im Mittel aus mehreren Messungen hat sich ergeben:

W. L. 581	Mill. Mm.	Schwache Linie.
540	" "	Helle Linie.
485	" "	Sehr schwache Linie.
469	" "	Helle, sehr breite Linie.

Die weiter unten folgenden Beobachtungen an einem der Sterne im Schwan haben das Vorhandensein der Wasserstofflinie $H\beta$ dargethan; ich zweifle daher nicht, dass die Linie W. L. 485, die wegen Lichtschwäche nur einmal gemessen werden konnte, ebenfalls die Wasserstofflinie $H\beta$ W. L. 486 Mill. Mm. ist.

Auch hier zeigte sich zwischen der dritten und vierten Linie ein dunkles Band in dem continuirlichen Spectrum. Das continuirliche Spectrum erstreckte sich etwas weiter nach dem blauen Ende des Spectrums, als bei Arg. Öltzen 17681.

Eine Abbildung dieses interessanten Spectrums habe ich in Fig. 4 gegeben.

* 8.5 Gr. $\alpha = 20^h 5^m 52^s$ $\delta = +35^\circ 50'.0$ (1883).

B. D. $+35^\circ$. Nr. 4001.

Der erste von den drei Sternen im Schwan, deren Spectra von Wolf und Rayet und später von mir untersucht worden sind.¹

Juni 21. Im Ocularspectroskop waren in dem schwachen, continuirlichen Spectrum des Sternes zwei schwache, nahe bei einander stehende Linien im Gelb, eine intensive helle Linie im Grün, eine ziemlich helle Linie an der Grenze des Grün und Blau und eine helle, sehr breite Bande im Blau zu erkennen, eine dunkle Bande zwischen der letzterwähnten Linie und der Bande und eine ebensolche im Gelb. Der Luftzustand war nicht besonders günstig; auch war der helle Mond störend.

Mit dem Spectrometer konnte wegen Lichtschwäche nur die eine von den Linien im Gelb gemessen werden.

+ 3'11" } Linie, äusserst schwach. Die darauf folgende ist
 } wegen Lichtschwäche nicht zu messen.

¹ Berichte der k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 12. Dec. 1873, p. 556 und ff.

- +27' 27" }
 26' 22" }
 27' 11" } Helle Linie im Grün.
 26' 16" }
 26' 37" }
- +68' 41" }
 69' 9" } Linie ziemlich hell.
 67' 40" }
 69' 9" }
- +83' 44" } Anfang der hellen Bande.
- +86' 23" }
 86' 6" } Hellste Stelle der breiten Bande im Blau.
 85' 25" }
 84' 46" }
- +88' 6" } Ende der hellen Bande.

Juni 25. Sehr gute Luft; nur der helle Mond war störend.

Im kleinen Ocularspectroskop wurden noch einige helle Linien im Grün vermuthet.

- + 3' 2" } Zwei ganz schwache Linien. Zu schwach, um wie-
 + 9' 7" } derholt gemessen werden zu können.
- +27' 2" }
 25' 20" } Helle Linie.
 25' 50" }
 26' 15" }
- +67' 35" }
 67' 52" } Ziemlich helle Linie.
 67' 44" }
 68' 31" }
- +83' 26" } Anfang der hellen Bande im Blau.
- +85' 16" } Hellste Stelle der Bande im Blau.
 84' 48" }
- +89' 1" } Ende der hellen Bande.

Herr Director Weiss hat einige Messungen an dem Stern-
 spectrum ausgeführt und gefunden: +26'.0 helle Linie; +68'.3
 schwache Linie; +84'.2 Bande, hellste Stelle.

Die Beobachtungen, nach Maassgabe der Anzahl der an jedem Abend angestellten Messungen zusammengezogen, ergeben:

Minima der Ablenk.	Wellenlänge Mill. Mm.	Bemerkungen
47°26'38"	583	Ganz schwache Linie.
47°32'43"	571	Ganz schwache Linie, nur vermuthet.
47°50' 5"	541	Helle Linie.
48°31'54"	486	Ziemlich helle Linie ($H\beta$!). Zwischen dieser Linie und der folgenden breiten Bande eine dunkle Absorptionsbande im continuirlichen Spectrum.
48°47'10"	470	Anfang
48°49' 3"	468	Hellste Stelle
48°52'10"	465	Ende

} einer hellen Bande.

* 8.0 Gr. $\alpha = 20^h 7^m 30^s$ $\delta = +35^\circ 51'.1$ (1883).

B. D. $+35^\circ$. Nr. 4013.

Juni 25. Luft recht gut, Mond störend. Mit dem Ocularspectroskop erschienen 2 helle Linien im Gelb von nahe gleicher Intensität, die brechbarere vielleicht etwas heller. Mehrere schwache Linien im Grün, eine intensive nach beiden Seiten verwaschene Bande im Blau, vorher eine dunkle breite Bande. Eine andere dunkle Bande in dem schwachen continuirlichen Spectrum liegt hinter den 2 Linien im Gelb. Zuweilen Andeutungen einer Linie im Roth ($H\alpha$?).

Mit dem Spectrometer konnten nur die hellsten Linien, wie folgt, gemessen werden:

+ 3' 3"	} Sehr helle Linie.
3' 46"	
+10' 2"	} Sehr helle Linie.
9' 20"	
+90' 4"	} Hellste Stelle, nahezu Mitte, einer breiten, verwaschenen Bande.
89' 6"	
88' 56"	

Hiermit ergibt sich:

Minima der Ablenk.	Wellenlänge Mill. Mm.	Bemerkungen
47°27' 1"	582	Sehr helle Linie.
47°33' 17"	570	Sehr helle Linie, darauf eine dunkle Bande.
48°52' 58"	464	Hellste Stelle, nahezu Mitte, einer breiten, verwaschenen Bande. Vorher eine dunkle Bande.

* 8·0 Gr. $\alpha = 20^h 10^m 10^s$ $\delta = +36^\circ 18'.3$ (1883).

B. D. $+36^\circ$. Nr. 3956.

Juni 21. Luft dunstig und zuweilen Wolken. Mond sehr hell und störend. Das Spectrum ist sehr ähnlich dem von B. D. $+35^\circ$ Nr. 4013 und unterscheidet sich nur dadurch, dass die beiden Linien im Gelb ungleiche Intensität haben; die weniger brechbare ist die hellste.

+ 3' 34"	} Sehr helle Linie.
4' 21"	
4' 9"	
3' 58"	
4' 4"	
4' 9"	
+10' 7"	} Helle Linie, beträchtlich schwächer als die vorhergehende.
9' 41"	
9' 55"	
9' 59"	
9' 43"	
+88' 34"	} Mitte einer hellen Bande.
89' 30"	
89' 11"	
89' 4"	

Juni 25. Luft sehr gut, durchsichtig. Mond störend.

Auf dem schwachen continuirlichen Spectrum erschienen zwei helle Linien im Gelb, von denen die erste (weniger brechbare) die intensivere ist. Die Bande im Blau ist nach beiden Seiten verwaschen.

Die Messungen ergaben:

+ 2'23"	}	Helle Linie.
3'37"		
3'18"		
3'51"		
2'47"		
+ 9'40"	}	Helle Linie, schwächer als die vorhergehende.
9'26"		
9'41"		
9'51"		
+85'41"		Anfang der hellen Bande im Blau.
+90'40"	}	Hellste Stelle der Bande, der Mitte entsprechend.
89'18"		
88'34"		
+92'41"		Ende der hellen Bande.

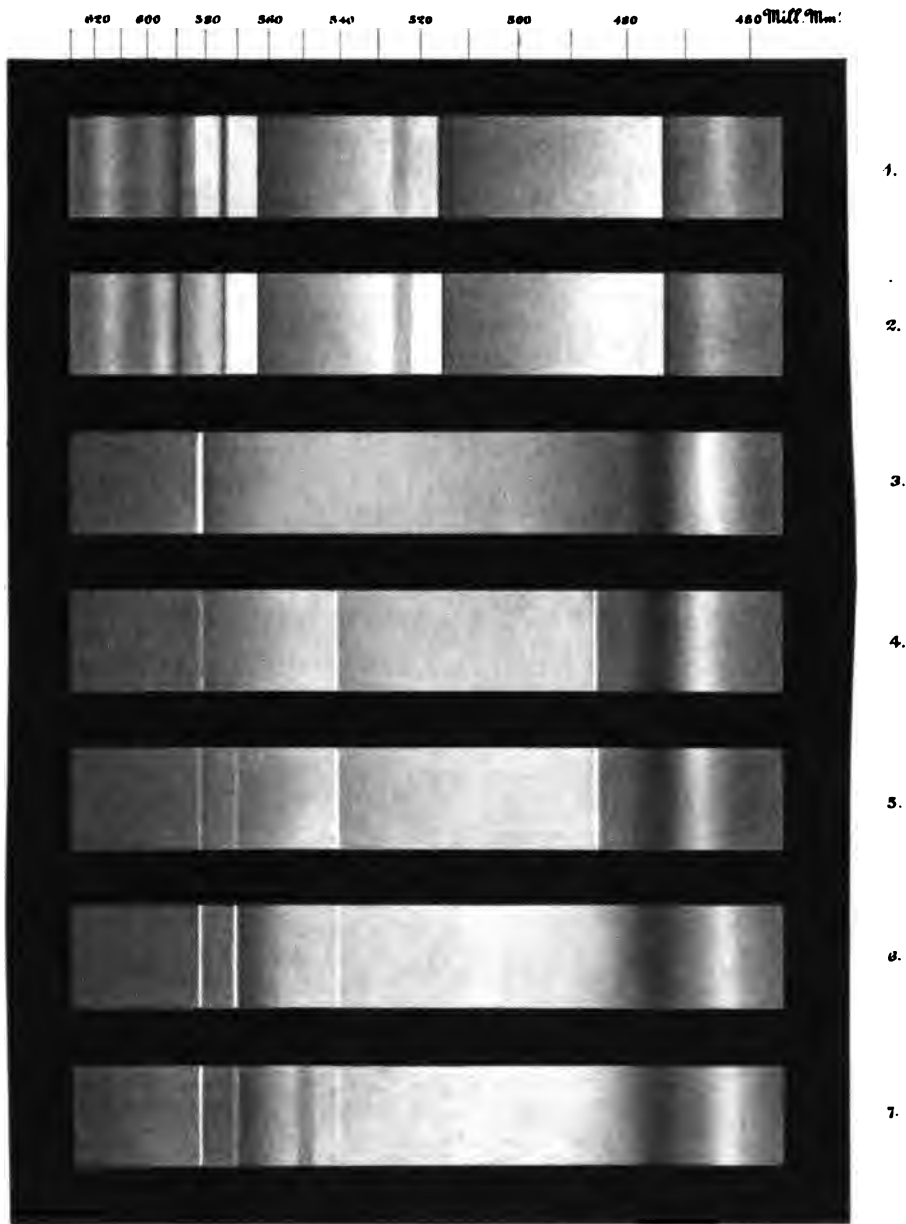
Im Mittel aus den Beobachtungen an beiden Abenden ergibt sich:

Minima der Ablenk.	Wellenlänge Mill. Mm.	Bemerkungen
47°27'15"	582	Helle Linie.
47°33'23"	569	Helle Linie, schwächer als die vorhergehende.
48°49'17"	468	Anfang der Bande.
48°52'52"	464	Hellste Stelle (nahezu Mitte) der Bande.
48°56'17"	461	Ende der Bande.

Abbildungen der drei interessanten Spectra habe ich in den Fig. 5, 6 und 7 der beifolgenden lithographischen Tafel gegeben. Ich habe nur die hellen Linien aufgenommen, die mit Bestimmtheit gesehen und gemessen werden konnten. Eine innige Verwandtschaft der drei Spectra mit denen der zwei in letzter Zeit von Pickering gefundenen Sterne tritt unverkennbar hervor.

Aus meinen früheren Beobachtungen über die Spectra der drei Sterne im Schwan folgen im Mittel für alle drei Sterne die Wellenlängen:

Sternspectra



H.C. Vogel del.

K. K. Hofmann sculp.

1, Schjell. 152. 2, B. D. + 34° 4500. 3, Arg. Oeltz. 17681. 4, Lal. 13412. 5, B. D. + 35° 4001. 6, B. D. 35° 4013. 7, B. D. + 36° 3956.

580 Mill. Mm.

568 " "

537 " "

467 " "

Etwas abweichend ist nur die Auffassung der Lage der breiten hellen Bande im Blau, die bei den früheren Messungen bei allen drei Sternen übereinstimmt, während die neueren Messungen ergeben haben, dass diese Bande nur bei den Sternen B. D.+35° Nr. 4013 und B. D.+36° Nr. 3956 genau dieselbe Lage hat, bei dem Sterne B. D. +35° Nr. 4001 jedoch etwas nach Roth verschoben erscheint. Bei den verhältnissmässig geringen optischen Hilfsmitteln, mit denen jene Messungen ausgeführt wurden, ist die Übereinstimmung aber eine ganz überraschende.

Geht man etwas näher auf die Details der früheren Beobachtungen ein, so ergibt sich, dass die relativen Intensitäten der Linien in den drei Spectren keine Veränderung im Laufe von 10 Jahren erfahren haben.

Eine Deutung der hellen Linien, mit Ausnahme der Linie W. L. 486 Mill. Mm., die unzweifelhaft die Wasserstofflinie $H\beta$ ist, ist bisher nicht möglich gewesen.

XXI. SITZUNG VOM 18. OCTOBER 1883.

In Verhinderung des Secretärs der Classe übernimmt Herr Prof. Weyr dessen Functionen.

Herr Prof. Dr. C. B. Brühl, Vorstand des zootomischen Institutes der Wiener Universität, übermittelt die 28., 29. und 30. Lieferung seines illustrierten Werkes: „Zootomie aller Thierclassen“, enthaltend die Originalbilder und den vollständigen Text über das Krebs-Skelet (mit neuer Nomenclatur), über das Katzengehirn, die Wirbel der Wallfische und das Gehör der Vögel.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet den zweiten Theil seiner „Theorie der Gasdiffusion“, worin die Diffusion eines Gases in sich selbst behandelt wird.

Ferner übersendet Herr Prof. Boltzmann eine Abhandlung „Über das Arbeitsquantum, welches bei chemischen Verbindungen gewonnen werden kann“.

Der Secretär-Stellvertreter legt eine eingesendete Abhandlung des Herrn J. Bazala, Lehrer an der Oberrealschule in der Josephstadt (Wien) vor, betitelt: „Beleuchtungs-Constructions für Flächen, deren zu einer Achse normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, bei orthogonaler und perspectivischer Darstellung“.

Behufs Wahrung der Priorität wird ein versiegeltes Schreiben von Herrn Adolf Pozděna in Wien eingesendet, welches die Aufschrift: „Vorwärts“ trägt und angeblich eine Mittheilung, betreffend eine neue Theorie und principiell neue Erzeugungsart der Feile enthält.

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak spricht über die Form und die chemische Zusammensetzung der Skapolithreihe.

Das w. M. Herr Hofrath Dr. A. Winckler überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Reduction der Bedingungen des Euler'schen Criteriums der Integrabilität auf eine einzige Gleichung“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real de ciencias medicas fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 228—230. Tomo XX. Julio—Setiembre 15. Habana, 1883; 8°.

Académie, royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Bulletin. 52^e année, 3^e série, tome 5. Nrs. 6 et 7. Bruxelles, 1883; 8°.

Academy, the royal Irish: The Transactions. Vol. XVIII. Nos. XI—XIII. Dublin, 1882—83; 4°.

— Proceedings. Vol. II, ser. II, Nr. 4, Vol. III, ser. II. Nos. 9 et 10. Dublin, 1882—83; 8°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina, Heft XIX. Nr. 17—18. Halle a. S. 1883; 4°.

Akademija, Ingoslavenska znanosti i umjetnosti: Rad. Knjiga LXIII—LXVI. U Zagrebu, 1882—83; 8°.

Annales des Mines. 8^e série. Tome II 6^e livraison de 1882. Paris, 1882; 8°. — Tome III. 1^{re} livraison de 1883. Paris, 1883; 8°.

Archiv für Mathematik und Physik. 69. Theil. 4. Heft. Leipzig, 1883; 8°. — 70. Theil. 1. Heft. Leipzig, 1883; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3^e période. Tome IX. Nr. 6—8.

Centralbureau der europäischen Gradmessung: Verhandlungen vom 11. bis zum 15. September 1882 mit dem Generalbericht für die Jahre 1881 und 1882. Berlin, 1883; 4°.

Commission géodesique fédérale: Nivellement de précision de la Suisse. 8^e livraison. Genève, Bale, Lyon, 1883; 4°.

- Gesellschaft, Deutsche geologische: Zeitschrift. XXXV. Bd. 2. Heft. April bis Juni 1883. Berlin, 1883; 8°.
- naturwissenschaftliche Isis in Dresden: Sitzungsberichte und Abhandlungen. Jahrgang 1883, Januar bis Juni. Dresden, 1883; 8°.
 - Senckenbergische naturforschende: Bericht. 1881—82. Frankfurt a. M. 1882; 8°.
 - — Abhandlungen. XIII. Band. 1. Heft. Frankfurt a. M. 1883; 4°.
- Institut, königl. Preussisches geodätisches: Publication. Gradmessungs-Nivellement zwischen Swinemünde und Amsterdam. Berlin, 1883; 4°.
- Astronomisch-geodätische Arbeiten in den Jahren 1881 und 1882. Berlin, 1883; 4°.
 - national genevois: Bulletin. Tome XXV. Genève, 1883; 8°.
- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. XIII. Band. Jahrgang 1881. Heft 1. Berlin, 1883; 8°.
- Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie. Für 1881. III. & IV. Heft. Giessen, 1883; 8°.
- Johns Hopkins University: Circulars. Vol. II. Nro. 25. Baltimore, 1883; 4°.
- Studies from the Biological Laboratory. Vol. II. Nro. 4. Baltimore, 1883; 8°.
 - American Chemical Journal. Vol. V. Nro. 3. Baltimore; 1883; 8°.
 - American Journal of Mathematics. Vol. V. Nr. 4. Baltimore; 1882; 8°.
- Journal für praktische Chemie. N. F. Bd. XXVIII. 1.—6. Heft. Leipzig, 1883; 8°.
- de l'École polytechnique. 52° Cahier. Paris, 1882; 4°.
- Nature. Vol. XXVIII. No. 727 et 728. London, 1883; 8°.
- Société Belge de Microscopie: Annales. Tome VII. Anné 1880 jusque 1881. Bruxelles, 1883; 8°.
- entomologique de Belgique: Annales. Tome XXVI. Bruxelles. 1882; 8°.
 - royale des Sciences de Liège: Mémoires. 2^e série, tome X. Bruxelles, Londres, Paris, Berlin, 1883; 8°.

- Société géologique de France: Bulletin. 3^e série, tome XI. Nos. 3 et 4. Paris, 1883; 8^o.**
- **zoologique de France: Bulletin. 7^e année. No. 5. Paris, 1882; 8^o. 8^e année. Nos. 1—2. Paris, 1883; 8^o.**
- Verein der Ärzte in Steiermark: Mittheilungen. XIX. Vereinsjahr 1882. Graz, 1883; 8^o.**
- **von Alterthumsfreunden im Rheinlande: Jahrbücher. Heft 73 bis 75. Bonn, 1882—83; 4^o.**
- **naturwissenschaftlicher, für Sachsen und Thüringen in Halle: Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen und Berichte. Vierte Folge. Bd. 1. Berlin, 1882; 8^o. — Bd. 2. 1. und 2. Heft. Halle a. S., 1883; 8^o.**
- Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. III. Jahrgang 1883. 7., 8. und 9. Heft. Berlin, 1883; 8^o.**
-

Reduction der Bedingungen des Euler'schen Criteriums der Integrabilität auf eine einzige Gleichung.

Von dem w. M. Dr. A. Winckler.

Bezeichnet f eine Function der Grössen

$$x, y \text{ und } y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

so ist $f \cdot dx$ unmittelbar integrabel oder also das vollständige Differential einer andern Function von $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0$$

oder in anderer Schreibweise, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - D_x \frac{\partial f}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y''} - \dots + (-1)^n D_x^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0 \quad \dots (1)$$

identisch stattfindet. Diesem von Euler (1764) und Condorcet (1765) gefundenen Satz fügte Lagrange die selbstverständlich richtige und auch aus der Gleichung (1) sich ergebende Einschränkung hinzu, dass f um integrabel zu sein, $y^{(n)}$ nur linear enthalten dürfe, also von der Form

$$f = P y^{(n)} + Q \quad \dots (2)$$

sein müsse, unter P und Q Functionen von $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ verstanden. Ferner hat Lagrange ¹ aus der Betrachtung einzelner

¹ Journal de l'école polytechn. Cahier XII. Supplément, pag. 21 (Calcul des fonctions).

Fälle geschlossen, dass die Gleichung (1), damit ihr identisch genügt werden könne, nur in n Bedingungsgleichungen zerfalle, welche gleichzeitig stattfinden müssen.

Später zeigte Joachimsthal,¹ dass sich diese n Bedingungen auf deren $\frac{1}{2}(n+1)$, wenn n ungerade, und auf $\frac{1}{2}n+1$, wenn n gerade ist, reduciren lassen.

Soweit mir die Literatur dieses Gegenstandes bekannt ist, hat die wichtige Frage nach der kleinsten Zahl der Bedingungsgleichungen, welche zur Identität der Gleichung (1) erforderlich sind, welchen also namentlich P und Q genügen müssen, zu keinen weiteren Ergebnissen geführt, so dass Herr Bertrand² mit den Worten:

„Quoique l'intégrabilité de la fonction $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ soit exprimée par la seule équation (1), le nombre des conditions nécessaires est en réalité beaucoup plus grand et l'équation (1) peut se décomposer en plusieurs autres, qui sont toutes nécessaires“ den heutigen Stand jener Frage, wenn ich nicht irre, vollkommen richtig bezeichnet.

Gelegentlich einer Arbeit über die Integration der Differentialgleichungen bin ich nun aber zu dem hiervon durchaus verschiedenen Resultat gelangt, dass sich die sämmtlichen in Rede stehenden Bedingungsgleichungen auf eine einzige reduciren, und dass diese einzige Gleichung, welche zu erfüllen ist, damit die Gleichung (1) identisch stattfinde, direct und in voller Allgemeinheit den Werth liefert, welcher Q beizulegen ist, wenn man für P irgend eine Function von $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ gewählt hat. Dieses Resultat enthält die einfache und wie ich glaube, die vollständige Lösung der seit so langer Zeit besprochenen Frage.

1.

Soll die Herleitung unmittelbar von der Gleichung (1) ausgehen, so muss man vor Allem die Summen der zwei, drei und vier letzten Glieder jener Gleichung, also die Ausdrücke:

¹ Crelle, Journal, Bd. 33.

² *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*. T. II, p. 562.

$$(-1)^{n-1} D_x^{(n-1)} \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \quad \dots (3)$$

$$(-1)^{n-2} D_x^{(n-2)} \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \right] \quad \dots (4)$$

$$(-1)^{n-3} D_x^{(n-3)} \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \right] \right] \quad \dots (5)$$

nacheinander in Betracht ziehen und darin $f = Py^{(n)} + Q$ setzen, wobei

$$P = \varphi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad Q = \psi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

ist.

Beginnt man mit dem Ausdruck (3), so ist zunächst die darin vorkommende Klammergrösse zu berechnen. Man bemerke zu dem Ende, dass:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}},$$

$$D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = \frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \dots + y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} + y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-1)}}$$

daher

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial P}{\partial x} - y' \frac{\partial P}{\partial y} - \dots - y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}$$

ist und dass hieraus

$$\begin{aligned} & D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] = \\ & y^{(n)} \left[\frac{\partial^2 Q}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y^{(n-1)}} - y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-1)}} - \dots \right. \\ & \quad \left. - y^{(n-1)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \right] \\ & + D_x \left[\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial P}{\partial x} - y' \frac{\partial P}{\partial y} - \dots - y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \right]_{y^{(n-1)}} \quad \dots (6) \end{aligned}$$

folgt, wobei das der Klammer angehängte Zeichen $y^{(n-1)}$ bedeutet, es sei bei der Differentiation der Grösse in der Klammer $y^{(n-1)}$ als constant zu betrachten.

Dies vorausgesetzt, betrachte man nun die Summe (4) der drei letzten Glieder von (1), beziehungsweise die darin vorkommende Klammergrösse, in welcher nach (2)

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} = y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} + \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}} \quad \dots (7)$$

zu setzen ist. Es ergibt sich dann, wenn man auf die Gleichungen (6) und (7) Rücksicht nimmt, die folgende Formel:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] = \\ & y^{(n)} \left[- \frac{\partial^2 Q}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y^{(n-1)}} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-1)}} + \dots \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + y^{(n-1)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-1)}} + 2 \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \right] \dots (8) \\ & + \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}} + D_x \left[- \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \dots + y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \right]_{y^{(n-1)}} \end{aligned}$$

Da das erste Glied rechter Hand, in (4) eingesetzt, noch der $(n-2)$ maligen Differentiation zu unterziehen ist, so entsteht aus ihm ein anderes, welches $y^{(2n-2)}$ enthält; ein solches Glied kann aber aus keinem der übrigen Glieder in (1) mehr hervorgehen, denn selbst das viertletzte

$$D_x^{(n-3)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} = D_x^{(n-3)} \left[y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} + \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-3)}} \right]$$

enthält als höchsten Differentialquotienten von y nur noch $y^{(2n-3)}$. Hieraus folgt, dass, damit die Gleichung (1) identisch werden könne, das Glied rechter Hand in (8), welches $y^{(n)}$ als Factor enthält, nothwendig verschwinden, dass also die Gleichung

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y^{(n-1)}} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-1)}} + \dots + y^{(n-1)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-1)}} + 2 \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \dots (9)$$

bestehen muss. Diese Gleichung ist nun näher zu betrachten.

Aus ihr ergibt sich durch Integration nach $y^{(n-1)}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \dots + y^{(n-2)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} + \int y^{(n-1)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-1)}} \partial y^{(n-1)} + 2 \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} + P_1 \dots (10)$$

wobei

$$P_1 = \varphi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-2)})$$

eine willkürliche Function der in der Parenthese enthaltenen Grössen bezeichnet.

Nun ist

$$\int y^{(n-1)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-1)}} \partial y^{(n-1)} = y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} - \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)}$$

folglich kann (10) in der Form

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \dots + y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} + \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} + P_1 \dots (11)$$

oder wie folgt:

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \dots + y^{(n-2)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} + \frac{\partial [y^{(n-1)} \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)}]}{\partial y^{(n-1)}} + P_1$$

geschrieben werden.

Wird auch diese Gleichung nach $y^{(n-1)}$ integrirt, so ergibt sich :

$$Q = y^{(n-1)} \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} + \int \left[\frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \dots + y^{(n-2)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)} + P_1 y^{(n-1)} + Q_1 \dots (I)$$

unter

$$Q_1 = \psi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-2)})$$

eine zunächst nicht näher bestimmte Function der in der Parenthese enthaltenen Grössen verstanden.

Die Gleichung (8), zu welcher ich nun zurückkehre, geht in Folge der Gleichung (9) und dann der Gleichung (11) über in:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \\ = & \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}} + D_x \left[- \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \dots + y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \right] y^{(n-1)} \\ = & \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} \right] y^{(n-1)} - D_x [P_1] y^{(n-1)} \dots (12) \end{aligned}$$

Durch die Ausführung der in den beiden letzten Gliedern angedeuteten vollständigen Differentiationen, und zunächst aus (I) ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}} = \\ & y^{(n-1)} \int \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} \\ + & \int \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y^{(n-2)}} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-2)}} + \dots + y^{(n-2)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)} \partial y^{(n-2)}} \right. \\ & \left. + \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)} \\ & + y^{(n-1)} \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-2)}} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-2)}} \dots (13) \end{aligned}$$

sodann:

$$\begin{aligned}
 & D_x \left[\int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} \right]_{y^{(n-1)}} \\
 &= \int \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y^{(n-2)}} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-2)}} + \dots + y^{(n-2)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)} \partial y^{(n-2)}} \right] \partial y^{(n-1)} \\
 & \quad + y^{(n-1)} \int \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} \quad \dots(14)
 \end{aligned}$$

wobei hinsichtlich des letztern Integrals in dieser Gleichung, welches aus der Differentiation des

$$\int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)}$$

nach $y^{(n-2)}$ und dann des $y^{(n-2)}$ nach x hervorgeht, beachtet werden muss, dass der Factor $y^{(n-1)}$ vor das Integralzeichen zu setzen war, weil die Integration, bei der $y^{(n-2)}$ constant bleibt, vorangeht, und die Differentiation, durch welche jener Factor erst entsteht, nachfolgt.

Aus (13) und (14) folgt nun:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} \right]_{y^{(n-1)}} \\
 &= \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} + \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-2)}} \quad \dots(15)
 \end{aligned}$$

Bemerkt man noch, dass $D_x [P_1]_{y^{(n-1)}} = \frac{dP_1}{dx}$, weil P_1 ohnehin von $y^{(n-1)}$ frei ist, so verwandelt sich die Gleichung (12), resp. (8) in die folgende:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \quad \dots(16) \\
 &= \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} + \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-2)}} \cdot y^{(n-1)} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{dP_1}{dx}
 \end{aligned}$$

Setzt man jetzt der Abkürzung wegen:

$$f_1 = P_1 y^{(n-1)} + Q_1$$

so ist:

$$P_1 = \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-2)}} \cdot y^{(n-1)} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-2)}} = \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}}$$

folglich:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{dP_1}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}}$$

und kann endlich die Gleichung (16) durch die folgende:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \\ &= \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \quad \dots(17) \end{aligned}$$

ersetzt werden.

Geht man nun weiter und betrachtet die Summe (5) der vier letzten Glieder von (1), resp. den ganzen darin vorkommenden Klammerausdruck, so ergibt sich hierfür mit Rücksicht auf (17) die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \right] \\ &= \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} y^n + \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} \quad \dots(18) \\ & \quad - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} + D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \end{aligned}$$

Da nun aus (I):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-3)}} = \\ & y^{(n-1)} \int \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)} \partial y^{(n-2)}} \cdot \partial y^{(n-1)} \\ & + \int \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y^{(n-3)}} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-3)}} + \dots + y^{(n-3)} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)} \partial y^{(n-3)}} \right. \\ & \quad \left. + y^{(n-2)} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)} \partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)} \\ & + \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} + y^{(n-1)} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-3)}} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-3)}} \end{aligned}$$

folgt, und da

$$D_x \int \frac{P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} =$$

$$\int \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y^{(n-3)}} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-3)}} + \dots + y^{(n-3)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-4)} \partial y^{(n-3)}} \right. \\ \left. + y^{(n-2)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)} \partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)}$$

$$+ y^{(n-1)} \int \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)} \partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} + y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} = \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-4)}} \partial y^{(n-1)} - y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \\ + y^{(n-1)} \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-3)}} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-3)}}$$

Die Gleichung (18) kann daher wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \right] \\ = \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-4)}} \partial y^{(n-1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \dots (19)$$

geschrieben werden.

Von hier an hat nun die weitere Entwicklung einen regelmässigen Fortgang, wie dies übrigens schon aus der Vergleichung der Formeln in (17) und (19) sich ergibt.

Zum Überfluss will ich noch bemerken, dass für die Summe der fünf letzten Glieder von (1) die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-4)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \right] \right] \\ = \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-3)}} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} \\ - D_x^{(3)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}}$$

erhalten wird.

Setzt man das Verfahren fort, bis sich linker Hand die Summe der n letzten Glieder von (1) ergibt, so gelangt man hier-nach zu der Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y'} - D_x \frac{\partial f}{\partial y''} + D_x^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y'''} - \dots + (-1)^{n-1} D_x^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \\ &= \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial y^{(n-1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y'} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y''} + \dots + (-1)^{n-2} D_x^{(n-2)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \end{aligned}$$

und daher, wenn man zur Summe aller Glieder von (1) über-geht:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y} - D_x \frac{\partial f}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y''} - \dots + (-1)^n D_x^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} y^{(n)} + \frac{\partial Q}{\partial y} - D_x \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial y^{(n-1)} \\ & - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-1} D_x^{(n-1)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \dots (20) \end{aligned}$$

Nun folgt wieder aus (I):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial y} = \\ & y^{(n-1)} \int \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} \\ & + \int \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y} + y'' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y'} + \dots + y^{(n-2)} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)} \\ & + y^{(n-1)} \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} & D_x \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial y^{(n-1)} = \\ & \int \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y} + y'' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y'} + \dots + y^{(n-2)} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)} \\ & + y^{(n-1)} \int \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} + y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned}$$

Man hat daher:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - D_x \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial y^{(n-1)} = -y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y} + y^{(n-1)} \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial y}$$

und kann die Gleichung (20) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y} - D_x \frac{\partial f}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y''} - \dots + (-1)^n D_x^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \quad \dots(21) \\ & = \frac{\partial f_1}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-1} D_x^{(n-1)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \end{aligned}$$

Damit die Gleichung (1) stattfindet, genügt es hiernach, dass die zweite Seite der Gleichung (21) identisch verschwinde, oder, was dasselbe ist, dass auch die Function

$$f_1 = P_1 y^{(n-1)} + Q_1$$

integrabel sei. Bestimmt man für diese den Werth von Q_1 auf dieselbe Art wie früher Q für f , also nach der Formel (I), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} Q_1 = & y^{(n-2)} \int \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-2)} + \int \left[\frac{\partial P_1}{\partial x} + y' \frac{\partial P_1}{\partial y} + \dots + y^{(n-3)} \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-4)}} \right] \partial y^{(n-2)} \\ & + P_2 y^{(n-2)} + Q_2 \end{aligned}$$

wobei

$$P_2 = \varphi_2(x, y, y', \dots, y^{(n-3)}),$$

$$Q_2 = \psi_2(x, y, y', \dots, y^{(n-3)})$$

ist.

Wenn man in gleicher Weise auch Q_2 nach der Formel

$$\begin{aligned} Q_2 = & y^{(n-3)} \int \frac{\partial P_2}{\partial y^{(n-4)}} \partial y^{(n-3)} + \int \left[\frac{\partial P_2}{\partial x} + y' \frac{\partial P_2}{\partial y} + \dots + y^{(n-4)} \frac{\partial P_2}{\partial y^{(n-5)}} \right] \partial y^{(n-3)} \\ & + P_3 y^{(n-3)} + Q_3 \end{aligned}$$

wobei

$$P_2 = \varphi_2(x, y, y', \dots, y^{(n-4)}),$$

$$Q_2 = \psi_2(x, y, y', \dots, y^{(n-4)})$$

ist, bestimmt, sodann:

$$f_2 = P_2 y^{(n-2)} + Q_2$$

setzt, so wird zwischen f_1 und f_2 die folgende Gleichung stattfinden, welche der Gleichung (21) zwischen f und f_1 analog ist:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-1} D_x^{(n-1)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \dots (22) \\ & = \frac{\partial f_2}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_2}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_2}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-2} D_x^{(n-2)} \frac{\partial f_2}{\partial y^{(n-2)}} \end{aligned}$$

Die Gleichung (1) wird also auch dann erfüllt sein, wenn die zweite Seite der Gleichung (22) identisch verschwindet, oder, was dasselbe besagt, wenn auch die Function f_2 integrabel ist.

Ebenso wird, wenn man Q_3 gemäss der Formel

$$\begin{aligned} Q_3 = & \\ & y^{(n-4)} \int \frac{\partial P_3}{\partial y^{(n-5)}} \partial y^{(n-4)} + \int \left[\frac{\partial P_3}{\partial x} + y' \frac{\partial P_3}{\partial y} + \dots + y^{(n-5)} \frac{\partial P_3}{\partial y^{(n-6)}} \right] \partial y^{(n-4)} \\ & + P_3 y^{(n-4)} + Q_4 \end{aligned}$$

wobei

$$P_4 = \varphi_4(x, y, y', \dots, y^{(n-3)}), \quad Q_4 = \psi_4(x, y, y', \dots, y^{(n-3)})$$

ist, bestimmt und dann

$$f_3 = P_3 y^{(n-3)} + Q_3$$

setzt, die zu (21) analoge Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_2}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_2}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_2}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-2} D_x^{(n-2)} \frac{\partial f_2}{\partial y^{(n-2)}} \\ & = \frac{\partial f_3}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_3}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_3}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-3} D_x^{(n-3)} \frac{\partial f_3}{\partial y^{(n-3)}} \dots (23) \end{aligned}$$

stattfinden. Hieraus folgt, dass die Gleichung (1) auch dann besteht, wenn die zweite Seite der Gleichung (23) identisch verschwindet, oder, was hiermit gleichbedeutend, wenn auch die Function f_3 integrabel ist.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu der Function

$$f_{n-2} = P_{n-2} y'' + Q_{n-2}$$

worin

$$P_{n-2} = \varphi_{n-2}(x, y, y'), \quad Q_{n-2} = \psi_{n-2}(x, y, y')$$

Wird Q_{n-2} wieder nach der Gleichung (I) oder direct in der Weise, auf welche (I) erhalten wurde, bestimmt, so folgt:

$$Q_{n-2} = y' \int \frac{\partial P_{n-2}}{\partial y} \partial y' + \int \frac{\partial P_{n-2}}{\partial x} \partial y' + P_{n-1} y' + Q_{n-1}$$

wobei

$$P_{n-1} = \varphi_{n-1}(x, y), \quad Q_{n-1} = \psi_{n-1}(x, y)$$

Wenn man ferner Q_{n-1} durch die Gleichung

$$Q_{n-1} = \int \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} \partial y + P_n \quad \dots(24)$$

definiert, wobei

$$P_n = \varphi_n(x)$$

ist, und wenn endlich

$$f_{n-1} = P_{n-1} y' + Q_{n-1}$$

gesetzt wird, so erhält man die zu (21) analoge Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y'} + D_x^2 \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y''} \\ = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y'} \end{aligned} \quad \dots(25)$$

Die Gleichung (1) wird also auch dann identisch stattfinden, wenn die zweite Seite der Gleichung (25) identisch verschwindet.

Nun ist, mit Rücksicht auf (24)

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = \frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial y} = \frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}$$

$$D_x \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y'} = D_x P_{n-1} = \frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}$$

Es verschwindet also in der That die zweite Seite der Gleichung (25) identisch, folglich auch die erste Seite der Gleichung (1), wie es sein soll.

Dies ist also schon der Fall, wenn die, bloß durch ihre Argumente definirten Functionen P, P_1, \dots, P_n beliebig gewählt, und die Functionen Q, Q_1, \dots, Q_{n-1} mittelst der oben angegebenen Gleichungen bestimmt werden.

In dem ganz speciellen Falle, wenn die unbestimmt gebliebenen Functionen P_1, P_2, \dots, P_n gleich Null gesetzt werden, verschwinden auch Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} und geht die Formel (I) über in:

$$Q =$$

$$y^{(n-1)} \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} + \int \left[\frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \dots + y^{(n-2)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)}$$

woraus das bemerkenswerthe Resultat folgt, dass selbst dieser einfachste Werth von Q , wie man auch P , seiner Definition gemäss, wählen mag, das Euler'sche Criterium (1) ohne jede sonstige Bedingung in eine identische Gleichung verwandelt, dass also weder n , noch $\frac{1}{2}(n+1)$ resp. $\frac{1}{2}n+1$, noch sonst welche Bedingungen hierzu erforderlich sind.

Belässt man aber die P in ihrer, nur durch die Argumente beschränkten Unbestimmtheit und also die Q in der durch die früheren Gleichungen gegebenen Allgemeinheit, so können die Ergebnisse dieser Betrachtung wie folgt zusammengefasst werden.

Zur Theorie der Gasdiffusion.

II. Theil.

Von dem c. M. Ludwig Boltzmann in Graz.

VII. Abschnitt.

Entwicklung und Eintheilung der Gleichungen, welche für den Fall gelten, dass die Moleküle der diffundirenden Gase gleiche Masse besitzen.

Ich habe im I. Theile meiner Theorie der Gasdiffusion das Problem ganz allgemein behandelt. Die grosse Complication der daselbst aufgestellten Gleichungen rührt hauptsächlich von der damit verbundenen Voraussetzung her, dass die Moleküle der diffundirenden Gase verschiedene Massen besitzen. Es scheint mir nützlich, auch die Gestalt der einfacheren Gleichungen zu untersuchen, welche man erhält, wenn man die Massen der Moleküle der diffundirenden Gase als gleich voraussetzt. Die so erhaltenen Gleichungen entsprechen freilich nicht mehr dem allgemeinsten Falle der Diffusion, allein sie werden immerhin noch in den in der Natur nicht so gar seltenen Fällen Anwendung finden können, dass die Moleküle zweier Gasarten genau oder wenigstens nahezu gleich sind. Ich will da von den Gleichungen 35) und 36) Pag. 76 des I. Theiles meiner Theorie der Gasdiffusion ausgehen, in welchen ich $m = M$ setze.

Um einige Buchstaben zu ersparen, will ich jetzt die wirkliche Geschwindigkeit eines Gasmoleküls mit v_w , deren Componenten mit ξ_w, γ_w, ζ_w bezeichnen, und statt dieser Grössen die Variablen $v = v_w \cdot \sqrt{hm}$, $\xi = \xi_w \cdot \sqrt{hm}$, $\gamma = \gamma_w \cdot \sqrt{hm}$, $\zeta = \zeta_w \cdot \sqrt{hm}$ einführen.

$f(\xi, \eta, \zeta) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$ soll die Wahrscheinlichkeit sein, dass die jetzt gebrauchten Variablen ξ, η, ζ zwischen den Grenzen ξ und $\xi+d\xi, \eta$ und $\eta+d\eta, \zeta$ und $\zeta+d\zeta$ liegen, dass also die wirklichen Geschwindigkeitscomponenten ξ_w, η_w, ζ_w zwischen den Grenzen

$$\frac{\xi}{\sqrt{hm}} \text{ und } \frac{\xi+d\xi}{\sqrt{hm}} \text{ etc.}$$

liegen, daher ist $(\sqrt{hm})^3 f(\xi_w \sqrt{hm}, \eta_w \sqrt{hm}, \zeta_w \sqrt{hm}) d\xi_w d\eta_w d\zeta_w$ die Wahrscheinlichkeit, dass ξ_w, η_w, ζ_w zwischen den Grenzen ξ_w und $\xi_w+d\xi_w$ u. s. w. liegen. Es tritt also an Stelle der im I. Theile gebrauchten Function $f(\xi, \eta, \zeta)$ jetzt der Ausdruck:

$$(\sqrt{hm})^3 f(\xi \sqrt{hm}, \eta \sqrt{hm}, \zeta \sqrt{hm}),$$

d. h. hat man f gefunden, so ist es mit \sqrt{hm}^3 zu multipliciren, dann darin $\xi \sqrt{hm}$ für ξ etc. zu schreiben, und endlich mit $d\xi d\eta d\zeta$ zu multipliciren, um die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass ξ_w zwischen ξ und $\xi+d\xi$ etc. liegt, daher tritt an die Stelle der Gleichung 1) auf Seite 64 die folgende:

$$\begin{aligned} \sqrt{hm} \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} \int d\omega_1 \int p dp \int d\varphi \cdot r (ff_1 - f'f'_1) + \\ + \int d\Omega \int p dp \int d\varphi \cdot r (fF - f'F') = 0 \quad \dots 77) \end{aligned}$$

Hiebei ist natürlich $r = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}$, also ebenfalls die mit \sqrt{hm} multiplicirte relative Geschwindigkeit der beiden Moleküle, Ξ, H, Z sind auch die mit \sqrt{hm} multiplicirten Geschwindigkeitscomponenten der zweiten Gasart.

Es empfiehlt sich ferner in den folgenden Gleichungen die mit \sqrt{hm} multiplicirte Geschwindigkeit eines Moleküls der zweiten Gasart geradeso wie die eines Moleküls der ersten Gasart mit v zu bezeichnen, da ja beide in den folgenden Gleichungen bloss die Rolle von independenten Variablen spielen und eine Unterscheidung derselben nicht weiter nothwendig scheint. An Stelle der Gleichungen 3) auf Seite 64 schreiben wir dann:

$$\begin{aligned} f &= [c + \gamma x + \xi \cdot \varphi(v^2)] e^{-v^2} \} \\ F &= [C + \Gamma x + \xi \cdot \Phi(v^2)] e^{-v^2} \} \end{aligned} \quad \dots 78)$$

Behufs Vergleichung der früher gebrauchten Buchstaben mit den jetzt gebrauchten, wollen wir ersteren den Index w , letzteren den Index i geben. Wir haben also

$$f_w(\xi, \eta, \zeta) = (\sqrt{hm})^3 f_i(\xi/\sqrt{hm}, \eta/\sqrt{hm}, \zeta/\sqrt{hm}) \quad \dots 79)$$

daher gemäss der Gleichungen 78) und 3)

$$\sqrt{hm}^3 [c_i + \gamma_i x + \xi \sqrt{hm} \varphi_i(v^2/\sqrt{hm})] e^{-v^2/hm} = (c_w + x \frac{dc_w}{dx} + c_w \xi \varphi_w(v^2)) e^{-hm v^2}$$

woraus folgt:

$$c_w = c_i (\sqrt{hm})^3, c_w \varphi_w(v^2) = h^2 m^2 \varphi_i(v^2/hm), (\sqrt{hm})^3 \gamma_i = \frac{dc_w}{dx} \quad \dots 80)$$

die Gleichungen 35) und 36) verwandeln sich daher in folgende:

$$\frac{v_i}{2\pi\sqrt{hm}} \frac{dc}{dx} + c_w^2 \delta^2 (a + p - i) + c_w C_w \mu^2 (b + q - x - w) = 0$$

$$\frac{v_i}{2\pi\sqrt{hm}} \frac{dc}{dx} + C_n^2 \Delta^2 (A + P - I) + c_w C_w \mu^2 (B + Q - Z - W) = 0 \quad \dots 81)$$

Nach Gleichung 38) auf Seite 79 ist

$$c_w a = \frac{\pi}{h^2 m^2} v_w c_w \varphi_w(v^2) \left[\frac{1}{2} e^{-hm v^2} + \left(v_w \sqrt{hm} + \frac{1}{2v_w \sqrt{hm}} \right) \int_0^{v/\sqrt{hm}} dx e^{-x^2} \right] =$$

$$= \frac{\pi v_i}{\sqrt{hm}} \frac{c_w}{h^2 m^2} \cdot \varphi_w \left(\frac{v_i^2}{h^2 m^2} \right) \left[\frac{1}{2} e^{-v_i^2} + \left(v_i + \frac{1}{2v_i} \right) \int_0^{v_i} dx e^{-x^2} \right] =$$

$$= \frac{\pi v_i}{\sqrt{hm}} \varphi_i(v_i^2) \left[\frac{1}{2} e^{-v_i^2} \left(v_i + \frac{1}{2v_i} \right) \int_0^{v_i} dx e^{-x^2} \right].$$

Bezeichnen wir daher mit g_i oder auch um anzuzeigen, dass diese Grösse bloss Function von v ist, mit $g(v)$ den Ausdruck

$$\varphi_i(v^2) \left[\frac{v}{2} e^{-v^2} + \left(v^2 + \frac{1}{2} \right) \int_0^v dx e^{-x^2} \right] \quad \dots 82)$$

so erhält man:

$$c_w a = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} g(v_i).$$

Setzt man in gleicher Weise:

$$G_i = G(v) = \Phi_i(v^2) \left[\frac{v}{2} e^{-v^2} + \left(v^2 + \frac{1}{2} \right) \int_0^v dx e^{-x^2} \right] \quad \dots 83)$$

so ergibt sich:

$$C_w A_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} G(v_i).$$

Ferner erhält man wegen Gleichheit der Massen nach Gleichung 40) auf Seite 79

$$c_w b_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} g(v) \quad \text{und}$$

$$C_w B_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} G(v).$$

Setzen wir weiters:

$$p(v) = \frac{2}{3} \int_0^v \varphi(x^2) e^{-x^2} dx \left(\frac{x^6}{5v^2} - x^4 \right) + \frac{2}{3} \int_0^\infty \varphi(x^2) e^{-x^2} \left(\frac{xv^3}{5} - vx^2 \right) dx \quad \dots 84)$$

$$P(v) = \frac{2}{3} \int_0^v \Phi(x^2) e^{-x^2} \left(\frac{x^6}{5v^2} - x^4 \right) dx + \frac{2}{3} \int_0^\infty \Phi(x^2) e^{-x^2} \left(\frac{xv^3}{5} - vx^2 \right) dx \quad \dots 85)$$

so folgt:

$$c_w p_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} p(v)$$

$$C_w q_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} P(v)$$

$$C_w P_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} P(v)$$

$$c_w Q_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} p(v)$$

Endlich setzen wir:

$$i_v = \frac{2}{v^2} \int_0^v \varphi(x^2) dx \left[(x^3 - x) \int_0^x e^{-x^2} dx + x^2 e^{-x^2} \right] + \dots 86)$$

$$+ \left[\frac{2v^2 - 2}{v^2} e^{v^2} \int_0^v e^{-x^2} dx + \frac{2}{v} \right] \int_v^\infty \varphi(x^2) x e^{-x^2} dx$$

und

$$I_v = \frac{4}{v^2} \int_0^v \Phi(x^2) dx \left[-\frac{x^3 - x}{2} \int_0^x e^{-x^2} dx + \frac{x^2 e^{-x^2}}{2} \right] + \dots 87)$$

$$+ 2v^2 \left[\frac{v^2 - 1}{2v^4} e^{v^2} \int_0^v e^{-x^2} dx + \frac{1}{2v^3} \right] \int_v^\infty \Phi(x^2) x e^{-x^2} dx$$

so folgt:

$$c_w i_w = \frac{2\pi}{\sqrt{hm}} i(v)$$

$$C_w I_w = \frac{2\pi}{\sqrt{hm}} I(v)$$

$$c_w z_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} i(v)$$

$$C_w w_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} I(v)$$

$$C_w Z_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} I(v)$$

$$c_w W_w = \frac{\pi}{\sqrt{hm}} i(v)$$

Berücksichtigt man alle diese Gleichungen und lässt im Folgenden die nun überflüssig gewordenen Indices i weg, so verwandeln sich die Gleichungen 81) in folgende:

$$\begin{aligned} \frac{v}{2\pi^2} \gamma + \delta^2 (cg + cp - 2ci) + \mu^2 (Cg + cP - Ci - cI) &= 0 \\ \frac{v}{2\pi^2} \Gamma + \Delta^2 (CG + CP - 2CI) + \mu^2 (cG + Cp - cI - Ci) &= 0 \end{aligned} \quad \dots 88)$$

Hiebei ist δ die Distanz, bis zu welcher sich die Centra zweier Moleküle der ersten Gasart beim Zusammenstosse nähern, Δ hat dieselbe Bedeutung für die zweite Gasart, während μ die Distanz vorstellt, bis zu welcher sich das Centrum eines Moleküls der ersten Gasart dem eines Moleküls der zweiten Gasart beim Zusammenstosse nähert; stellt man sich daher die Moleküle als vollkommen harte elastische Kugeln vor, so ist jedenfalls $2\mu = \delta + \Delta$. Es dürfte jedoch immerhin von theoretischem Interesse sein, auch andere Werthe von μ der Discussion zu unterwerfen, umsomehr, als die Hypothese der Kugelgestalt der Moleküle auf keinen Fall vollkommen der Wirklichkeit entspricht. Discutiren wir zunächst den einfachsten Fall $\mu = 0$, dann haben die Gleichungen 88) eine sehr einfache Lösung, nämlich $\gamma = \Gamma = 0$, φ und Φ sind zwei beliebige, von einander verschiedene Constante.

In der That wird alsdann nach Gleichung 82)

$$g = \varphi \left[\frac{v}{2} e^{-v^2} + \left(v^2 + \frac{1}{2} \right) \int_0^v e^{-x^2} dx \right].$$

Ferner liefert die Gleichung 84)

$$p = \frac{2}{3} \varphi \int_0^v e^{-x^2} dx \left(\frac{x^6}{5v^2} - x^4 \right) + \frac{2}{3} \varphi \int_0^\infty e^{-x^2} \left(\frac{xv^2}{5} - vx^3 \right) dx$$

Wegen

$$\int_0^v e^{-x^2} x^{2n} dx = -\frac{v^{2n-1} e^{-v^2}}{2} + \frac{2n-1}{2} \int_0^v e^{-x^2} x^{2n-2} dx$$

verwandelt sich die erste Zeile des obigen Ausdrucks in

$$\frac{2}{3} \varphi \left[-\frac{v^3 e^{-v^2}}{10} + \left(\frac{1}{2v^2} - 1 \right) \int_0^v e^{-x^2} x^4 dx \right]$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \int_0^v e^{-x^2} x^4 dx &= -\frac{v^3 e^{-v^2}}{2} + \frac{3}{2} \int_0^v e^{-x^2} x^2 dx = \\ &= -\frac{v^3 e^{-v^2}}{2} - \frac{3}{4} v e^{-v^2} + \frac{3}{4} \int_0^v e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Es ist daher der erste Summand des Ausdrucks p

$$= \varphi \left\{ \frac{1}{4v^2} - \frac{1}{2} \right\} \int_0^v e^{-x^2} dx + \varphi \left(\frac{v}{3} - \frac{1}{4v} + \frac{4}{15} v^3 \right) e^{-v^2}.$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \int_v^\infty e^{-x^2} x dx &= \frac{1}{2} e^{-v^2} \quad \text{und} \\ \int_v^\infty e^{-x^2} x^3 dx &= \frac{v^2 + 1}{2} \cdot e^{-v^2} \end{aligned}$$

daher wird der zweite Summand des Ausdrucks p

$$= \varphi e^{-v^2} \left(-\frac{4v^3}{15} - \frac{v}{3} \right)$$

daher

$$p = \varphi \left(\frac{1}{4v^2} - \frac{1}{2} \right) \int_0^v e^{-x^2} dx - \frac{\varphi e^{-v^2}}{4v}$$

Weiters erhält man aus Gleichung 86)

$$i = \frac{4\varphi}{v^2} \int_0^v dx \left[\frac{x^3 - x}{2} \int_0^x e^{-x^2} dx + \frac{x^2 e^{-x^2}}{2} \right] + \\ + 4v^2 \varphi \left[\frac{v^2 - 1}{2v^4} e^{v^2} \int_0^v e^{-x^2} dx + \frac{1}{2v^3} \right] \int_0^\infty x e^{-x^2} dx$$

Hier erhält man durch partielle Integration:

$$\int_0^v \frac{x^3 - x}{2} dx \int_0^x e^{-x^2} dx = \left(\frac{v^4}{8} - \frac{v^2}{4} \right) \int_0^v e^{-x^2} dx - \int_0^v e^{-x^2} dx \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4} \right)$$

daher wird die erste Zeile des Ausdrucks

$$i = \varphi \left(\frac{v^2}{2} - 1 \right) \int_0^v e^{-x^2} dx + \frac{\varphi}{v^2} \int_0^v e^{-x^2} dx \left(3x^2 - \frac{x^4}{2} \right) = \\ = \varphi \left(\frac{v^2}{2} - 1 \right) \int_0^v e^{-x^2} dx + \varphi \frac{v e^{-v^2}}{4} - \frac{9\varphi}{8v} e^{-v^2} + \frac{9\varphi}{8v^2} \int_0^v e^{-x^2} dx$$

die zweite Zeile des Ausdrucks i aber ist:

$$\varphi \left[\frac{v^2 - 1}{v^2} \int_0^v e^{-x^2} dx + \frac{e^{-v^2}}{v} \right]$$

daher folgt

$$i = \varphi \left\{ \left(\frac{v^2}{2} + \frac{1}{8v^2} \right) \int_0^v e^{-x^2} dx + \left(\frac{v}{4} - \frac{1}{8v} \right) e^{-v^2} \right\}$$

die Substitution dieser Werthe liefert $g+p-2i=0$ und da ganz in analoger Weise auch folgen muss $G+P-2I=0$, so sind die beiden Gleichungen 88) erfüllt. Es ist dies übrigens auch selbstverständlich, da ja die Annahme $\mu=0$ darauf hinausläuft, dass die beiden Gasarten keine Wirkung aufeinander ausüben. Es kann daher jede von der andern unabhängig sich mit beliebiger constanter Geschwindigkeit im Raume fortbewegen.

Im Falle $\mu=0$, reduciren sich die beiden Gleichungen 88) auf:

$$\frac{v}{2\pi^2} \gamma + \delta^2 c (g+p-2i) = 0 \quad \dots 89)$$

$$\frac{v}{2\pi^2} \Gamma + \Delta^2 C (G+P+2I) = 0 \quad \dots 90)$$

Es ist daher jede Gasart unabhängig von der andern im Raume vorhanden und es gilt jede der beiden vorstehenden Gleichungen 89) und 90) auch für ein einziges im Raume vorhandenes Gas, die im früheren discutirte Lösung $\gamma=0$ und $S=\text{const.}$ der Gleichung 90) entspricht daher dem Falle, dass ein einziges Gas eine constante, progressive Bewegung im Raume besitzt.

Es sei hier noch bemerkt, dass für den Fall $\gamma=0$ offenbar keine andere Lösung bestehen kann, da bei constanter Dichte des Gases eine andere stationäre Bewegung nicht denkbar ist. Wäre γ von 0 verschieden, so würden wir den Fall erhalten, dass das Gas in einer cylindrischen Röhre stationär, aber mit einer von Querschnitt zu Querschnitt veränderlichen Dichte und Geschwindigkeit fortströmt. An dem Ende, wo die Dichte am grössten ist, müsste fortwährend neues Gas von der dort herrschenden Geschwindigkeit nachgefüllt werden, welches in Folge des dort vorhandenen Druckes mit wachsender Geschwindigkeit gegen das andere Ende der Röhre strömen würde. Jedoch müsste der Überdruck so regulirt sein, dass an einer und derselben Stelle des Raumes die Geschwindigkeit im Verlaufe der Zeit sich nicht ändern würde. Nach den Vorstellungen der Hydrodynamik wäre dieser Zustand als eine plane Schallwelle zu bezeichnen, die sich in einem Gase fortpflanzen würde, während gleichzeitig das Gas im entgegengesetzten Sinne eine der Schallgeschwindigkeit gleiche Progressivbewegung hätte, so dass die Schallwelle immer an derselben Stelle des Raumes stehen bliebe. Es fällt hiebei freilich sogleich auf, dass bei einer derartigen Schallwelle, welche wir als eine stationäre bezeichnen wollen, die Geschwindigkeit des Gases wenigstens stellenweise der Schallgeschwindigkeit gleich sein müsste, während wir angenommen haben, dass die sichtbare Geschwindigkeit des Gases immer klein gegentüber der Progressivbewegung der einzelnen Moleküle ist. Soviel ist klar, dass, wenn die Gleichung 89) sobald γ von 0 verschieden ist, überhaupt eine reelle Lösung hat, der eine physikalische Bedeutung zukommt, dieselbe jedenfalls mit dem Vorfalle der Gasdiffusion, welcher uns jetzt allein interessirt, in gar keinem Zusammenhange steht, wesshalb wir uns auch hier nicht weiter in eine Discussion der, wie es scheint, äusserst schwierig zu behandelnden Gleichung 89) einlassen wollen.

Wir wollen jetzt sogleich zur Behandlung der Gleichungen 88) in ihrer allgemeinsten Gestalt übergehen. Wir setzen zunächst zur Abkürzung:

$$(\delta^2 c + \mu^2 C)\varphi(x) + (\mu^2 c + \Delta^2 C)\Phi(x) = \Psi(x)$$

und bezeichnen mit $a' p' i'$ die Ausdrücke, welche aus $a p i$ entstehen, sobald, man darin $\Psi(x)$ an die Stelle von $\varphi(x)$ setzt, dann liefert die Addition der beiden Gleichungen 88)

$$\frac{v(\gamma + \Gamma)}{2\pi^2} + g' + p' - 2i' = 0 \quad \dots 91)$$

Diese Gleichung hat vollkommen die Form der Gleichung 89), sollte daher die letztere, sobald γ von 0 verschieden ist, eine Lösung besitzen, so würde auch die Gleichung 91) eine ganz analoge Lösung für den Fall haben, dass $\gamma + \Gamma$ nicht $= 0$ ist; in dieser Lösung würde bloss die $\Psi(x)$ an die Stelle von $\delta^2 c \varphi(x)$ treten. Es spielt also in Bezug auf diese Gleichung das Gasgemisch durchaus keine andere Rolle als ein einzelnes Gas, wie es auch a priori evident ist. Wir wollen uns hier wieder bloss mit dem Vorgange der Diffusion beschäftigen und denjenigen Vorgang, den wir im früheren als stationäre Wellenbewegung bezeichnet haben, von vorneherein ausschliessen.

Wir müssen also setzen

$$\gamma + \Gamma = 0$$

und erhalten dann analog wie bei Gleichung 89) nur eine Lösung der Gleichung 91), nämlich $\Psi = \text{const.}$, d. h. das Gasgemisch hat eine constante Progressivgeschwindigkeit. Bei dem reinen Vorgange der Diffusion muss auch diese ausgeschlossen werden, und es ist daher zu setzen

$$\Psi(x) = (\delta^2 c + \mu^2 C)\varphi(x) + (\mu^2 c + \Delta^2 C)\Phi(x) = 0 \quad \dots 92)$$

In diesem Falle liefert die erste der Gleichungen 88)

$$\frac{v}{2\pi^2} \gamma + (\delta^2 c + \mu^2 C)g + \frac{(\delta^2 \Delta^2 - \mu^4) C}{\delta^2 c + \mu^2 C} p = \frac{\delta^2 \mu^2 c^2 + 2\delta^2 \Delta^2 c C + \mu^2 \Delta^2 C^2}{\mu^2 c + \Delta^2 C} i \quad \dots 93)$$

Die Gleichung 93) vereinfacht sich noch in dem Falle, dass $\mu^2 = \delta \Delta$ ist; setzt man alsdann

$$\frac{\delta}{\mu} = \frac{\mu}{\Delta} = \sqrt{k},$$

so geht die Gleichung 93) über in:

$$\gamma = 2\pi^2 \delta^2 \cdot \frac{kc + C}{k} \cdot \frac{i-g}{v} \quad \dots 94$$

Die Gleichung 94) begreift den wichtigen Fall, dass $k=1$ ist, in sich, dass also die Moleküle beider diffundirenden Gase sowohl gleiche Masse als gleichen Durchmesser haben; es ist dies der Fall, welchen Maxwell als den der Diffusion in sich selbst bezeichnet.

VIII. Abschnitt.

Diffusion in sich selbst.

Wir wollen uns zunächst mit diesem einfachsten Falle befassen und setzen

$$\frac{k\gamma}{2\pi^2 \delta^2 (kc + C)} = \beta \quad \dots 95)$$

also für den Fall der Diffusion in sich selbst

$$\beta = \frac{\gamma}{2\pi^2 \delta^2 (c + C)} \quad \dots 96)$$

dann liefert die Gleichung 94)

$$\beta v = i - g \quad \dots 97)$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen 82) und 86)

$$\begin{aligned} \beta v^3 = & 2 \int_0^v \varphi(x^2) dx \left[(x^3 - x) \int_0^x e^{-x^2} dx + x^2 e^{-x^2} \right] + \dots 98) \\ & + [(v^2 - 1) e^{-v^2} \int_0^v e^{-v^2} dv + v] \int_v^\infty 2x \varphi(x^2) e^{-x^2} dx - \\ & - \varphi(v^2) \left[\frac{v^3}{2} e^{-v^2} + \left(v^4 + \frac{v^2}{2} \right) \right] \int_0^v e^{-v^2} dv. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann zunächst wieder zur Gewinnung einer gewöhnlichen Differentialgleichung verwerthet werden. Ihre Ableitung lautet:

$$3\beta v^2 = \varphi(v^2) [(-4v^3 - v) \int_0^v e^{-v^2} dv - 2v^2 e^{-v^2}] - v\varphi'(v^2) [v^3 e^{-v^2} + \\ + (2v^4 + v^2) \int_0^v e^{-v^2} dv] + [2v^3 e^v \int_0^v e^{-v^2} dv + v^2] \int_v^\infty \varphi(x^2) 2x e^{-x^2} dx \\ \dots 99)$$

Setzt man hier $v^2 = x$,

$$2\sqrt{x} e^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{-x^2} dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(2x)^n}{1^2(2n-1)} = \xi$$

und

$$\int_u^\infty \varphi(u) e^{-u} du = y(u) = b - \tau_0 u - (\tau_1 - \tau_0) \frac{u^2}{2!} - \frac{\tau_2 - 2\tau_1 + \tau_0}{3!} u^3 - \dots$$

so dass

$$\varphi(u) = -y'e^u, \quad \varphi'(u) = -(y'' + y')e^u,$$

$$\int_v^\infty \varphi(x^2) x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} y(v^2), \quad \frac{d\xi}{dx} = \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \xi + 1$$

so lautet die obige Gleichung

$$3\beta x = y'' [x^2 + (x^2 + \frac{x}{2})\xi] + y' [x^2 + 2x + (x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2})\xi] + (x + x\xi)y \\ \dots 100) \\ \varphi' [x^2 + (x^2 + \frac{x}{2})\xi] + \varphi [2x + (2x + \frac{1}{2})\xi] - \\ - e^x (x + x\xi) [b - \int_0^x e^{-x} \varphi(x) dx] = 3\beta x e^x$$

Da mir die Auflösung dieser Differentialgleichung nicht gelungen ist, so wollen wir wieder zur Reihenentwicklung unsere Zuflucht nehmen. Vergleicht man die Gleichungen 86) und 49), letztere im ersten Theile, so sieht man, dass die hier gebrauchte Grösse i aus den dort gebrauchten gebildet wird, indem man diese mit $2n$ dividirt und $hm = 1$. Es liefert also die Formel 47)

$$i = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2n+1) 2^n v^{2n+1} b}{1^2(2n+3)} + \sum_{n=0}^{n=\infty} v^{2n+3} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^{n-k+1} (2n-2k+1)}{1^2(2n-2k+3)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{k}{0}\tau_k - \binom{k}{1}\tau_{k-1} + \dots}{k!} \left(\frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2k+2} \right) &= b \left(\frac{v}{3} + \frac{2v^3}{5} + \frac{4v^5}{3 \cdot 7} + \frac{8v^7}{3 \cdot 5 \cdot 9} + \right. \\
&+ \frac{16v^9}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{32v^{11}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13} + \dots \left. \right) - \tau_0 \left(\frac{v^3}{5} + \frac{3v^5}{14} + \frac{v^7}{18} + \frac{19v^9}{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11} + \right. \\
&+ \left. \frac{83v^{11}}{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 13} + \dots \right) - \tau_1 \left(\frac{v^5}{14} + \frac{2v^7}{27} + \frac{v^9}{8 \cdot 11} + \frac{7v^{11}}{4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots \right) - \\
&- \tau_2 \left(\frac{v^7}{54} + \frac{5v^9}{3 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{v^{11}}{5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots \right) - \tau_3 \left(\frac{v^9}{3 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{v^{11}}{4 \cdot 5 \cdot 13} + \dots \right) \\
&- \frac{\tau_4 v^{11}}{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 13} - \dots \tag{101}
\end{aligned}$$

wobei

$$b = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-x} dx \tag{102}$$

ist. In gleicher Weise liefert die Vergleichung der Formeln 82) und 83) $g = \frac{a}{\pi}$ darin $hm = 1$ gesetzt, also wenn man überall die Exponentielle in eine Reihe entwickelt

$$\begin{aligned}
g &= \left(\tau_0 + \frac{\tau_1 v^2}{1!} + \frac{\tau_2 v^2}{2!} + \dots \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} v^{2n+1}}{n!(4n^2-1)} = v\tau_0 + v^3 \left(\tau_1 + \frac{\tau_0}{3} \right) + \\
&+ v^5 \left(\frac{\tau_2}{2} + \frac{\tau_1}{3} - \frac{\tau_0}{30} \right) + v^7 \left(\frac{\tau_3}{6} + \frac{\tau_2}{6} - \frac{\tau_1}{30} + \frac{\tau_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right) + v^9 \left(\frac{\tau_4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \right. \\
&+ \left. \frac{\tau_3}{2 \cdot 9} - \frac{\tau_2}{4 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{\tau_1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{\tau_0}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9} \right) + \\
&+ v^{11} \left(\frac{\tau_5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{\tau_4}{8 \cdot 9} - \frac{\tau_3}{4 \cdot 9 \cdot 5} + \frac{\tau_2}{4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{\tau_1}{8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7} + \frac{\tau_0}{8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11} \right) + \dots \tag{103}
\end{aligned}$$

Es ist also $g = \frac{R}{v}$, wenn wir mit R dieselbe Grösse, wie im dritten Theile der Theorie der Gasreibung, Seite 1245, bezeichnen. Diese Werthe in die Gleichung 97) substituirt liefern nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten:

$$\tau_0 = \frac{b}{3} - \beta, \tau_2 = -\frac{17\tau_1}{21} - \frac{38\tau_0}{105} + \frac{8b}{21}$$

$$\tau_1 = \frac{2b}{5} - \frac{8\tau_0}{15}$$

wobei β als gegebene Constante zu betrachten ist, b dagegen muss erst zum Schlusse durch wirkliche Ausrechnung des Integrales der Gleichung 102) bestimmt werden. Da

$$\tau_0 = \varphi(o), \tau_1 = \varphi'(o), \tau_2 = \varphi''(o) \dots$$

so folgt dann $\varphi(x)$ nach der Maclaurin'schen Reihe. Die Gleichung 100) kann zum selben Zwecke dienen, wenn man darin

$$y^{(k)} = y^k(o) + xy^{k+1}(o) \dots, \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{1 \pm (2n-1)}$$

setzt, und die Coëfficienten sämmtlicher Potenzen von x gleich Null setzt. Um für sehr grosse Argumente eine semiconvergente Reihe zu erhalten, kann man folgendermassen verfahren. Man setzt:

$$h = 2 \int_0^{\infty} \varphi(x^2) x^2 e^{-x^2} dx + 2 \int_0^{\infty} \left[\varphi(x^2) - \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^3} \right] x^3 dx \int_0^x e^{-x^2} h x + \\ + 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{c}{x} - \varphi(x^2) \right] x dx \int_0^x e^{-x^2} dx \dots 104)$$

dann verwandelt sich die Gleichung 98) in

$$\beta v^2 = [(v^2 - 1)e^{v^2} \int_0^v e^{-v^2} dv + v] \int_0^{\infty} 2x\varphi(x^2) e^{-x^2} dx \\ - \varphi(v^2) \left[\frac{v^2}{2} e^{-v^2} + \left(v^4 + \frac{v^2}{2} \right) \int_0^v e^{-v^2} dv \right] + h - \\ - 2 \int_0^{\infty} \varphi(x^2) x^2 e^{-x^2} dx - 2 \int_0^{\infty} \left[\varphi(x^2) - \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^3} \right] x^3 dx \int_0^x e^{-x^2} dx + \\ + 2 \int_0^{\infty} \left[\varphi(x^2) - \frac{c_0}{x} \right] x dx \int_0^x e^{-x^2} dx - 2c_0 \int_0^v dx \int_0^x e^{-x^2} dx \\ + 2 \int_0^v dx (c_0 x^2 + c_1) \int_0^x e^{-x^2} dx. \dots 105)$$

Diese Gleichung werden wir später benutzen, um über die Grösse h einen Schluss zu ziehen, da aus derselben folgt, dass h verschwinden muss, sobald $\varphi(v^2)$ für grosse v in der Form

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c^n}{v^{2n+1}}$$

darstellbar ist. Man könnte sie auch benutzen, um die Coëfficienten dieser Entwicklung zu bestimmen, indem man einfach in die Gleichung für φ jene Reihe substituirt. Doch führt es kürzer zum Ziele, hiezü die Gleichung 99) zu benutzen. Für grosse v reducirt sich dieselbe zunächst, indem man Glieder von der Ordnung e^{-v^2} vernachlässigt auf

$$\frac{6\beta}{\sqrt{\pi}}v^2 + \varphi(v^2)(4v^3 + v) + v\varphi'(v^2)(2v^4 + v^2) - 4v^3 e^{v^2} \int_0^\infty \varphi(x^2) x e^{-x^2} dx = 0 \quad \dots 106)$$

Die Differentiation dieser Gleichung aber liefert:

$$(2v^4 + v^2)\varphi''(v^2) + (-2v^4 + 5v^2 + 1)\varphi'(v^2) + (-2v^2 - 1 - \frac{1}{v^2})\varphi(v^2) = (2v + \frac{1}{v})\frac{3\beta}{\sqrt{\pi}} \quad \dots 107)$$

eine Gleichung, welche man übrigens auch leicht direct aus der Gleichung 100) hätte erhalten können; denn wenn man Glieder von der Grössenordnung e^{-v^2} vernachlässigt, so ist $\xi = \sqrt{\pi x} e^x$, daher geht 100) über in

$$(2x + 1)y'' + (2x + 5 + \frac{1}{x})y' + 2y = \frac{6\beta}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} \quad 108)$$

was durch Differentiation liefert

$$(2x + 1)y''' + (2x + 7 + \frac{1}{x})y'' + (4 - \frac{1}{x^2})y' = -\frac{3\beta}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} (2 + \frac{1}{x}) \quad 109)$$

was mit der obigen Gleichung 107) identisch ist. Diese Gleichung ist besonders geeignet zur Bestimmung der Coëfficienten der semiconvergenten Reihe.

Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} \varphi(v^2) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n}{v^{2n+1}}, \quad \varphi'(v^2) = - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2n+1)c_n}{2v^{2n+3}}, \\ \varphi''(v^2) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2n+1)(2n+3)c_n}{4v^{2n+5}} \end{aligned} \quad \dots 110)$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{6\beta}{\sqrt{\pi}} v + \frac{3\beta}{v\sqrt{\pi}} &= -c_0 v + \frac{c_1 - 2c_0}{v} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{v^{2n+3}} [(2n+3)c_{n+2} + \\ &+ (2n^3 + 3n - 1)c_{n+1} + \frac{1}{4}(2n+3)(2n-1)c_n] \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich

$$c_0 = -\frac{6\beta}{\sqrt{\pi}}, \quad c_1 = -\frac{9\beta}{\sqrt{\pi}}, \quad c_{n+2} = \frac{2n^2 + 3n - 1}{2n+3} c_{n+1} + \frac{2n-1}{4} c_n \quad 111)$$

Folgendes wäre nun der Weg zur numerischen Bestimmung der Function φ . Man berechnet sie zunächst mit Hilfe der Mac-laurin'schen Reihe für kleine Argumente mittelst der Formel

$$\varphi(x) = \tau_0 + x\tau_1 + \frac{x^2}{2!} \tau_2 \dots$$

Hat man die Function $\varphi(x)$ von $x=0$ bis $x=\alpha$ bestimmt, so verwendet man f solange eben diese Reihe hinreichend convergirt. Für grössere Argumente $\alpha + \beta$ die Gleichung:

$$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \beta\varphi'(\alpha) + \frac{\beta^2}{2} \varphi''(\alpha) \dots$$

wobei man $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$. . . aus der Gleichung 99) und deren Ableitungen bestimmt. In dieser Gleichung ist

$$\int_x^\infty \varphi(u) e^{-u} du = b - \int_0^x \varphi(u) e^{-u} du$$

zu setzen, wobei $\int_0^x \varphi(u) e^{-u} du$ bezeichnet werden kann, da $\varphi(u)$

von $u = 0$ bis $u = \alpha$ bekannt ist, b aber ist als später zu bestimmende Constante mitzunehmen. Für sehr grosse Argumente kann die semiconvergente Reihe benutzt werden und man kann wieder zu kleineren unter Benützung der Reihe

$$\varphi(\alpha - \beta) = \varphi(\alpha) - \beta\varphi'(\alpha) + \frac{\beta^2}{2}\varphi''(\alpha) \dots$$

unter Verwendung der Gleichung 99) herabsteigen.

Formeln, welche für den Fall gelten, dass φ eine ganze positive Potenz ist.

Ehe ich zur Mittheilung numerischer Resultate schreite, will ich noch Rechnungen ausführen, welche den im VII. Abschnitte meiner Theorie der Gasreibung enthaltenen vollkommen analog sind. Wir werden dadurch zwar keine neuen Resultate erhalten, aber wir werden zu Formeln gelangen, welche zur Controle der Rechnungen brauchbar sind, und bei derartigen numerischen Rechnungen ist eine ansiehbare Controle geradezu unerlässlich. Nach Formel 97) hatten wir

$$\beta v^2 = i - g = \frac{\gamma v^2}{2\pi^2 \delta^2 (c + C)}$$

Gemäss der Gleichung, welche auf die Gleichung 82) folgt und der ersten der Gleichungen, welche auf die Gleichung 87) folgen, ist

$$g = \frac{\sqrt{hm}}{\pi} c_w a, \quad i = \frac{\sqrt{hm}}{2\pi} c_w i_w$$

ferner nach den Gleichungen 80)

$$c_w \varphi_w(v^2) = h^2 m^2 \varphi_i(v^2 hm) \quad \text{oder} \quad c_w \varphi_w\left(\frac{u^2}{hm}\right) = h^2 m^2 \varphi_i(u^2)$$

so dass

$$g = \frac{\sqrt{hm}^5}{\pi} a_w, \quad i = \frac{\sqrt{hm}^5}{2\pi} i_w$$

wobei a_w und i_w aus den im I. Theile meiner Theorie der Gasreibung, Seite 77, mit a und i bezeichneten Grössen hervorgehen, indem man in letzteren das Argument v durch \sqrt{hm} dividirt. Es ist also:

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{\sqrt{hm}^5}{\pi} e^{-v^2} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \gamma dG e^{-hm r^2 - 2v r g} \sqrt{hm} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s ds \int_0^{2\pi} dO \frac{v}{\sqrt{hm}} \varphi_i(v^2) = \\
 &= \frac{1}{\pi} e^{-v^2} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \gamma dG e^{-r^2 - 2v r g} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s ds \int_0^{2\pi} dO v \varphi(v^2) \\
 &= \frac{1}{\pi} e^{-v^2} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \gamma dG e^{-r^2 - 2v r g} \int_0^\pi s ds \int_0^{2\pi} dO \\
 &\quad (v + r g \sigma^2 - r \gamma s \sigma) \varphi[v^2 + 2v r (g \sigma^2 - \gamma s \sigma) + r^2 \sigma^2].
 \end{aligned}$$

Will man zu diesen Gleichungen, welche wir hier nicht ohne Umweg erhielten, direct von den Gleichungen 1) und 2) des ersten Theiles meiner Theorie der Gasdiffusion gelangen, so bezeichne man die mit \sqrt{hm} multiplicirte Geschwindigkeit eines Molekuls mit v und man erhält eine Lösung der Gleichungen 1) und 2) indem man setzt:

$$\begin{aligned}
 f &= [c + \gamma x + \xi \varphi(v^2)] e^{-v^2} \\
 F &= [C - \gamma x - \xi \varphi(v^2)] e^{-v^2}
 \end{aligned}$$

wobei $f d\xi d\eta d\zeta$ die Anzahl der Moleküle ist, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen $\frac{\xi}{\sqrt{hm}}$ und $\left(\frac{\xi + d\xi}{\sqrt{hm}}\right)$ etc. liegen. Dann ist

$$\begin{aligned}
 ff_1 - f'f'_1 &= c e^{-(v^2+v_1^2)} [\xi \varphi(v^2) + \xi_1 \varphi(v_1^2) - \xi' \varphi(v'^2) - \xi'_1 \varphi(v_1'^2)] \\
 fF_1 - f'F'_1 &= e^{-(v^2+v_1^2)} [C \xi \varphi(v^2) - c \xi_1 \varphi(v_1^2) - C \xi' \varphi(v'^2) + c \xi'_1 \varphi(v_1'^2)] \\
 \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} &= \xi \gamma e^{-v^2}
 \end{aligned}$$

die Gleichung 1) des ersten Theiles reducirt sich also auf

$$\xi \gamma e^{-v^2} + \int d\omega_1 \int p dp \int r d\varphi e^{-(v^2+v_1^2)} (c + C) [\xi \varphi(v^2) - \xi' \varphi(v'^2)] = 0$$

Bedenkt man, dass

$$\begin{aligned}
 \xi &= va, \quad \xi' = va + r a g \sigma^2 - r a \gamma s \sigma - r a \gamma k \sigma^2 - r a g k s \sigma - r a x s \omega \\
 d\omega_1 &= r^2 dr \gamma dG dK = v_1^2 dv_1 \tau dT dK, \quad p dp = \delta^2 s ds, \quad \varphi = 0
 \end{aligned}$$

so folgt:

$$\frac{\gamma v}{2\pi^2 \delta^2 (c+C)} = i - g$$

wobei g und i die obige Bedeutung haben. Man sieht leicht, dass auch die Gleichung 2) des ersten Theiles erfüllt ist.

Es ist nun unsere Aufgabe die Grösse i für den Fall zu berechnen, dass $\varphi(v^2)$ eine ganze positive Potenz von v^2 ist. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\sigma^2 = l, \quad g\sigma^2 - \gamma s\sigma v = \rho$$

und bezeichnen mit M_p^b den Coefficienten von $v^{b-1} r^{2p+2-b}$ in $(v+r\rho)(v^2+2v r\rho+r^2 l)^p$. Dann erhält man aus M_p^b den Coefficienten X_p^b derselben Grösse in

$$X_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dO \cdot (v+r\rho)v'^{2p}$$

durch die Vertauschungen auf Seite 57 des zweiten Theiles meiner Theorie der Gasreibung. Den Coefficienten Y von $v^{b-1} r^{2p+2-b}$ im Ausdrücke

$$Y_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s \sigma dS \int_0^{2\pi} dO (v+r\rho)v'^{2p}$$

erhält man, indem man l^a vertauscht mit $\frac{1}{a+1}$, $l^a \lambda^c$ mit $\frac{c!}{(a+1)!(a+c+1)}$; für letztere Ausdrücke gelten also wieder die Werthe der Seite 58, für erstere um $\frac{1}{2}$ grössere Werthe. Statt γ^2 ist $1-g^2$ zu setzen. Y_p^{2p+2} ist gleich Eins. Aus Y_p wird endlich der Ausdruck

$$U_p = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r^3 dr \int_0^\pi \gamma dG e^{-2v r g} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s \sigma dS \int_0^{2\pi} dO (v+r\rho)v'^{2p}$$

durch die Vertauschung 22) meines zweiten Theiles der Theorie der Gasreibung Seite 58 gebildet. Dabei ist jedoch zu bedenken, dass hier jeder Coefficient mit einer um eine Einheit niedrigeren Potenz von v multiplicirt erscheint, wesshalb die Vertauschung

hier folgendermassen lautet. Im Ausdruck Y_p^b ist für g^a zu substituieren:

$$\sum_{\substack{\mu=\infty \\ \mu \geq \frac{b}{2}}} 2^{2\mu-b} v^{2\mu-1} \frac{(\mu+p-b+2)!}{(2\mu-b)!} \frac{(-1)^b}{(2\mu-b+a+1)}$$

den auf diese Weise aus Y_p^b hervorgehenden Ausdruck bezeichnen wir zunächst mit U_p^b dann ist

$$U_p = \sum_{b=2p+2} U_p^b = i \cdot e^{v^2}.$$

Es ist nicht schwer, auch auf unsern Fall das Schema zur successiven Berechnung von U_p auszudehnen. Es ist nämlich

$$M_p = \rho l^p, \quad X_p^1 = gl^{p+1}, \quad Y_p^1 = \frac{g}{p+2}$$

dieses liefert also in die Summe:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{-2^{2\mu-1} v^{2\mu-1} (\mu+p+1)!}{(2\mu-1)! (2\mu+1) (p+2)} = S_1.$$

Schreiben wir Y_p^2 in der Form SAg^a , so liefert es die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{A 2^{2\mu-2} v^{2\mu-1} (\mu+p)!}{(2\mu-2)! (2\mu-1+a)} = S_2.$$

Wir erhalten also $S_1 + S_2$, indem wir in Y_p^2 vertauschen g^a mit $\frac{2\mu-1}{2\mu-1+a}$ und dazu addiren $-2(\mu+p+1)$. Zur Summe Z_p^2 fügen wir die Ergänzung

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{2^{2\mu-2} v^{2\mu-1} (\mu+p)!}{(2\mu-1)!}$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir das Schema:

Factor des vorigen	Vertauschung für g^a	zu machen in	Ergänzung
$2(\mu + p + 1)$	$\frac{(2\mu - 1)(2\mu + 1)}{2\mu - 1 + a}$	Y_p^2	$\sum_1^1 \frac{2^{2\mu-1} \cdot \vartheta^{2\mu-1} (\mu + p)!}{(2\mu - 1)! (2\mu + 1)}$
$2(\mu + p)$	$-\frac{(2\mu - 2)(2\mu - 1)(2\mu + 1)}{2\mu - 2 + a}$	Y_p^3	$\sum_1^1 \frac{2^{2\mu-3} \vartheta^{2\mu-1} (\mu + p - 1)!}{(2\mu - 1)! (2\mu + 1)}$
$2(\mu + p - 1)$	$\frac{(2\mu - 3)(2\mu - 2)(2\mu - 1)(2\mu + 1)}{2\mu - 3 + a}$	Y_p^4	$\sum_{2-p}^2 \frac{2^{2\mu-4} \vartheta^{2\mu-1} (\mu + p - 2)!}{(2\mu - 1)! (2\mu + 1)}$
\dots	\dots	\dots	\dots
$2(\mu + p - b + 3)$	$\frac{(2\mu - b + 1) \dots (2\mu - 1)(2\mu + 1)(-1)^b}{2\mu - b + 1 + a}$	Y_p^b	$\sum_{b-p-3}^{\leq b+1} \frac{2^{2\mu-b} \vartheta^{2\mu-1} (\mu + p + b + 2)!}{(2\mu - 1)! (2\mu + 1)}$
$(2\mu - p + 1)$	$\frac{(2\mu - 2p - 1) \dots (2\mu - 1)(2\mu + 1)}{2\mu - 2p - 1 + a}$	$Y_p^{2p+2} = 1$	$\sum_p^\infty \frac{2^{2\mu-2p-2} \vartheta^{2\mu-1} (\mu - p)!}{(2\mu - 1)! (2\mu + 1)}$

Hier ist die erste Vertauschung in Y_p^2 zu machen (auch g^0 ist mit $2\mu+1$ zu vertauschen) und dazu der mit $\frac{-1}{p+2}$ multiplicirte erste Factor zu addiren, die Summen bezeichnen wir mit Z_p^2 . Fügt man die erste Ergänzung dazu, so erhält man die Grösse V_p^2 , welche nur für $\mu=1$ mit U_p übereinstimmt. Alle andern Factoren sind mit den vorhergehenden Z zu multipliciren. So ist

$$M_0^1 = \rho, M_0^2 = 1$$

$$X_0^1 = gl, X_0^2 = 1$$

$$Y_0^1 = \frac{g}{2}, Y_0^2 = 1, Z_0^2 = \mu$$

$$U_0 = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{2^{2\mu-2} v^{2\mu-1} \mu! \mu}{(2\mu-1)!(2\mu+1)}$$

$$M_1^2 = 2\rho^2 + l, M_1^3 = 3\rho, M_1^4 = 1$$

$$X_1^2 = 2g^2 l^2 + \gamma^2 \lambda + l, X_1^3 = 3gl, X_1^4 = 1$$

$$Y_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{g}{2}, Y_1^3 = \frac{3}{2}g, Y_1^4 = 1$$

$$Z_1^2 = \frac{1}{6}(10\mu-7), Z_1^3 = \frac{1}{3}(-8\mu^2+12\mu+2), Z_1^4 = \frac{2}{3}(4\mu^3-\mu+3)$$

$$U_1 = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{2^{2\mu-3} v^{2\mu-1} (\mu-1)! (4\mu^3-\mu+3)}{3(2\mu-1)!(2\mu+1)}$$

$$M_2^2 = \rho l^2, M_2^3 = 4\rho^2 l + l^2, M_2^4 = 4\rho^3 + 6\rho l, M_2^5 = 8\rho^2 + 2l, M_2^6 = 5\rho, M_2^7 = 1$$

$$X_2^2 = gl^2, X_2^3 = 4g^2 l^2 + 2\gamma^2 l^2 \lambda, X_2^4 = 4g^3 l^2 + 6g\gamma^2 l^2 \lambda + 6gl^2, X_2^5 = 8g^2 l^2 + 4\gamma^2 \lambda + 2l, X_2^6 = 5gl, X_2^7 = 1$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}g, Y_2^3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}g^2, Y_2^4 = \frac{5}{2}g + \frac{1}{2}g^3, Y_2^5 = \frac{5}{2}g + 2g^2, Y_2^6 = \frac{5}{2}g, Y_2^7 = 1$$

$$Z_2^2 = \frac{1}{3}(6\mu-7), Z_2^3 = \frac{1}{3}(-23\mu^2+39\mu-10), Z_2^4 = \frac{1}{3}(42\mu^3-104\mu^2+60\mu+26), Z_2^5 = \frac{2}{3}(-18\mu^4+76\mu^3-45\mu^2-19\mu+30), Z_2^6 = \frac{4}{3}(6\mu^5-$$

$$-14\mu^4+29\mu^3-19\mu^2+10\mu-12), U_2 = \frac{2v}{3} + \sum_{\mu=2}^{\mu=\infty} \frac{2^{2\mu-4} v^{2\mu-1} (\mu-2)!}{3(2\mu-1)!(2\mu+1)} (6\mu^5-14\mu^4+29\mu^3-19\mu^2+10\mu-12)$$

Auch die Berechnung der Grösse ie^{ρ^2} nach der Methode, welche ich im IX. Abschnitte des II. Theiles meiner Theorie der Gasreibung auseinandergesetzt habe, ist zur Controle nicht ohne

Nutzen, wenngleich sie selbstverständlich viel mühevoller ist, als die Anwendung der zu Beginn dieser Abhandlung angewandten Transformation der Coordination. Es bleibt dann fast alles daselbst im IX. Abschnitte Vorgebrachte unverändert; nur an die Stelle von J tritt $r\rho+v$.

Es muss also jetzt gesetzt werden

$$A_n = (r\rho+v)(2vr\rho+v^2)^n = \sum_{m=n+1}^{m=2n+2} A_n^m v^{m-1} r^{2n-m+2}$$

$$(r\rho+v)\varphi(v^2) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{\varphi^{(n)}(r^2 l)}{n!} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=n+1}^{m=2n+2} A_n^m \frac{\varphi^{(n)}(r^2 l)}{n!} v^{m-1} r^{2n-m+2}$$

was liefert

$$A_0^1 = \rho, \quad A_0^2 = 1$$

$$A_1^2 = 2\rho^2, \quad A_1^3 = 3\rho, \quad A_1^4 = 1$$

$$A_2^3 = 4\rho^3, \quad A_2^4 = 8\rho^2,$$

$$A_3^4 = 8\rho^4.$$

Hieraus entstehen die B durch die Vertauschungen auf Seite 89 der citirten Abhandlung; es ergibt sich

$$B_0^1 = gl, \quad B_0^2 = 1$$

$$B_1^2 = l(1-l) + g^2 l(-1+3l), \quad B_1^3 = 3gl, \quad B_1^4 = 1$$

$$B_2^3 = 6gl^2(1-l) + 2g^3 l^2(-3+5l), \quad B_2^4 = 4l(1-l) + 4g^2 l(-1+3l)$$

$$B_3^4 = 3l^2(1-2l+l^2) + 6g^2 l^2(-1+6l-5l^2) + g^4 l^2(3-30l+35l^2).$$

Weiters findet man durch die Vertauschung auf Seite 81, worin jedoch v^{m-1} statt v^m zu schreiben ist,

$$C_0^1 = -\frac{1}{v} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(4v^2 r^2)^\nu}{(2\nu-1)!(2\nu+1)} = -\frac{4vr^2 l}{3} - \frac{8v^3 r^4 l}{3.5}$$

$$C_0^2 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{2(4v^2 r^2)^\nu v}{(2\nu)!(2\nu+1)} = 2v + \frac{4v^3 r^2}{3},$$

$$C_1^2 = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(4v^2 r^2)^\nu v r^2 (4l+8\nu l^2)}{(2\nu^2)!(2\nu+1)(2\nu+3)} = \frac{4vr^2 l}{3} + \frac{8v^3 r^4}{15} (l+2l^2)$$

$$C_1^3 = -4v^3 r^2 l, \quad C_1^4 = 2v^3$$

$$C_2^3 = -\frac{16}{5} v^3 r^2 l^2, \quad C_2^4 = \frac{16}{3} v^3 r^2 l, \quad C_3^4 = \frac{16}{5} v^3 r^2 l^2.$$

Hieraus entstehen die mit D bezeichneten Grössen durch die Vertauschungen auf Seite 113.

$$D_0^1 = -\frac{4}{3} vx - \frac{8}{15} v^3 (x^2 + x), \quad D_0^2 = 2v + \frac{4v^3}{3} (x+1),$$

$$D_1^2 = \frac{4vx}{3} + \frac{8}{15} v^3 (3x^2 + x), \quad D_1^3 = -4v^3 x, \quad D_1^4 = 2v^3,$$

$$D_2^3 = -\frac{16}{5} v^3 x^2, \quad D_2^4 = \frac{16}{3} v^3 x, \quad D_3^4 = \frac{16}{5} v^3 x^2.$$

Hieraus findet man endlich durch die Vertauschung auf Seite 118.

$$E_0^1 = -\frac{2v\sigma x}{3} - \frac{4v^3\sigma(x^2+x)}{15},$$

$$E_0^2 = v\sigma + \frac{2v^3\sigma}{3}(x+1)$$

$$E_1^2 = \frac{2v\sigma}{3}(x-1) + \frac{4v^3\sigma}{15}(3x^2-5x-1)$$

$$E_1^3 = -2v^3\sigma(x-1)$$

$$E_1^4 = -\tau_0 v^3 + v^3\sigma$$

$$E_2^3 = -\frac{4}{5} v^3\sigma(x^2-4x+2)$$

$$E_2^4 = +\frac{4\tau_0 v^3}{3} + \frac{4}{3} v^3\sigma(x-2)$$

$$E_3^4 = -\frac{8\tau_0 v^3}{15} + \frac{4v^3\sigma}{15}(x^2-6x+6)$$

$$i^{v^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=n+1}^{m=2n+2} E_n^m = \frac{v\sigma}{3} + \frac{11v^3\sigma}{15} - \frac{v^3\tau_0}{5}$$

Die Grösse σ ist identisch mit der früher mit b bezeichneten. Es stimmt also dieser Werth in den Gliedern mit v und v^3 überein

mit dem durch die Gleichung 101) bestimmten. Doch ist die soeben behandelte Controle in ihrer Ausführung so mühevoll, dass die vorher entwickelte wohl vorzuziehen sein dürfte.

Für die numerische Berechnung sei noch bemerkt, dass an der Stelle von φ die Function

$$\psi(u) = \varphi(u)e^{-u} \quad \dots 112)$$

auch eingeführt werden kann. Setzen wir $\sigma_0 = \psi(0)$, $\sigma_1 = \psi'(0)$, $\sigma_2 = \psi''(0)$... so ist dann:

$$\sigma_0 = \tau_0, \sigma_1 = \tau_1 - \tau_0, \sigma_2 = \tau_2 - 2\tau_1 + \tau_0, \sigma_3 = \tau_3 - 3\tau_2 + 3\tau_1 - \tau_0 \dots 113)$$

daher liefert die Gleichung 101)

$$\begin{aligned} i = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)2^n v^{2n+1} b}{1^2(2n+3)} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} v^{2n+3} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^{n-k+1}(2n-2k+1)\sigma_k}{1^2(2n-2k+3)} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2k+2} \right) = \frac{vb}{3} + \\ & + v^3 \left(\frac{2b}{5} + \frac{\sigma_0}{5} \right) + v^5 \left(\frac{4b}{3.7} - \frac{2\sigma_0}{7} - \frac{\sigma_1}{2.7} \right) + v^7 \left(\frac{8b}{3.5.9} - \frac{4\sigma_0}{3.9} - \frac{\sigma_1}{9} - \frac{\sigma_2}{2.3.9} \right) \\ & + v^9 \left(\frac{16b}{3.5.7.11} - \frac{8\sigma_0}{3.5.11} - \frac{2\sigma_1}{3.11} - \frac{\sigma_2}{3.11} - \frac{\sigma_3}{3.8.11} \right) + v^{11} \left(\frac{32b}{3.5.7.9.13} - \right. \\ & \left. - \frac{16\sigma_0}{3.5.7.13} - \frac{4\sigma_1}{3.5.13} - \frac{2\sigma_2}{9.13} - \frac{\sigma_3}{12.13} - \frac{\sigma_4}{120.13} \right) + \dots \quad 114) \end{aligned}$$

wobei $b = \int_0^{\infty} \psi(u) du$.

Ferner ist nach Theorie der Gasreibung, II. Theil, Seite 85

$$\begin{aligned} R = & \left(\frac{v^2 \tau_0}{0!} + \frac{v^4}{1!} \tau_1 \dots \right) e^{-v^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2v)^{2n}}{(n+2)! (2n+1)} = \\ & = \left(\frac{v^2}{0!} \sigma_0 + \frac{v^4}{1!} \sigma_1 + \dots \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2v)^{2n}}{(n+2)! (2n+1)} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} v^{2n+2} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^{2n-2k} \sigma_k}{(n-k+2)! (2n-2k+1)} \end{aligned}$$

und wegen $g = \frac{R}{v}$

$$\begin{aligned}
 g &= \sum_{n=0}^{\infty} v^{2n+1} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^{2n-2k} \sigma_k}{(n-k+2)! (2n-2k+1) k!} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_k v^{2k+1}}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} v^{2n}}{(n+2)! (2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} v^{2n+1} \left[\frac{2^{2n} \sigma_0}{(n+2)! (2n+1) 0!} + \right. \\
 &\quad + \frac{2^{2n-2} \sigma_1}{(n+1)! (2n-1) 1!} + \frac{2^{2n-4} \sigma_2}{n! (2n-3) 2!} + \dots = v \sigma_0 + \frac{1}{3} v^3 \sigma_0 + \\
 &\quad + v^5 \sigma_1 + v^5 \left(\frac{4\sigma_0}{5} + \frac{4\sigma_1}{5} + \frac{\sigma_2}{2} \right) + v^7 \left(\frac{32\sigma_0}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{4\sigma_1}{5} + \frac{2\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{2 \cdot 3} \right) + \\
 &\quad + v^9 \left(\frac{16\sigma_0}{3 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{32\sigma_1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2\sigma_2}{5} + \frac{2\sigma_3}{9} + \frac{\sigma_4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) + v^{11} \left(\frac{64\sigma_0}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{16\sigma_1}{3 \cdot 7 \cdot 9} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{16\sigma_2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2\sigma_3}{3 \cdot 5} + \frac{\sigma_4}{2 \cdot 9} + \frac{\sigma_5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right) + \dots \tag{115}
 \end{aligned}$$

Obwohl diese Formel etwas einfacher ist als die Formel 114) so zeigt sich doch, dass die Werthe der Grössen τ rascher abnehmen, als die σ .

Zum Schlusse lasse ich noch einige numerische Werthe folgen, welche ich der Güte Herrn Prof. Šantel und Herrn Hausmanning verdanke. Dabei wurden sowohl die τ als auch die σ berechnet. Als die beiden ersten Ableitungen der Gleichung 100) ergab sich

$$\begin{aligned}
 &y''' [x^2 + (x^2 + \frac{x}{2}) \xi] + y'' [2x^2 + \frac{9}{2}x + (2x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{5}{4}) \xi] + \\
 &y' [x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{5}{2} + (x^2 + 6x + \frac{17}{4} + \frac{1}{4x}) \xi] + y [x + 1 + (x + \frac{3}{2}) \xi] = 3\beta \\
 &y^{IV} [x^2 + (x^2 + \frac{x}{2}) \xi] + y''' [3x^2 + 7x + (3x^2 + \frac{17}{2}x + \frac{5}{2}) \xi] + \\
 &+ y'' [3x^2 + 15x + \frac{33}{2} + 3x^2 + \frac{33}{2}x + \frac{55}{4} + \frac{7}{8x}] \xi +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +y'[x^2+9x+\frac{43}{4}+\frac{1}{4x}+(x^2+\frac{19}{2}x+\frac{59}{4}+\frac{19}{8x}-\frac{1}{8x^2})\xi]+ \\
 +y[x+\frac{5}{2}+(x+3+\frac{5}{4x})\xi]=0.
 \end{aligned}$$

Für die Grössen τ und σ ergaben sich folgende Werthe:

$$\tau_0 = \frac{b}{3} - \beta, \tau_1 = \frac{2b}{9} + \frac{8\beta}{3.5}$$

$$\tau_2 = \frac{76b}{3.5.7.9} - \frac{22\beta}{5.7.9}$$

$$\tau_3 = \frac{776b}{3.5.7.9.9} + \frac{626\beta}{5.5.9.9}$$

$$\tau_4 = \frac{3184b}{3.3.5.5.7.9.9.11} - \frac{146554\beta}{3.5.5.7.9.9.11}$$

$$\tau_5 = \frac{216632116b}{3.5.5.7.7.9.9.9.11.13} + \frac{20662108\beta}{5.7.7.9.9.9.11.13}$$

$$\sigma_0 = \frac{b}{3} - \beta$$

$$\sigma_1 = \frac{23\beta}{3.5} - \frac{b}{9}$$

$$\sigma_2 = -\frac{29b}{3.5.7.9} - \frac{673\beta}{5.7.9}$$

$$\sigma_3 = \frac{1559b}{3.5.7.9.9} + \frac{44207\beta}{5.5.7.9.9}$$

$$\sigma_4 = -\frac{611441b}{3.3.5.5.7.9.9.11} - \frac{2386693\beta}{3.5.5.7.9.9.11}$$

$$\sigma_5 = \frac{381429931b}{3.5.5.7.7.9.9.9.11.13} + \frac{3766678485\beta}{3.5.5.7.7.9.9.9.11.13}$$

Über das Arbeitsquantum, welches bei chemischen Verbindungen gewonnen werden kann.

Von dem c. M. Ludwig Boltzmann in Graz.

Es war früher die Ansicht herrschend, dass die Arbeit, welche bei irgend einer chemischen Verbindung gewonnen werden kann, genau gleich sei der Vermehrung, welche die potentielle Energie der Molekularkräfte durch die chemische Verbindung erfährt, oder mit anderen Worten: dass alle durch die chemische Verbindung erzeugte Wärme in Arbeit verwandelt werden kann. Da aber das Temperaturniveau, bis auf welches diese Wärme durch die chemische Verbindung gebracht werden kann, eine gewisse endliche Grenze nicht übersteigt, so ist es zweifelhaft, ob bei directer chemischer Verbindung alle Wärme in Arbeit verwandelt werden kann, wenn auch jedenfalls in solchen Fällen, wo die durch die chemische Verbindung erzeugbare Temperatur eine sehr hohe ist, nahezu alle Wärme verwandelbar ist. Auch wenn die chemische Energie in anderer Weise etwa mittelst elektrischer Ströme in äussere Arbeit umgesetzt wird, ist die erzeugbare Arbeit (nach Helmholtz die freie Energie) nicht immer genau proportional der bei der Verbindung entwickelten Wärme.¹

Wenn man daher behauptet, Arbeit könne immer ohne Verlust in andere Arbeit oder lebende Kraft, Wärme dagegen nicht ohne Verlust in Arbeit verwandelt werden, so müsste dieser Satz meiner Ansicht nach genauer in folgender Weise ausgesprochen werden: die kinetische Energie der sichtbaren Massenbewegung, und die potentielle Energie der in sichtbare Entfernungen getrennten Massen sind ohne Weiters in einander verwandelbar;

¹ Vergl. „Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge“, III. Beitrag, v. Helmholtz, Sitzb. Berliner Acad. Bd. XXVI., 1883.

dagegen ist die lebende Kraft der Molekularbewegung und auch die potentielle Energie der Molekularkräfte nur bedingt und theilweise in sichtbare Energie verwandelbar. Natürlich kann das Kriterium der Verwandelbarkeit nicht auf der Sichtbarkeit durch das Auge beruhen, sondern scheint mir vielmehr darin begründet zu sein, dass bei der Energie sichtbarer Massenbewegung immer einzelne Geschwindigkeitsgrössen oder Geschwindigkeitsrichtungen so überwiegend vorherrschen, dass die Vertheilung der verschiedenen Geschwindigkeitsgrössen und Richtungen unter die Moleküle unendlich viel vom Maxwell'schen (wahrscheinlichsten) Vertheilungsgesetze abweicht; daher ist sichtbare Massenbewegung (Molarbewegung) immer als Wärme von unendlicher Temperatur zu betrachten und unbedingt in sichtbare Arbeit verwandelbar

Helmholtz bezeichnet sie daher auch als geordnete Bewegung, wogegen er die Molekularbewegung, bei welcher alle möglichen Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsrichtungen vertreten und nach dem Maxwell'schen Gesetz vertheilt sind, als ungeordnete bezeichnet. Es ist übrigens hiebei zu bemerken, dass auch eine Molekularbewegung möglich ist, bei welcher alle möglichen Geschwindigkeitsrichtungen im Raume gleich wahrscheinlich und alle möglichen Grössen der Geschwindigkeit vertreten sind und welche doch nicht dem Maxwell'schen Vertheilungsgesetze entspricht. Bei ihrer Überführung in die Maxwell'sche Vertheilung müsste, wenn meine Schlüsse¹ richtig sind, noch immer sichtbare lebendige Kraft oder Arbeit gewonnen werden können, wenn auch nicht mehr alle lebendige Kraft in sichtbare lebendige Kraft oder Arbeit verwandelt werden könnte. Obwohl also auch erstere Geschwindigkeitsvertheilung keine geordnete wäre, so müsste doch die Maxwell'sche Vertheilung gewissermassen als noch mehr ungeordnet, oder wie ich mich ausdrücke, als noch wahrscheinlicher bezeichnet werden. Die Grösse, welche ich in der citirten Abhandlung als das Permutabilitätsmaass oder Wahrscheinlichkeitsmaass einer Zustandsvertheilung bezeichnete,

¹ Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, LXXVI. Bd der Sitzber. 1877.

könnte also auch als das Maass ihrer Ungeordnetheit betrachtet werden, jede Vermehrung desselben, also jeder Übergang von einer mehr geordneten zu einer weniger geordneten Bewegung ist mit der Möglichkeit sichtbarer Arbeitsleistung verknüpft. Es scheint mir hierin die potentielle Energie nicht wesentlich verschieden von der kinetischen zu sein. Ist sie durch sichtbare Trennung sich anziehender Massen bedingt, so ist sie als vollkommen geordnet zu bezeichnen, und daher, wie Wärme von unendlicher Temperatur, unbedingt in andere sichtbare Arbeit verwandelbar.

Die potentielle Energie der Molekularkräfte dagegen ist nur theilweise geordnet und daher nur theilweise verwandelbar, und zwar umsoweniger, je mehr sich das Vorkommen der verschiedenen Positionen der Atome dem durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung geforderten wahrscheinlichsten Zustande nähert. Umgekehrt kann aber auch bei einer chemischen Verbindung mehr Energie in Arbeit verwandelbar sein, als die durch die chemischen Kräfte gewonnene potentielle Energie beträgt, weil durch die blosse Mischung der ungleichartigen Atome untereinander der Zustand des Systems aus einem unwahrscheinlicheren in einen wahrscheinlicheren, aus einem mehr geordneten in einen weniger geordneten übergeht. Dies wird am klarsten, wenn man bedenkt, dass bei der blossen Diffusion zweier chemischer indifferenten Gase Arbeit gewonnen werden kann, ohne dass dabei irgend eine potentielle Energie frei wird, oder irgend eine Temperaturveränderung vor sich geht. In der That ist die Vertheilung der Moleküle besser geordnet, wenn alle Sauerstoffmoleküle in der unteren, alle Wasserstoffmoleküle in der oberen Hälfte eines Gefässes sich befinden, als wenn sämtliche Moleküle untereinander gemischt sind. ¹

¹ Die bei der Diffusion zweier Gase gewinnbare Arbeit wurde zuerst von Lord Rayleigh (Philosophical Magazin, April 1875) berechnet. In meiner bereits citirten Abhandlung habe ich gezeigt, wie sich ein numerisches Maass für die Geordnetheit einer Zustandsvertheilung aufstellen lässt. Berechnet man hiernach die bei der Diffusion gewinnbare Arbeit, so stimmt sie genau mit der von Lord Rayleigh gefundenen. Vergl. meine Abhandlung „Über die Beziehung der Diffusionsphänomene zum zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie“, Bd. LXXVIII, 1878“, bei deren Abfassung ich übrigens die Arbeit Lord Rayleigh's nicht kannte.

Diese Diffusion geschieht freilich, ohne dass chemische Kräfte ins Spiel kommen, doch ist klar, dass umgekehrt keine chemische Verbindung ohne eine gleichzeitige Mischung heterogener Atome denkbar ist, dass also diejenige Ursache, welche bei der Gasdiffusion rein zur Erscheinung kommt, auch bei jeder chemischen Verbindung mitwirken und die gewinnbare Arbeit vermehren muss. Ich habe die in der citirten Abhandlung auseinandergesetzten Principien nicht auf chemische Vorgänge angewandt und in der That ist gegenwärtig ein praktischer Gewinn hieraus wegen unserer Unbekanntschaft mit den chemischen Affinitätskräften kaum zu erwarten. Trotzdem scheint es mir nicht ohne theoretisches Interesse zu sein, den Fall zu behandeln, wo sich zwei Gase zu einer wiederum gasförmigen Verbindung vereinigen, welcher natürlich auch den Fall der Dissociation von Gasen einschliesst. Ich will, wie in der citirten Abhandlung, zuerst mit einigen numerischen Beispielen der combinatorischen Analyse beginnen, um so allmählig zu den complicirten der Wirklichkeit entsprechenden Fällen überzugehen. Da ich in der citirten Abhandlung bereits ausführlich die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Zustandsvertheilungen unter gegebenen Molekülen erörtert habe, so bleibt gegenwärtig zunächst zu untersuchen, wie gross die Wahrscheinlichkeit der Bildung dieser oder jener Moleküle aus gegebenen Atomen sei.

1. Die einfachste Frage ist folgende: in wie vielen verschiedenen Weisen können wir aus aN gleichbeschaffenen Atomen N Moleküle von je a Atomen zusammensetzen? Wir können im Ganzen die aN Atome $(aN)!$ mal permutiren. Die ersten a Atome sollen immer das erste, die zweiten a das zweite Molekül u. s. w. bilden.

Alsdann führt die blosse Permutation der ersten a Atome zu keiner neuen Zusammensetzung der Moleküle aus den Atomen, ebensowenig die Permutation der nächstfolgenden a Atome u. s. w. Durch alle diese Permutationen erhalten wir bloss Vertauschungen der Atome in einem und demselben Moleküle. Wir werden aber ohnediess später allen möglichen Anordnungen der Atome im Moleküle Rechnung tragen. Jetzt ist ein Molekül, dessen Atome bloß untereinander permutirt sind, als kein neues zu betrachten. Es ist also die Gesamtzahl $(aN)!$ der Permutationen durch $(a!)^N$ zu

dividiren. Ebenso ergibt sich keine neue Gruppierung der Atome zu Molekülen, wenn das Molekül, welches früher an erster Stelle stand, jetzt an zweiter zum Vorschein kommt u. s. w.; denn auch den verschiedenen Permutationen, welche dadurch entstehen, dass die einzelnen Moleküle alle möglichen Orte im Raume einnehmen, wird später Rechnung getragen werden. Daher ist auch noch durch $N!$ d. h. durch die Zahl zu dividiren, welche angibt, wie oft sich die N Moleküle untereinander permutiren lassen. Es können daher aus aN Atomen $\frac{(aN)!}{(a!)^N N!}$ als verschieden zu betrachtende a -atomige Moleküle gebildet werden. Z. B.

$$N = 2, a = 2, \frac{4!}{4 \cdot 2} = 3;$$

Bezeichnen wir die 4 Atome mit den fortlaufenden arabischen Zahlen, so sind folgende drei Bildungsweisen der Moleküle möglich:

$$(12) (34), (13) (24), (14) (23)$$

$$N = 2, a = 3, \frac{6!}{6 \cdot 2} = 10$$

(123) (456), (124) (356), (125) (346), (126) (345), (134) (256), (135) (246), (136) (245), (145) (236), (146) (235), (156) (234).

$$N = 3, a = 2, \frac{6!}{8 \cdot (3!)} = 15$$

(12) (34) (56), (12) (35) (46), (12) (36) (45), (13) (24) (56), (13) (25) (46), (13) (26) (45), (14) (23) (56), (14) (25) (36), (14) (26) (35), (15) (23) (46), (15) (24) (36), (15) (26) (34), (16) (23) (45), (16) (24) (35), (16) (25) (34).

2. Wir wollen nun sogleich zum allgemeinsten Falle übergehen. In einem Gefässe vom Volumen V sollen verschiedenartige Atomgattungen vorhanden sein; dieselben sollen zur Bildung verschiedener Gattungen von Molekülen fähig sein. Die erste mögliche Molekülgattung sei so beschaffen, dass jedes Molekül a_1 Atome von der ersten Gattung, b_1 Atome von der zweiten Gattung, c_1 Atome von der dritten Gattung u. s. w. enthält. Jedes Molekül der zweiten Molekülgattung soll a_2 Atome von der ersten Gattung, b_2 Atome von der zweiten Gattung, c_2 Atome von der dritten

Gattung u. s. w. enthalten. Wir fragen uns, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich von der ersten Moleküllattung gerade N_1 , von der zweiten N_2 Moleküle u. s. w. von der letzten Moleküllattung N Moleküle im Gefässe bilden.

Die Gesamtzahl der Atome erster Gattung ist also

$$A = \sum_{k=1}^{k=v} a_k N_k; \quad 1)$$

ebenso ist die Gesamtzahl der Atome zweiter Gattung

$$B = \sum_{k=1}^{k=v} b_k N_k \quad 2)$$

u. s. w.

Sämmtliche Atome erster Gattung lassen sich $A!$ mal permutiren, für jede dieser Permutationen lassen sich wieder die Moleküle der zweiten Gattung $B!$ mal permutiren u. s. w., so dass im Ganzen $A! B! C! \dots$ Permutation möglich sind.

Dabei erscheinen aber wieder keine neuen Moleküle, wenn bloss die a_1 Atome irgend eines der N_1 Moleküle untereinander permutirt werden, wesshalb die obige Permutationszahl durch $(a_1!)^{N_1}$ zu dividiren ist; ebenso ist durch $(b_1!)^{N_1}$, $(c_1!)^{N_1}$, $(a_2!)^{N_2} \dots$ zu dividiren. Endlich ist auch noch durch $N_1! N_2! N_3! \dots$ zu dividiren, da durch blosser Permutation der Stellungen der Moleküle gegeneinander, keine neuen Moleküle entstehen. Man erhält daher für die gesammte Zahl, welche angibt, wie oft sich die Moleküle aus den Atomen bilden lassen, den Ausdruck:

$$Z = \frac{A! B! C! \dots}{(a_1! b_1! c_1! \dots)^{N_1} (a_2! b_2! c_2! \dots)^{N_2} (a_3! b_3! c_3! \dots)^{N_3} \dots N_1! N_2! N_3! \dots} \quad 3)$$

Es seien z. B. A Chlor- und B Wasserstoffatome gegeben. Es wird gefragt, wie wahrscheinlich es ist, dass sich daraus gerade N_1 Chlor-, N_2 Wasserstoff- und N_3 Chlorwasserstoffmoleküle bilden. Hier ist $a_1 = 2$, $b_1 = 0$; $a_2 = 0$, $b_2 = 2$; $a_3 = 1$, $b_3 = 1$; die Anzahl der Chloratome ist $A = 2N_1 + N_3$; die Anzahl der Wasserstoffatome ist $B = 2N_2 + N_3$; die Anzahl der Bildungsweisen

$$Z = \frac{A! B!}{2^{N_1+N_2} \cdot N_1! N_2! N_3!}.$$

Da wir die Affinitätskräfte noch nicht der Rechnung unterzogen haben, so wollen wir hier beispielsweise bloss annehmen, dass die Wechselwirkung zwischen zwei Chloratomen, zwischen zwei Wasserstoffatomen und zwischen je einem Chlor- und einem Wasserstoffatom dieselbe sein soll. Dann wird die Wahrscheinlichkeit irgend eines Mischungsverhältnisses proportional sein der Wahrscheinlichkeit der Bildung der betreffenden Moleküle, also der oben mit Z bezeichneten Zahl. Das Gemisch wird am wahrscheinlichsten sein, wenn Z ein Maximum ist, also da der Zähler von Z constant ist, wenn der Nenner ein Minimum ist. Benützt man für die Factoriellen die bekannten Annäherungsformeln, so ist der Logarithmus jenes Nenners, abgesehen von einer Constanten

$$N_1 \log 2N_1 + N_2 \log 2N_2 + N_3 \log N_3.$$

Sucht man von dieser Grösse das Minimum, unter den beiden Nebenbedingungen, dass $A = 2N_1 + N_3$ und $B = 2N_2 + N_3$ constant sein müssen, so ergibt sich

$$N_1 = \frac{A^2}{2(A+B)}, \quad N_2 = \frac{B^2}{2(A+B)}, \quad N_3 = \frac{AB}{A+B}, \quad \left(\frac{N_3}{2}\right)^2 = N_1 N_2,$$

d. h., wenn die chemischen Affinitäten so wirksam wären, dass die Bildung einzelner Atome, so wie drei und mehratomiger Moleküle unendlich unwahrscheinlich wäre, dass dagegen im zweiatomigen Moleküle die Wechselwirkung zweier Chloratome, zweier Wasserstoffatome oder eines Chlor- und eines Wasserstoffatoms dieselbe wäre, so würde das Gleichgewicht der Dissociation dann eintreten, wenn die halbe Anzahl der Chlorwasserstoffmoleküle die mittlere geometrische Proportionale der Anzahl der Chlormoleküle und der Anzahl der Wasserstoffmoleküle wäre. Die Bedeutung der allgemeinen Formel 3) kann man sich noch an Zahlenbeispielen versinnlichen. Seien z. B. zwei Chlor- und zwei Wasserstoffmoleküle gegeben, dann ist

$$N_1 = N_2 = 0, \quad N_3 = 2, \quad a_2 = 1, \quad b_3 = 1, \quad A = 2, \quad B = 2;$$

daher:

$$Z = \frac{2! \cdot 2!}{2!}.$$

Bezeichnen wir die Chloratome mit arabischen, die Wasserstoffatome mit römischen Ziffern, so sind in der That nur zwei Bildungsweisen der Moleküle möglich, nämlich:

$$(1\text{I})(2\text{II}), \quad (1\text{II})(2\text{I});$$

seien aus 4 Wasserstoffatomen und 2 Sauerstoffatomen 2 Wasserdampfmoleküle zu bilden, so ist

$$N_1 = 2, \quad a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad A = 4, \quad B = 2,$$

daher

$$Z = \frac{4! 2!}{(2!)^2 \cdot 2!} = 6$$

Die Bildungsweisen der Moleküle sind folgende:

$$(12\text{I})(34\text{II}), \quad (12\text{II})(34\text{I}), \quad (13\text{I})(24\text{II}), \quad (13\text{II})(24\text{I}), \\ (14\text{I})(23\text{II}), \quad (14\text{II})(23\text{I}).$$

3. Nun handelt es sich weiter darum, wie oftmal aus den gegebenen Molekülen eine gegebene Zustandsvertheilung gebildet werden kann. Wir kehren da wieder zu dem sub Nr. 2 zu Anfang behandelten allgemeinen Fall zurück. Um den abstrakten Charakter der Betrachtung nicht noch mehr zu steigern, wollen wir nicht von generalisirten, sondern von gewöhnlichen rechtwinkeligen Coordinaten Gebrauch machen. Statt der Differentiale führen wir sehr kleine Intervalle ein, welche für sämtliche x -Coordinaten gleich δ , für die y - und z -Coordinaten, sowie für die 3 Geschwindigkeitscomponenten nach den Axen, respective gleich ϵ , ζ , η , \mathfrak{D} sein sollen. α , λ , μ , ρ , σ , τ sollen sehr grosse ganze Zahlen sein und zwar so, dass $\alpha\delta$, $\lambda\epsilon$, $\mu\zeta$, $\rho\eta$, $\sigma\mathfrak{D}$, $\tau\epsilon$ auch noch sehr gross sind. Statt zu sagen, die x -Coordinaten haben alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen, sagen wir, dieselben können in allen Intervallen von $-\alpha\delta$ bis $+\alpha\delta$ liegen. Dieselbe Bedeutung kommt den Zahlen λ , μ , ρ , σ , τ für die anderen Coordinaten und die Geschwindigkeitscomponenten zu. Von der ersten Molekül-gattung sind im ganzen N_1 Moleküle vorhanden, deren jedes a_1 Atome erster, b_1 zweiter, c_1 dritter. . . . g_1 Atome letzter Gattung enthält. Von diesen N_1 Molekülen sollen*

$$\varphi_1 = f_1 (k^{\lambda\delta}, l^{\lambda\epsilon}, m^{\mu\zeta}, r^{\rho\eta}, s^{\sigma\mathfrak{D}}, t^{\tau\epsilon}, k^{\alpha\delta} \dots t^{\alpha_1 + b_1 + c_1 + \dots g_1}). \\ (\delta\epsilon\zeta\eta\mathfrak{D})^{\alpha_1 + b_1 + c_1 + \dots g_1}$$

so beschaffen sein, dass die Coordinaten und Geschwindigkeits-
componenten

des 1. Atoms 1. Gatt. zwisch. d. Grenzen $k_1\delta$ u. $(k^1+1)\delta$, $l^1\varepsilon$ u. $(l^1+1)\varepsilon$, $m^1\zeta$ u. $(m^1+1)\zeta$, $r^1\eta$ u. $(r^1+1)\eta$, $s^1\mathcal{S}$ u. $(s^1+1)\mathcal{S}$, $t^1\iota$ u. $(t^1+1)\iota$,

des 2. Atoms 1. Gatt. zwisch. d. Grenzen $k^2\delta$ u. $(k^2+1)\delta$, $l^2\varepsilon$ u. $(l^2+1)\varepsilon$, $m^2\zeta$ u. $(m^2+1)\zeta$, $r^2\eta$ u. $(r^2+1)\eta$, $s^2\mathcal{S}$ u. $(s^2+1)\mathcal{S}$, $t^2\iota$ u. $(t^2+1)\iota$

.....

des letzten Atoms 1. Gatt. zwisch. d. Grenzen $k^{a_1}\delta$ u. $(k^{a_1}+1)\delta$, $l^{a_1}\varepsilon$ u. $(l^{a_1}+1)\varepsilon$, $m^{a_1}\zeta$ u. $(m^{a_1}+1)\zeta$, $r^{a_1}\eta$ u. $(r^{a_1}+1)\eta$, $s^{a_1}\mathcal{S}$ u. $(s^{a_1}+1)\mathcal{S}$, $t^{a_1}\iota$ u. $(t^{a_1}+1)\iota$

des 1. Atoms 2. Gatt. zwisch. d. Grenzen $k^{a_1+1}\delta$ u. $(k^{a_1+1}+1)\delta$, $l^{a_1+1}\varepsilon$ u. $(l^{a_1+1}+1)\varepsilon$, $m^{a_1+1}\zeta$ u. $(m^{a_1+1}+1)\zeta$, $r^{a_1+1}\eta$ u. $(r^{a_1+1}+1)\eta$, $s^{a_1+1}\mathcal{S}$ u. $(s^{a_1+1}+1)\mathcal{S}$, $t^{a_1+1}\iota$ u. $(t^{a_1+1}+1)\iota$ 5)

.....

endlich des letzten Atoms letzter Gattung zwischen den Grenzen $k^{a_1+b_1+c_1+\dots g_1}\delta$ und $(k^{a_1+b_1+c_1+\dots g_1}+1)\delta$ u. s. w. liegen. Genau dieselbe Bedeutung soll

$$\varphi_2 = f_2(k^1\delta, l^1\varepsilon, m^1\zeta, r^1\eta, s^1\mathcal{S}, t^1\iota, k^2\delta \dots t^{a_2+b_2+\dots g_2}) \quad (6)$$

$$(\partial\varepsilon\zeta\eta\mathcal{S}\iota)^{a_2+b_2+c_2+\dots g_2}$$

für die Moleküle zweiter Gattung haben, wobei natürrlich auch im Grenzenschema überall $a_2, b_2 \dots$ für $a_1, b_1 \dots$ zu setzen ist. Ebenso tritt für die Moleküle dritter Gattung der untere Index 3 an Stelle von 2 u. s. w., für die Moleküle letzter Gattung der untere Index ν .

Nach den Principien, welche ich jedesmal beim Übergange von einer endlichen Anzahl lebendiger Kräfte oder überhaupt Zustände zu einer unendlichen Reihe derselben angewendet habe, sind jene φ_1 Moleküle als in demselben Zustande befindlich zu betrachten, welchen wir als den Zustand p_1 bezeichnen wollen.

Die Werthe, welche die Function f annimmt, wenn man den ganzen Zahlen $k^1, l^1 \dots$ andere und andere Werthe beilegt, sollen mit χ_1, ψ_1 u. s. w. bezeichnet werden, dann sind auch die χ_1 Moleküle als in demselben Zustande (g_1) befindlich aufzufassen, ebenso die ψ_1 in demselben Zustande (r_1) u. s. w.

Die Aufgabe ist also jetzt folgende: In einem Sacke befinden sich sehr viele (n) Zettel, auf jedem ist einer der Zustände $p_1, q_1,$ oder r_1 u. s. w. aufgeschrieben und zwar auf gleichviel Zetteln der erstere, wie der zweite Zustand u. s. w.¹ fñr jedes der N_1 Moleküle wird nun ein Zettel gezogen, wie wahrscheinlich ist es, dass gerade die obige Zustandsvertheilung gezogen wird, d. h. auf wie viele verschiedene Weisen können die Zettel gezogen werden, so dass dabei φ_1 Moleküle den Zustand p_1, χ_1 den Zustand q_1 u. s. f. erhalten. Offenbar auf so viele verschiedene Weisen, als sich N_1 Elemente permutiren lassen, von denen φ_1 untereinander gleich sind, ebenso χ_1, ψ_1 u. s. f. also

$$\frac{N_1!}{\varphi_1! \chi_1! \psi_1! \dots} \text{ mal.} \quad 7)$$

Bezeichnen wir die analogen Grössen für die zweite Molekül-gattung mit dem unteren Index 2, so werden sich die Zustände der Moleküle zweiter Gattung

$$\frac{N_2!}{\varphi_2! \chi_2! \psi_2! \dots} \quad 8)$$

¹ Dass von allen diesen Zuständen gleichviel genommen werden müssen, ist darin begründet, dass, wenn gar keine Bedingungsgleichung gegeben ist, die Wahrscheinlichkeit vollkommen gleich ist, dass ein Atom oder der Endpunkt einer Geschwindigkeit in einem beliebigen Volumenelemente liegt. Vergl. hierüber Watson a treatise of the kinetic theorie of gases prop. III, pag. 13, oder meine Abhandlung: „Über einige das Wärme-gleichgewicht betreffende Sätze“. Sitzber. d. Wiener Akad., Bd. 84, pag. 136, Juni 1881. Aus demselben Grunde müssen auch alle Elemente der X-Coordi-naten, welche wir mit δ bezeichnet haben, unter einander gleich angenommen werden, damit alle Stellen des Raumes sowohl untereinander als auch für alle Atome als gleichberechtigt erscheinen. $\delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \xi, \iota$ brauchen nicht untereinander gleich zu sein, denn die X-Coordinate steht in keiner Beziehung zur Y-Coordinate. Man könnte bezweifeln, ob die Grenzen aller Coordinaten der Atome eines Moleküls mit $-\infty$ und $+\infty$ festzusetzen sind, da ja die Atome sich niemals sehr weit entfernen werden, allein dieser Zweifel wird dadurch behoben, dass die zu grösserer Entfernung nothwendige Arbeit einen sehr grossen Werth hat, so dass solche grössere Entfernungen praktisch sehr unwahrscheinlich werden. In der Theorie werden wir immer die mög-lichen Entfernungen der Atome eines zweiatomigen Moleküls von Null bis ∞ variiren lassen und darunter verstehen, dass auch Entfernungen, welche gegen die mittlere Entfernung ziemlich gross sind, oder besser gesagt, für welche die Kraftfunction gegen die mittlere sehr gross ist, in einzelnen seltenen Fällen vorkommen können. Die Kraftfunction könnte ja für kleine Zuwächse der Entfernung schon riesig anwachsen.

mal permutiren lassen. Und ähnliches gilt für die übrigen Molekül-gattungen. Um also das Permutabilitätsmaass, d. h. die Wahrscheinlichkeit irgend eines bestimmten Zustandes der gesammten Gasmasse zu erhalten, ist der Ausdruck 3) mit 6) 7) u. s. w. zu multipliciren, was liefert

$$P = \frac{A! B! C! \dots}{(a_1! b_1! c_1! \dots)^{N_1} (a_2! b_2! \dots)^{N_2} (a_3! b_3! \dots)^{N_3} \dots \varphi_1! \chi_1! \psi_1! \dots \varphi_2! \chi_2! \dots} \quad 1) 9)$$

¹ Um hier nochmals ein illustrirendes Beispiel mit endlichen Zahlen anzugeben, seien 4 Chlor- und 4 Wasserstoffatome gegeben; wenn daraus zwei zweiatomige Chlor- und zwei zweiatomige Wasserstoffmoleküle gebildet werden (Fall *A*), so ist $N_1 = N_2 = 2$, $a_1 = b_2 = 2$, daher sind $\frac{4! 4!}{2^2 2^2 2 \cdot 2} = 9$ Bildungsweisen möglich; werden dagegen vier zweiatomige Chlorwasserstoffmoleküle (Fall *B*) gebildet, so ist $N = 4$ $a = b = 1$, daher existiren $\frac{4! \cdot 4!}{4!} = 24$ verschiedene Bildungsweisen. Es verhält sich daher die Wahrscheinlichkeit des Falles *A* zu der des Falles *B* wie 3 : 8, wenn, wie wir voraussetzen, das Wirkungsgesetz für die Chlor- und Wasserstoffatome aufeinander und der Chlor- auf die Wasserstoffatome dasselbe ist. Seien etwa für jedes Molekül nur zwei Zustände *C* und *D* möglich, z. B. eine grössere und eine kleinere Entfernung der Atome oder die Anwesenheit des Schwerpunktes in zwei verschiedenen Volumelementen. Wir können hier nicht die wahrscheinlichste Zustandsvertheilung berechnen, wir wollen daher sowohl im Falle *A* als auch im Falle *B* alle überhaupt möglichen Zustandsvertheilungen addiren. Im Falle *B* können alle 4 Moleküle den Zustand *C* in $\frac{4!}{4!}$ verschiedenen Weisen haben. Es ist dann $N = 4$, $\varphi = 4$. Ebenso so oft können alle 4 den Zustand *D* haben. Dass 3 Moleküle den Zustand *C*, eines den Zustand *D* oder umgekehrt hat, ist in $\frac{4!}{3!}$ verschiedenen Weisen möglich, denn dann ist $N = 4$, $\varphi = 3$ und $\chi = 1$. Dass 2 Moleküle den Zustand *C* und eben so viele den Zustand *D* haben, ist in $\frac{4!}{(2!)^2}$ verschiedenen Weisen möglich. Alle überhaupt möglichen Zustandsvertheilungen können daher in $2+2 \cdot 4+6 = 16$ Weisen hergestellt werden. Im Falle *A* können alle Chlormoleküle den Zustand *C* oder *D* in einer Weise, eines *C* das andere *D* in 2 Weisen haben; es können also die Chlormoleküle ihre Zustände in 4 verschiedenen Weisen annehmen und ebenso alle Wasserstoffmoleküle. Desshalb sind wieder 16 verschiedene Vertheilungen aller Zustände möglich. Die relative Wahrscheinlichkeit des Falles *A* und *B* bleibt also 3 : 8. Man überzeugt sich leicht, dass dieses Resultat nicht alte-

Hier handelt es sich natürlich bloss um die Wahrscheinlichkeit, dass gegebene Atome zu verschiedenen chemischen Verbindungen combinirt werden und diese wieder verschiedene Zustände haben. Es ist also der Zähler des Ausdrucks 9) eine constante Grösse.

Es muss ferner angenommen werden, dass von jeder Molekül-gattung in jedem Volumelemente eine sehr grosse Anzahl vorhanden ist. Wir können uns daher der Annäherungsformel bedienen:

$$l(\varphi!) = \frac{1}{2} l(2\pi) + \varphi l\varphi + \frac{1}{2} l\varphi - \varphi \quad (10)$$

wobei l den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Führen wir also wieder die ausführlichen Bezeichnungen ein, so ist

$$l(\varphi_1! \chi_1! \psi_1! \dots) = \sum l[f_1(k^1\delta, l^1\varepsilon, m^1\zeta, r^1\eta, s^1\theta, t^1i, k^2\delta \dots) \dots]^{a_1+b_1+\dots g_1} \dots (\delta\varepsilon\zeta\eta\theta i)^{a_1+b_1+\dots g_1}! \quad (11)$$

Die Summe ist so zu verstehen, dass jedes der k alle Werthe von $-k$ bis $+k$ zu durchlaufen hat, ebenso jedes l alle Werthe von $-\lambda$ bis $+\lambda$ u. s. w. Da im Ganzen $a_1+b_1+\dots g_1$ Grössen k vorhanden sind, deren jede $2k+1$ Werthe annimmt, so sind $(2k+1)^{a_1+b_1+\dots g_1}$ Werthcombinationen der k möglich. Ebenso $(2\lambda+1)^{a_1+b_1+\dots g_1}$ Werthcombinationen der l u. s. f. Die Summe 11) hat also $[(2k+1)(2\lambda+1)\dots(2r+1)]^{a_1+b_1+\dots g_1}$ Glieder. Eine solche Summe soll stets durch S bezeichnet werden. Setzt man daher

riert wird, wenn man die Möglichkeit berücksichtigt, dass in jedem Moleküle die Atome ihre Plätze vertauschen können. Die Molekülgruppe (12) (34) lässt 4 verschiedene Platzvertauschungen (12) (34), (21) (34), (12) (43), (21) (43) zu. Ebenso oft lassen sich in den Molekülgruppen (13) (24) und (14) (23) die Plätze vertauschen. (12) (34) ist nicht mit (34) (12) zu vertauschen, wenn beide in demselben Volumelemente liegen. Ebenso sind auch im Falle A 12 Bildungsweisen der Chlormoleküle und 12 der Wasserstoffmoleküle, also im Ganzen $144 = 9 \cdot 16$ Platzvertauschungen möglich. Im Falle B existiren 24 verschiedene Bildungsweisen der 4 Moleküle, für jede können die Plätze in zwei verschiedenen Weisen, folglich für 4 Moleküle in 16 verschiedenen Weisen vertauscht werden; daher existiren $24 \cdot 16$ Platzvertauschungen.

in den Ausdruck 11) statt der Factoriellen die Annäherungsformel 10), so liefert das erste Glied dieser Annäherungsformel in dem Ausdruck $l(\varphi_1! \chi_1! \psi_1! \dots)$ das Glied

$$\frac{1}{2} l(2\pi) [(2x+1)(2\lambda+1)\dots(2\tau+1)]^{a_1+b_1+\dots g_1} \quad 12)$$

Das zweite Glied der Annäherungsformel liefert in 11) die beiden Glieder

$$\sum f_1 \cdot \mathcal{U}_1 \cdot (\partial \varepsilon \zeta \eta \mathcal{D} t)^{a_1+b_1+\dots g_1} \quad 13)$$

und

$$\sum f_1 \cdot (\partial \varepsilon \zeta \eta \mathcal{D} t)^{a_1+b_1+\dots g_1} \cdot l(\partial \varepsilon \zeta \eta \mathcal{D} t)^{a_1+b_1+\dots g_1} \quad 14)$$

Die beiden letzten Glieder der Annäherungsformel liefern

$$\frac{1}{2} \sum \mathcal{U}_1 (\partial \varepsilon \zeta \eta \mathcal{D} t)^{a_1+b_1+\dots g_1} \quad 15)$$

und

$$-\sum f_1 (\partial \varepsilon \zeta \eta \mathcal{D} t)^{a_1+b_1+\dots g_1} \quad 16)$$

Als gegeben ist hier zu betrachten, die Anzahl der Atome der verschiedenen Gattungen und die möglichen Verbindungen, welche sie überhaupt eingehen können, also die $a, b, \dots g$. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit, dass die eine oder andere mögliche chemische Verbindung reichlicher eintritt und diesen oder jenen Zustand annimmt. Die zu bestimmenden Unbekannten sind also die Grössen $N_1, N_2 \dots f_1, f_2 \dots$. Der Ausdruck 12) enthält keine Unbekannte, sondern bloss gegebenes, ist also als Constante zu betrachten. Ein Zweifel hierüber könnte bloss entstehen, wenn irgend eine mögliche chemische Verbindung gar nicht aufträte, man könnte dann glauben, dass die entsprechenden $a, b, c \dots$ gleich Null zu setzen seien und der Ausdruck 12) eine sprungweise Änderung erfahre. Allein ein solcher Sprung wäre ganz unstatthaft; der Fall, dass eine mögliche chemische Verbindung nicht auftritt, ist also immer als Grenzfall zu betrachten, dass sie nur sehr spärlich auftritt und die entsprechenden $a, b, c \dots$ sind in der Rechnung zu belassen. Ferner handelt es sich immer um das Verschwinden der Variation von lP . In diese Variation liefert der

Ausdruck 15) nur Grössen von der Form $\frac{1}{\varphi}$, da er selbst die Form $S\ell\varphi$ hat. Da aber φ gross ist, so ist $\frac{1}{\varphi}$ und folglich auch der Ausdruck 15) zu vernachlässigen. Der Ausdruck 16) ist offenbar gleich $-N_1$, der Ausdruck 14) gleich $(a_1 + b_1 + \dots g_1)N_1\ell(\delta\epsilon\zeta\eta\mathcal{D}\iota)$. Endlich ist der Ausdruck 13), wenn man darin Differentiale einführt, gleich

$$\iint \dots f_1 \ell f_1 dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1 dx_2 \dots dw_{a_1+b_1+\dots g_1}$$

Es reducirt sich also von constantem abgesehen, der Ausdruck $\ell(\varphi_1! \chi_1! \psi_1! \dots)$ auf

$$\iint \dots f_1 \ell f_1 dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1 dx_2 \dots dw_{a_1+b_1+\dots g_1} + (a_1 + b_1 + \dots g_1)N_1\ell(\delta\epsilon\zeta\eta\mathcal{D}\iota) - N_1$$

und nach Formel 9) erhält man abgesehen von constantem

$$\begin{aligned} -lP &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha \ell(a_\alpha! b_\alpha! c_\alpha! \dots g_\alpha!) - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} \iint \dots f_\alpha \ell f_\alpha dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1 dx_2 \dots dw_{a_\alpha+b_\alpha+\dots g_\alpha} \\ &+ \ell(\delta\epsilon\zeta\eta\mathcal{D}\iota) \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha (a_\alpha + b_\alpha + c_\alpha + \dots g_\alpha). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} a_\alpha N_\alpha = A, \quad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} b_\alpha N_\alpha = B \text{ u. s. w.}, \quad (17)$$

daher der Ausdruck in der letzten Zeile ebenfalls constant und es bleibt:

$$\begin{aligned} -lP &= \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha \ell(a_\alpha! b_\alpha! c_\alpha! \dots) - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} \iint \dots f_\alpha \ell f_\alpha dx_1 dy_1 dz_1 du_1 dv_1 dw_1 dx_2 \dots dw_{a_\alpha+b_\alpha+\dots g_\alpha}. \quad (18) \end{aligned}$$

Diese Formel ist insoferne noch von überflüssiger Allgemeinheit, als daselbst die die Zustandsvertheilung charakterisirende Function f ganz willkürlich gelassen ist. Für den uns allein interessirenden Fall, dass sämtliche Gase sich bei einer mittleren lebendigen Kraft eines Atoms $T = \frac{3}{2h}$ im Wärmegleichgewichte befinden, ist:

$$f_a = \frac{N_a e^{-h(\chi_a + \Lambda_a)}}{\iint \dots e^{-h(\chi_a + \Lambda_a)} dx_1 dy_1 \dots dw_{a_x + b_x + \dots g_x}}$$

wobei χ_a der Werth der Kraftfunction, Λ_a der Werth der gesammten lebendigen Kraft aller Atome eines Moleküls im betrachteten Zustande ist. Daher wird

$$J_a = \iint \dots f_a \chi_a dx_1 dy_1 \dots dw_{a_x + b_x + \dots g_x} = N_a l N_a - h N_a \bar{\chi}_a - h N_a \bar{\Lambda}_a - N_a l \iint \dots e^{-h(\chi_a + \Lambda_a)} dx_1 dy_1 \dots dw_{a_x + b_x + \dots g_x}.$$

Hiebei ist

$$\bar{\chi}_a = \frac{\iint \dots \chi_a e^{-h\chi_a} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\xi_{a_x + b_x + \dots g_x}}{\iint \dots e^{-h\chi_a} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\xi_{a_x + b_x + \dots g_x}} \quad (19)$$

$$\bar{\Lambda}_a = \frac{3}{2h} (a_x + b_x + \dots g_x)$$

$\xi_2 \eta_2 \dots$ sind die Coordinaten der Atome eines Moleküls relativ gegen dessen Schwerpunkt. Ferner ist

$$l \iint \dots e^{-h\Lambda_a} du_1 dv_1 \dots dw_{a_x + b_x + \dots g_x} = \frac{1}{2} l \left[\frac{(2\pi)^{3a_x + 3b_x + \dots 3g_x}}{m_1^{3a_x} m_2^{3b_x} \dots m_k^{3g_x} h^{3a_x + 3b_x + \dots 3g_x}} \right].$$

Letzteres wegen

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h \frac{mu^2}{2}} du = \sqrt{\frac{2\pi}{hm}}$$

endlich

$$\iint \dots e^{-h\chi^2} dx_1 dy_1 \dots dz_{a_\alpha + b_\alpha + \dots g_\alpha} = \\ = V \iint \dots e^{-h\chi^2} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_{a_\alpha + b_\alpha + \dots g_\alpha}$$

wobei V das gesammte von allen Gasen erfüllte Volumen $m_1, m_2 \dots$ aber die Massen der Atome erster, zweiter .. Gattung sind. Mit Rücksicht hierauf wird:

$$J_\alpha = -N_\alpha l \frac{V}{N_\alpha} - N_\alpha l \iint \dots e^{-h\chi^2} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_{a_\alpha + b_\alpha + \dots g_\alpha} - \\ - h N_\alpha \bar{\chi}_\alpha + \frac{3N_\alpha}{2} (a_\alpha + b_\alpha + \dots g_\alpha) l h \\ - \frac{3N_\alpha}{2} (a_\alpha + b_\alpha + \dots g_\alpha) (1 + \sqrt{2}\pi) + \frac{3a_\alpha N_\alpha}{2} l m_1 + \\ + \frac{3b_\alpha N_\alpha}{2} l m_2 + \dots \frac{3g_\alpha N_\alpha}{2} l m_\alpha$$

Wegen den Gleichungen 17) liefert die gesammte zweite

Zeile nur Constantes in $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} J_\alpha$ und es liefert die Gleichung 18)

$$-lP = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha l (a_\alpha! b_\alpha! c_\alpha! \dots g_\alpha!) - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha l \frac{V}{N_\alpha} + \\ + \frac{3lh}{2} (A+B+C \dots) - h \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha \bar{\chi}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha l \iint \dots e^{-h\chi^2} d\xi_2 d\eta_2 \dots \\ d\zeta_{a_\alpha + b_\alpha + \dots g_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=v} N_\alpha [l(a_\alpha! b_\alpha! \dots g_\alpha!) - 1 - l \frac{V}{N_\alpha} - h\bar{\chi}_\alpha + \\ + \frac{3lh}{2} (a_\alpha + b_\alpha + \dots g_\alpha) - l] \iint \dots e^{-h\chi^2} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_{a_\alpha + b_\alpha + \dots g_\alpha} \quad 20)$$

Um diese Formel sogleich auf den denkbar einfachsten Fall anzuwenden, wollen wir die Dissociation eines Gases mit zweiatomigen Molekülen in einzelne Atome betrachten. Von den A Atomen seien N_1 einzeln, aus den übrigen seien N_2 zweiatomige Moleküle gebildet, so dass

$$A = N_1 + 2N_2.$$

Die Kraft, welche je zwei Atome in einem Moleküle gegeneinander zieht, sei in der Entfernung ρ derselben, gleich $\frac{\partial \chi(\rho)}{\partial \rho}$, $\chi(\infty)$ sei gleich Null. Unter Voraussetzung anziehender Molekularkräfte, ist daher $\chi(\rho)$ negativ und bei ungestörter Bewegung zweier Atome $\frac{mv^2}{2} + \chi$ constant. Dann ist für die zweiatomigen Moleküle

$$\iint \dots e^{-h\chi} d\xi_2 d\eta_2 \dots = 4\pi \int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho \quad (22)$$

$$\bar{\chi} = \frac{\int_0^\infty \chi e^{-h\chi} \rho^2 d\rho}{\int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho} \quad (23)$$

daher

$$\begin{aligned} -lP &= N_1 \left(-l \frac{V}{N_1} + \frac{3lh}{2} - 1 \right) + N_2 (l2 - l \frac{V}{N_2} - \\ &\quad - l4\pi \int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho - h \frac{\int_0^\infty \chi e^{-h\chi} \rho^2 d\rho}{\int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho} + 3lh - 1) \\ &= + \frac{3}{2} Alh + N_1 (lN_1 - 1) + N_2 (lN_2 - 1) - AlV + N_2 l2V - h\bar{\chi}N_2 - \\ &\quad - N_2 l4\pi \int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho . \quad (24) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hat die Bedeutung, dass eine gegebene lebende Kraft und Arbeit sich immer so vertheilen wird, dass P ein Maximum, also $-lP$ ein Minimum ist. Fragt man bloss um den Grad der Dissociation in einem gegebenen Volumen, so ist also ausser N_1 und N_2 noch $h = \frac{3}{2T}$ als variabel zu betrachten. Die Bedingungen sind:

$$\begin{aligned} N_1 + 2N_2 &= A, & \delta N_1 &= -2\delta N_2 \\ N_2 \bar{\chi} + \frac{3A}{2h} &= \text{const.}, & \delta(N_2 \bar{\chi}) - \frac{3A\delta h}{h^2} &= 0. \end{aligned}$$

Die Variation von 24) ist

$$\begin{aligned} \frac{3A\delta h}{2h} - 2lN_1 \delta N_2 + lN_2 \delta N_2 + l2V\delta N_2 - N_2 \bar{\chi} \delta h - h\delta(N_2 \bar{\chi}) - \\ - \delta N_2 l4\pi \int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho + N_2 \bar{\chi} \delta h = 0, \end{aligned}$$

daher gemäss der Verbindungsgleichungen:

$$lN_2 - 2lN_1 + lV - l4\pi \int_0^\infty e^{-h\chi\rho^2} d\rho = 0 \quad \frac{N_2}{N_1^2} = \frac{2\pi}{V} \int_0^\infty e^{-h\chi\rho^2} d\rho \quad 25)$$

welche Gleichung also die Beziehung zwischen der Anzahl der verbundenen und einzelnen Atome angibt. Wenn sich ClH in Cl und H dissociiren würde, so wäre $a_1 = 1$, $b_2 = 1$, $a_3 = b_3 = 1$, daher hätte die später folgende Determinante 28) den Werth

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

woraus folgt:

$$P_1 + P_2 = P_3$$

$$lN_1 + lN_2 - lV = lN_3 - l4\pi \int_0^\infty e^{-h\chi\rho^2} d\rho$$

$$\frac{N_3}{N_1 N_2} = \frac{4\pi}{V} \int_0^\infty e^{-h\chi\rho^2} d\rho.$$

Betrachten wir ferner den schon früher erwähnten Fall, dass ein zweiatomiges sich in zwei zweiatomige Gase ClH in ClCl und HH dissociirt

$$N_3 + 2N_1 = A, \quad N_3 + 2N_2 = B$$

so ist

$$a_1 = b_2 = 2, \quad a_3 = b_3 = 1,$$

sei

$$\chi_1 = \varphi, \quad \chi_2 = \psi, \quad \chi_3 = \chi,$$

so wird

$$-lP = \frac{3lh}{2} (A+B) + N_1 (lN_1 - 1) + N_2 (lN_2 - 1) + N_3 (lN_3 - 1) - \\ - \left(\frac{A+B}{2} \right) lV + (N_1 + N_2) l2$$

$$-h(N_1 \bar{\varphi} + N_2 \bar{\chi} + N_3 \bar{\psi}) - N_1 l4\pi \int_0^\infty e^{-h\varphi\rho^2} d\rho - \\ - N_2 l4\pi \int_0^\infty e^{-h\psi\rho^2} d\rho - N_3 l4\pi \int_0^\infty e^{-h\chi\rho^2} d\rho.$$

Die Bedingungen des Minimums sind:

$$\begin{aligned} \delta N_1 &= -\frac{1}{2} \delta N_3, \quad \delta N_2 = -\frac{1}{2} \delta N_3 \\ N_1 \bar{\varphi} + N_2 \bar{\psi} + N_3 \bar{\chi} + (A+B) \frac{3}{2h} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf diese Bedingungen liefert die Gleichung $\delta lP = 0$ folgendes:

$$\begin{aligned} l2N_1 - l4\pi \int_0^\infty e^{-h\varphi} \rho^2 d\rho + l2N_2 - l4\pi \int_0^\infty e^{-h\psi} \rho^2 d\rho &= \\ &= 2lN_3 - 2l4\pi \int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho \\ \frac{N_3^2}{4N_1N_2} &= \frac{(\int_0^\infty e^{-h\chi} \rho^2 d\rho)^2}{\int_0^\infty e^{-h\varphi} \rho^2 d\rho \times \int_0^\infty e^{-h\psi} \rho^2 d\rho} \end{aligned} \quad (27)$$

Es hat keine Schwierigkeit, auch das Minimum des allgemeinen Ausdruckes 20) zu finden, wozu die Bedingungsgleichungen

$$\sum N_a a_a = A, \quad \sum N_a b_a = B \dots 1) \quad \sum E_a \bar{\chi}^2 + (A+B+\dots) \frac{3}{2h} = \text{const.}$$

gehören.

Mit Rücksicht auf die letzte Bedingung folgt zunächst:

$$\begin{aligned} \delta(-lP) &= \sum \delta N_a [l(a_1! b_2! \dots) + lN_a - lV - \\ &\quad - l \int \dots e^{-h\chi^2} d\xi_2 d\chi_2 \dots d\xi_{a_2+b_2+\dots}]. \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Ausdruck in der eckigen Klammer mit P_a und berücksichtigt, dass $\sum a_a \delta N_a = \sum b_a \delta N_a = \dots = 0$ sein muss, so folgt für das Verschwinden von $\delta(-lP)$ die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 \dots P_\nu \\ a_1 & a_2 \dots \\ b_1 & b_2 \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (28)$$

Bezeichnen wir die Zahl der verschiedenen Atomgattungen A, B, \dots mit μ , so hat obige Determinante $\mu+1$ Vertikalreihen, repräsentirt also $\nu - \mu$ Gleichungen; aus diesen und den μ Gleichungen

chungen $\Sigma a_x N_x = \Sigma b_x N_x = \dots = 0$ folgen die Unbekannten $N_1, N_2, \dots N_n$. Ist $\mu > \nu$, so sind jedenfalls einige der Gleichungen (1) eine Folge der übrigen und sind nur solche a, b, c, \dots in die Determinante aufzunehmen, welche von einander unabhängigen Gleichungen entsprechen.

Wir wollen nun zunächst den Fall, worauf sich Formel 25. bezieht, in einer anderen Weise behandeln. Wir denken uns das ganze Gefäss vom Volumen V in $\frac{1}{\omega}$ gleiche Fächer vom Volumen $v = \omega V$ getheilt. Die theilweise der Dissociation unterworfenen Gasmasse, welche sich in diesem Gefässe befindet, denken wir uns durch Vermittlung einer unendlich dünnen Scheidewand mit einer noch weit grösseren Gasmasse von der Temperatur $T = \frac{3}{2h}$ im Wärmegleichgewichte. Wäre im ganzen Gefässe V die Kraftfunction für alle Atome constant, würde also keines der Atome irgend eine Wirkung erfahren, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Atom sich in irgend einem Volumelemente befindet, einfach der Grösse des betreffenden Volumelementes proportional.¹ Wären nur zwei Atome im Gefässe, so wollen wir mit (2) die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass beide in demselben Fach sind, mit (11), dass sie in verschiedenen Fächern sind. Es ist dann (2) = ω , (11) = $1 - \omega$. Wären drei Atome im selben Gefässe, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei im selben Fache sind (3) = ω^3 , die Wahrscheinlichkeit, dass zwei in demselben, das dritte in einem anderen Fache ist, hat den Werth (12) = (2) · (1 - ω) + 2 ω · (11) = $3\omega(1 - \omega)$ die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei in verschiedenen Fächern seien, ist (111) = (1 - ω)(1 - 2 ω). Dieselben Bezeichnungen wollen wir auch auf den Fall anwenden, dass beliebig viel Atome vorhanden sind. Da die Wahrscheinlichkeit ($a_1 a_2 a_3 \dots a_n$) dann jedenfalls den Factor $\omega^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} (1 - \omega)(1 - 2\omega) \dots (1 - n\omega + \omega)$ hat, so handelt es sich nur mehr um den Coefficienten dieses Ausdruckes. In der folgenden kleinen Tabelle sind oben immer die Wahr-

¹ Vergl. meine weiteren Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen.

scheinlichkeiten, unten die zugehörigen Coëfficienten zusammengestellt:

$$\begin{array}{c}
 (4) \begin{array}{|c|} \hline (13) \\ \hline 1 \quad 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (22) \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (112) \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (1111) \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \left\| \begin{array}{|c|} \hline (5) \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (14) \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (23) \\ \hline 10 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (113) \\ \hline 10 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (122) \\ \hline 15 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (1112) \\ \hline 10 \\ \hline \end{array} \right. \\
 (11111) \\
 1 \left\| \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 (6) \begin{array}{|c|} \hline (15) \\ \hline 1 \quad 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (24) \\ \hline 15 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (33) \\ \hline 10 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (114) \\ \hline 15 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (123) \\ \hline 60 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (222) \\ \hline 15 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (1113) \\ \hline 20 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (1122) \\ \hline 45 \\ \hline \end{array} \left. \right. \\
 (11112) \quad (111111) \\
 15 \quad 1 \left. \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 (7) \begin{array}{|c|} \hline (16) \\ \hline 1 \quad 7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (25) \\ \hline 21 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (34) \\ \hline 35 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (115) \\ \hline 21 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (124) \\ \hline 105 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (133) \\ \hline 70 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (223) \\ \hline 105 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline (1114) \\ \hline 35 \\ \hline \end{array} \left. \right. \\
 (1123) \quad (1222) \quad (11113) \quad (11122) \quad (111112) \quad (1111111) \\
 210 \quad 105 \quad 35 \quad 105 \quad 21 \quad 1 \left. \right.
 \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit $\frac{(111\dots 222\dots)}{N_1 \text{ mal } N_2 \text{ mal}}$ soll mit $f(N_1, N_2)$ der dazu gehörige Coëfficient mit $c(N_1, N_2)$ bezeichnet werden, so dass

$$f(N_1, N_2) = c(N_1, N_2) \cdot \omega^{N_2} (1-\omega)(1-2\omega)(1-3\omega) \dots (1-N_1\omega - N_2\omega + \omega).$$

Dann ist gemäss des Bildungsgesetzes der Coëfficienten

$$c(N_1, N_2) = c(N_1 - 1, N_2) + (N_1 + 1)c(N_1 + 1, N_2 - 1)$$

woraus leicht folgt

$$c(N_1, N_2) = \frac{(N_1 + 2N_2)!}{2^{N_2} N_1! N_2!}$$

daher

$$f(N_1, N_2) = \frac{(N_1 + 2N_2)!}{2^{N_2} N_1! N_2!} \omega^{N_2} (1-\omega)(1-2\omega) \dots (1-N_1\omega - N_2\omega + \omega). \quad 28a)$$

Für den Fall, dass zwei Atome eines Moleküls gar keine Kräfte aufeinander ausüben würden und dass man sie dann als chemisch verbunden betrachten würde, wenn sie beide innerhalb eines Volumen $v = \omega V$ lägen, dagegen nicht als chemisch verbunden, wenn sie weiter entfernt wären, wäre diess zugleich die

Wahrscheinlichkeit, dass N_2 Atome zu zweien chemisch verbunden, N_1 Atome aber einzeln im Gefässe V vorhanden sind. Wir haben noch den chemischen Kräfte Rechnung zu tragen, was in folgender Weise geschieht. Wir denken uns den Schwerpunkt eines Atoms gegeben und den ganzen Raum v , in welchem dann ein zweites Atom liegen muss, damit es mit dem ersten chemisch verbunden sei, in sehr viele Theile getheilt; im Theile v_k sei χ_k der Werth der Kraftfunction, welche den zwischen den Atomen wirksamen chemischen Kräften entspricht. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Atom im Raume v_k liegt gleich $v_k e^{-\chi_k}$ statt v_k zu setzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Atom überhaupt mit dem ersten verbunden ist, also im Raume v liegt, ist also gleich

$$\sum v_k e^{-\chi_k} = 4\pi \int_0^\infty e^{-\chi \rho^2} d\rho$$

statt v zu setzen.

Mit Rücksicht auf die chemischen Kräfte ist also in Formel 28^a)

$$\left[\frac{4\pi}{V} \int_0^\infty e^{-\chi \rho^2} d\rho \right]^{N_2} \quad 28^b)$$

für ω^{N_2} zu setzen. Die chemischen Kräfte sollen zugleich so beschaffen sein, dass ein gleichzeitiges Vorhandensein dreier Atome im Raume v vollkommen ausgeschlossen ist. Dann ist also die Wahrscheinlichkeit, dass N_2 Atome chemisch verbunden, N_1 einzeln seien gleich

$$W = \frac{(N_1 + 2N_2)!}{2^{N_2} N_1! N_2!} (1-\omega)(1-2\omega) \dots (1-N_1\omega - N_2\omega + \omega) \cdot \left[\frac{4\pi}{V} \int_0^\infty e^{-\chi \rho^2} d\rho \right]^{N_2} \quad 29)$$

Wir setzen nun

$$(1-\omega)(1-2\omega) \dots (1-N_1\omega - N_2\omega + \omega) = \omega^{N_1+N_2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \cdot \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) \left(\frac{1}{\omega} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 + 1 \right) &= \\ &= \omega^{N_1+N_2} \frac{\left(\frac{1}{\omega} \right)!}{\left(\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 \right)!} \end{aligned}$$

ferner benutzen wir die Annäherungsformel

$$x! = \sqrt{2\pi x} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

und erhalten:

$$W = \frac{(N_1 + 2N_2)! \omega^{N_1 + N_2} e^{\frac{1}{\omega}} \frac{1}{\omega!} \left[\frac{4\pi}{V} \int_0^\infty e^{-k\lambda \rho^2} d\rho \right]^{N_2}}{2^{N_2} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\omega} N_1^{N_1 + \frac{1}{2}} N_2^{N_2 + \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 \right)^{\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 + \frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(N_1 + 2N_2)! \left[\frac{4\pi}{V} \int_0^\infty e^{-k\lambda \rho^2} d\rho \right]^{N_2}}{2^{N_2} N_1^{N_1 + \frac{1}{2}} \cdot N_2^{N_2 + \frac{1}{2}} [1 - \omega(N_1 + N_2)]^{\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 + \frac{1}{2}}}$$

$\omega(N_1 + N_2)$ verhält sich zu eins, wie der von den Molekülen erfüllte Raum zum ganzen Gefässvolum; ist also klein gegen eins; daher

$$[1 - \omega(N_1 + N_2)]^{\frac{1}{\omega}} = e^{-(N_1 + N_2)}$$

$$[1 - \omega(N_1 + N_2)]^{\frac{1}{\omega} - N_1 - N_2 + \frac{1}{2}} = (e^{-N_1 - N_2})^{1 - \omega N_1 - \omega N_2 + \frac{\omega}{2}}$$

Es ist also

$$-lW = -l(N_1 + 2N_2)! - N_2 l \frac{2\pi}{V} \int_0^\infty e^{-k\lambda \rho^2} d\rho + \left(N_1 + \frac{1}{2}\right) l N_2 + \left(N_2 + \frac{1}{2}\right) l N_2 - N_1 - N_2 + (N_1 + N_2)^2 \omega.$$

Sucht man das Minimum von W , also δW , so liefert

$$\delta \left(\frac{1}{2} l N_1 \right) = \frac{1}{2N_1} \delta N_1, \quad \delta \left(\frac{1}{2} l N_2 \right) = \frac{1}{2N_2} \delta N_2, \quad \delta [(N_1 + N_2)^2 \omega] = (N_1 + N_2) \omega (\delta N_1 + \delta N_2)$$

alle diese Glieder liefern daher verschwindendes und man kann setzen

$$-lW = -l(N_1 + 2N_2)! - N_2 l \frac{2\pi}{V} \int_0^\infty e^{-k\lambda \rho^2} d\rho + N_1 (lN_1 - 1) + N_2 (lN_2 - 1). \quad 30)$$

Das erste Glied rechts ist übrigens constant.

Das Minimum dieses Ausdruckes ist in anderer Weise zu verstehen, als das der Ausdrücke 20), 24) und 26). Da nämlich jetzt das Gas immer mit einer weit grösseren Gasmasse von constanter Temperatur $T = \frac{3}{2h}$ in Verbindung ist, so ist h constant und bloss N_1 und N_2 variabel und der Bedingung $N_1 + 2N_2 = A$ unterworfen. Es wird also

$$\delta(-lW) = [lN_2 - 2lN_1 - l \frac{2\pi}{V} \int_0^\infty e^{-h\lambda \rho^2} d\rho] \delta N_2.$$

Das Verschwinden dieses Ausdruckes führt genau wieder auf die Bedingungsgleichung 25).

Um diese Formeln an einem praktischen Beispiele zu prüfen, wollen wir sie auf die Dissociation der Untersalpetersäure N_2O_4 in $NO_2 + NO_2$ anwenden; dann ist $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 2$, $b_2 = 4$, daher liefert die Gleichung (28)

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 0, \quad P_2 = 2P_1 \\ & l(2! 4!) + lN_2 - l \int \int e^{-h\lambda_2} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_6 = \\ & 2l1! 2! + 2lN_1 - lV - 2l \int \int \dots e^{-h\lambda_1} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_3, \\ & \frac{N_1^2}{N_2} = V \frac{12 \left(\int \dots e^{-h\lambda_1} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_3 \right)^2}{\int \int e^{-h\lambda_2} d\xi_2 d\eta_2 \dots d\zeta_6}. \end{aligned} \quad 30a)$$

Diese Formel stimmt in ihrer Form vollkommen überein mit der Formel (25); nur dass der nur von der Temperatur abhängige Factor von V auf der rechten Seite eine etwas andere Form hat. Es ist übrigens höchst wahrscheinlich, dass bei der Dissociation der Untersalpetersäure die Stickstoff- und Sauerstoffatome sich nicht willkürlich untereinander vermischen, sondern dass die Gruppe NO_2 (wir wollen sie ein Untersalpetersäureatom nennen) immer gerade wie ein wirkliches Atom vereint bleibt und sich immer wechselseitig von einer gleichen Gruppe trennt und wieder mit einer gleichen Gruppe zu einem Untersalpetersäuremolekül (N_2O_4) vereinigt.

In diesem Falle spielt ein Untersalpetersäureatom genau dieselbe Rolle wie das Atom eines Grundstoffs und wir können

die Formel (25) vollkommen unverändert beibehalten. $\chi(\rho)$ ist eine negative Grösse und stellt mit negativen Zeichen genommen die Arbeit dar, welche erforderlich ist, um die Schwerpunkte zweier Untersalpetersäureatome aus der Entfernung ρ in unendliche Entfernung zu bringen. Wir wollen unter A immer die auf die Gewichtseinheit entfallende Anzahl von Untersalpetersäureatomen verstehen.

Setzen wir dann:

$$\frac{1}{\sigma} = 8\pi \int_0^{\infty} e^{-\chi \rho^2} \rho^2 d\rho \quad (31)$$

so ist

$$\frac{N_1^2}{N_2} = 4\sigma v \quad (32)$$

$$N_1 + 2N_2 = A \quad (33)$$

v ist dabei das Volumen der Gewichtseinheit der im Dissociationsgleichgewichte befindlichen Untersalpetersäure bei der Temperatur T und dem Drucke p . Aus den Gleichungen 32 und 33 folgt zunächst:

$$N_1^2 = 2\sigma v(A - N_1) \quad (34)$$

$$N_1 = -\sigma v + \sqrt{\sigma^2 v^2 + 2\sigma v A} \quad (35)$$

$$N_2 = \frac{A}{2} + \frac{\sigma v}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 v^2 + 2\sigma v A}$$

nun ist bekanntlich

$$pv = \frac{2}{3} (N_1 + N_2) T \quad (36)$$

Hier ist T die mittlere lebendige Kraft der progressiven Bewegung eines Moleküls; da dieselbe nicht direct der Beobachtung zugänglich ist, so wollen wir $T = 3\varepsilon \frac{t}{2}$ setzen, wobei t die vom absoluten Nullpunkte an gezählte nach Celsiusgraden gemessene Temperatur ist. Die Gleichung (36) geht dann über in:

$$pv = (N_1 + N_2) \varepsilon t \quad (37)$$

Die Gleichung (37) gilt übrigens mit einem und demselben Werthe der Constanten ε für jedes beliebige Gas, sobald p der Druck, v das Volumen der Gewichtseinheit und $N_1 + N_2$ die Anzahl

der Moleküle desselben in der Gewichtseinheit bedeuten. Nach unserer Annahme sind beim Drucke p und der Temperatur t in der Gewichtseinheit N_2 undissocirte Untersalpetersäuremoleküle vorhanden, während $\frac{N_1}{2}$ Moleküle sich in zwei Untersalpetersäure gespalten haben, so dass also im Ganzen N_1 Untersalpetersäureatome in der Gewichtseinheit enthalten sind. Bezeichnen wir daher mit q den Quotienten der gesammten vor der Dissociation vorhandenen Anzahl $\frac{A}{2}$ der Untersalpetersäuremoleküle in die Anzahl $\frac{N_1}{2}$ der jetzt zersetzten Moleküle, so ist

$$q = \frac{N_1}{A}$$

daher nach Gleichung 34)

$$q^2 = \frac{2\gamma v}{A} (1-q) \quad 38)$$

oder nach Gleichung 37), welche sich in die Form

$$\frac{2v}{A} = \frac{\epsilon t}{p} \left(1 + \frac{N_1}{A}\right) \quad 39)$$

schreiben lässt

$$q^2 = \frac{\epsilon \sigma t}{p} (1-q^2). \quad 40)$$

Da σ bloss Function der Temperatur sein kann, so gibt die Gleichung (40) ohne weiters das Gesetz, nach welchem die Grösse q vom Druck abhängt. Um auch deren Abhängigkeit von der Temperatur zu bestimmen, muss noch eine Hypothese zu Hilfe gezogen werden, welche nicht in voller Strenge richtig ist. Bevor ich hiezu übergehe, will ich prüfen, was aus dem zweiten Hauptsatze allein für das Dissociationsproblem für Schlüsse gezogen werden können. Sei dQ das auf umkehrbarem Wege der in Dissociationsgleichgewicht befindlichen Gewichtseinheit Untersalpetersäure zugeführte Wärmedifferential, so können wir setzen:

$$dQ = (N_1 \alpha + N_2 \beta) dt - I \gamma dN_2 + I p dv. \quad 41)$$

Dabei ist γ der zur Dissociation eines Untersalpetersäuremoleküls nothwendige Arbeitsaufwand, I das thermische Arbeits-

äquivalent, α, β, γ können nur Functionen der Temperatur sein. In der Gleichung (41) ist der erste Hauptsatz bereits enthalten derselbe kann also nichts Neues lehren. Dagegen liefert der zweite Hauptsatz allerdings eine Relation zwischen den hier vorkommenden Grössen. Wenden wir ihn in der Formel

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right)_t = It \left(\frac{dp}{dt}\right)_v \quad (42)$$

an, so erhalten wir aus der Gleichung (41)

$$\left(\frac{dQ}{dv}\right)_t = Ip - I\gamma \left(\frac{dN_2}{dv}\right)_t$$

ferner liefert wegen $dN_1 = -2dN_2$ der Gleichung 37)

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_v = \frac{(N_1 + N_2)\epsilon}{v} - \frac{\epsilon t}{v} \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_v$$

Die Substitution dieser Werthe in Gleichung 42) aber liefert:

$$v \left(\frac{dN_2}{dv}\right)_t - \frac{\epsilon t^2}{\gamma} \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_r = 0$$

woraus folgt:

$$N_2 = f\left[ve \int \frac{\gamma dt}{\epsilon t^2}\right], \quad (44)$$

über die Natur der Function f kann jedoch aus dem zweiten Hauptsatze allein nichts gefolgert werden. Dass unsere Gleichungen, obwohl sie viel mehr aussagen als der zweite Hauptsatz, nicht mit letzteren im Widerspruche stehen, sieht man in folgender Weise; es ist:

$$\frac{1}{\sigma} = 8\pi \int_0^\infty e^{-h\chi \rho^2} d\rho \quad (45)$$

daher

$$\frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{d\sigma}{dh} = 8\pi \int_0^\infty \chi e^{-h\chi \rho^2} \rho^2 d\rho$$

und wegen $\frac{3}{2T} = h$.

$$-\frac{2T^2}{3\sigma^2} \frac{d\sigma}{dt} = 8\pi \int_0^\infty \chi e^{-h\chi \rho^2} \rho^2 d\rho$$

daher

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} = -\frac{3}{2T^2} \bar{\chi}. \quad (46)$$

Um zwei Untersalpetersäuren von einander zu trennen, muss deren Kraftfunction im Mittel von $\bar{\chi}$ auf den Werth 0 gebracht werden; es ist also $-\bar{\chi}$ die früher mit γ bezeichnete Grösse, daher

$$\frac{1}{\sigma} \frac{3\epsilon d\sigma}{2dT} = \frac{9\epsilon^2 \gamma}{4T^2} \cdot \frac{1}{\epsilon}$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\gamma}{\epsilon t^2}, \quad \sigma = e^{\int \frac{\gamma dt}{\epsilon t^2}} \quad (47)$$

und in der That fanden wir N_2 als eine Function von $v \times \sigma$.

Die letzten Betrachtungen führen auf eine einfache Annahme über die Abhängigkeit der Grösse v von der Temperatur. Es lehrt nämlich die Erfahrung, dass die Verbindungswärme zweier Stoffe nur unbedeutend mit der Temperatur, welche die Stoffe vor und nach geschehener Verbindung besitzen, variirt, dass also die Grösse $\gamma = -\bar{\chi}$ nahezu von der Temperatur unabhängig ist, woraus folgt:

$$\sigma = B e^{-\frac{\gamma}{\epsilon t}}. \quad (48)$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung 40) und setzt

$$\epsilon B = a, \quad \frac{\gamma}{\epsilon t} = b \quad (49)$$

so folgt:

$$\frac{q^2}{1-q^2} = \frac{at}{p} 10^{-\frac{t}{t}}$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{p}{at} 10^{\frac{t}{t}}}}. \quad (50)$$

Das Problem der Dissociation wurde meines Wissens auf theoretischem Wege zuerst von Gibbs gelöst. (Transact. of t. Connect. Acad. vol III, part I, american journal of science vol XVIII Jahr 1879), welcher nach einer gänzlich verschiedenen Methode eine Formel ableitete, die sich von der hier entwickelten nicht wesentlich unterscheidet. Je nachdem man annimmt, die auf die Gerwichteinheit bezogenen specifischen Wärmen seien

Functionen der Temperatur, oder constant, oder nebst dem sei noch ihr Werth für die Verbindung die Summe der Werthe für die Bestandtheile, erhält man meine allgemeine oder Gibbs's oder meine speciellste Formel. Später gelangte wieder auf anderem Wege van der Waals zu genau derselben Formel (Verslagen en Medelingen der k. Akad. v. Wetenschappen, 2. Reeks, 15. deel). Ein Theil des Problems, die Abhängigkeit der Zusammensetzung vom Drucke wurde schon lange vor allen angeführten Arbeiten von Guldberg und Waage gelöst (Etudes sur les affinités chimiques 1867, Kolbes Journal für praktische Chemie, Bd. 19, p. 69). Die Übereinstimmung des Resultates, auf welches meine Methode führt, mit den angeführten, scheint mir eine Bestätigung für die Richtigkeit meiner Methode zu sein.

Obwohl bereits Gibbs ausführliche Vergleichen mit der Erfahrung angestellt hat, glaubte ich doch der Abweichung im Werthe der Gibbs'schen Constanten B' wegen auch die Formel 50) mit den Beobachtungen von Deville und Troost¹ vergleichen zu sollen. Da bei diesen Beobachtungen der Druck p nahe constant war, so war $\frac{a}{p}$ ebenfalls constant und ich setzte es gleich 1970270:

$$\log \frac{a}{p} = 6.294525.$$

Der Constanten b ertheilte ich den Werth 3080. Ich bemerke, dass diese Werthe nur beiläufig durch Versuch gefunden wurden und eine kleine Correctur derselben die Übereinstimmung vielleicht noch erheblich grösser machen könnte. Da bei den Beobachtungen Devilles der Druck beiläufig 755.5 Mm. betrug, so folgt hieraus

$$\log a = 9.1727595.$$

In der folgenden Tabelle sind die nach meiner Formel berechneten Werthe von q mit den von Deville und Troost gefundenen zusammengestellt; man sieht, dass die Übereinstimmung eine vollkommen befriedigende ist, es scheint also in diesem Falle unsere Annahme berechtigt zu sein, dass innerhalb

¹ Compt. rend. 64, 237; Jahresber. für Chemie f. 1867, 177. Naumann Thermochemie pag. 117.

der hier vorkommenden Temperaturgrenzen die Dissociationswärme eines Untersalpetersäuremoleküles nahe constant ist.

Temperatur	100g beob.	100 g berechn.	Diff.
26·7°	19·96	18·10	-1·86
35·4	25·65	25·17	-0·48
39·8	29·23	29·40	+0·17
49·6	40·04	40·26	+0·22
60·2	52·84	53·47	+0·63
70·0	65·57	65·57	0·00
80·6	76·61	76·82	+0·21
90·0	84·83	84·41	-0·42
100·1	89·23	90·07	+0·84
111·3	92·67	94·41	+1·74
121·5	96·23	96·28	+0·05
135·0	98·69	97·96	-0·73

Ich habe ferner auf die Beobachtungen Alexander Neumann's¹ nach derselben Formel mit denselben Werthen der Constanten berechnet; da bei diesen Beobachtungen auch der Druck variabel ist, so konnte natürlich nur a , nicht aber $\frac{a}{p}$ als constant angenommen werden. Folgende Tabelle gibt das Resultat.

Temperatur	Druck	100g beob.	100g berechn.	Diff.
- 6°	125·5	5·6	10·1	4·5
- 5°	123	6·7	10·7	4·0
- 3	84	8·9	14·2	5·3
- 1	153	10·8	11·7	0·9
+ 1	138	11·9	13·6	1·7
+ 2·5	145	11·9	14·2	2·3
+ 4	172·5	11·6	14·6	3
+10·5	163	16·5	19·3	2·8
+11	190	15·2	18·3	3·1
+14·5	175	20·9	22·2	1·3
+16	228·5	20·0	20·8	0·8
+16·5	224	23·7	21·4	-2·3
+16·8	172	24·7	24·6	-0·1

¹ Ber. d. deutsch. chem. Ges. 1878, 2045 Jahresber. für Chemie f. 1878, 120. Dessen Thermochemie pag. 127.

Temperatur	Druck	100g beob.	100g berech.	Diff.
+17·5	172	26·2	25·3	—0·9
+18	279	17·3	20·6	3·3
+18·5	136	29·8	29·4	—0·4
+20	301	17·8	21·5	3·7
+20·8	153·5	29·3	30·4	1·1
+21·5	161	33·7	30·6	—3·1
+22·5	101	39·0	39·0	0
+22·5	136·5	35·3	34·1	—1·2

Die Übereinstimmung ist hier bedeutend schlechter, doch ist es auffallend, dass einige Zahlen sehr gut, andere, bei denen weder Druck noch Temperatur bedeutend verschieden war, wieder sehr schlecht stimmen. Es scheint mir daher vorläufig noch nicht ausgemacht, ob meine Formel für niedrige Temperaturen, wie sie grösstentheils bei Naumann vorkommen, unrichtig wird. Neue Beobachtungen, namentlich solche, bei denen die Temperatur möglichst constant und nur der Druck veränderlich wäre, wären jedenfalls sehr erwünscht.¹ Ich will hier noch einige Bemerkungen über die physikalische Bedeutung der Constanten a und b folgen lassen. Zunächst ist:

$$b = \frac{\gamma}{sl10} = \frac{\frac{A\gamma}{2}}{\frac{sl10}{2}}$$

hiebei ist: $\frac{A\gamma}{2}$ die zur Dissociation eines Kilo Untersalpetersäure erforderliche Wärme. Bezeichnen wir dieselbe mit $\frac{y \text{ Cal.}}{1 \text{ Kil.}}$, so ist also wegen

$$I = \frac{1 \text{ Cal.}}{430 \text{ Kilo Met.}}; \frac{A\gamma}{2} = y \cdot 430 \text{ Met.} \quad (49)$$

Bezeichnet ferner $v = \frac{1}{d}$ das Volumen, welches nach Avogadro's Gesetz ein Kilo undissocirten Untersalpetersäuregases

¹ Ich bemerke diesbezüglich noch, dass Naumann selbst (Thermochemie pag. 127) bemerkt, dass er die Dichte des N_2O_4 Dampfes wahrscheinlich zu gross fand, was die grösseren wenig, die kleineren stark herabdrücken musste, also qualitativ jedenfalls die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung erklärt.

bei 274° C. und dem Normalbarometerstande einnehmen würde, so ist nach Gleichung 37)

$$\frac{A}{2} \varepsilon = \frac{pv}{274^\circ} = \frac{10334 \text{ Kilo}}{(\text{Met})^2 274^\circ d} = \frac{10334 \text{ met}}{1.293.274^\circ} \frac{28.94}{M} \quad 50)$$

wegen

$$d = \frac{1.293 \text{ Kilo}}{\text{Met}^3} \frac{M}{28.94}$$

wobei M das Molekulargewicht der undissocirten Untersalpetersäure bezogen auf $H_2 = 2$ also gleich 92 ist.

Wir finden also:

$$b = \frac{430.1.293.274^\circ y}{10334/10} \cdot \frac{M}{28.94} \quad 51)$$

Die Beobachtung ergab $b = 3080$; es würde also folgen

$$y = 151.3 \quad 52)$$

Auch der Constanten a würde eine physikalische Bedeutung zukommen; obwohl dieselbe gegenwärtig wegen unserer Unbekanntschaft mit dem Wirkungsgesetze der Moleküle noch ziemlich zweifelhaft ist, so will ich doch einige vorläufige Bemerkungen schon jetzt darüber machen. Das Integrale der Formel 45) setzt voraus, dass ein Untersalpetersäureatom nach allen Richtungen gleich beschaffen ist. Diese Annahme, schon bei chemischen Elementen unwahrscheinlich, ist im vorliegenden Falle ganz sicher falsch. Wir müssen also jedenfalls auf die Formel 30 a) zurückgreifen und setzen:

$$\frac{N_1^2}{N_2} = 4\sigma v \quad \sigma = \frac{3 \left(\iint \dots e^{-h\zeta_1} d\zeta_2 d\eta_2 \dots d\zeta_3 \right)^2}{\iint e^{-h\zeta_1} d\zeta_2 d\eta_2 \dots d\zeta_3} \quad 53)$$

wobei freilich der numerische Coëfficient ein anderer würde, wenn man keine unbedingte Umsetzbarkeit der Stickstoff- und Sauerstoffatome in den Untersalpetersäuremolekülen annimmt; ich will jedoch gegenwärtig hierauf nicht eingehen, da ja die folgenden Schlüsse ohnedies nur auf qualitative, nicht aber quantitative Resultate abzielen. Bezeichnen wir den Werth des sechsfachen Integrales, welches im Zähler der Formel 53) in der Klammer steht, erstreckt über alle Lagen des Atoms, für welche eine mit dem Atome fix verbundene Gerade eine im Raume fixe Kugel vom Radius 1 innerhalb eines sehr kleinen Flächenelements $d\mathcal{E}$

durchschneidet, mit $id\mathcal{S}$, also den ganzen Werth dieses Integrales mit $4\pi i$, so wird die Bedingung, dass $\bar{\chi}$ constant ist, am einfachsten in folgender Weise realisirt. Wir denken uns das erste Atom eines Untersalpetersäuremoleküls vollkommen fix und undrehbar und nehmen folgendes an; wenn der Schwerpunkt des zweiten Atoms in einem bestimmten Raume ω liegt und eine mit dem zweiten Atome fix verbundene Gerade eine im Raume fixe Kugel vom Radius 1 in einem beliebigen Punkte eines Flächenstückes vom Flächenraume \mathcal{S} durchsetzt, so soll χ einen nahen constanten sehr grossen negativen Werth χ besitzen. Bei dieser relativen Lage sollen also die beiden Atome chemisch verbunden sein. Für alle anderen Lagen sei χ nahe gleich 0 oder positiv. Dann wird das Integrale im Nenner der Formel 53) für das eine Atom den Werth $4\pi i$, für das andere aber den Werth

$$ie^{-h\bar{\chi}} \iiint dx_3 dy_3 dz_3 d\mathcal{S} = \mathcal{S}\omega ie^{-h\bar{\chi}},$$

haben, wobei x_3, y_3, z_3 die Coordinaten des Schwerpunktes des zweiten Untersalpetersäureatoms sind, $d\mathcal{S}$ ist das Flächenelement, in welchem die mit dem Atome fix verbundene Gerade die Oberfläche der erwähnten Kugel trifft, und ich bemerke noch, dass selbstverständlich die Gerade durch das Centrum der Kugel gehen muss. Es besitzt daher das 15-fache Integral im Nenner der Formel 53) den Werth $4\pi\mathcal{S}\omega i^2 e^{-h\bar{\chi}}$, woraus folgt

$$\sigma = \frac{12\pi}{\mathcal{S}\omega} e^{-\frac{\gamma}{\omega}};$$

aus Gleichung 48) folgt

$$B = \frac{12\pi}{\mathcal{S}\omega}$$

und daher aus Gleichung 49)

$$a = \frac{12\pi\epsilon}{\mathcal{S}\omega}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\frac{A}{2}$, so erhält ersterer nach Gleichung 50) den Werth

$$\frac{12\pi 10334 Met}{1 \cdot 293 \cdot 274^\circ} \cdot \frac{28 \cdot 94}{M}$$

der Nenner verwandelt sich in $\frac{A\omega}{2} \cdot \mathcal{S}$.

Wir wollen nun folgenden Begriff einführen: Wir denken uns ein Kilo undissocirter Untersalpetersäure. In einem Moleküle denken wir uns ein Atom festgehalten; den gesammten Raum, worin sich dann der Schwerpunkt des anderen Atoms befinden kann, ohne dass die Verbindung gelöst wird, bezeichnen wir mit ω , diese Grösse denken wir uns für alle in dem Kilo enthaltenen Moleküle gebildet und bezeichnen die Summe aller dieser ω mit $\Omega \frac{Met^3}{Kilo}$. Ferner bezeichnen wir mit $\frac{\mathcal{S}}{4\pi}$ das Verhältniss aller Richtungen, welche bei festgehaltenem ersten Atome das zweite Atom in der chemischen Verbindung N_2O_4 haben kann zu allen möglichen Richtungen im Raume überhaupt. Dann ist:

$$\frac{A}{2} \omega \mathcal{S} = 4\pi \Omega \frac{\mathcal{S}}{4\pi} \frac{Met^3}{Kilo}$$

und man erhält also

$$a = \frac{3.10334 \text{ Kilo}}{1.293.274^\circ Met^2} \frac{28.94}{M \Omega \frac{\mathcal{S}}{4\pi}}$$

oder wenn wir den Druck in Mm. Quecksilber messen

$$a = \frac{3.760 \text{ Mm.} \cdot 28.94}{1.293.274^\circ M \Omega \frac{\mathcal{S}}{4\pi}}$$

Nun zeigte die Erfahrung

$$\frac{a}{760 \text{ Mm.}} = 1970270.$$

Wir finden also für die Untersalpetersäure etwa

$$\frac{\Omega \cdot \mathcal{S}}{4\pi} = \frac{1}{700,000.000}$$

Bedenken wir, dass das ganze Volumen eines Kilogramms flüssiger Untersalpetersäure beim Normalbarometerstand und bei $0^\circ C$. in Kubikmetern ungefähr den Werth 0.0007 besitzt, so sehen wir, dass wir diesen Zahlen gerecht werden, wenn wir etwa folgendes annehmen: Bei fixem ersten Atome soll der Raum, in dem sich der Schwerpunkt des zweiten Atoms bewegen darf, ohne dass die chemische Verbindung gelöst wird, nur ein Tausendstel von dem Volumen betragen, welches in flüssiger Untersalpetersäure

beim Normalbarometer und 0° , einem Moleküle zukommt. Zudem soll bei festgehaltenem ersten Atome die Drehung des zweiten derart beschränkt sein, dass die möglichen Richtungen, nach denen es sich drehen kann ohne dass die chemische Verbindung gelöst wird, sich zu allen möglichen Richtungen im Raume überhaupt verhalten, wie 1:500.

ANHANG.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1883.)

Der nach der obigen Formel gefundene Werth von y stimmt sehr gut mit dem von Berthelot und Ogier aus seinen Versuchen über die Wärmecapacität der Untersalpetersäure berechnet. Dieselben finden nämlich, dass bei Erwärmung von 46 Grm. Untersalpetersäuredampf von 27 bis 150° C. 5300 Grammcalthorien auf Dissociation der Dampfmoleküle verwendet werden. Bedenkt man, dass bei 27° C. bereits etwa 20% des Gases dissociirt sind, so folgt hieraus, dass zur völligen Dissociation von 46 Grm. undissociirter Moleküle 6625 Grammcalthorien nothwendig sind, so dass zur Dissociation von 1 Grm. etwa 144 Grm. nothwendig sind, weche Grösse mit der von mir mit y bezeichneten identisch ist und auch dem Zahlenwerth auch vollkommen befriedigend damit übereinstimmt, umsomehr, wenn man bedenkt, dass die Zahl von Berthelot und Ogier auch nicht direct aus Versuchen abgeleitet, sondern unter mehr oder weniger nur angenähert richtigen Hypothesen berechnet ist.

Ich habe die oben entwickelte Formel auch auf die Beobachtungen von Fr. Meier und J. M. Crafts¹ über die Dissociation des Joddampfes angewendet. Setzt man $\frac{a}{p} = 2.617$, $b = 6300$ $\log\left(\frac{a}{p}\right) = 0.43$, $\log b = 3.8$, wobei p den mittleren Druck vor-

¹ Ber. d. deutsch. chem. Ges. 1880, 851 bis 873.

stellt, bei welchem die Beobachtungen von Meier und Crafts vorgenommen wurden, so erhält man das in der folgenden Tabelle zusammengestellte Resultat:

Temperatur	100g beob.	100g berech.	Diff.
448°	0·23	0·19	—0·04
680°	6·4	2·5	—3·9
764°	5·8	4·87	—0·93
855°	8·6	8·9	+0·3
940°	14·5	14·45	—0·05
1043°	25·0	23·48	—1·52
1275°	50·5	51·31	+1·26
1390°	66·2	65·04	—1·16
1468°	73·1	72·92	—0·18

Die Übereinstimmung dürfte auch hier als eine vollkommen befriedigende bezeichnet werden können, so dass der Versuch nicht als unberechtigt erscheint, aus dem für b gefundenen Werthe die Dissociationswärme des Joddampfes zu berechnen. Die numerische Ausrechnung der oben für y gefundenen Formel liefert

$$y = 4 \cdot 52077 \times \frac{b}{M},$$

wobei $\log 4 \cdot 52077 = 0 \cdot 6552129$ ist. M ist das Molekulargewicht der undissociirten Substanz, bezogen auf das Wasserstoffmolekül $H_2 = 2$. Unterlässt man die Division durch M , so erhält man direct die zur Dissociation eines Moleküls nothwendige Wärme. Für Jod fanden wir $b = 6300$, $M = 253 \cdot 6$. Es ergibt sich also $y = 112 \cdot 5$ zur Dissociation eines Gramms Joddampf in einzelne Moleküle, sind also $112 \cdot 5$ Grammc calorien erforderlich. Zur Dissociation eines Moleküls, d. h. $253 \cdot 6$ Grm. wären also 28530 Grammc calorien erforderlich. Dagegen ist zur Berechnung von Ω für Joddampf die Formel 25) anzuwenden. Dieselbe liefert Ω oder, wenn man will, $\frac{\Omega S}{4\pi}$ etwa gleich $\frac{1}{16000}$, also jedenfalls der Grössenordnung nach gleich dem 5. Theile des Volumens eines Kilogramms festen Jods in Kubikmetern.

Über die Gravitation.

Von A. Jarolimék.

S. Tolver Preston hat eine dynamische Erklärung der Gravitation versucht,¹ welche sich auf die Grundidee von Le Sage stützt, nämlich auf die Vorstellung, dass die Tendenz zweier Massen, die sich gegen einander zu bewegen, von dem gegenseitigen Schutze herrührt, welchen jede Masse der gegenüberliegenden vor dem Hagelschauer der durcheinander schwirrenden Atomströme bietet.

Indem Tolver Preston mit Anderen annimmt, dass der Welt-raum von einem sehr dünnen Gase, d. h. von kleinen, elastischen, durcheinander fliegenden und von einander abprallenden Atomen erfüllt sei, fügt er diesbezüglich noch die Voraussetzung hinzu, dass bei einer kleinen, mittleren Entfernung dieser Ätheratome ihr mittlerer Durchmesser noch im Verhältniss sehr klein ist, beziehentlich „dass die mittlere Weglänge der Atome sehr gross und jedenfalls grösser als die Planetenentfernungen ist.“

„Dann folgen“ — sagt Tolver Preston — „die sämtlichen Gravitationsgesetze ohne weiters aus diesen einfachen oder schon im voraus wahrscheinlichen Prämissen.“

Dieses „ohne weiters“ ist mit Rücksicht auf die aus der letzten der vorerwähnten Annahmen hervorgehende Eigentümlichkeit des Schweräthers nicht ganz am Platze, und ich werde zeigen, dass die Tolver Preston'sche Deduction des Gravitationsgesetzes auf Grund der angeführten Prämissen nicht aufrecht zu erhalten ist.

¹ Sitzungsber. der k. Akademie der Wissenschaften, Bd. LXXXVII, II. Abth. Aprilheft 1883.

Auch ich habe mich im Jahre 1874 mit Tolver Preston (ohne von ihm zu wissen) auf dem nämlichen Wege befunden, und versuchte die Gravitation durch den vollkommen gleichen Gedankengang und von den genau gleichen Voraussetzungen ausgehend zu erklären. Ich habe meine Prämissen aufgestellt, ohne die bezüglichen Arbeiten von Le Sage, Thomson, Maxwell, Schramm oder Anderer zu kennen und ich möchte noch besonders bemerken, dass meine Schrift von 1874, deren Inhalt ich zwar nicht veröffentlichte, jedoch mehreren Physikern mittheilte, bei Anführung der Prämissen der Untersuchung ausdrücklich auch die Bedingung aufzählt, dass die mittlere Weglänge des Äthers ein sehr grosses Mass sei, ja in der Grösse von tausend Millionen Meilen oder noch grösser gedacht werden müsse. Ich fügte auch am Schlusse meiner Schrift die Bemerkung bei: dass meine Theorie der Anziehung der Weltkörper eine bestimmte Grenze setzt, welche von der Weglänge des den Weltraum erfüllenden Gases abhängt.

Dieser wichtige Gedanke, nämlich das Postulat sehr grosser Weglängen beim Schweräther, wurde nun, wie es scheint, zu allererst von Tolver Preston öffentlich ausgesprochen,¹ ohne dass aber bisher die richtigen Consequenzen desselben gezogen worden wären.

Tolver Preston setzt gleich mir voraus, „dass bei einer kleinen mittleren Entfernung der Atome ihr mittlerer Durchmesser noch weit kleiner, und dass a priori jede Weglänge gleich wahrscheinlich sei.“ „Denn“ — sagt Tolver Preston — „wie bedeutend auch die Weglänge wäre, kann man sich immer durch eine genügende Verkleinerung des Durchmessers der Atome noch eine grössere vorstellen.“

Mit dieser Bemerkung Tolver Preston's befinde ich mich auch heute noch in vollster Übereinstimmung, doch gehen wir von

¹Eine ähnliche Annahme wurde wohl schon von Crookes in Bezug auf die „strahlende Materie“ gemacht. Auf eine Bemerkung über das Gravitationsphänomen schrieb mir Crookes am 15. Februar 1876: „I am now working on the subject of gravitation in connection with the mechanical action of radiant heat. I have at present no facts on which any theory could be based, but I have no doubt that careful experiments will enable me to get a little more insight into this mysterious subject.“

da an desshalb auseinander, weil ich seither erkannte, dass es überhaupt nicht angeht, beim Schweräther wie sonst bei Gasen mit den mittleren Weglängen zu rechnen, sondern dass bei den Ätheratomen die absoluten Weglängen mit ihren verschiedenen Massen in Rechnung zu stellen sind.

Die Berechtigung dieses Gedankens, der mir von grosser Wichtigkeit erscheint, wird schon durch die Betrachtung klar, dass bei gewöhnlichen Gasen erstlich die Moleküle als solche schon grösser als die Atome gedacht werden müssen, und dass besonders die Weglängen der Gase überhaupt äusserst kleine Masse darstellen, die im Vergleich zu den in Betrachtung gezogenen Räumen verschwindend klein sind, so dass es hierbei allerdings gerechtfertigt ist, bloss die mittleren Weglängen in Rechnung zu ziehen, wogegen beim Äther, wenn daselbst die mittlere Weglänge sogar die Planetenentfernungen überragen soll, die Frage nicht gleichgiltig sein kann, welche Wirkung die jedenfalls auch vorhandenen grösseren und kleineren Weglängen auf die gravitirenden Massen üben?

Treten wir dieser Frage näher. Die mittlere Weglänge eines Gases bestimmt sich durch die Relation

$$l = \frac{x}{8} d \quad \dots 1)$$

wobei d den Durchmesser des Gasmoleküls und x den Condensationscoefficienten des Gases bezeichnen.

Letzterer ist eine Function des Molekülvolumens und des molekularen Gasvolumens, so zwar, dass, wenn die Distanz der Gasmoleküle mit D bezeichnet wird,

$$x = F\left(\frac{D^3}{d^3}\right) \quad \dots 2)$$

gesetzt werden kann.

Aus 1) und 2) folgt dann

$$l = F\left(\frac{D^3}{d^2}\right) \quad \dots 3)$$

Ein Gas mit $D = 10$ und $d = 1$ hat also dieselbe mittlere Weglänge wie ein solches mit $D = 40$ und $d = 8$, da in beiden Fällen

$$\frac{D^3}{d^2} = \frac{100}{1} = \frac{6400}{64} = 100$$

ist.

Nun ist aber leicht einzusehen, dass die absoluten (nicht die mittleren) Weglängen eines und desselben Gases in ihren gegenseitigen Massen um so weniger abweichen werden, je kleiner das Verhältniss $\frac{D}{d}$ bei diesem Gase ist.

Denn ist d nahezu gleich D , so kann die Weglänge über das Mass ($D-d$) nicht weit hinaus, und wird also, da die kleinste Weglänge auch nicht viel unter ($D-d$) betragen kann, nur in geringem Grade schwanken, wogegen wenn $\frac{D}{d}$ gross ist, das eine Atom eine kurze Strecke, das andere hingegen eine lange Strecke zurücklegen wird, deren durchschnittliches Mass die mittlere Weglänge anzeigt.

Die Differenz zwischen den Maximal- und Minimalweglängen eines und desselben Gases kann also bemessen werden nach dem Werthe von $\frac{D}{d}$.

Die Gleichung 3) lässt sich umformen in

$$\left(\frac{D}{d}\right)^2 = F\left(\frac{l}{D}\right) \quad \dots 4)$$

und hiernach muss also das Verhältniss $\frac{D}{d}$ um so grösser gedacht werden, je grösser die mittlere Weglänge und je kleiner die Distanz der Ätheratome in Voraussetzung kommen.

Man sieht dann, dass bei dem vorausgesetzten enormen, die Planetenentfernungen übersteigenden Masse der mittleren Weglänge des Äthers und der überaus kleinen mittleren Entfernung der Atome, wie beides von Tolver Preston angenommen wird, der Werth von $\frac{D}{d}$ (wie es ja von Tolver Preston ebenfalls

geschieht) als äusserst gross gesetzt werden muss, was dann aber, meiner obigen Ausführung nach, zur Folge hat, dass die Weglängen der Äthermoleküle als zwischen äusserst geringen und äusserst grossen Massen schwankend gedacht werden müssen.

Hiebei ist noch besonders hervorzuheben, dass dieses Ergebniss auch dann noch aufrecht bleibt, wenn man die mittleren Weglängen des Äthers nicht so enorm gross, ja auch sehr klein annimmt; denn die Relation

$$\left(\frac{D}{d}\right)^2 = F\left(\frac{l}{D}\right)$$

lässt, ob nun l sehr gross oder sehr klein gedacht wird, immer ein äusserst grosses Verhältniss von $\frac{D}{d}$ zu, wenn nur stets D im Verhältnisse zu l (und natürlich ebenso d im Verhältnisse zu D) genügend klein angenommen wird.

Von diesem Standpunkte aus kann aber die Unterscheidung zwischen absoluten und mittleren Weglängen schon dadurch Bedeutung erlangen, weil sie die Identität des Schweräthers mit dem Lichtäther nicht ausschliesst, obgleich die mittlere Weglänge des letzteren bei 63000 Meilen transversaler Geschwindigkeit und nur 0,0007 Mm. Wellenlänge vielleicht nur Tausendmillionstel eines Millimeters messen mag. Denn es widerstreitet keineswegs der Vernunft, zu denken, dass die grössten Weglängen dieses selben Äthers Tausende von Millionen Meilen messen können!

Nun ist aber eine zweite Consequenz dieser meiner Unterscheidung die, dass sich dieselbe mit grosser Entschiedenheit gegen die Tolver Preston'sche Anschauung der Dinge kehrt, und zwar aus dem Grunde, weil, wenn der Schweräther mit sehr verschiedenen Weglängen in Voraussetzung kommt, und er kann, sobald seine grössten, oder gar seine mittleren Weglängen das Mass der Planetenentfernungen überschreiten, gar nicht anders in Voraussetzung kommen, die Prämissen der Rechnung gestört sind und die Tolver Preston'sche Theorie mit dem Newton'schen Gesetz nicht mehr in Einklang zu bringen ist.

Diese Theorie nimmt nämlich deshalb sehr grosse Weglängen des Äthers zur Voraussetzung, weil bei zwei in der Entfernung a von einander befindlichen Körpern nur jene Äthertheilchen auf die Gravitation hinwirken können, deren Weglängen das Mass a überschreiten.¹

Variiren also die Weglängen des Äthers in sehr weiten Grenzen, so ist es klar, dass die Weglängen von um so mehreren Äthertheilchen das Mass a überschreiten und sich also procentuell um so mehr Äthertheilchen in's Spiel mengen werden, je kleiner dieses Mass a ist, und dass also die Gravitation bei verminderter Entfernung zweier Körper schon deshalb, nämlich aus Ursache der vergrösserten Zahl der in der Raumeinheit zur Wirksamkeit gelangenden Ätheratome wachsen muss.

Ich werde später zeigen, dass diese Ursache schon den Betrag der Gravitation in das umgekehrte Verhältniss zum Quadrate der Entfernung der Massen setzt.

Tolver Preston führt nun eine andere Ursache an, aus der die Gravitation bei Verminderung der Entfernung, und zwar ebenfalls im Verhältnisse zum Quadrat der Entfernung erhöht wird, wobei ihm derselbe Gedanke, wie Le Sage (und auch mir seinerzeit) vorschwebte: dass, indem ein Molekül bestimmter Grösse irgend einem „Strahlungspunkte“ auf einem anderen Massentheilchen einen Strahlenkegel der auf diesen Punkt zuströmenden Atome abschneidet, der Scheitelwinkel dieses Kegels und damit auch die Anzahl der abgeschnittenen Ätheratome um so grösser wird, je mehr sich die Entfernung zwischen Molekül und Strahlungspunkt vermindert, und dass deshalb die Intensität der Gravitation in ganz analoger Weise wie jene des Lichtes durch die Entfernung beeinflusst werde.

¹ So wäre der Gedanke des gegenseitigen Schutzes der Massentheilchen bei einem dichten Gase mit sehr kleinen Weglängen ganz ohne Sinn; denn auf dem Wege von einem Körper zum anderen begegnet jedes Molekül eines solchen Gases unzähligen anderen, die dessen Richtung vielfältig ablenken und somit allerorten und auch zwischen den beiden gedachten Körpern sofort eine gleichmässige Mischung des Gases, d. h. eine gleichmässige Gaspressung herbeiführen, die jede Anziehung beider Körper aus Ursache des darauf wirkenden Gasdruckes ausschliesst.

Hier wären dann also zwei Ursachen vorhanden, welche die Gravitation in das umgekehrte Verhältniss zum Quadrate der Entfernung setzen, und wären beide richtig, so müsste die Gravitation mit der vierten Potenz der Entfernung der Massen in Beziehung stehen, was dem Gravitationsgesetze widerspricht.

Eine oder die andere obiger zwei Ursachen kann demnach nicht bestehen, und hat also Tolver Preston die erstere irrig übersehen, so muss auch sein Schluss irrig sein, dass die Gravitation von der Entfernung der Massen aus der gleichen Ursache wie das Licht, nämlich wegen Änderung des Scheitelwinkels des Strahlenkegels beeinflusst werde. Um hierüber entscheiden zu können, ist es unbedingt nöthig, die Constitution der Körpermoleküle in Betrachtung zu ziehen.

Tolver Preston sagt bei Besprechung der Thatsache, dass die Gravitation der Masse proportional ist, Folgendes:

„Dies hängt (wie Le Sage und Thomson schon gezeigt haben) von der fast vollkommenen Durchdringlichkeit der Moleküle der groben Materie ab, wobei die Moleküle im Innern der Körper mit fast derselben Leichtigkeit durch die durchschwirrenden Atome getroffen werden können, wie die äusseren Moleküle. Um dem Satz der Proportionalität des Antriebs mit der Masse zu genügen, hat man nur anzunehmen, dass das bei der Bildung der groben Moleküle aufgewendete Material sehr beschränkt, oder dass die Quantität von Material im Moleküle im Vergleich mit dem enthaltenen leeren Raume sehr klein ist.“ Hier wird also „die Masse“ wie auch von anderen Physikern als die „Quantität Materie“ definirt, welche in einem Körper enthalten ist. Diese Definition sagt aber, wie Wüllner mit Recht betont, zu viel, da wir mit dem Wesen der Materie viel zu unbekannt sind, als dass wir sie messen könnten, und streng genommen doch nur „Kupfer mit Kupfer, Blei mit Blei vergleichen und keine Beziehung aufstellen können zwischen der Materie des Kupfers und des Bleies.“

C. Isenkrahe, der in seinem Buche: „Das Räthsel von der Schwerkraft“ (Braunschweig 1879) alle bisherigen Lösungen des Gravitationsproblems einer eingehenden Kritik unterzieht und schliesslich selbst eine diesbezügliche Theorie aufstellt, gelangt bei Untersuchung des obigen Punktes zu folgendem Schlusse:

Die einfachste Lösung dieser Schwierigkeit scheint mir in der Annahme zu liegen, dass r überhaupt eine constante Grösse, d. h. dass die letzten Bestandtheile der Materie alle gleich gross, dass es vielleicht die Ätheratome selber seien, und dass die sogenannten „chemischen Elemente“ mit ihren verschiedenen Äquivalentgewichten nur als verschieden constituirte, aber aus einem und demselben Grundstoffe aufgebaute Gruppen betrachtet werden müssten.

Diese Hypothese ist nicht etwa eine ad hoc erfundene, nicht etwa ein Nothbehelf, der nur dazu dienen soll, das Resultat unserer Rechnung mit den Thatsachen der Experimentalphysik in Einklang zu bringen, sondern es ist eine alte, auf ganz anderen Gebieten entsprossene und vielfach gestützte Meinung, welche meines Wissens am ausführlichsten von dem Chemiker Dumas entwickelt worden ist.

Das in seinem wesentlichsten Inhalt schon von Prout formulirte diesbezügliche Gesetz müsste nach Dumas lauten: „Die Atomgewichte aller einfachen Körper sind Vielfache vom Atomgewichte eines noch unbekanntes Körpers, dessen Äquivalent 0,5 ist.“

In der That erscheint es sehr wahrscheinlich, dass die letzten Bestandtheile aller Materie, und dass auch die die Moleküle der chemischen Elemente zusammensetzenden Körperatome mit den Ätheratomen identisch seien und die Annahme dieser Identität ist um so eher gerechtfertigt, als dieselbe unseren Prämissen am allerwenigsten eine neue „qualitas occulta“ hinzufügt, vielmehr dieselben nur vollends vereinfacht.

Unter dieser Annahme erscheint aber die Theorie Tolver Prestons gewiss nicht mehr haltbar. Sind die Atome der Körpermoleküle und die Ätheratome von gleicher Grösse, so kann ein Körperatom dem anderen bei centraler Stellung jederzeit auch nur ein Ätheratom verdecken, mag die Entfernung der ersteren welche immer sein.

Das Molekül kommt hier als solches eben nur in Bezug auf die Wirkung der die Gravitation verursachenden Atomstösse in Betracht, indem, wenn auch die Ätheratome nicht auf die Moleküle als solche, sondern nur auf die die Moleküle constituirenden Atome stossen, die Wirkung dieser Stösse doch

auch gleichzeitig durch die Molekularkräfte beeinflusst und dadurch verhindert wird, dass sich die Körperatome gleich den Ätheratomen im Weltraume auflösen und der Gravitation entziehen.

Wenn wir auch heute eine Erklärung der Molekularkräfte vergeblich versuchen würden, so sehen wir uns doch genöthigt, mit denselben zu rechnen und anzunehmen, dass die Atome in den Molekülen irgendwie zusammengehalten werden.

Kommt aber der Einfluss der Entfernung zweier Massentheilchen auf die Gravitation in Betracht, so kann überhaupt nicht mehr ein Molekül dem andern gegenübergestellt werden.

Diese Moleküle sind ja doch vollkommen durchdringlich und setzen sich aus äusserst kleinen, räumlich verhältnissmässig weit getrennten Atomen zusammen, und da hier also schliesslich doch nur stets ein Atom dem andern gegenübersteht, zwischen denen die Ätheratome in ausserordentlich weit auseinander gertickten Bahnen (da $\frac{D}{d}$ als äusserst gross gedacht werden muss) hindurchschwirren, so kann offenbar ein Körperatom durch sein Vorhandensein einem andern Körperatom in einem und demselben Moment stets auch nur gegen den Anprall eines (gleichgrossen) Ätheratoms Schutz gewähren, und es spielt die Entfernung der Körperatome dabei (mindestens nahezu) gar keine Rolle.

Man muss sich die Zahl der gegen ein Massenatom a zustrebenden Ätheratome so gross vorstellen, dass jederzeit und an jedem Orte ein daselbst befindliches zweites Massenatom b einem nach a gerichteten Ätheratome den Weg verlegt, mag die Entfernung zwischen a und b welche immer sein; denn wenn auch die Ätheratome verhältnissmässig grosse Abstände von einander einhalten, so bewegen sich dieselben anderseits mit so enormen Geschwindigkeiten und in so rascher Aufeinanderfolge, dass man nicht umhin kann, stets in allen Punkten des Raumes nach a gerichtete Ätheratome vorauszusetzen.

Es bleibt dann also nur noch die eine Ursache für den Einfluss der Entfernung der Massen auf die Gravitation übrig, welche ich angegeben habe und es ist leicht nachzuweisen, dass dieselbe wirklich zur Übereinstimmung mit dem Gravitationsgesetze führt. Die Weglänge eines Gasmoleküls oder eines

Ätheratoms bemisst sich durch die Strecke, welche das Atom von einem anderen Atom, von dem es abprallt, bis zu einem dritten Atome, an das es anprallt, zurücklegt.

In dem Weltraume muss man sich die unendliche Zahl der herumschwirrenden Ätheratome in jedem Momente gleichförmig vertheilt denken, und muss sich vorstellen, dass von einem Punkte aus die abprallenden Atome nach allen Richtungen hin in geraden Bahnen wegfliegen.

Betrachtet man dann ein Kegelbündel, dessen Scheitel in diesem Ausgangspunkte steht, und dessen Querschnitt also im quadratischen Verhältnisse mit der Entfernung vom Scheitel steigt, und demnach bei steigender Entfernung auch im quadratischen Verhältnisse mehr von den gleichvertheilten Ätheratomen enthält, so muss man einsehen, dass die Wahrscheinlichkeit der abprallenden Atome (wovon eine bestimmte Zahl das betrachtete Kegelbündel vom Scheitel aus durchfliegt) ein anderes Atom im Weltraume zu treffen, im quadratischen Verhältnisse zu der Entfernung beider steigen muss.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass sich die Anzahl der geradlinig fortschreitenden Atome mit dem Wachsen der Entfernung im quadratischen Verhältnisse vermindert, oder mit anderen Worten: dass der Äther n^2 -mal so viel Atome mit den Weglängen r , als Atome mit den Weglängen nr enthält.

Nun habe ich schon ausgeführt, dass in Beziehung zweier Massen bestimmter Entfernung nur jene Ätheratome auf die Gravitation hinwirken können, deren Weglängen das Mass dieser Entfernung überschreiten, und da also die Zahl der zur Wirkung gelangenden Äthertheile im umgekehrten Verhältniss zum Quadrate der Entfernung der gravitirenden Massen steht, so ist in der Ungleichheit der Weglängen der Äthermoleküle die einfachste Erklärung für das Gravitationsgesetz gegeben.

Hiezu sei bemerkt, dass meine vorstehende Theorie, welche nicht mit den mittleren, sondern mit allen Weglängen des Äthers rechnet, der Anziehung der Weltkörper nicht wie es bei der Tolver Preston'schen Theorie der Fall ist, eine Entfernung im Ausmasse der mittleren Weglänge des

Äthers zur Grenze setzt, sondern die Wirkung der Gravitation bis zu dem Masse der grössten Weglängen des Äthers hinausreichen lässt.

Im Anschlusse hieran sei hier noch eines Versuches gedacht, den ich schon im Jahre 1874 (bei Untersuchung der Gravitation) zur Erklärung der Repulsionskraft gemacht habe.

In Beziehung auf diesen Punkt findet sich in Tolver Prestons Abhandlung folgende Note:

„Die Erklärung von anderen Molekularkräften, namentlich von der Cohäsionskraft, scheint obigen Bedingungen (der Gravitation) principiell nahe zu liegen, da ja bei dem wirklichen Contact der Körpermoleküle (wobei der vor den Atomströmen gewährte Schutz vollständig wäre) die Moleküle natürlich sehr stark aneinander haften würden. Eine initiale Abstossung durch die heftigen Wärmevibrationen der Körpermoleküle dürfte auch einen modificirenden Einfluss dabei haben.“

Dem gegenüber möchte ich bemerken, dass es nicht angeht, sich mit dem Contact der Körpermoleküle zugleich einen wirklichen Contact der Körperatome vorzustellen, daher hier nicht nur der supponirte vollständige Schutz vor den Atomströmen illusorisch, sondern auch der Gedanke, dass die „Cohäsionskraft“ auf derselben Ursache wie die Schwerkraft beruhen könnte, nur in Beziehung auf die Wirkung von Molekül zu Molekül, nicht aber auf jene von Atom zu Atom zulässig ist, indem den letzten Theilen der Materie, als „dem Mechanismus der Schwerkraft“, wie Tolver Preston selbst sagt, eine Gravitation überhaupt nicht beigegeben werden kann.

Die das Molekül constituirenden Atome müssen also immer als durch besondere Molekularkräfte zusammengehalten und wieder auch räumlich getrennt zur Vorstellung gelangen, und kann weder für die anziehenden noch für die abstossenden Kräfte der Körperatome heute noch eine Erklärung beigebracht werden, woferne diese Atome mit den Ätheratomen auf die gleiche ursprüngliche Bildungsstufe gestellt werden müssen.

Die Repulsion bei Körpermolekülen erklärt sich aber auf derselben Basis wie die Gravitation in folgender Weise:

Die auf ein kugelförmig gedachtes Körpermolekül stossenden Ätheratome wenden sich, indem sie abprallen, nach allen Richtungen des Weltraumes und stören so momentan und local die vorausgesetzte gleichförmige Vertheilung des den Weltraum erfüllenden Äthers. Zieht man zwei getrennte Moleküle *A* und *B* in Betracht, so wird durchschnittlich jedes von einem Punkte aus *A* zurtückprallende Ätheratom eine gewisse, wenn auch noch so kleine Wahrscheinlichkeit haben, das Molekül *B* zu treffen, und auf dasselbe eine abstossende Wirkung zu üben, indem es zu den auf dieses Molekül einwirkenden Kräften eine neue Kraft in der Richtung *AB* hinzufügt.

Bezeichnet man die Anzahl der von einem Punkte aus *A* reflectirten Ätheratome mit *m*, und denkt sich diese nach der Oberfläche einer Kugel im Raume mit dem Radius *R* und dem Mittelpunkte in *A* zerstreut, so werden auf ein Flächenelement der gedachten Kugel $\frac{m}{4\pi R^2}$ Ätheratome entfallen.

Solche Flächenelemente auf der Kugeloberfläche verdeckt nun das Molekül *B* seinerseits dem in *A* liegenden Kugelmittelpunkte $\pi\rho^2$, wenn ρ den Grundflächenradius des Kegels bezeichnet, das die von *A* durch das Molekül *B* nach der gedachten Kugeloberfläche strebenden Ätheratome formiren.

Von den bei *A* zurtückgeworfenen Ätheratomen *m* gelangen demnach zu *B*

$$n = \frac{\pi\rho^2}{4\pi R^2} \cdot m = \left(\frac{\rho}{2R}\right)^2 m \quad \dots 5)$$

Nun wird der Halbmesser ρ um so grösser, je grösser das Molekül *B* ist, und je näher es zu *A* steht. Bezeichnet man den Abstand beider mit *d*, den Halbmesser von *B* mit *r*, so verhält sich $\rho : r = R : d$, woraus sich

$$\rho = \frac{rR}{d} \quad \dots 6)$$

bestimmt. Dieser Werth in Gleichung 5) gesetzt, gibt

$$n = \left(\frac{rR}{d}\right)^2 \cdot \frac{m}{(2R)^2} = \left(\frac{r}{2d}\right)^2 \cdot m \quad \dots 7).$$

Diese n Ätheratome werden nun ihrerseits bei B abermals reflectirt, und es gelangt hievon ein bestimmter Theil wieder zu A zurück, um daselbst ebenfalls im Sinne der Abstossung zu wirken.

Dieser Theil bestimmt sich aus n nahezu wie sich n aus m bestimmt, also mit

$$n_1 = \left(\frac{r}{2d}\right)^2 n,$$

soferne auch der Halbmesser von $A = r$ angenommen wird.

Ein Theil von n_1 gelangt dann wieder zu B , hievon ein Theil wieder zu A zurück und so fort und es müssen die Wirkungen sämtlicher Reflexionen summirt werden, um die ganze Grösse der Repulsion zwischen den Molekülen A und B zu ermitteln.

Setzt man $\left(\frac{r}{2d}\right)^2 = \omega$, so wird demnach sein:

$$\begin{aligned} n &= \omega m \\ n_1 &= \omega n = \omega^2 m \\ n_2 &= \omega n_1 = \omega^3 m \\ n_3 &= \omega n_2 = \omega^4 m \end{aligned}$$

und so fort und die Summe, oder die gesammte Repulsion

$$S = m (\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \dots) \quad \dots 8).$$

Aus dieser Relation folgt, dass, r sehr klein vorausgesetzt, die Repulsion bei grosser Entfernung (d) der Moleküle sehr gering ist, bei sehr kleiner Entfernung aber bedeutend zunimmt, ja für den Werth von $\omega = d \frac{r}{2}$ (oder $\omega = \left(\frac{r}{2d}\right)^2 = 1$), der allerdings in Hinsicht des ganzen Moleküls nicht, wohl aber in Hinsicht der an seiner Oberfläche gelegenen Theile erreicht werden kann, unendlich gross fällt.

Ich muss hiebei ausdrücklich bemerken, dass meine obige Rechnung namentlich in Beziehung auf einander verhältnissmässig sehr nahe getrückte Moleküle durchaus nicht auf Genauigkeit Anspruch machen kann, sondern noch vielfacher Correcturen bedürfte.¹

Allein die Rechnung gibt schon in dieser Allgemeinheit doch eine völlig genügende Erklärung dafür, warum die Repulsion einestheils bei grosser Entfernung der Moleküle verschwindend klein ist, hingegen bei sehr grosser Annäherung derselben ausserordentlich wächst. Es erhellt auch hieraus, dass es hinsichtlich der Entfernung der Moleküle eine Grenze geben muss, bei der sich Gravitation und Repulsion das Gleichgewicht halten.

Schliesslich sei hier noch die Bemerkung beigefügt, dass sich bei Aufsuchung der möglichen Ursachen der Molekularkräfte allerdings auch die Frage aufwirft, ob die Atome des Schweräthers und die mit diesen als identisch vorausgesetzten Bausteine der einfachsten Körpermoleküle wirklich schon die letzten und untheilbaren Bestandtheile der Materie darstellen. Eine strenge Nöthigung zu dieser Annahme liegt nicht vor, und es ist ganz wohl denkbar, dass diese Atome selbst wieder Moleküle, das heisst Zusammengesetzte noch einfacherer Gebilde seien.

Wie Tolver Preston a. a. O. auf die Analogien in der Bewegung und der Aufeinanderwirkung der Sternmassen und jener der Gasmoleküle hinweist, dabei mit grosser Kühnheit das

¹ Der Ausdruck $\omega = \left(\frac{r}{2d}\right)^2$ muss nunmehr auch desshalb eine Correctur erfahren, weil die Repulsion so wie die Gravitation bei Annäherung der Massen (wegen vermehrter Anzahl der zur Wirkung gelangenden Ätheratome) im umgekehrten Verhältniss zum Quadrate der Entfernung wächst, daher eigentlich $\omega = \frac{r^2}{4d^4}$ gesetzt werden müsste, so dass der Werth $\omega = 1$

(und damit die grösste Abstossungssumme) erst bei $d = \sqrt{\frac{r}{2}}$ erreicht würde.

Kleine ins Grösste übertragend, so könnte man mit gleicher Kühnheit das Kleine ins Kleinere, noch Kleinere und Aller kleinste übertragen, ohne jedoch damit für unsere Erkenntniss der Dinge etwas zu gewinnen, da die Frage nach der Ursache der Molekularkräfte dadurch nicht beantwortet, sondern nur verschoben würde.

Die letzten Urelemente der Materie können „als Mechanismus der Cohäsionskraft“ dieser Kraft nicht selbst unterliegen, und so bleiben die im kleinsten Raume wirkenden letzten Molekularkräfte nach wie vor unaufgeklärt.

Hainburg a. d. Donau, 28. Juli 1883.

Über Isobutylbiguanid und seine Verbindungen.

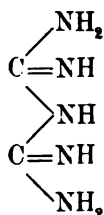
Von Alois Smolka,

emer. Assistenten für Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Graz.

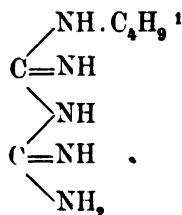
(Aus dem Laboratorium des Prof. Dr. R. Maly in Graz.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1883.)

Anschliessend an die Arbeiten über die im hiesigen Laboratorium studirten alkylirten Biguanide ging ich auf Veranlassung des Herrn Professor Dr. Maly an die Untersuchung des Isobutylbiguanids als Repräsentanten eines Biguanids mit kohlenstoffreicherem Alkoholradikal:



Biguanid = $\text{C}_2\text{H}_7\text{N}_5$



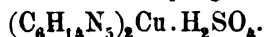
Isobutylbiguanid = $\text{C}_6\text{H}_{15}\text{N}_5$.

Das Isobutylamin ist aus der chemischen Fabrik von Kahlbaum in Berlin bezogen worden und es mag hier der absoluten Reinheit des Productes Erwähnung geschehen.

Als Ausgangspunkt diente beim Studium dieser Verbindungen wieder das schwefelsaure Isobutylbiguanidkupfer, das sich ebenso leicht wie die übrigen analogen Verbindungen nach der Methode von Herth² darstellen lässt und desshalb zunächst beschrieben werden soll.

¹ Wobei die wahrscheinliche, aber noch näher festzustellende Annahme gemacht ist, dass sich das Alkyl in einer NH_2 -Gruppe befindet.

² Monatshefte für Chemie, I. 88.

Schwefelsaures Isobutylbiguanidkupfer,

Zum Zwecke seiner Darstellung wurde eine Lösung von reinem Kupfervitriol mit soviel Isobutylamin (etwa von 20% Gehalt) versetzt, bis eine dunkelblaue, völlig klare Flüssigkeit resultirte. Etwas erschwert gestaltet sich diese Operation insoferne, als das zuerst gefällte Kupferhydroxyd zu einer vollkommenen Lösung eines grossen Überschusses an Isobutylamin bedarf.

Die Lösung des Kupfersulfats in Isobutylamin wurde nun nach bekannter Vorschrift mit Dicyandiamid gesättigt und theils bei gewöhnlicher Temperatur sich selbst überlassen, theils im geschlossenen Rohr einer Temperatur von beiläufig 100° C. ausgesetzt. Im letzteren Falle hatte sich nach Ablauf von fünf Stunden das Isobutylbiguanidkupfersulfat an den Wandungen des Rohres in Form eines dunkelrothen, körnigen Überzuges angelegt, während die Flüssigkeit eine rothviolette Farbe zeigte; gleichzeitig schied sich aber, wenn auch in geringer Menge, braunes Kupferoxyd aus, das indessen beim energischen Schütteln des Röhreninhaltes am Glase fest haften blieb. Die Ausscheidung von Kupferoxyd erfolgte jedesmal beim Erhitzen auf 100° C., gleichgiltig ob die Röhre bloss zur Hälfte oder möglichst angefüllt war, ob ein geringerer oder sehr grosser Überschuss an Amin angewendet wurde, — nur dann nicht, wenn Dicyandiamid stark vorwaltete.

Wird die Darstellung bei gewöhnlicher Temperatur vorgenommen, so bedarf es zur Ausscheidung der Dauer von ungefähr acht Tagen und die Verbindung ist heller gefärbt.

Die Mutterlangen wurden über Nacht in Eis gestellt; auch aus ihnen schied sich noch etwas Sulfat aus, und diese Ausscheidung zeigte die lichteste Farbe unter den drei verschiedenen Portionen.

Die einzelnen Portionen wurden abfiltrirt, mit kaltem Wasser gewaschen und bis zum constanten Gewicht über Schwefelsäure stehen gelassen.

In Bezug auf die Darstellung bei höherer Temperatur wurde später noch gefunden, dass eine zwischen 50° und 60° C. gelegene Temperatur am vortheilhaftesten ist, denn in diesem Falle

erfolgt die Ausscheidung von reinem Isobutylbiguanidkupfersulfat schon innerhalb 10—12 Stunden. Immer aber bleibt das Product bedeutender dunkler gefärbt, als die bei gewöhnlicher Temperatur dargestellte Verbindung. Aus den weiter unten angeführten Ergebnissen der Wasserbestimmungen, die in den verschiedenen Portionen ausgeführt wurden, erhellt, dass die verschiedene Farbe derselben einen verschiedenen, respective fehlenden Wassergehalt zur Bedingung hat.

Zur Ermittlung der quantitativen Ausbeute wurden 4 Grm. Dicyandiamid mit der erforderlichen Menge von Kupfervitriol und Isobutylamin behandelt;

sie gaben auf 60° erhitzt . . . 9·299 Grm. (wasserfreies) Salz;
aus der Mutterlauge
schieden sich in der
Kälte noch ab 0·637 Grm. (wasserfreies) Salz.
Zusammen . . . 9·936 Grm.

Nach der Bildungsgleichung:



sollten 11·271 Grm. wasserfreies Isobutylbiguanidkupfersulfat gewonnen werden; jene 9·936 Grm. stellen sonach 88·15% der theoretisch zu erhaltenden Menge dar.

Zu den nachstehenden Analysen dienten von verschiedenen Darstellungen herrührende, zuerst über Schwefelsäure, dann bei 125° C. getrocknete Verbindungen.

1. 0·3175 Grm. Substanz gaben nach der Verbrennung 0·3504 Grm. CO_2 = 0·09556 Grm. C und 0·1870 Grm. H_2O = 0·02077 Grm. H.

2. 0·1970 Grm. Substanz gaben 52·3 CC. N, entsprechend 0·05897 Grm. (Barometerstand = 729·8 MM., Temperatur = 19° C.)

3. 0·5105 Grm. Substanz lieferten 0·2495 Grm. BaSO_4 = 0·1028 Grm. SO_4 .

4. 0·6975 Grm. Verbindung gaben 0·340 Grm. BaSO_4 = 0·140 Grm. SO_4 .

5. 0·5105 Grm. Substanz gaben 0·0845 Grm. Cu_2S = 0·0675 Grm. Cu.

6. 0·6975 Grm. Substanz lieferten 0·1154 Grm. Cu_2S = 0·09214 Grm. Cu.

In Procenten:

Wasserfreies schwefelsaures Isobutylbignamidkupfer $(\text{C}_6\text{H}_{14}\text{N}_5)_2\text{Cu}\cdot\text{H}_2\text{SO}_4$.

Berechnet	Gefunden						Mittel
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
C . . . 30·42 ⁰ / ₀	30·10 ⁰ / ₀	—	—	—	—	—	30·10 ⁰ / ₀
H . . . 6·34	6·54	—	—	—	—	—	6·54
N . . . 29·57	—	29·93	—	—	—	—	29·93
SO_4 . . 20·28	—	—	20·14	20·07	—	—	20 10
Cu . . . 13·39	—	—	—	—	13·22	13·21	13·22

Wasserbestimmungen. Zu denselben ward die Substanz vorher über Schwefelsäure auf constantes Gewicht gebracht und dann bei 125° C getrocknet.

1. 0·57975 Grm. jener Verbindung, die sich aus der Mutterlauge in der Kälte (Eis) ausgeschieden hatte, verloren beim Trocknen 0·060 Grm. H_2O .

2. Von der Verbindung, welche sich bei gewöhnlicher Temperatur bildete, wurden folgende drei Bestimmungen ausgeführt:

- a) 0·7310 Grm. Substanz verloren bei 125° 0·0248 Grm. H_2O
- b) 0·3280 " " " " " 0·0115 " "
- c) 0·5850 " " " " " 0·0210 " "

3. Jene Substanz, die sich im Rohr bei 60° C. und darüber liegenden Temperaturen ausgeschieden hatte, enthielt nach zwei angestellten Versuchen bloss eine unbedeutende Menge hygroskopischen Wassers.

Für eine Verbindung von der Zusammensetzung

$(\text{C}_6\text{H}_{14}\text{N}_5)_2\text{Cu}\cdot\text{H}_2\text{SO}_4 + 3\text{H}_2\text{O}$ berechnet sich ein Wassergehalt von 10·24% (gefunden 10·35%), während $(\text{C}_6\text{H}_{14}\text{N}_5)_2\text{Cu}\cdot\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$ 3·66% H_2O verlangt (gefunden im Mittel 3·50%).

Löslichkeitsbestimmung: 36·4345 Grm. Lösung von 18° C. hinterliessen nach dem Verdunsten 0·0095 Grm. (bei

125° C. getrockneten) Rückstand; es löst sich daher 1 Theil wasserfreien Salzes in 3834 Theilen Wasser, oder was dasselbe ist, 100 Theile Wasser von 18° C. lösen 0·26 Theile des wasserfreien Salzes. Alkohol und Äther lösen nichts.

Eigenschaften. Das schwefelsaure Isobutylbiguanidkupfer tritt zum Unterschiede von dem eigentlichen Biguanidkupfersulfat und den bis jetzt dargestellten alkylierten entsprechenden Verbindungen nur in Körnern und nie in Nadeln auf; es scheidet sich bei Temperaturen, die über 60° C. liegen, wasserfrei, bei gewöhnlicher Temperatur aus dem zu seiner Darstellung in einer concentrirten Lösung sich befindenden Gemenge von Kupfersulfat, Dicyandiamid und Isobutylamin mit einem Molekül Krystallwasser, — und endlich aus verdünnten Lösungen (wie sie die Mutterlaugen vorstellen) bei 0° C. mit drei Molekülen Krystallwasser aus. Die wasserfreie Verbindung ist carminroth, die einfach gewässerte rosenroth, das drei Moleküle Krystallwasser enthaltende Salz aber licht rosenroth gefärbt. Ihr Krystallwasser entlässt die Verbindung bei hinlänglichem Erhitzen auf 105—110° C. zwar vollständig, aber nur sehr langsam; verhältnissmässig rasch kann das Entwässern bei 125—130° C. erreicht werden. Eine Zersetzung findet selbst bei 140° noch nicht statt.

Salzsaures Isobutylbiguanidkupfer $(C_6H_{14}N_5)_2Cu \cdot 2HCl + \frac{1}{2}H_2O$

Die Art seiner Darstellung war in dem Verhalten des Isobutylbiguanidkupfersulfats zu Chlorbaryum gegeben.

Das Sulfat wurde in Wasser suspendirt und mit der zur Umsetzung nöthigen Menge Chlorbaryum am Wasserbad erhitzt; in dem Maasse, als das rothe Sulfat verschwindet, scheidet sich an seiner Stelle schwefelsaurer Baryt aus, während die Flüssigkeit zugleich eine violette Farbe, zuletzt von prachtvoller Intensität, annimmt. Der ganze Process verläuft rasch und glatt und ist beendet, wenn der ausgeschiedene schwefelsaure Baryt rein weiss ist und eine Probe des Filtrates mit Schwefelsäure keine Fällung mehr gibt. Nach dem Abfiltriren vom Baryumsulfat wurde die violette Lösung des salzsauren Isobutylbiguanidkupfers am Wasserbade eingeengt und sodann zur Krystallisation hingestellt.

Analysen.

1. 0·2530 Grm. zuerst über Schwefelsäure, dann bei 125° C. getrockneter Substanz gaben 0·1517 Grm. AgCl und 0·0055 Grm. Ag = 0·0073 Grm. AgCl, zusammen 0·159 Grm. AgCl = 0·03933 Grm. Cl.

2. 0·4586 Grm. Substanz gaben 0·2810 Grm. AgCl und 0·0075 Grm. Ag = 0·010 Grm. AgCl, zusammen 0·291 Grm. AgCl = 0·07198 Grm. Cl.

3. 0·4586 Grm. Substanz lieferten 0·0811 Grm. CuO = 0·06475 Grm. Cu.

In Procenten:

Wasserfreies Isobutylbiguanidkupferchlorhydrat
(C₆H₁₄N₅)₂Cu·2HCl.

Berechnet	Gefunden			
	I	II	III	Mittel
Cl 15·83%	15·53%	15·70%	—	15·62%
Cu 14·14	—	—	14·12%	14·12

Wasserbestimmung. Von der über Schwefelsäure getrockneten Verbindung verloren bei 125° C.

a) 0·2596 Grm. 0·005 Grm. H₂O,

b) 0·2580 „ 0·0055 „ H₂O,

oder im Mittel 2·03% H₂O. Für ein halbes Molecul Wasser verlangt die Rechnung 1·97% H₂O.

Eigenschaften. Das salzsaure Isobutylbiguanidkupfer krystallisirt in blass rosenrothen, mikroskopischen Nadeln, die sich manchmal zu halbkugeligen und nierenförmigen, von Mohnbis zur Hirsekorngrösse variirenden Aggregaten vereinigen; die Oberfläche der sphärischen Gebilde zeigt unter der Loupe eine körnige, rauhe Beschaffenheit, — man könnte die Halbkugeln etwa mit winzigen Himbeeren vergleichen.

Bei 140° zersetzt sich das Isobutylbiguanidkupferchlorhydrat noch nicht. In Wasser löst sich die Verbindung mit tief violetter Farbe auf; eine Löslichkeitsbestimmung ergab, dass sich 1 Theil des wasserfreien Salzes in 37·76 Theilen Wasser löst

oder: dass 100 Theile Wasser von 20° C. 2·65 Theile Substanz aufnehmen. In Alkohol ist die Verbindung unlöslich.

Legt man in die neutrale wässrige Lösung Zink oder Eisen, so wird das Kupfer quantitativ ausgefällt und in der Flüssigkeit befindet sich die salzsaure kupferfreie Base, das salzsaure Isobutylbiguanid.

Salpetersaures Isobutylbiguanidkupfer $(C_6H_{14}N_5)_2Cu \cdot 2HNO_3$.

Die Darstellung geschah in der bei der vorigen Verbindung beschriebenen Weise, nur dass hier selbstverständlich Baryumnitrat zur Anwendung kommen musste.

Analysen.

Da über die vorliegende Verbindung schon mit Rücksicht auf die Darstellungsweise kein Zweifel betreffs ihrer Zusammensetzung obwalten kann, so wurde die Salpetersäure bloss qualitativ nachgewiesen und eine Kupferbestimmung ausgeführt.

0·5680 Grm. bei 120° getrockneter Substanz gaben 0·0902 Grm. $CuO = 0·072$ Grm. oder 12·68% Cu. Für $(C_6H_{14}N_5)_2Cu \cdot 2HNO_3$ berechnet sich der Kupfergehalt auf 12·65%.

Die über Schwefelsäure bis zum constanten Gewicht aufbewahrte Substanz verloren beim Trocknen bei 120° C. kein Wasser.

Eigenschaften. Nach dem Verdunsten im Vacuum bleibt das Salz in rosenrothen Krusten und kugeligen Aggregaten zurück, ähnlich dem Chlorhydrat. Beim Erhitzen am Platinblech verglimmt die Verbindung lebhaft, stösst nach Isobutylamin riechende Dämpfe aus und lässt schliesslich Kupferoxyd zurück. Im Wasser ist sie bedeutend schwieriger löslich, als das Chlorhydrat; denn ein Theil Salz löst sich erst in 73·15 Theilen Wasser von 26·5° C. oder 100 Theile Wasser von dieser Temperatur vermögen 1·37 Theile Substanz aufzulösen. Die wässrige Lösung ist violett.

Isobutylbiguanidkupfer $(C_6H_{14}N_5)_2Cu$.

Behufs Darstellung der Kupferbasis wurde Isobutylbiguanidkupfersulfat in mit Schwefelsäure angesäuertem Wasser gelöst

und mit Natronlauge versetzt. Es fiel ein rosenrother, sehr voluminöser Niederschlag heraus, der sich beim Kochen in Wasser mit rothvioletter Farbe löste. Aus der filtrirten Lösung schied sich beim Erkalten das Isobutylbiguanidkupfer in Form von feinen, rosa gefärbten Nadelchen aus; sie wurden abgesaugt und nach dem Waschen mit kaltem Wasser über Schwefelsäure bis zum constanten Gewicht stehen gelassen.

Einfacher gestaltet sich die Darstellung der Kupferbase aus dem Isobutylbiguanidkupferchlorhydrat oder dem Nitrat, wenn man dessen Lösung mit Natronlauge fällt.

Analysen.

1. 0·3290 Grm. bei 120° getrockneter Substanz wurden in verdünnter HCl gelöst und mit Zink in einer Platinschale versetzt; es resultirten 0·0542 Grm. metallisches Cu.

2. 0·4225 Grm. Substanz gaben unter gleichen Umständen 0·070 Grm. metallisches Cu.

In Procenten berechnet:

Isobutylbiguanidkupfer $(C_6H_{14}N_5)_2Cu$.

Berechnet	Gefunden		
	I	II	Mittel
Cu 16·89%	16·47%	16·57%	16·52%

Die über Chlorcalcium getrocknete Verbindung verlor beim Erhitzen auf 120° nur eine unbedeutende Menge hygroskopischen Wassers; sie enthält daher kein Krystallwasser.

Eigenschaften. Das Isobutylbiguanidkupfer stellt nach dem Absaugen und Trocknen ein dichtes Gefilz seidenglänzender rosenroth gefärbter Nadeln dar, die sich in Wasser nur schwierig zu einer rothvioletten Flüssigkeit lösen; heisses Wasser nimmt davon etwas mehr auf. Beim langsamen Verdunsten der Lösung über Schwefelsäure bleiben kleine carminrothe Krystallkörner zurück. Bemerkenswerth ist die grosse Verwandtschaft der Verbindung zu Kohlensäure; dieser Umstand, wie überhaupt ihre starke Begierde sich mit Säuren zu verbinden, ferner die alkalische Reaction ihrer wässerigen Lösung, sowie endlich die Thatsache,

dass sie beim Kochen mit Salmiaklösung Ammoniak aus letzterer austreibt, stempeln sie zu einer kräftigen Base.

In verdünnter Salz- und Salpetersäure löst sich das Isobutylbiguanidkupfer mit Leichtigkeit auf; zuerst kommt es dabei zur Bildung des betreffenden Isobutylbiguanidkupfersalzes, beim Vorwalten der Säure findet jedoch Zerlegung statt, indem das Kupfer aus der Verbindung herausgelöst wird.

Die kupferfreie Basis und ihre Verbindungen.

Neutrales Isobutylbiguanidsulfat $(C_6H_{15}N_5)_2 \cdot H_2SO_4 + 1\frac{1}{2}H_2O$.

Um es darzustellen, hielt ich die Methode Rathke's, ¹ des Entdeckers vom Biguanid, ein, die er zur Gewinnung des schwefelsauren Biguanids zur Anwendung brachte, säuerte aber nicht an

Schwefelsaures Isobutylbiguanidkupfer wurde mit Wasser fein verrieben, in ein Kölbchen gespült und am Wasserbade erhitzt, während ein langsamer Strom von Schwefelwasserstoff mehrere Stunden lang eingeleitet wurde. Nach dem Abfiltriren vom Schwefelkupfer kam die klare Flüssigkeit behufs Concentration sowie Verjagung von Schwefelwasserstoff auf's Wasserbad und wurde schliesslich über Schwefelsäure ins Vacuum gestellt.

Hier schieden sich grosse, wasserhelle Krystallblätter aus die nach einmaligem Umkrystallisiren lebhaft glänzende, durch sichtige Säulen darstellten.

Analysen.

1. 0·5675 Grm. völlig trockenes Sulfat gaben 0·3145 Grm. $BaSO_4 = 0\cdot1295$ Grm. SO_4 .

2. 0·3460 Grm. entwässerter Substanz lieferten 0·1950 Grm. $BaSO_4 = 0\cdot0803$ Grm. SO_4 .

Schwefelsaures Isobutylbiguanid $(C_6H_{15}N_5)_2 \cdot H_2SO_4$.

Berechnet	Gefunden		
	I	II	Mittel
$SO_4 \dots 23\cdot30\%$	$22\cdot82\%$	$23\cdot21\%$	$23\cdot01\%$

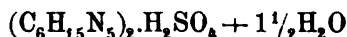
¹ Bericht der deutschen chem. Ges. 12, 777.

Wasserbestimmung.

1. 0·6053 Grm. Sulfat verloren bei 110° . . 0·0359 Grm. H₂O.

2. 0·3726 " " " " " . . 0·0238 " "

Eine Verbindung von der Zusammensetzung



verlangt 6·15% H₂O, während im Mittel gefunden wurden 6·16%.

Eigenschaften. Die wasserhellen, harten, stark glänzenden Krystalle lassen nach keiner Richtung eine Symmetrie erkennen, gehören daher dem triklinischen Krystallsysteme höchst wahrscheinlich an. Sie sind luftbeständig, verwittern im Exsiccator nicht, wohl aber, wenn auch langsam, im Vacuum über Schwefelsäure. Beim Erhitzen am Platinblech schmilzt das Salz zunächst, dann bräunt es sich, bläht sich etwas auf, stösst weisse, stark nach Isobutylamin riechende Dämpfe aus und hinterlässt schliesslich eine leicht verbrennliche Kohle.

In Wasser ist es leicht löslich: 1 Theil krystallisirten Salzes löst sich in 3·8 Theilen Wasser von 16° C., oder: 100 Theile Wasser von 16° lösen 26·3 Theile Salz. Die wässrige Lösung reagirt neutral und wird von Alkohol gefällt.

Es wurde auch versucht, einen Alaun darzustellen, der an Stelle des Alkalisulfates Isobutylbiguanidsulfat enthält. Zu dem Zwecke wurde das letztere mit der erforderlichen Menge schwefelsaurer Thonerde zur Krystallisation hingestellt; die Lösung dunstete aber zu einer undeutlich strahligen Masse ein.

Auch nach der Überschichtung der wässrigen Lösung mit Alkohol wurden nur wenig und undeutliche Krystalle erhalten, die aber Thonerde und organische Substanz neben Schwefelsäure und viel Wasser enthielten, daher vielleicht einen Alaun darstellten.

Saures Isobutylbiguanidsulfat $C_6H_{15}N_5 \cdot H_2SO_4 + 1\frac{1}{2}H_2O$.

Neutrales Isobutylbiguanidsulfat wurde mit der erforderlichen Menge verdünnter titrirter Schwefelsäure versetzt, am Wasserbad etwas eingeengt und zur Krystallisation über Schwefelsäure gestellt; nach längerer Zeit krystallisirten grosse, wasserklare Blätter heraus.

Analyse:

0·2780 Grm. entwässertes Substanz gaben

0·2539 Grm. $\text{BaSO}_4 = 0\cdot1046$ Grm. = $37\cdot63\%$ SO_4 ;

$\text{C}_6\text{H}_{15}\text{N}_5\cdot\text{H}_2\text{SO}_4$ verlangt $37\cdot65\%$ "

Wasserbestimmung: 0·3072 Grm. des exsiccator-trockenen Salzes verloren bei 110°C . 0·0290 Grm. H_2O .

	Berechnet	Gefunden
	für $\text{C}_6\text{H}_{15}\text{N}_5\cdot\text{H}_2\text{SO}_4 + 1\frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}$	
H_2O	$9\cdot57\%$	$9\cdot77\%$

Eigenschaften. Grosse, durchsichtige Tafeln, in Wasser bedeutend leichter als das neutrale Isobutylbiguanidsulfat löslich; die wässrige Lösung reagirt sauer und wird von Alkohol gefällt.

Neutrales Isobutylbiguanidchlorhydrat $\text{C}_6\text{H}_{15}\text{N}_5\cdot\text{HCl}$.

Die erwärmte Lösung des neutralen Isobutylbiguanidsulfats schied nach dem Versetzen mit der zum Umsatz nöthigen Menge von Chlorbaryum schwefelsauren Baryt aus; es wurde davon abfiltrirt, das Filtrat am Wasserbade concentrirt und dann krystallisiren gelassen.

Analyse:

0·2210 Grm. getrockneter Substanz gaben 0·1580 Grm. AgCl und 0·0038 Grm. $\text{Ag} = 0\cdot005$ Grm. AgCl , zusammen 0·1630 Grm. $\text{AgCl} = 0\cdot04032$ Grm.

oder $18\cdot24\%$ Cl .

die Rechnung verlangt für $\text{C}_6\text{H}_{15}\text{N}_5\cdot\text{HCl}$... $18\cdot35\%$ Cl .

Eigenschaften. Nach öfterem Umkrystallisiren stellt das neutrale salzsaure Isobutylbiguanid lange dünne, leicht zerbrechliche, glashelle Prismen vor, die kein Krystallwasser enthalten. Bei Ausführung einer Löslichkeitsbestimmung hinterliessen 7·791 Grm. der bei $16\cdot5^\circ\text{C}$. gesättigten Lösung 2·2285 Grm. trockenen Rückstand; es löst sich daher 1 Theil des Salzes in 2·5 Theilen Wasser, oder: 100 Theile Wasser von $16\cdot5^\circ\text{C}$. nehmen 40 Theile der Verbindung auf. Die Lösung besitzt

neutrale Reaction und wird von Alkohol nicht gefällt. Das neutrale Isobutylbiguanidchlorhydrat schmilzt bei 216°C .; am Platinblech schmilzt es, entwickelt dann weisse, nach Isobutylamin riechende Dämpfe und hinterlässt schliesslich wenig Kohle.

Saures Isobutylbiguanidchlorhydrat $\text{C}_6\text{H}_{15}\text{N}_5 \cdot 2\text{HCl}$.

Die Darstellung dieser Verbindung geschah auf zweierlei Art: ein Mal wurde das neutrale Chlorhydrat mit der erforderlichen Menge von Salzsäure versetzt; das zweite Mal diente das saure Isobutylbiguanidsulfat zu seiner Gewinnung, indem es in der bei der vorigen Verbindung beschriebenen Weise mit Chlorbaryum behandelt wurde. Nach dem Eindunsten am Wasserbade wurde das Salz aus Alkohol umkrystallisirt.

Analyse.

0·5390 Grm. der trockenen Verbindung gaben 0·6598 Grm. AgCl und 0·0065 Grm. Ag = 0·0086 Grm. AgCl, zusammen 0·6684 Grm. AgCl = 0·16536 Grm. Cl.

	Berechnet für $\text{C}_6\text{H}_{15}\text{N}_5 \cdot 2\text{HCl}$	Gefunden
Cl	30·87%	30·68%

Eigenschaften. Die wässerige Lösung krystallisirt sehr schwierig; aus Alkohol wird das Salz in wasserfreien Nadeln erhalten, die sich öfters zu federartigen Gebilden vereinigen. Die alkoholische Lösung wird durch Äther gefällt. An der Luft ist das Salz zerfliesslich; es reagirt sauer. Sein Schmelzpunkt liegt bei 194°C .

Isobutylbiguanidplatinchlorid, $\text{C}_6\text{H}_{15}\text{N}_5 \cdot 2\text{HCl} \cdot \text{PtCl}_4 + \text{H}_2\text{O}$.

Die alkoholische Lösung des sauren Isobutylbiguanidchlorhydrates wurde mit überschüssigem Platinchlorid und Äther versetzt; da der dabei entstehende Niederschlag wieder verschwand, wurde das Ganze zur Trockene eingedunstet, der Rückstand zur Entfernung des überschüssigen Platinchlorids wiederholt mit Äther geschüttelt, in Alkohol gelöst, wieder zur Trockene gebracht und schliesslich aus Wasser umkrystallisirt.

Analyse.

0.4804 Grm. der entwässerten Substanz hinterliessen nach dem Glühen 0.1644 Grm. Pt.

Berechnet für $C_6H_{15}N_5 \cdot 2HCl \cdot PtCl_4$	Gefunden
Pt. 34.67%	34.22%

Wasserbestimmung. 0.497 Grm. der exsiccator-trockenen Substanz verloren bei 110° 0.016 Grm. H₂O.

Berechnet für $C_6H_{15}N_5 \cdot 2HCl \cdot PtCl_4 + H_2O$	Gefunden
H ₂ O. 3.06%	3.22%

Eigenschaften. Aus Alkohol krystallisirt das Platindoppelsalz in gelben, vierseitigen, fächerförmig gruppirten Tafeln; die wässrige Lösung hinterlässt aus Nadeln bestehende, gelbe Krystallkrusten. In beiden Lösungsmitteln ist das Salz leicht löslich; auch von Äther wird es aufgenommen, aber bedeutend schwieriger, jedenfalls schwieriger als Platinchlorid. Das Krystallwasser entlässt es schwer und ist im trockenen Zustande sehr hygroskopisch.

Chromsaures Isobutylbiguanid $(C_5H_{15}N_5)_2 \cdot H_2CrO_4 + H_2O$.

Neutrales Isobutylbiguanidsulfat wurde in Wasser aufgelöst und mit überschüssigem neutralem Baryumchromat so lange gekocht, bis eine Probe der Flüssigkeit keine Reaction auf Schwefelsäure mehr gab. Der Process bedarf zu seinem Verlaufe längerer Zeit. Nach dem Erkalten und Filtriren zeigte das Filtrat keine Barytreaction, der Rückstand am Filter erwies sich als aus einem Gemenge von chromsaurem und schwefelsaurem Baryt bestehend.

Analyse.

0.2217 Grm. trockener Substanz gaben nach dem Glühen (unter Befeuchtung mit HNO₃) 0.0387 Grm. Cr₂O₃ = 0.0266 Grm. oder 12.00% Cr.
 $(C_5H_{15}N_5)_2 \cdot H_2CrO_4$ verlangt 12.14% Cr.

Wasserbestimmung.

1. 0·2330 Grm. Salz verloren bei 110° 0·0103 Grm. H₂O;
2. 0·3160 " " " " " 0·0130 " "

Berechnet für	Gefunden		
$(C_6H_{15}N_3)_3 \cdot H_2CrO_4 + H_2O$	I	II	Mittel
H ₂ O 4·00 ⁰ / ₀	4·42 ⁰ / ₀	4·11 ⁰ / ₀	4·27 ⁰ / ₀

Eigenschaften. Das neutrale Isobutylbiguanidchromat krystallisirt in reingelben, durchsichtigen, luftbeständigen Krystallen, welche dem äusseren Anscheine nach ähnlich mit den Formen des neutralen Isobutylbiguanidsulfats sind. In Wasser lösen sie sich leicht auf; die Lösung ist gelb und nimmt auf Zusatz eines Tropfens Salzsäure eine orange Farbe an, wahrscheinlich in Folge der Bildung des sauren Chromats.

Neutrales oxalsaures Isobutylbiguanid $(C_6H_{15}N_3)_2 \cdot H_2C_2O_4$.

Äquivalente Mengen von oxalsaurem Baryum und neutralem Isobutylbiguanidsulfat setzen sich beim Kochen leicht und vollständig um; in kürzester Zeit lässt die filtrirte Flüssigkeit keine Spur von Schwefelsäure mehr erkennen. Nach dem Abfiltriren vom ausgeschiedenen Baryumsulfat und Verdunsten des Filtrates erhält man das Oxalat rein.

Analyse.

0·3624 Grm. trockener Substanz gaben 0·5512 Grm. CO₂ = 0·1503 Grm. C und 0·2646 Grm. H₂O = 0·0294 Grm. H.

In Procenten:

Oxalsaures Isobutylbiguanid $(C_6H_{15}N_3)_2 \cdot H_2C_2O_4$:

Berechnet	Gefunden
C 41·58 ⁰ / ₀	41·47 ⁰ / ₀
H 7·92 "	8·11 "

Eigenschaften. Das neutrale oxalsaure Isobutylbiguanid tritt in vierseitigen, durchsichtigen, wasserfreien Täfelchen auf,

die sich manchmal zu harten, rosettartigen Krystalldrusen vereinigen. Von Wasser wird ungefähr in derselben Menge wie das neutrale Isobutylbiguanid aufgenommen; die Lösung reagirt neutral.

Isobutylbiguanid $C_6H_{15}N_5 = C_2N_5H_6(C_4H_9)$.

Die freie Basis wurde erhalten, indem das neutrale Isobutylbiguanidsulfat mit titrirtem Barytwasser von der Schwefelsäure befreit wurde. Die vom Baryumsulfat abfiltrirte Flüssigkeit ward ins Vacuum über Schwefelsäure gestellt; zur Krystallisation konnte die Substanz nicht gebracht werden, sie stellt vielmehr einen dicken Syrup dar. Die wässerige Lösung des Isobutylbiguanids reagirt stark alkalisch; aus Ammonsalzen treibt sie Ammoniak schon bei ganz gelindem Erwärmen aus. Mit den meisten Salzen der Schwermetalle, sowie mit denen des Al, Mg, Ca, Sr und Ba gibt sie sofort Niederschläge der betreffenden Oxydhydrate, was namentlich bei den letztgenannten drei Metallen bemerkenswerth erscheint.

Aus der Luft zieht die Lösung begierig Kohlensäure an und erstarrt bald in Folge der Bildung ihres Carbonates zu zerfliesslichen Nadeln.

Betreffend die Constitution des Isobutylbiguanids wurde eingangs in der Fussnote die Annahme gemacht, dass sich das Isobutyl in einer NH_2 -Gruppe des Biguanids befinde.

Das Verhalten der freien Basis gegen Chloroform bei Gegenwart von alkoholischer Natronlauge spricht für die Zulässigkeit jener Ansicht; denn beim Erwärmen des genannten Gemisches macht sich sofort Carbylamin durch den bekannten Geruch bemerkbar. Da nun das Auftreten des Carbylamins für Amine sehr charakteristisch ist, so erscheint es als nicht unwahrscheinlich, dass das Alkyl in einer Amid-, und kaum in einer Imid-Gruppe den Wasserstoff ersetzt.

Mit Sicherheit kann aus dieser Reaction gefolgert werden, dass sich das Isobutylbiguanid bei Einwirkung von concentrirten Alkalien in der Wärme zunächst in Isobutylamin und Dicyandiamid spaltet.

Bemerkungen über den chemischen Charakter des Isobutylbiguanidkupfers und des Isobutylbiguanids.**α) Das Isobutylbiguanidkupfer.**

E. Drechsel¹ lenkte im October v. J. die Aufmerksamkeit auf das interessante Verhalten, welches die von B. Gerdes² bei der Elektrolyse des carbaminsauren und kohlen-sauren Ammons mit Wechselströmen und Platinelektroden erhaltenen Ammonplatindiammoniumverbindungen zeigen. Er führt an, dass das Chlorid und Nitrat in Wasser leicht, die freie Basis aber darin nur sehr schwer löslich ist und dass die Lösungen der ersteren durch kohlen-saures Natron, doppelt chrom-saures Kali, phosphor-saures Natron, Schwefelsäure, Gypswasser, Kieselfluss-säure, oxalsäures Ammon, unterschweflig-saures Natron und Ferrocyan-kalium gefällt werden — kurz, dass die Ammonplatindiammoniumverbindungen sich gegen Reagentien den alkalischen Erden, speciell den Barytsalzen, ganz analog verhalten.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Salzen des Isobutylbiguanidkupfers und aus einigen Beobachtungen Emich's³ die er am Äthylbiguanidkupfer machte, folgt mit grösster Wahrscheinlichkeit, dass das im Folgenden Gesagte auch auf die Kupferverbindungen der übrigen Biguanide vollgiltig anzuwenden sei.

Zunächst sollen hier die gefundenen Thatsachen registriert werden:

Das Isobutylbiguanidkupfer ist eine in kaltem Wasser sehr schwer, in heissem leichter lösliche Substanz, deren Lösung alkalisch reagiert, aus der Luft begierig Kohlensäure anzieht und auch zu sonstigen Säuren ein lebhaftes Vereinigungsbestreben zeigt. Mit den Chloriden der gewöhnlichen Schwermetalle, des Aluminiums und Magnesiums gibt sie Niederschläge der betreffenden Hydroxyde. Schwefelsäure, Oxalsäure, Kieselfluorwasserstoffsäure und Kohlensäure bringen bei vorsichtigem

¹ Journ. f. pr. Chem. 26. 277.

² Journ. f. pr. Chem. 26. 257.

³ Diese Monatshefte, IV. 399.

Zusatz in der Lösung der Kupferbasis rosenrothe Fällungen der entsprechenden Salze hervor; leichter lassen sich diese Niederschläge durch Zusatz von Salzen der genannten Säuren hervorrufen.

Erwärmt man die Kupferbasis mit Salmiaklösung, so wird Ammoniak in Freiheit gesetzt, das sich schon durch den Geruch sofort zu erkennen gibt.

Nach dem Angeführten lässt das Verhalten des Isobutylbiguanidkupfers eine gewisse Ähnlichkeit mit jenem des Baryhydrats nicht verkennen.

Das Chlorhydrat und Nitrat der Kupferbasis sind in Wasser löslich, das Sulfat, Carbonat, Phosphat, Oxalat und Borat sind kaum löslich.

Das Isobutylbiguanidkupferchlorhydrat gibt daher die folgenden Reactionen:

1. Fixe Alkalien rufen sofort einen dicken, rothen Niederschlag der freien Kupferbasis hervor; beim Erwärmen findet vollkommene Lösung zu einer tief violetten Flüssigkeit statt, falls genug Wasser vorhanden war.

2. Ammoniak erzeugt keine Fällung.

3. Natriumsulfat, ebenso Gypswasser erzeugen einen licht rosenroth gefärbten Niederschlag vom Sulfat der Kupferbasis.

4. Natriumcarbonat fällt gleichfalls rosenroth gefärbtes Carbonat.

5. Natriumphosphat schlägt das licht rosenrothe Phosphat der Kupferbasis nieder.

6. Borsaures Natron erzeugt ebenfalls einen rothen Niederschlag, jedoch nur dann, wenn concentrirte Lösungen beider Körper auf einander einwirken.

7. Unterschwefligsaures Natron fällt auch roth.

7. Kaliumchromat, ebenso Bichromat geben voluminöse gelbe Niederschläge.

9. Kieselfluornatrium bringt eine licht rosenrothe Fällung hervor.

10. Oxalsaures Kali fällt ebenso.

11. Ferrocyankalium erzeugt einen graugelben Niederschlag, der von verdünnten Säuren in der Weise zersetzt wird, dass braunes Ferrocyankupfer ungelöst zurückbleibt.

Von Säuren werden alle vorgenannten Niederschläge gelöst, respective zersetzt, indem sich die Säure mit dem Kupfer zu einem Salze vereinigt, während das alkylirte Biguanid ebenfalls ein Salz für sich bildet. Ammoniak und Ammonsalze lösen die Niederschläge bald leichter bald schwieriger zu blauen Flüssigkeiten auf.

In Zusammenfassung des Dargelegten kann behauptet werden, dass das Isobutylbiguanidkupfer einen ähnlichen Charakter als Basis besitzt, wie der Baryt.

Schliesslich darf nicht übersehen werden, dass das Isobutylbiguanidkupfer auch hinsichtlich seiner Werthigkeit mit dem Verhalten des Baryums in Einklang zu bringen ist; so wie dieses tritt es zweiwerthig auf und unterscheidet sich hierin wesentlich von der Gerdes'schen Platinbase.

Die Ähnlichkeit im chemischen Verhalten beider zeigt sich endlich auch noch in dem Umstande, dass die Löslichkeit des Sulfats, Nitrates und Chlorhydrates in der aufgezählten Ordnung zunimmt, sowohl bei der Kupferbasis wie beim Baryt.

β) Das Isobutylbiguanid.

Das Isobutylbiguanid ist eine kräftige, das Ammoniak leicht austreibende Base; seine Salze sind durchwegs leicht oder sehr leicht löslich. Auch das Platindoppelsalz wird von Äther aufgenommen. Mit den meisten Metallsalzen erzeugt es Niederschläge der betreffenden Hydroxyde und fällt selbst jene von Ba, Sr und Ca. Diese Eigenschaft stellt das Isobutylbiguanid in seinen Reactionen den Alkalien nahe, und zwar am nächsten dem Natron, sofern die Base weder durch Platinchlorid noch Weinsäure gefällt wird.

Der erdalkaliartige Charakter der Kupferbase geht also durch Austritt von Kupfer in einen alkaliartigen über.

XXII. SITZUNG VOM 25. OCTOBER 1883.

In Verhinderung des Secretärs übernimmt Herr Professor Weyr dessen Functionen.

Das k. und k. Gemeinsame Finanz-Ministerium spricht den Dank aus für die Betheilung des neu organisirten Obergymnasiums in Sarajevo mit den akademischen Schriften.

Das Präsidium und Directions-Comité der Internationalen Elektrischen Ausstellung Wien 1883 ladet die Mitglieder der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu einem gemeinsamen Besuche dieser Ausstellung für den 27. October d. J. ein.

Herr Dr. J. Blaas, Docent an der Universität in Innsbruck, übersendet eine Abhandlung: „Über Roemerit, Botryogen und natürlichen Magnesia-Eisenvitriol.“

Das w. M. Herr Dir. Dr. Steindachner überreicht eine ichthyologische Abhandlung unter dem Titel: „Ichthyologische Beiträge“ (XIII).

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia nacional de ciencias en Córdoba: Boletin. Tome V. Entrega 3. Buenos Aires, 1883; 8°.

Academy, the Davenport of natural sciences: Proceedings. Vol. III, part II. Davenport, Iowa, 1882; 8°.

Accademia regia di scienze, lettere ed arti in Modena: Memorie Ser. II. Vol. I. In Modena, 1883; 4°.

— reale dei Lincei Atti. Anno CCLXXIX 1881—82. Serie terza. Memorie. Vol. XI—XIII. Roma, 1882; 4°.

— — Atti. Anno CCLXXX. 1882—83. Serie terza. Transunti. Vol. VII. Fascicoli 13°—15°. Roma, 1883; 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl. zu Berlin: Abhandlungen aus dem Jahre 1882. Berlin, 1883; 4°.

- Akademie koninklijke van Wetenschappen: Verhandelingen.**
 Deel. XXII. Amsterdam, 1883; 4^o.
 — — Verslagen en Mededeelingen. 2^o Reeks. Deel. XVII.
 Amsterdam, 1882; 8^o.
 — — Jaarboek voor 1881. Amsterdam; 8^o.
 — — Processen-verbaal van de gewone Vergaderingen van Mei
 1881 tot en Met April 1882. Amsterdam, 1882; 8^o.
- Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents.** 5^e an-
 née, 6^e série, 7^e & 8^e cahiers. Juillet et Aout 1883. Paris; 8^o.
- Chemiker-Zeitung: Central-Organ.** Jahrgang VII, Nr. 79—81.
 Cöthen, 1883; 4^o.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.** Tome
 XCVI. Nrs. 14 et 15. Paris, 1883; 4^o.
- Gesellschaft, astronomische: Vierteljahrsschrift.** 18. Jahrgang
 2. Heft. Leipzig, 1883; 8^o.
 — — Bataviaasch van Kunsten en Wetenschappen: Verhande-
 lingen. Deel. XLII. 2^o Stuk. Batavia, 's Hage, 1881; 4^o.
 — — Notulen van de Algemeene en Bestuurs — vergaderingen.
 Deel. XX. Nr. 3 und 4. Batavia, 1882; 8^o.
 — — Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. IV. Jaar-
 gang 1882, door Dr. J. P. van der Stok. Batavia, 1883; 8^o.
- Institution, the Royal of Great-Britain: Proceedings.** Nr. 9,
 parts IV & V. London, 1881—82; 8^o. — Vol. X, part I.
 London, 1883; 8^o. — List of the Members, Officers and
 Professors. London, 1882; 8^o.
- Instituut, Koninklijk voor de Taal-Land-en Volkenkunde van
 Nederlandsch-Indie: Bijdragen.** 4. Volgreeks, VI. Deel. —
 3^o Stuk. s'Gravenhage, 1883; 8^o.
- Instituto, Reale Lombardo di scienze e lettere: Memorie.**
 Vol. XIV.—XV. della serie III. Fascicolo III. Milano, Napoli,
 Pisa, 1881; gr. 4^o.
 — — Rendiconti. Ser. II. Vol. XIV. Milano, Napoli, Pisa,
 1881; 8^o.
- Mittheilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt von
 Dr. A. Petermann.** XXIX. Bd., X. und Ergänzungsheft
 Nr. 73. Gotha, 1883; 4^o.

- Museum of comparative Zoology at Harvard College: Bulletin.**
 Whole series, Vol. VII. Nr. 9. Cambridge, 1883; 8°. —
 Vol. XI, Nos. 1 & 2. Cambridge, 1883; 8°.
- Nature: Vol. XXVIII. Nr. 729. London, 1883; 8°.**
- Observatory, the: A monthly Review of Astronomy. Nos. 76
 & 77. August und September 1883. London; 8°.**
- Société Belge de Microscopie: Bulletin. IX^e année, Nr. 9.
 Bruxelles, 1883; 8°.**
- **Linnéenne du Nord de la France: Mémoires anné 1883.
 Amiens 1883; 8°.**
 - **Bulletin mensuel. Nos. 110—122. Amiens, 1881—82; 8°.**
 - **de Normandie: Bulletin. Année 1881—82. 4^e série, 6^e volume.
 Caen, Paris, 1882; 8°.**
 - **des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux
 36^e année, 4^e série 7^e & 8^e cahiers. Paris, 1883; 8°.**
- Society, the royal geographical: Proceedings and Monthly Record
 of Geography. Vol. V. Nr. 10. October 1883. London; 8°.**
- **the royal microscopical: Journal. Ser. II. Vol. III. Part V.
 London and Edingburgh, 1883; 8°.**
- University of Cincinnati: Publications of the Observatory.
 Micrometrical Measurements of Double Stars. 1879—80.
 Cincinnati, 1882; 8°.**
- Verein, Siebenbürgischer für Naturwissenschaften in Hermann-
 stadt: Verhandlungen und Mittheilungen. XXXIII. Jahrgang,
 Hermannstadt, 1883; 8°.**
-

SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVIII. Band. IV. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

**Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie,
Mechanik, Meteorologie und Astronomie.**

XXIII. SITZUNG VOM 8. NOVEMBER 1883.

Die Nachricht von dem am 25. October d. J. erfolgten Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Regierungsrathes Prof. Dr. Adam Wolf in Graz wurde bereits in der Gesamtsitzung der kaiserlichen Akademie vom 2. November zur Kenntniss genommen und der Theilnahme an diesem Verluste Ausdruck gegeben.

Der Verwaltungsrath des Museum Francisco-Carolinum in Linz ladet die kaiserliche Akademie zur Theilnahme an der am 19. November d. J. stattfindenden Jubelfeier des fünfzigjährigen Bestandes dieses Museums ein.

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung: „Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie. XII. Mittheilung. Über Veränderungen des elektromotorischen Verhaltens der Muskeln infolge elektrischer Reizung“, von Prof. E. Hering und Dr. W. Biedermann in Prag.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet einen Nachtrag zu seiner Abhandlung: „Über das Arbeitsquantum, welches bei chemischen Verbindungen gewonnen werden kann.“

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben von Herrn Prof. Dr. E. v. Fleischl in Wien behufs Wahrung der Priorität vor, welches angeblich die vorläufige Mittheilung über eine vom Einsender gemachte physiologische Entdeckung enthält.

Das w. M. Herr Hofrath J. Petzval überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Oskar Simony in Wien: „Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze.“ (Schluss.)

Herr Regierungsrath Prof. Dr. Karl Friesach in Graz überreicht eine Abhandlung: „Über die Anziehung einer von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoidenflächen begrenzten, unendlich dünnen Massenschicht, sowie eines aus derartigen Schichten bestehenden Körpers auf einen äusseren Punkt.“

Herr J. Palisa, Adjunct der Wiener Sternwarte, überreicht einen „Bericht über die von ihm während der totalen Sonnenfinsterniss vom 6. Mai 1883 angestellten Beobachtungen.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie royale de Belgique: Mémoires couronnés et autres Mémoires. Tomes XXXI, XXXIII, XXXIV et XXXV. Bruxelles, 1881—82—83; 8°.

— — Mémoires couronnés et Mémoires des savants Étrangers. Tome XLIV. Bruxelles, 1882; 4°.

— — Mémoires. Tome XLIII. 2^e partie. Bruxelles, 1882; 4°.—
Tome XLIV. Bruxelles, 1882; 4°.

— — Biographie nationale. Tome VII. 1^{er} & 2^e fascicules de la 2^e partie. Bruxelles 1881 & 1883; 8°.

Accademia, R. delle scienze di Torino: Memorie. Serie seconda. Tomo XXXIV. Torino, 1883; fol.

Ackerbau-Ministerium, k. k.: Statistisches Jahrbuch für 1882. Wien, 1883; 8°.

Central-Anstalt, k. k. für Meteorologie und Erdmagnetismus. Jahrbücher. Jahrgang 1880. N. F. XVII. Band. Der ganzen Reihe XXV. Band. Wien, 1883; 4°.

Central-Commission, k. k. statistische: Österreichische Statistik I. Band, 1., 2. u. 3. Heft. Wien, 1882; fol. — II. Band, 1. u. 2. Heft. Wien, 1882; fol. — III. Band, 1. Heft. Statistik des Sanitätswesens der im Reichsrathe vertretenen Königreiche und Länder für das Jahr 1880. Wien, 1883; fol.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVII. Nos. 16 & 17. Paris, 1883; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. IV. Jahrgang, 1883. Heft X. October. Berlin, 1883; 4°.

- Gesellschaft, Astronomische:** Vierteljahresschrift. XVIII. Jahrgang, 3. Heft. Leipzig, 1883; 8°.
- deutsche, chemische: Berichte. XVI. Jahrgang Nr. 14. Berlin, 1883; 8°.
 - schlesische für vaterländische Cultur. LX. Jahresbericht, Breslau, 1883; 8°.
- Greifswald, Universität:** Akademische Schriften pro 1882. 57 Stücke; 8°.
- Handels-Ministerium, k. k. in Wien, statistisches Departement:** Statistische Nachrichten über die Eisenbahnen der österr.-ungarischen Monarchie für das Betriebsjahr 1880. Wien, Budapest 1883; folio.
- Handels- und Gewerbekammer in Wien:** Statistischer Bericht über Industrie und Gewerbe des Erzherzogthums Österreich unter der Enns im Jahre 1880. Wien, 1883; folio.
- Journal, the American of Science.** Vol. XXVI, Nos. 152—154. August—October 1883. New Haven; 8°.
- Moniteur scientifique du Docteur Quesneville:** Journal mensuel. 27^e année, 3^e série, tome XIII, 503^e livraison. Novembre 1883. Paris; 4°.
- Museum Francisco-Carolinum:** XLI. Bericht nebst der 35. Lieferung der Beiträge zur Landeskunde von Österreich ob der Enns. Linz, 1883; 8°.
- — Urkunden-Buch des Landes ob der Enns. VIII. Band. Wien, 1883; 8°.
- Nature.** Vol. XXVIII. Nr. 730. London, 1883; 8°. — Vol. XXIX. Nr. 731. London, 1883; 8°.
- Repertorium der Physik.** XIX. Band, 7., 8., 9. u. 10. Heft München und Leipzig, 1883; 8°.
- Society, the Zoological of London:** Proceedings. For the year 1882. Part IV. April 1st. 1883. London; 8°. — Proceedings for the year 1883. Part I. January and February. June 1st. 1883. London; 8°. •
- — Transactions. Vol. XI, part 8. London, 1883; 4°.
 - — A List of the Fellows corrected to May 1st, 1883; London; 8°.

- Society, the Zoological of London: Proceedings of the scientific Meetings for the years 1880, 1881 & 1882. London; 8°.
- the Cambridge philosophical: Proceedings. Vol. IV; parts 2—5. Cambridge, 1881—82 & 83; 8°.
- — Transactions. Vol. XIII. Part 2. Cambridge 1882; 4°.
- Verein, naturhistorischer der preussischen Rheinlande und Westphalens: Verhandlungen. XXXIX. Jahrgang. II. Hälfte. Bonn, 1882; 8°. — XL. Jahrgang. I. Hälfte. Bonn, 1883; 8°.
- Vierteljahresschrift, österreichische, für wissenschaftliche Veterinärkunde. LIX. Band. II. Heft. (Jahrgang 1883 II.) Wien, 1883; 8°.
- Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. III. Jahrgang 1883. 10. Heft. October. Berlin, 1883; 4°.
-

Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze.

(Schluss.)

Von Dr. Oskar Simony,

a. o. Professor an der Wiener Hochschule für Bodencultur.

(Mit 6 Tafeln.)

II.

Untersuchung jener Erscheinungen, welche bei einem unverdrehten, biegsamen Ringe von kreisförmigem Querschnitte auftreten, wenn man einen, den Ring vollständig durchsetzenden, längs dessen Mittellinie in sich selbst zurückkehrenden Schnitt durch denselben führt.

Die im vorliegenden zweiten Theile unserer Abhandlung zu beschreibenden Gebilde zeigen im Vergleiche zu jenen, welche aus einem unverdrehten, biegsamen Ringe durch Schnitte erster Art entstehen¹ insoferne einen complicirteren Bau, als hier ausser positiven und negativen Knotenverbindungen verschiedener Ordnungen² auch wechselseitige Verschlingungen je zweier Gebilde vorkommen, welche nur in den einfachsten Fällen auf positive (Taf. VI, Fig 21) oder negative (Taf. VI, Fig. 22) Verbindungen irgend welcher Art reducirbar sind.

¹ Die hierauf bezüglichen Untersuchungen des Verfassers sind im LXXXV. Bande der Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften, II. Abtheilung, pag. 907—928, ferner im LXXXVII. Bande, II. Abtheilung, pag. 556—587 veröffentlicht worden.

² Schematische Darstellungen von Knotenverbindungen 1^{ter}, 2^{ter} und ($r-1$)^{ter} Ordnung findet man auf Taf. III, IV und V des ersten Theiles meiner Abhandlung.

Es combiniren sich nämlich die genannten Verbindungen hier gemeiniglich mit anderweitigen eigenthümlichen Verschlingungen, zu deren vollständiger Characteristik die nachstehenden Hilfsbegriffe genügen:

1. Die Verknotung erster Ordnung (Taf. VI, Fig. 23, 24), als welche wir jede Verschlingung zweier gleichgebauter Knoten bezeichnen, in der, falls man den inneren — in beiden schematischen Figuren als verdickte Doppellinie gezeichneten — Knoten von dessen Basis bis zum Schlusstheile durchläuft, die correspondirenden Elemente des äusseren Knotens sich stets zur rechten Hand vorfinden. Der jeweilige Typus (T) der Verknotung stimmt natürlich mit jenem der beiden, sie constituirenden Knoten überein und wird demnach, wenn die letzteren positive Knoten a ter Art vorstellen (Fig. 23), das Symbol: $[(+)_a]$, hingegen bei einer Verschlingung zweier negativer Knoten a ter Art das Symbol: $[(−)_a]$ besitzen. Im ersten Falle nennen wir auch die Verknotung positiv, im zweiten negativ, und ist aus einem Vergleiche von Fig. 23 mit Fig. 24 unmittelbar zu entnehmen, dass sich beide Verknotungen für alle denkbaren Werthe von a wie ein gegebenes Object zu dem Spiegelbilde seiner Rückseite verhalten.

2. Die Verknotung zweiter Ordnung (Taf. VII, Fig. 25, 26). — Dieselbe entsteht, sobald sich zwei gleichgebauter Knotenverbindungen erster Ordnung derart verschlingen, dass je zwei einander correspondirende Knoten derselben zusammen eine Verknotung erster Ordnung bilden, und an der Übergangsstelle von den Schlusstheilen des ersten in die Bögen des zweiten Knotenpaares gleichfalls keinerlei Überkreuzungen von, einander entsprechenden Elementen der beiden Knotenverbindungen stattfinden. Je nachdem die letzteren positiv oder negativ sind, wird man auch die Verknotung als positiv oder negativ bezeichnen und ihren jeweiligen Typus: T durch dasselbe Symbol characterisiren können, welches den, sie constituirenden Knotenverbindungen zugehört. Es repräsentirt also speciell die in Fig. 25 schematisch dargestellte positive Verknotung erster Ordnung eine solche vom Typus: $[(+)_a(+)_b]$, hingegen die in Fig. 26 veranschaulichte negative Verknotung erster Ordnung eine solche vom Typus: $[(−)_a(−)_b]$. — Verknotungen von den Typen:

$[(+)_a(-)_b]$ und $[(-)_a(+)_b]$ kommen bei den hier zu beschreibenden Gebilden nicht vor, und sind überdies jene Werthe, welche a und b gleichzeitig annehmen können, denselben Beschränkungen wie bei den früher betrachteten Knotenverbindungen erster Ordnung unterworfen, d. h. es ist b entweder gleich a oder gleich $a+1$.

3. Die Verknotung r ter Ordnung (Taf. VIII, Fig. 27, Taf. IX, Fig. 28), welche sich in derselben Weise aus zwei gleichgebauten Knotenverbindungen $(r-1)$ ter Ordnung zusammensetzt, wie die Verknotung zweiter Ordnung aus der Combination zweier Knotenverbindungen erster Ordnung hervorgeht. Es constituiren demnach je zwei einander entsprechende Knoten der beiden Knotenverbindungen $(r-1)$ ter Ordnung auch hier mitsammen eine Verknotung erster Ordnung, und zeigen die Übergangsstellen von den Schlusstheilen des 1ten, 2ten, . . . $(r-1)$ ten Knotenpaares in die Bögen des 2ten, 3ten, . . . r ten Knotenpaares nirgends Überkreuzungen von, einander correspondirenden Elementen jener Knotenverbindungen. Das jeweilige Typensymbol der letzteren bestimmt zugleich den Typus der betreffenden Verknotung, so dass speciell die in Fig. 27 und 28 schematisch dargestellten Verknotungen, welche wir kurzweg als positive und negative Verknotung r ter Ordnung bezeichnen, die Typengleichungen:

$$T = [(+)_a1 (+)_a2 \dots (+)_{a_{r-1}} (+)_{a_r}],$$

$$T = [(-)_a1 (-)_a2 \dots (-)_{a_{r-1}} (-)_{a_r}]$$

zu erhalten haben. — Analog wie bei den, durch Schnitte erster Art erzeugbaren Knotenverbindungen $(r-1)$ ter Ordnung bleiben die $2(2^{r-1}-1)$ übrigen Typen:

$$[(+)_a1 (+)_a2 \dots (+)_{a_{r-1}} (-)_{a_r}] \dots [(-)_a1 (-)_a2 \dots (-)_{a_{r-1}} (+)_{a_r}]$$

bei den hier vorkommenden Verknotungen gleichfalls unvertreten, und sind die jeweiligen Werthe von $a_2, a_3, \dots, a_{r-1}, a_r$ entweder insgesamt gleich a_1 , oder theilweise oder insgesamt gleich a_1+1 .

Nachdem hiemit die im Folgenden gebrauchten neuen Hilfsbegriffe ausreichend präcisirt erscheinen, muss behufs ihrer practischen Verwerthung noch hervorgehoben werden, dass die Verbindungen und Verknotungen in den sie enthaltenden

Gebilden anfänglich nicht isolirt sind, sondern jene Aufhängungen, aus welchen die betreffende Verbindung besteht, unmittelbar nach Vollendung des Schnittes theils innerhalb, theils ausserhalb der jeweiligen Verknotung auftreten. Da sich nun die Aufhängungen der ersten Kategorie längs einer der beiden, in einander verschlungenen Knotenverbindungen ohne Schwierigkeit von jedem Knoten auf den nächstfolgenden, mithin durch fortgesetztes Verschieben endlich auf den Schlusstheil des letzten Knotens übertragen lassen, kann man die Verknotungen von den Verbindungen stets so trennen, wie es in den Figuren 23—28 dargestellt ist. Dieselben veranschaulichen überdies die Thatsache, dass die mit einer gegebenen Verknotung combinirten Aufhängungen in allen hier vorkommenden Fällen zugleich mit dieser positiv oder negativ ausfallen. — Ihre Characteristik kann natürlich ebenfalls mittelst symbolischer Relationen gegeben werden, und wollen wir hiebei im Anschlusse an die zur Beschreibung einfacher Knoten eingeführten Typengleichungen den Typus: T einer gegebenen Reihe von Aufhängungen durch das Symbol: $[(+)_n]$ oder $[(−)_n]$ ausdrücken, je nachdem dieselben die in Fig. 21 oder die in Fig. 22 dargestellte Verbindung constituiren.

Dies vorausgeschickt, ziehen wir jetzt zunächst jene Gebilde in Betracht, welche aus einem unverdrehten, biegsamen Ringe entstehen, wenn man die Axe des schneidenden Instrumentes bei Ausführung des betreffenden Schnittes zweiter Art in einer ungeraden Anzahl (u) von Umläufen um ein gerades Vielfaches von $\pm 180^\circ$ dreht.

Man erhält so immer je zwei ringförmig geschlossene Gebilde, deren aufeinanderfolgende Querschnitte, falls der zerschnittene Ring ein massiver war, congruente Kreissectoren von dem Centriwinkel $\frac{180^\circ}{u}$ vorstellen. Ihre Scheitel liegen — unter λ die Länge der Mittellinie des ursprünglichen Ringes verstanden — in jedem der beiden Gebilde auf einer Linie von der Länge λu , und sind auch die Verdrehungszahlen: z_1, z_2 beider Gebilde stets einander gleich. ¹

¹ Dass hieraus noch keineswegs auf Congruenz beider Gebilde geschlossen werden darf, lässt sich am einfachsten durch Erörterung jenes

Auf diese Art erscheint das Ergebniss des Schnittes von Fall zu Fall eindeutig bestimmt, sobald ausser dem gemeinsamen Werthe: z von z_1 und z_2 noch die Typengleichungen der durch den Schnitt erzeugten Verbindungen und Verknotungen angegeben werden.

Specialfalles darthun, in welchem der Schnitt zweiter Art in einem einzigen Umlaufe ohne Drehung in sich selbst zurückkehrt und hiebei die Ebene der Mittellinie des Ringes senkrecht durchschneidet. Man kann dann die beiden durch den Schnitt erhaltenen Gebilde als Rotationskörper auffassen, welche, wenn wir dieser Betrachtung ein ebenes rechtwinkliges Coordinatensystem und einen, dessen Ordinatenaxe im Abstände $\frac{\lambda}{2\pi} = c$ vom Ursprunge berührenden Kreis von dem Radius: r des Ringquerschnittes zu Grunde legen, durch Drehung der oberen und unteren Hälfte dieses Kreises um die Abscissenaxe als Rotationsaxe entstehen. Infolge dessen gelten für die Volumina: V_1, V_2 des äusseren und inneren Rotationskörpers die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \pi \int_0^{2r} (c + \sqrt{2rx - x^2})^2 dx - 2c^2 r \pi = \\
 &= \pi \left\{ x(c^2 + rx - \frac{1}{8}x^2) + c(x-r) \sqrt{2rx - x^2} + cr^2 \arcsin \frac{x-r}{r} \right\}_0^{2r} \\
 &\quad - 2c^2 r \left\{ = r^2 \pi (\frac{1}{2}\lambda + \frac{4}{3}r), \right. \\
 V_2 &= 2c^2 r \pi - \pi \int_0^{2r} (c - \sqrt{2rx - x^2})^2 dx = \\
 &\quad = r^2 \pi (\frac{1}{2}\lambda - \frac{4}{3}r),
 \end{aligned}$$

d. h. es differiren die Volumina der beiden, durch jenen Schnitt erzeugten Gebilde um $\frac{8}{3}r^3\pi$.

¹ Die hier mitgetheilten Experimente sind insoferne mühevoller durchzuführen als die correspondirenden Versuche mit Schnitten erster Art, weil einerseits die Entfernung der Aufhängungen aus den jeweiligen Verknotungen schon bei Verknotungen vierter Ordnung sehr zeitraubend ist, andererseits die einzelnen Theile der beiden Gebilde, um den Character ihrer Verknotung deutlich hervortreten zu lassen, in relativ kurzen Intervallen fixirt werden müssen. Da ferner die Breite der zu befestigenden Streifen behufs Entwirrung complicirterer Verknotungen bis auf circa 1^{mm} reducirt werden muss, ist eine dauerhafte Fixirung derselben nur mittelst sehr dünner Stahlnadeln möglich, wobei man am vortheilhaftesten eine sogenannte Insektenzange mit schmalen, schwach gebogenen Schenkeln verwendet.

Die eben gemachten Bemerkungen führen zu nachstehender schematischer Beschreibung meiner, durch Schnitte zweiter Art gewonnenen speciellen Resultate, wobei, wie im ersten Theile der vorliegenden Abhandlung, die jeweilige Umlaufszahl: u des Schnittes als Eintheilungsgrund dienen, und eine Sonderung der Drehungszahlen: t der Schnitte in zwei Gruppen vorgenommen werden mag, von welchen die erste ausschliesslich negative, die zweite nur positive Specialisirungen von t enthält:

$$(1) \dots u = 1.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = 0$.

$$t = -2: \text{Zwei knotenfreie Gebilde, } \bar{T} = [(\pm)_1]; *$$

$$t = -4: \quad " \quad " \quad " \quad , \quad \bar{T} = [(+)_2];$$

$$t = -6: \quad " \quad " \quad " \quad ; \quad \bar{T} = [(+)_3];$$

$$t = -8: \quad " \quad " \quad " \quad ; \quad \bar{T} = [(+)_4].$$

$$(2) \dots u = 3.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +2$.

$$t = -2: \text{Zwei knotenfreie Gebilde, } \bar{T} = [(+)_3];$$

$$t = -4: T = [(+)_1], \bar{T} = [(+)_3];$$

$$t = -8: T = [(+)_1^2], \bar{T} = [(+)_4];$$

$$t = -10: T = [(+)_1 (+)_2], \bar{T} = [(+)_5];$$

$$t = -14: T = [(+)_2^2], \bar{T} = [(+)_7];$$

$$t = -16: T = [(+)_2 (+)_3], \bar{T} = [(+)_8].$$

$$(3) \dots u = 5.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +4$.

$$t = -2: \text{Zwei knotenfreie Gebilde, } \bar{T} = [(+)_5];$$

$$t = -4: T = [(+)_2], \bar{T} = [(+)_5];$$

$$t = -6: T = [(+)_1 (+)_2], \bar{T} = [(+)_5];$$

$$t = -8: T = [(+)_1^2], \bar{T} = [(+)_5];$$

$$t = -12: T = [(+)_1^3], \bar{T} = [(+)_6];$$

$$t = -14: T = [(+)_1^2 (+)_2 (+)_1], \bar{T} = [(+)_7];$$

$$t = -16: T = [\{(+)_1 (+)_2\}^2], \bar{T} = [(+)_8];$$

$$t = -18: T = [(+)_1 (+)_2^2], \bar{T} = [(+)_9].$$

* Das doppelte Zeichen drückt hier die Thatsache aus, dass speciell die positive und negative Verbindung erster Art in einander transformirbar sind.

$$(4) \dots u = 7.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +6$.

$$\begin{aligned} t = -2: & \text{Zwei knotenfreie Gebilde, } \bar{T} = [(+)_7]; \\ t = -4: & T = [(+)_3], \bar{T} = [(+)_7]; \\ t = -6: & T = [(+)_2^2], \bar{T} = [(+)_7]; \\ t = -8: & T = [(+)_1 (+)_2^2], \bar{T} = [(+)_7]; \\ t = -10: & T = [(+)_1^2 (+)_2 (+)_1], \bar{T} = [(+)_7]; \\ t = -12: & T = [(+)_1^5], \bar{T} = [(+)_7]; \\ t = -16: & T = [(+)_1^6], \bar{T} = [(+)_8]; \\ t = -18: & T = [(+)_1^3 (+)_2 (+)_1^2], \bar{T} = [(+)_9]. \end{aligned}$$

$$(5) \dots u = 9.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +8$.

$$\begin{aligned} t = -4: & T = [(+)_4], \bar{T} = [(+)_9]; \\ t = -8: & T = [(+)_2^2], \bar{T} = [(+)_9]; \\ t = -10: & T = [(+)_1 (+)_2^2], \bar{T} = [(+)_9]; \\ t = -14: & T = [(+)_1^3 (+)_2 (+)_1^2], \bar{T} = [(+)_9]; \\ t = -16: & T = [(+)_1^7], \bar{T} = [(+)_9]. \end{aligned}$$

$$(6) \dots u = 11.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +10$.

$$\begin{aligned} t = -8: & T = [(+)_2 (+)_3^2], \bar{T} = [(+)_11]; \\ t = -10: & T = [(+)_2^4], \bar{T} = [(+)_11]; \\ t = -14: & T = [\{(+)_1 (+)_2\}^2], \bar{T} = [(+)_11]; \\ t = -16: & T = [\{(+)_1^2 (+)_2\}^2 (+)_1], \bar{T} = [(+)_11]. \end{aligned}$$

$$(7) \dots u = 13.$$

Gemeinsame diesbezügliche Verdrehungszahl: $z = +12$.

$$\begin{aligned} t = -8: & T = [(+)_3^3], \bar{T} = [(+)_13]; \\ t = -10: & T = [\{(+)_2 (+)_3\}^2], \bar{T} = [(+)_13]; \\ t = -14: & T = [(+)_1 (+)_2^2], \bar{T} = [(+)_13]; \\ t = -16: & T = [(+)_1 \{(+)_2 (+)_1 (+)_2\}^2], \bar{T} = [(+)_13]. \end{aligned}$$

Auf Grundlage dieser und der folgenden Ergebnisse:

$$\begin{aligned} u = 3, t = +10: & T = [(-)_1 (-)_2], \bar{T} = [(-)_3]; \\ u = 5, t = +14: & T = [(-)_1^2 (-)_2 (-)_1], \bar{T} = [(-)_7]; \\ u = 9, t = + 8: & T = [(-)_2^2], \bar{T} = [(-)_9]; \\ u = 11, t = +12: & T = [(-)_1 (-)_2^2], \bar{T} = [(-)_11] \end{aligned}$$

sind wir berechtigt, die nachstehenden Gesetze vorläufig als mathematische Erfahrungssätze auszusprechen, welche — unter p, q beliebige positive, ganze Zahlen gedacht — für sämtliche Specialisirungen der beiden Relationen:

$$u = 2p - 1, t = \pm 2q$$

ihre Gültigkeit behaupten:

I. Der jeweilige Werth von z ist bei negativer Axendrehung des schneidenden Instrumentes positiv, bei positiver Axendrehung desselben negativ und seinem absoluten Betrage nach stets gleich der um 1 verminderten Umlaufszahl des betreffenden Schnittes zweiter Art. Gleichzeitig mit z fallen dann auch die Verbindung und eventuelle Verknotung beider Gebilde positiv respective negativ aus.

II. Die Anzahl: h der durch den Schnitt bedingten Aufhängungen ist für $q < u$ constant gleich u , während sie für $q > u$ mit dem jeweiligen Werthe von q zusammenfällt.

III. Die durch den Schnitt entstandenen Gebilde sind nur für

$u = 1, t = \pm 2q$, beziehungsweise: $u = 2p - 1, t = \pm 2$ unverknotet, in allen übrigen Fällen jedoch mit einer Verknotung versehen, und stimmt deren Typus ausnahmslos mit dem Typus jener Knotenverbindung überein, welche durch einen Schnitt erster Art von der Umlaufszahl: u und der Drehungszahl: $t = \pm q$ erhalten wird. Da sich nun bekanntlich bei derartigen Schnitten dieselbe Knotenverbindung auch dadurch herstellen lässt, dass man die Axe des schneidenden Instrumentes in q -Umläufen um: $\pm u \times 360^\circ$ dreht, und q offenbar sowohl eine ungerade als eine gerade Zahl vorstellen kann, entspricht jeder durch Schnitte erster Art erzeugbaren Knotenverbindung eine Verknotung von congruentem Typus.

Um nunmehr auch den Zusammenhang dieser Inductionsschlüsse mit unseren früheren Erfahrungssätzen vollständig zu übersehen, vergleiche man die auf der Ringoberfläche für $u = 2p - 1, t = q$ entstehende Grenzcurve des Schnittes erster Art

mit jenen Grenzlinien, welche einem Schnitte zweiter Art von gleicher Umlaufszahl aber doppelt so grosser Drehungszahl zugehören. Hiebei zeigt sich, dass die letzteren aus je zwei identisch verlaufenden Grenzlinien der ersten Art bestehen, und jede Windung der einen Grenzlinie zwischen je zwei Windungen der anderen zu liegen kommt. Es kann also das, jenem Schnitte zweiter Art entsprechende Resultat auch erhalten werden, indem man durch das, mittelst des besprochenen Schnittes erster Art hergestellte Gebilde nochmals einen in sich selbst zurücklaufenden Schnitt führt, welcher die Centriwinkel sämtlicher Querflächen desselben halbiert.

Hieraus geht hervor, dass zunächst die Inductionsschlüsse I und III als nothwendige Consequenzen früherer Erfahrungssätze aufzufassen sind. Bezüglich des Inductionsschlusses II ist dies allerdings nicht unmittelbar evident, lässt sich aber leicht auf Grundlage der bekannten Thatsache darthun, dass die Ordnungszahl der durch irgend einen Schnitt erster Art erhaltenen Knotenverbindung gefunden wird, wenn man den absoluten Betrag der kleineren der beiden Zahlen u und t um zwei Einheiten vermindert.

Ist nämlich erstens für den betreffenden Schnitt zweiter Art q kleiner als u , so besitzt jedes der beiden Gebilde eine Knotenverbindung $(q-2)$ ter Ordnung, welche von der Gesamtverdrehung des Gebildes: $(u-1) \times 360^\circ$ den Betrag: $(q-1) \times 360^\circ$ in Form jener $(q-1)$ irreductibeln Überkreuzungen in Anspruch nimmt, welche der aus den Umschlingungen des ersten Knotens heraustretende Schlusstheil des $(q-1)$ ten Knotens mit den $(q-1)$ Knotenbögen bildet. Die übrigen $(u-q)$ Drehungen um je 360° treten in den knotenfreien Theilen beider Gebilde zwar ursprünglich auch als Überkreuzungen auf, lassen sich aber durch Streckung derselben direct in eben so viele Windungen um je 360° umsetzen, womit vorläufig das Auftreten von $(u-q)$ Aufhängungen erklärt ist. Da ferner der Schnitt an und für sich q -volle Windungen um die Mittellinie des Ringes ausführt, was — unabhängig von den jeweiligen Verdrehungen beider Gebilde — q weitere Aufhängungen des einen Gebildes auf dem anderen bedingt, so ergibt sich für $q < u$ in der That: $h = (u-q) + q = u$.

Ist dagegen zweitens q grösser als u , so absorbiren die zwei in allen derartigen Fällen entstehenden Knotenverbindungen ($u-2$)ter Ordnung mit je ($u-1$) Knoten die gesammte Verdrehung beider Gebilde in Form von irreductibeln Überkreuzungen, und können daher nur die Windungen des Schnittes in der Gestalt von Aufhängungen zur Geltung gelangen, d. h. es muss $h = q$ sein.

Es erübrigt jetzt noch die Besprechung jener Schnitte zweiter Art, für welche u und t entweder gleichzeitig ungerade Zahlen vorstellen, oder u eine gerade, t eine ungerade Zahl repräsentirt.

Indem wir hiebei von der Betrachtung der Grenzlinien des jeweiligen Schnittes auf der Ringoberfläche ausgehen, ergibt sich, dass dieselben immer eine einzige in sich selbst zurückkehrende Curve von doppelter Krümmung constituiren, welche die Peripherie jedes Querschnittes des Ringes in $2u$ gleiche Theile zerlegt und dessen Mittellinie ebenso oft umwindet, als t positive oder negative Einheiten besitzt. Es ist mithin jeder solche Schnitt zweiter Art einem Schnitte erster Art mit gleicher Drehungszahl aber doppelt so grosser Umlaufzahl äquivalent, und lassen sich alle hier in Betracht kommenden Gebilde direct auf Grundlage unserer ersten Reihe von Erfahrungssätzen beschreiben.

Auf diese Art können in unverdrehten, biegsamen Ringen ohne Ausführung von Querschnitten überhaupt nur einfache Verbindungen, Knotenverbindungen und Verknotungen erzeugt werden, wobei sich speciell bei den einfachen Verbindungen, den Knotenverbindungen nullter und Verknotungen erster Ordnung durch passende Wahl von u und t jeder denkbare specielle Typus realisiren lässt, während Knotenverbindungen und Verknotungen höherer Ordnungen nur in gewissen, durch meine früheren Entwicklungen vollständig präcisirten Typen herstellbar sind.

Hieran knüpft sich unmittelbar die Frage, wie oft irgend eine empirisch mögliche Verbindung beziehungsweise Verschlingung auftritt, sobald man für die Schnitte beider Kategorien alle denkbaren Specialisirungen von u und t in Betracht zieht?— Da dieselbe augenscheinlich in drei Unterfragen zerfällt, er-

$p_1, p_2, \dots p_n$, z. B. rp_m , zugleich ein Vielfaches anderer Primzahlen: p_i, p_n, \dots , so repräsentirt

$$a - rp_m = \left(\frac{a}{p_m} - r \right) p_m$$

ebenfalls ein solches und wird gerade oder ungerade sein, je nachdem r ungerade oder gerade ist. Da mithin bei der Reducation der beiden Zahlengruppen:

$$1, 3, 5, \dots a-2; 2, 4, 6, \dots a-1$$

auf die zu a relativen Primzahlen aus jeder Zahlengruppe gleich viel Zahlen entfallen, wird $Z' = \frac{1}{2}Z$, respective in diesem Falle:

$$N = Z + Z' = \frac{3}{2}Z.$$

Hienach ist N ausser für $a = 2$ nur dann eine ungerade Zahl, wenn sich a als Potenz einer absoluten Primzahl von der Form: $4p - 1$ darstellen lässt, indem für:

$$a = (4p - 1)^2 \text{ die Gleichung: } Z = 2(2p - 1)(4p - 1)^{2-1} \text{ besteht.}$$

Diese Schlüsse gelten auch für negative Verbindungen und liefern speciell für $a = 1^*, 2, 3, \dots 100$ das Zahlenschema:

a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N
1	2	11	15	21	18	31	45	41	60	51	48	61	90	71	105	81	81	91	108
2	1	12	4	22	10	32	16	42	12	52	24	62	30	72	24	82	40	92	44
3	3	13	18	23	33	33	30	43	63	53	78	63	54	73	108	83	123	93	90
4	2	14	6	24	8	34	16	44	20	54	18	64	32	74	36	84	24	94	46
5	6	15	12	25	30	35	36	45	36	55	60	65	72	75	60	85	96	95	108
6	2	16	8	26	12	36	12	46	22	56	24	66	20	76	36	86	42	96	32
7	9	17	24	27	27	37	54	47	69	57	54	67	99	77	90	87	84	97	144
8	4	18	6	28	12	38	18	48	16	58	28	68	32	78	24	88	40	98	42
9	9	19	27	29	42	39	36	49	63	59	87	69	66	79	117	89	132	99	90
10	4	20	8	30	8	40	16	50	20	60	16	70	24	80	32	90	24	100	40

welches an und für sich wohl nur bei den Zahlen:

$$2, 4, 8, 16, \dots; 3, 9, 27, 81, \dots$$

sofort einen gesetzlichen Zusammenhang zwischen a und N erkennen lässt. Da nämlich Z für $a = 2^x$ gleich 2^{x-1} wird, ferner

* Für $a = 1$ ist $N = 2$, weil die positive und negative Verbindung erster Art in einander transformirbar sind.

für $a = 3^n$ mit: $2(3^{n-1})$ coincidirt, ist für die erste Zahlenreihe $N = \frac{1}{2}a$, dagegen für die zweite: $N = a$.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Erledigung der beiden übrigen Unterfragen, welche die Bestimmung von N für positive oder negative Knotenverbindungen, beziehungsweise Verknotungen fordern. — Da hiebei nur empirisch mögliche Verschlingungen in Betracht kommen, wird deren jeweiliger Typus: T stets als eine Specialisirung jener allgemeinen Typengleichungen auftreten, welche wir im ersten Theile der vorliegenden Abhandlung für $u = a$, $t = \pm b$, resp. $u = b$, $t = \pm a$ nach Umformung des Quotienten $\frac{b}{a}$ in:

$$k + \frac{\rho}{a} = k + \frac{1}{\frac{\rho_1 + 1}{\rho_2 + \dots + \frac{1}{\rho_n}}}$$

abgeleitet haben.¹ In Folge dessen ist in der vorgelegten Typengleichung die Windungszahl: w_1 des ersten Knotens stets gleich k , die Anzahl: n_1 der Knoten mit höheren Windungszahlen gleich $\rho - 1$, und die Gesamtzahl aller Knoten: n gleich $a - 1$, also:

$$a = n + 1, \quad b = (n + 1)w_1 + (n_1 + 1),$$

mittelst welcher Daten sich über den jeweiligen Werth von N , wie folgt, entscheiden lässt:

1. Bildet T den Typus einer positiven oder negativen Knotenverbindung, so kann dieselbe für ungerade Werthe von a und b durch zwei verschiedene Schnitte erster Art, jedoch durch keinen einzigen Schnitt zweiter Art erzeugt werden, während in jenem Falle, wo entweder a oder b eine gerade Zahl vorstellt, speciell der Schnitt erster Art mit gerader Umlaufszahl einem Schnitte zweiter Art mit der halben Umlaufszahl und derselben Drehungszahl entspricht. Es ist also im ersten Falle N constant gleich 2, im zweiten dagegen gleich 3.

¹ S. h. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. LXXXV. Bd. pag. 925, 927 und LXXXVII. Bd. pag. 559—562.

2. Characterisirt T eine positive oder negative Verknötung, so beschränkt sich die Frage nach den möglichen Erzeugungsweisen derselben von vornherein auf Schnitte zweiter Art mit ungeraden Umlaufszahlen und geraden Drehungszahlen. Es wird daher, sobald eine der beiden Grössen a, b durch 2 theilbar ist, nur ein einziger Schnitt die betreffende Verknötung hervorbringen, während bei ungeraden Werthen von a und b stets je zwei, durch die Gleichungen:

$$u = a, t = \pm 2b; u = b, t = \pm 2a$$

präcisirte Schnitte das gewünschte Resultat liefern.

Hiemit erscheint der jeweilige Werth von N für jede empirisch mögliche Verschlingung direct gegeben, und tritt nunmehr auch das eigenthümliche Verhältniss der Verbindungen zu den Verknötungen deutlich hervor. Da nämlich kraft des Inductionsschlusses II für beide zuvor angeführte Substitutionsreihen die Anzahl der, gleichzeitig mit der Verknötung entstehenden Aufhängungen dieselbe bleibt, combinirt sich jede Verknötung nur mit einer einzigen Verbindung, so dass der Zusammenhang zwischen den jeweiligen Typengleichungen für T und \bar{T} gleichfalls als ein fixer anzusehen ist.

Diese Thatsache führt schliesslich auf die Vermuthung, dass jede Verknötung mit der ihr zugehörigen Verbindung — theoretisch genommen — Ein Ganzes ausmache, mithin die Sondernung beider Gebilde nicht sachlich, sondern nur formal durch die Forderung bedingt sei, die in Betracht gezogenen Erscheinungen möglichst einfach zu beschreiben.

Um hertüber Aufschluss zu gewinnen, recurriren wir auf die bekannten Wechselbeziehungen zwischen Knotenverbindungen und Verknötungen, gemäss welchen aus jeder Knotenverbindung mittelst eines Längsschnittes eine Verknötung von congruentem Typus herstellbar ist, folglich alle früher gefundenen Transformationsgleichungen für beide Verschlingungsformen gelten. Es werden also auch die der Substitutionsreihe:

$$u = 2p - 1, t = \pm 2\{k(2p - 1) + \rho\}, \text{ beziehungsweise:} \\ u = 2p - 1, t = \pm 2\rho$$

entsprechenden Verknötungen der $2(p - 1)$ ten und $(\rho - 1)$ ten Ord-

nung für $k = 0$ in einander transformirbar sein, wobei dann die Zahl der irreductibeln Überkreuzungen in jedem der verknoteten Gebilde von $2(p-1)$ auf $(\rho-1)$ sinkt, respective je $(2p-\rho-1)$ Überkreuzungen in ebenso viele Windungen um je 360° verwandelt werden können. Auf diese Art erfahren die der ersten Substitutionsreihe zugehörigen $\{k(2p-1)+\rho\}$ Aufhängungen für $k = 0$ einen Zuwachs um $(2p-\rho-1)$ Aufhängungen von gleichem Zeichen, und so entsteht die, für die zweite Substitutionsreihe charakteristische Verbindung der $(2p-1)$ ten Art. Dies beweist, dass an den Transformationen der Verknotungen die ihnen zugeordneten Verbindungen gleichfalls Antheil nehmen, womit die früher ausgesprochene Vermuthung ihre Bestätigung gefunden hat.

Der Zweck, den meine bisherigen Betrachtungen verfolgten, war ein vorwiegend praktischer; handelte es sich ja doch zunächst darum, die Gesetze einer unbegrenzten Reihe von theilweise sehr complicirten Erscheinungen nach Einführung passender Hilfsbegriffe vollständig und möglichst einfach wiederzugeben. Jetzt, nachdem diese Aufgabe gelöst ist, muss auch die theoretische Bedeutung der hier untersuchten Erscheinungen festgestellt, also die Frage erörtert werden, in welche Geometrie dieselben einzuordnen sind?

Als Ausgangspunkt mögen hiebei gewisse Thatsachen und Erwägungen physiologisch-psychologischer Natur dienen, welche ich, um die Grenzen der vorliegenden Abhandlung nicht zu überschreiten, hier selbstverständlicherweise nur so weit berühren werde, als es zu einer klaren Beantwortung der vorhin gestellten Frage nothwendig erscheint. Es ist daher auch selbstverständlich, dass ich den im Folgenden benützten Erwägungen dieser Art vorläufig keine allgemein bindende Beweiskraft zuerkenne, wohl aber die Anerkennung ihrer subjectiven Brauchbarkeit erwarten darf, weil sie mich bei der Wahl meiner Untersuchungsmethoden auf den richtigen Weg geleitet haben.

Jede psychische Function wird, wenn sie zum Bewusstsein gelangt, insoferne direct localisirt, als wir den Sitz des letzteren in das Haupt verlegen.

Zu dieser Localisation tritt speciell bei Sinnesempfindungen noch eine zweite hinzu, indem sich an jede derselben die unmittelbare ¹ Vorstellung zweier Orte, eines Ortes im Centrum und eines in der Peripherie knüpft.

Aber Vorstellungen von Orten involviren nicht nothwendig solche von Ausdehnung, ² denn wir localisiren sowohl unser Bewusstsein als auch Töne und Worte, ohne hiebei Vorstellungen von Ausdehnung zu entwickeln.

Es geschieht dies erst auf Grundlage jener Sinnesempfindungen, welche wir in unser Tastfeld, beziehungsweise in unser Gesichtsfeld localisiren. ³

¹ S. h. S. Stricker's 1877 im LXXVI. Bd. d. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. III. Abth. pag. 283—305 publicirte Abhandlung: „Untersuchungen über das Ortsbewusstsein und dessen Beziehungen zu der Raumvorstellung.“

² Dieser Satz, welcher das Fundament aller meiner Betrachtungen über die Entwicklung der Raumvorstellung gebildet hat, ist gleichfalls in der eben citirten Abhandlung S. Stricker's enthalten.

³ Die nun folgende Entwicklung des Begriffes: „Sinnenraum“ verwerthet zum Theile Ideen, welche bereits F. Herbart (s. dessen 1824 5 zu Königsberg erschienenes Werk: „Psychologie als Wissenschaft“) in den nachstehenden Stellen niedergelegt hat:

„Der sinnliche Weltraum ist nicht ursprünglich nur Einer; sondern Auge und Gefühl oder Getast haben unabhängig von einander Gelegenheit zur Production des Raumes gegeben; später ist Beides verschmolzen und erweitert. — Man kann nicht oft genug gegen das Vorurtheil warnen, als gebe es nur Einen Raum, den des sinnlichen Weltalls. Es gibt ganz und gar keinen Raum; aber es gibt Veranlassungen, dass Systeme von Vorstellungen ein Gewebe von Reproductions-gesetzen durch ihre Verschmelzung erzeugen, dessen Vor-gestelltes nothwendig ein Räumliches — nämlich für den Vorstel-lenden — sein muss.“ (I. Theil, p. 360).

„Was aber die Art und Weise anlangt, wie das Reale in den Raum gesetzt wird, so ist merkwürdig, dass dazu allemal die sämtlichen drei Dimensionen des Raumes erfordert werden. Dieses kann in den allerersten Auffassungen sinnlicher Gegenstände nicht gelegen haben, denn ursprünglich bieten sich dem Auge sowohl als dem Gefühl nur Flächen dar; und es ist kein Zweifel, dass anfangs die gefärbten und widerstehenden Flächen für real genommen werden ohne ein Bedürfniss der dritten Dimension, an welche noch gar nicht gedacht wird.“ (II. Theil. p. 349).

Da wir einerseits zwei, unsere Haut berührende Zirkelspitzen bei gegenseitiger Annäherung der letzteren unter 1 Mm. an jeder Hautstelle als eine einzige Spitze empfinden,¹ andererseits zwei leuchtende Punkte, deren scheinbare Entfernung weniger als 30 Secunden beträgt, nicht mehr von einander trennen können,² setzen sich unser Tast- und Gesichtsfeld aus Tast-, respective Gesichtsbezirken von endlicher Grösse zusammen. Die letzteren schliessen sich überdies nicht einmal lückenlos an einander, indem die Eintrittsstellen beider Sehnerven keine wie immer geartete Lichtempfindung vermitteln.³

Die weitere Frage, wie sich auf Grundlage von Tast- und Gesichtswahrnehmungen Vorstellungen von Ausdehnung entwickeln, findet eine Erledigung durch Verwerthung der Thatsache,⁴ dass die Organe des Tast- und Gesichtsinnes mit Muskeln versehene bewegliche Endapparate besitzen, während die Rinde des Grosshirnes, als Sitz des Bewusstseins, unbeweglich unter der Schädeldecke ruht, und die peripheren Enden beider Hörnerven ebenfalls unverschiebbar im Felsenbeine liegen. Hieraus ergibt sich als Wahrscheinlichkeitsschluss, dass wir zu Vorstellungen von Ausdehnung durch Association von Tast-, respective Gesichtswahrnehmungen mit Bewegungsvorstellungen, also, da die Vorstellung jeder wie immer gearteten Bewegung des eigenen Leibes mit

„Unter welchen Bedingungen aber entstehen die verschiedenen Abstufungen des Verschmelzens einer jeden Vorstellung mit allen übrigen?“ ... „Die ganz einfache Antwort ist: Wenn man das beschauende Auge und den tastenden Finger vorwärts und rückwärts bewegt.“ (II. Theil, pag. 126).

¹ Näheres hierüber findet man in W. Wundt's 1880 zu Leipzig erschienenen Werke: „Grundzüge der physiologischen Psychologie“, 2. Aufl., II. Bd., pag. 4—14.

² S. h. in erster Linie das 1867 zu Leipzig erschienene Werk von H. Helmholtz: „Handbuch der physiologischen Optik“, p. 215—222.

³ Auf dem Durchmesser dieses „blinden Flecks“ könnten nach den Messungen von H. Helmholtz (Handbuch der physiologischen Optik, pag. 213) elf Vollmonde nebeneinander Platz finden.

⁴ S. h. S. Stricker's 1879 zu Wien erschienene „Studien über das Bewusstsein“, pag. 45—49.

Muskelgefühlen verknüpft ist, ¹ durch Verknüpfung jener Wahrnehmungen mit Gefühlen von Muskelbewegung gelangen.

Bei jeder solchen Association tritt die Bewegungsvorstellung selbst als ein Quale auf, welches uns durch keine andere sinnliche Qualität ersetzt werden kann, ² und es erscheint demnach gerechtfertigt, einen specifischen ³ Muskelsinn anzunehmen.

Indem ferner die, jene Wahrnehmungen begleitenden Muskelbewegungen viele unter sich gleichartige, aber zeitlich getrennte motorische Innervationen erfordern, werden wir uns der ein- beziehungsweise mehrmaligen Wiederholung eines und desselben Willensactes bewusst und gelangen so nach Einführung von Zählworten zur Kenntniss verschiedener Anzahlen, welche von der Beschaffenheit des Gezählten völlig unabhängig erscheinen und sich daher auch in eine einzige Reihe, nämlich die Reihe der unbenannten ganzen Zahlen, einordnen lassen. ⁴

Es entsteht jetzt noch die Frage, welche Merkmale die auf Grundlage jener Wahrnehmungen associirten Vorstellungen von Ausdehnung für die letztere liefern?

Sind die associirten Wahrnehmungen speciell Tastwahrnehmungen, so nöthigt uns schon das Bestreben, die beim Betasten gegebener Objecte gewonnenen Eindrücke und die Art, wie dieselben erlangt wurden, gesondert im Bewusstsein festzuhalten, einerseits zur Unterscheidung zwischen Flächen, Kanten und Spitzen, anderseits zur Aufstellung der Richtungsunterschiede: Rechts — Links, Vorwärts — Rückwärts,

¹ S. h. S. Stricker's 1882 zu Wien erschienene „Studien über die Bewegungsvorstellungen“, p. 11—13.

² S. h. die eben citirte Brochure S. Stricker's, p. 35—38.

³ Derselbe unterrichtet uns ausserdem über den Druck, welchen wir auf ein gegebenes Object ausüben, ferner über den Grad der Anstrengung, welche mit dem Heben irgend einer Last verbunden ist. (S. h. z. B. M. Foster's, von N. Kleinenberg ins Deutsche übersetztes Lehrbuch der Physiologie, pag. 501—503).

⁴ S. h. in erster Linie Paul du Bois-Reymond's Betrachtungen über discrete Grössen, in dessen 1882 zu Tübingen erschienenem Werke: „Die allgemeine Functionentheorie“, I. Theil, p. 16—20.

Aufwärts — Abwärts. Die Entwicklung der letzteren Vorstellungen vermittelt zugleich das Bewusstwerden einer räumlichen Anordnung¹ der getasteten Gegenstände und ihrer verschiedenen Entfernungen vom tastenden Subjecte, deren Vergleichung die ersten rohen² Massbestimmungen in, dem eigenen Körper und dessen Bewegungen — ich erinnere hier an das Schrittmass — entnommenen Masseinheiten begründet. — Parallel hiemit läuft die Einschaltung einfacher gebrochener Zahlen zwischen die Glieder der Reihe ganzer Zahlen.

Einen analogen Weg nimmt die Entwicklung der Vorstellungen von Ausdehnung bei den, mit Muskelgefühlen associirten Gesichtswahrnehmungen.

Auch diese erscheinen, wie Beobachtungen an glücklich operirten Blindgeborenen lehren,³ anfänglich als Flächenbilder der wahrgenommenen Gegenstände, deren räumliche Vertiefung zunächst unter fortwährender Mitwirkung des Tastsinnes zu Stande kommt.⁴ Infolge dessen liefert die räumliche Anordnung der Tastempfindungen die erste Directive für jene der Gesichtswahrnehmungen und wird in der Folge von den sichtbaren und erreichbaren auf die sichtbaren, aber unerreichbaren Gegenstände ausgedehnt.

Da wir ferner alle übrigen Sinnesempfindungen auf tastbare respective sichtbare Objecte beziehen, vereinigen sich die verschiedenen Vorstellungen von Ausdehnung zur Vorstellung eines alle Localisationen unserer Sinnesempfindungen in sich auf-

¹ Vergl. die 1879 zu Berlin im Druck erschienene Rede von H. Helmholtz: „Die Thatsachen in der Wahrnehmung“, pag. 20, 21.

² Indem ich dieses Attribut gebrauche, habe ich lediglich Menschen mit normalen Sinnen im Auge; für Blindgeborene mit ihrem ausserordentlich feinen Tastsinn wäre dasselbe jedenfalls unzulässig.

³ S. h. z. B. die Berichte Cheselden's und Wardrop's (reproducirt in H. Helmholtz's Handbuch der physiologischen Optik, p. 587—592) unter Hinzuziehung des eingehenden Resume's über die Mittheilungen der genannten und anderer Ärzte in C. Stumpf's 1878 zu Leipzig erschienenen Werke: „Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung“ pag. 289—298.

⁴ Kinder pflegen in den ersten Stadien ihrer Entwicklung nach allen Gegenständen, welche sie sehen, zu greifen, selbst nach dem Monde.

nehmenden Sinnenraumes ¹ als des Inbegriffes sämtlicher Orte, in welche wir überhaupt Sinnesempfindungen localisiren können.

In diesem Raume finden wir Theile desselben durch sichtbare Flächen als Körper abgegrenzt; die Kanten und Spitzen der letzteren bilden sichtbare Linien und sichtbare Punkte, welche aber, weil unsere Gesichtsbezirke von endlicher Grösse sind, ebenso als räumliche Gebilde betrachtet werden müssen, wie die Körper selbst. Indem wir also die Eigenschaften sichtbarer Punkte, Linien und Flächen studiren, lernen wir zugleich Eigenschaften unseres Sinnenraumes kennen. Hiebei müssen wir, da die Art, wie wir unsere Sinnesempfindungen localisiren, als ein Merkmal unserer Organisation dieselbe bleibt, wo immer wir uns befinden mögen, ² auch unserem Sinnenraume an allen Orten und nach allen Richtungen dieselbe Beschaffenheit zuschreiben und gehen demgemäss, indem wir jene Gebilde studiren, von dem Grundsatz aus, dass sich an allen Orten und nach allen Richtungen gleiche Constructionen vollziehen lassen. ³

Auf diese Art entwickelt sich zunächst eine Geometrie der einfachsten, anschaulich ausführbaren Constructionen, auf welche ich deshalb nicht näher eingehe, weil Euclid's classische Bearbeitung derselben schon längst ein Gemeingut

¹ Nur auf diesen Raum können die bekannten Worte Kant's (Einleitung in die Kritik der reinen Vernunft) bezogen werden: „Lasset von Eurem Erfahrungsbegriffe eines Körpers Alles, was daran empirisch ist, nach und nach weg: die Farbe, die Härte oder Weiche, die Schwere, die Undurchdringlichkeit, so bleibt doch der Raum übrig, den er (welcher nun ganz verschwunden ist) einnahm, und den könnt Ihr nicht weglassen“.

² Zur Erläuterung dieses Satzes bemerke ich, dass ich von der Existenz eines absoluten Raumes subjectiv überzeugt, zugleich aber der Ansicht bin, es liessen sich über die Natur desselben lediglich auf Grundlage der Thatsache Aufschlüsse gewinnen, dass speciell jene Orte des absoluten Raumes, welche unseren jeweiligen Sinnenraum constituiren, eine dreifach ausgedehnte, unbegrenzte und endliche Mannigfaltigkeit bilden.

³ Dieser oberste Grundsatz jeder empirischen Geometrie ist zuerst von H. Grassmann (s. dessen 1844 zu Leipzig erschienene „Lineale Ausdehnungslehre“, p. 35) ausgesprochen worden.

aller Mathematiker geworden ist. Aber die sogenannten Axiome dieser Geometrie bilden, insoweit sie sich auf unsere Raumvorstellung beziehen, nur eine Zusammenstellung jener unmittelbar anschaulichen Sätze, welche zu einer bequemen Beweisführung nothwendig und hinreichend sind; die der Vorstellung unseres Sinnenraumes möglicherweise specifisch eigenthümlichen Prädicate treten in jenen Axiomen keineswegs direct zu Tage.¹

Ausserdem ist hervorzuheben, dass alle empirischen Massbestimmungen, welche mittelst der beiden elementaren Massstäbe dieser Geometrie, der geraden Linie und des ebenen Winkels, möglich werden, numerisch in ganzen und gebrochenen Zahlen ausdrückbar sind, denn infolge der endlichen Grösse unserer Gesichtsbezirke lässt sich weder die Theilung einer gegebenen Strecke, noch jene eines gegebenen Winkels beliebig weit fortsetzen. Allerdings werden die Grenzen, bis zu welchen wir hiebei vordringen können, mit der fortschreitenden Verbesserung unserer Microscope im Laufe der Zeit weiter hinausgeschoben werden, allein der Umstand, dass gegenwärtig noch keine definitive Grenze für die empirische Theilung jener geometrischen Massstäbe präcisirbar ist, erlaubt keineswegs den Schluss, dass eine solche Grenze überhaupt nicht existirt.²

Anders verhält es sich mit der Theilung der Zahlen selbst, indem wir nach Einführung gebrochener Zahlen jeder beliebigen Zahl eine kleinere gegenüberstellen können. In der Fortsetzung dieser Operation stossen wir auf keine wie immer geartete Schranke und schliessen hieraus inductiv auf die Existenz von unendlich kleinen Zahlen, d. h. Zahlen, die kleiner sind als jede noch so klein angenommene Zahl.

Dass nun derartige Zahlen überhaupt als Grössen auftreten können, erscheint darin begründet, dass in uns kraft den an die Spitze unserer physiologisch-psychologischen Erwägungen gestellten Thatsachen Vorstellungen von Orten ohne jede be-

¹ Vergl. das 1877 zu Leipzig erschienene Werk B. Erdmann's: „Die Axiome der Geometrie,“ p. 34, 35.

² Vergl. das 1882 zu Leipzig erschienene Werk von M. Pasch: „Vorlesungen über neuere Geometrie,“ p. 10 und 18.

stimmte Ausdehnung vorhanden sind. Sobald wir uns also einen Ort nicht mehr als Ort in unserem Sinnenraume, sondern als innere Gestaltung vorstellen, können wir demselben auch eine nach allen Richtungen unendlich kleine Ausdehnung zuschreiben, ¹ d. h. ihn als idealen Punkt denken.

Diese Vorstellung darf dann gemäss unserer Auffassung der Bewegungsvorstellung als einer selbstständig bestehenden psychischen Funktion mit der letzteren combinirt werden und liefert so den Begriff der idealen Linie, in welcher jedes endliche Stück aus unendlich vielen, lückenlos aufeinander folgenden unendlich kleinen Elementen zusammengesetzt ist, ² d. h. eine im mathematischen Sinne stetige Mannigfaltigkeit bildet. Um also die ideale Linie als messbare Grösse zu definiren, muss die Zahlenreihe aus einer Reihe discreter rationaler Zahlen durch Einschaltung der Irrationalzahlen in eine stetig fortschreitende Reihe verwandelt werden.

Die ideale Linie erzeugt ihrerseits durch Bewegung die ideale Fläche, ³ und die Bewegung der letzteren schliesslich den idealen Körper als Theil des idealen Raumes, d. i. einer Mannigfaltigkeit idealer Punkte, welche sich von jedem derselben stetig nach allen Richtungen fortsetzt. Jede solche Mannigfaltigkeit besitzt zufolge ihrer Entstehungsweise im Endlichen dieselben Massverhältnisse wie im Unendlichkleinen; in jeder lassen sich ideale Linien und Flächen durch Gleichungen zwischen stetig veränderlichen Coordinaten analytisch präcisiren, und die Lehren der Infinitesimalrechnung mathematisch strenge verwerthen.

¹ Vergl. P. du Bois-Reymond's „Allgemeine Functionentheorie.“ I. Theil, p. 106—108.

² Ich verweise hier in erster Linie auf die scharfsinnigen Auseinandersetzungen P. du Bois-Reymond's über das Unendlichkleine und dessen Haupteigenschaften (s. das eben citirte Werk, I. Theil, p. 71—75).

³ Unser Begriff der idealen Fläche entspricht hienach vollständig der Gauss'schen Auffassungsweise geometrischer Flächen „als Körper, deren eine Dimension verschwindet“ (s. Gauss' Werke, IV. Bd. p. 344). Diese Auffassungsweise liegt bekanntlich auch den „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ (s. Gauss' Werke, IV. Bd. p. 219—258) zu Grunde.

Dagegen können in einer Mannigfaltigkeit, welche wir, wie unseren Sinnenraum, zunächst aus endlichen Elementen zusammensetzen, über die Art, wie diese Elemente sich aus hypothetischen unendlich kleinen Elementen aufbauen, die verschiedensten Annahmen logisch gleichberechtigt sein, d. h. die Massverhältnisse im Endlichen bestimmen hier nie eindeutig jene im Unendlichkleinen.¹ — In Folge dessen ist auch beispielsweise das analytische Gegenstück der anschaulich vorstellbaren Curve, wie F. Klein zuerst erkannt hat,² nicht die Function, sondern der Functionstreifen.

Die vorliegenden Betrachtungen liefern ausserdem den Beweis, dass unser Sinnenraum und jene Welt innerer Gestaltungen, welche wir als idealen Raum bezeichnet haben, völlig unabhängig von einander bestehen,³ also jeder Versuch, durch Discussion der möglichen Eigenschaften des idealen Raumes Beweismittel für die strenge Giltigkeit der Euclid'schen

¹ Vergl. die Worte B. Riemann's (Gesammelte Werke, p. 267): „Die Fragen über die Massverhältnisse des Raumes im Unmessbarkeinen gehören nicht zu den müssigen“... „Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahles, im Unendlichkleinen ihre Giltigkeit zu verlieren, es ist also sehr wohl denkbar, dass die Massverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind, und diess würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären liessen.“

² S. h. dessen wichtige, 1883 im XXII. Bd. der „Mathematischen Annalen“ erschienene Abhandlung: „Über den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve,“ p. 252, 253.

³ Ich citire hier des Vergleiches wegen die Worte J. Baumann's (s. dessen 1868/69 zu Berlin erschienenenes Werk: „Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie. I. Bd. p. 101): „Der Raum in mathematischer Hinsicht, rein als Vorstellung unseres Geistes gefasst, stellt sich, wenn er mit dem Raume draussen verglichen wird, bald als ein Wesen sui generis heraus; in ihm ist Allgemeines und Besonderes mit Einem Schlage gegeben; wir entwerfen ihn zugleich im Bilde und finden ihn in uns von selbst entworfen, wir durchheilen ihn und verfügen über ihn ohne Hinderniss; ganz anders finden wir es bei dem Raume, der ausser uns sich uns empfindbar macht; ein Schluss von einem auf den andern ist so durch die Sache selbst verboten.“

Axiome in unserem Sinnenraume zu gewinnen, ohne Erfolg bleiben muss. — Da jedoch unsere Sehnerven im wachen Zustande fortwährend erregt sind, verknüpfen wir mit der Vorstellung des idealen Punktes zumeist unwillkürlich jene eines sichtbaren Punktes und verfallen, indem wir die erstere Vorstellung nur durch Abstraction von der letzteren wieder herstellen können,¹ leicht dem Irrthume, es sei der ideale Raum als Inbegriff aller idealen Punkte überhaupt nur eine Abstraction, nicht aber eine, vielleicht uns allein eigenthümliche, selbstständige Schöpfung unseres Geistes.

Die Unabhängigkeit eines Theiles unserer Ortsvorstellungen vom Sinnenraume involviret ferner die Fähigkeit, ideale Punkte auch nach solchen Gesetzen einander zuzuordnen, welche mit Euclid's Axiomen in theilweisem Widerspruche stehen.

Auf diese Art resultiren zunächst die bekannten, in sich widerspruchsfreien Geometrien solcher Mannigfaltigkeiten idealer Punkte, in welchen, wie in dem, nach Euclid's Axiomen construirten idealen Raume,² jede Ortsbestimmung drei Grössenbestimmungen erfordert, dagegen das sogenannte Krümmungsmass in jedem idealen Punkte einen von Null verschiedenen (positiven oder negativen) Werth besitzt.

Hiebei führt die analytische Bestimmung der letzteren Grösse direct zu weiteren Verallgemeinerungen, indem sich zeigt, dass jede derartige Mannigfaltigkeit mittelst einer Gleichung zwischen vier, stetig veränderlichen Coordinaten aus einer

¹ Die Fähigkeit hiezu dürfte vielen Menschen vollständig fehlen. — So erklären beispielsweise Berkeley und Stumpf, es liesse sich keine Ausdehnung ohne Farbe denken, während Kant in seinem früher citirten Ausspruche andeutet, er könne sich auch Ausdehnung ohne jede Farbe vorstellen. — Sicherlich thun dies alle Blindgeborenen, welche auch die räumlichen Verhältnisse ihrer nächsten Umgebung richtig beurtheilen.

² Diese specielle Mannigfaltigkeit hat, da im 18. Jahrhundert ausser Euclid's Geometrie noch keine andere in sich widerspruchsfreie Geometrie bekannt war, meiner Ansicht nach den unbewuseten Ausgangspunkt der Kant'schen Definition des Raumes als einer a priori gegebenen und subjectiv nothwendigen Form aller äusseren Anschauung gebildet und sollte demnach auch bleibend mit dem Namen des grossen Philosophen verknüpft werden.

— im Riemann'schen Sinne — ebenen Mannigfaltigkeit aus-
 geschieden werden kann, welche für jede Ortsbestimmung vier
 Grössenbestimmungen nöthig macht und insoferne als vierfach
 ausgedehnt bezeichnet werden darf.

Durch consequente Fortsetzung dieser Untersuchungen muss
 daher schliesslich der Begriff einer n -fach ausgedehnten Man-
 nigfaltigkeit gewonnen werden, in welcher jede Ortsbestimmung
 n -Grössenbestimmungen erheischt, und deren Krümmungsmass: ¹

$$K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdots \rho_n}$$

speciell für $n = 2$ das bekannte Gauss'sche Krümmungsmass
 einer Fläche in einer „ebenen“ dreidimensionalen Mannigfaltig-
 keit liefert.

Alle auf dem hier angedeuteten analytischen Wege
 eingeführten höheren Mannigfaltigkeiten sind mathematisch
 gleichberechtigte innere Gestaltungen; an ihre Grössenbe-
 griffe ist demnach zunächst nur die Forderung ihrer Denkbar-
 keit zu stellen, ohne dass man hieraus auf die Anschaulich-
 keit, geschweige denn auf die Wirklichkeit der definirten
 Grössen schliessen dürfte. ²

Hiemit erscheinen jene Betrachtungen abgeschlossen, welche
 die, bei der Feststellung des geometrischen Characters der
 vorliegenden Arbeit in Frage kommenden allgemeinen Ge-
 sichtspunkte klarzulegen hatten; sie lehren, dass die hier
 untersuchten Erscheinungen, da sie unserem Sinnenraume ³

¹ Bezüglich der analytischen Darstellung dieser Hilfsgrösse verweise
 ich vor Allem auf die in den „Monatsberichten der Berliner-Akademie
 aus dem Jahre 1869“ erschienene Abhandlung L. Kronecker's: „Über
 Systeme von Functionen mehrer Variablen,“ p. 159—193 u. p. 688—698.

² Ich habe diesen Satz bereits vor zwei Jahren in meiner Brochüre
 über die Lösung des Knotenproblems (3. Auflage, p. 30) ausgesprochen
 und im Anschlusse hieran speciell jene vierfach ausgedehnte Mannig-
 faltigkeit analytisch präcisirt, welche ich in meinen bisherigen Untersuchen-
 gen über unbegrenzte und endliche dreidimensionale Mannigfaltig-
 keiten als analytischen Hilfsbegriff verwendet habe.

³ Ich sage deshalb immer „unser Sinnenraum“, weil beispielsweise
 der sogenannte Richtsinn der Samoeden Nordsibiriens und gewisser,
 vorzugsweise Nachts — selbst bei dichtem Nebel — wandernder Zug-

angehören, nur in eine empirische Geometrie eingeordnet werden können, ohne mit der Lehre von den sogenannten höheren Mannigfaltigkeiten an und für sich in irgend eine Beziehung zu treten. Überdies hat der von mir gewählte Entwicklungsgang auch die Gründe ersichtlich gemacht, aus welchen ich bei der Untersuchung der verschiedenen Schnitte erster und zweiter Art, um von jeder denkbaren Hypothese über die Natur unseres Sinnenraumes unabhängig zu bleiben, weder die Hilfsmittel der analytischen Geometrie noch jene der Infinitesimalrechnung benützt habe.

Der weitere Fortschritt unserer Betrachtungen knüpft sich an folgende drei Thatsachen:

1. Nicht alle Orte möglicher Localisation von Sinnesempfindungen sind in einem gegebenen Zeitabschnitte zugleich Orte wirklicher Localisation.
2. Die Orte wirklicher Localisation können zu verschiedenen Zeiten mit verschiedenen Orten möglicher Localisation zusammenfallen.
3. Die Orte wirklicher Localisation können auch gegenseitige Verschiebungen erfahren.

Diese Thatsachen veranlassen uns, die Gegenstände der Aussenwelt, welchen wir zunächst die specifischen Qualitäten unserer durch sie erregten Sinnesempfindungen als Eigenschaften beilegen, aus Elementen zusammenzusetzen, welchen wir, wie den Elementen unseres Sinnenraumes, endliche Ausdehnung, aber ausserdem die Fähigkeit zuschreiben, einerseits in Bezug auf Orte möglicher Localisation, andererseits gegeneinander verschiebbar zu sein.

vögel Wahrnehmungen vermitteln mag, für welche uns jedes Verständniß fehlt. — Eine Zusammenstellung besonders merkwürdiger diesbezüglicher Beobachtungen findet man u. A. in dem 1881 zu Leipzig erschienenen Werke F. v. Homeyer's: „Die Wanderungen der Vögel mit Rücksicht auf die Züge der Säugethiere, Fische und Insekten“, pag. 300—306. Ausserdem mag hier noch auf die zuerst von J. Lubbock (s. die 1883 zu Leipzig erschienene deutsche Ausgabe seines Werkes über Ameisen, Bienen und Wespen, p. 153—186) constatirte Thatsache verwiesen werden, dass gewisse Insekten, z. B. *Lasius niger* und *Formica fusca*, eine grosse Empfindlichkeit für ultraviolette Strahlen besitzen.

Indem wir ferner die Ursachen für die gegenseitigen Ortsveränderungen der so characterisirten Elemente in diese selbst verlegen, statten wir sie mit der weiteren Fähigkeit aus, auf einander einzuwirken, wobei wir die, über die Gesetze ihrer Wechselwirkungen möglichen Hypothesen ¹ in erster Linie durch die Forderung einschränken, dass aus den angenommenen Wirkungsgesetzen ² und bestimmten räumlichen Positionen und Geschwindigkeiten der wirksamen Elemente alle jene Naturerscheinungen resultiren sollen, welche wir in Folge unserer Organisation als gesetzmässig verlaufende Veränderungen zu erfassen im Stande sind.

Um endlich durch die, unter derartigen Voraussetzungen erzielbaren Erklärungen von Naturerscheinungen unser Causalitätsbedürfniss zu befriedigen, erheben wir noch die

¹ Hiebei lassen sich Anziehungs- und Abstossungskräfte auch unter ein einziges Wirkungsgesetz subsumiren, und auf Grundlage desselben die qualitativen Verschiedenheiten der wirksamen Elemente aus ihren räumlichen Verschiedenheiten ableiten, wie ich dies speciell für das Wirkungsgesetz:

$$K = \frac{mm'}{r^2} \cos \frac{\alpha}{r}$$

in meiner Arbeit: „Grundzüge einer neuen Moleculartheorie unter Voraussetzung Einer Materie und Eines Kraftprincipes (s. die 1873—1875 erschienenen Jahrgänge von Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, p. 463—510, p. 299—323, p. 177—211) dargethan habe.

² Der in solcher Form eingeführte Begriff von Kraftwirkung besitzt zunächst nur den Character eines, für eine bestimmte Auffassungsweise von Naturerscheinungen unentbehrlichen Hilfsbegriffes, aus dessen vielseitiger Verwerthbarkeit an und für sich noch keineswegs auf die wirkliche Existenz irgend welcher Kräfte geschlossen werden darf. Übrigens hat bereits Newton (s. die von R. Cotes veranstaltete 1714, zu Amsterdam erschienene Ausgabe der „Philosophiae naturalis principia mathematica“. p. 5) vor jedem derartigen Schlusse ausdrücklich gewarnt, indem er sagt: „Voces autem attractionis, impulsus vel propensionis cujuscunque in centrum indifferentes et pro se mutuo promiscue usurpo, has vires non physice sed mathematice tantum considerando. Unde caveat lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quae sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerō.“

Forderung, dass, wenn einmal irgend welchen Elementen: $E_1, E_2, \dots E_a, \dots E_b, \dots$ gewisse Eigenschaftscomplexe: $[C]_1, [C]_2, \dots [C]_a, \dots [C]_b, \dots$ zugeordnet worden sind, jedes Element mit seinem Eigenschaftscomplexe zu jeder Zeit und in jedem Orte unseres Sinnenraumes unveränderlich verbunden bleiben muss.¹

Würden nun zum Beispiele die Elemente E_a, E_b irgend einmal gleichzeitig denselben Ort in unserem Sinnenraume einnehmen, so würde für jedes der beiden Elemente ein Ort existiren, in welchem man dem einen Elemente entweder zugleich den Eigenschaftscomplex des anderen Elementes oder aber einen durch Verknüpfung beider Eigenschaftscomplexe: $[C]_a, [C]_b$ nach einem willkürlichen Gesetze gebildeten neuen Eigenschaftscomplex mit demselben Rechte beilegen könnte, wie den ihm ursprünglich zugeordneten. Um also unser Causalitätsbedürfniss zu befriedigen, müssen wir die gleichzeitig möglichen Bewegungen aller Elemente: $E_1, E_2, \dots E_a, \dots E_b, \dots$ von vorn herein insoferne einschränken, als dort, wo eines dieser Elemente sich gerade befindet, nie gleichzeitig ein zweites vorhanden sein kann.

Sobald wir jedoch räumliche Gebilde aus Elementen zusammensetzen, welchen wir — abgesehen von allen zwischen ihnen angenommenen Fernwirkungen — neben den Eigenschaften endlicher Ausdehnung und Beweglichkeit jene gegenseitiger Un-

¹ Von diesem Standpunkte aus ist es natürlich unstatthaft, dieselben Elemente mit einander durch Kräfte in Beziehung zu setzen, welche einmal als Functionen der jeweiligen Entfernungen jener Elemente. ein andermal als solche anderer veränderlicher Grössen definirt werden müssen, ohne dass es hiebei möglich wäre, durch Benützung von, zwischen den einzelnen Variablen bestehenden Relationen die Functionen erster Art zu jene zweiter Art zu transformiren. Daher lässt sich auch a priori nicht behaupten, dass die oben ausgesprochene Forderung noch mit der weiteren vereinbar ist, die betreffenden Erscheinungen möglichst einfach zu beschreiben, indem, wie ich in meiner Abhandlung: „Über eine Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik“ (Sitzb. der k. Akad. d. Wissensch. LXXXI. Bd., II. Abth. p. 399—414) hervorgehoben habe, die Erfüllung der letzteren Forderung speciell bei physikalisch-mechanischen Untersuchungen über organische Gebilde die Einführung von Kräften als Functionen der Geschwindigkeitsquadrate der bewegten Elemente und der Zeit nöthig machen kann.

durchdringlichkeit zuschreiben, entsteht das Bedürfniss nach einer empirischen Geometrie, welche auch der zuletzt genannten Eigenschaft Rechnung trägt, folglich weder eine Coincidenz von Linien mit Linien noch eine solche von Flächen mit Flächen im Sinne der Geometrie Euclid's zulässt.

Insoferne man nun jedem — im Sinne der gewöhnlichen Auffassungsweise — wirklich existirenden Körper die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit zuerkennt, ist die hier geforderte Geometrie am besten als concrete Geometrie zu bezeichnen, deren Gebilde consequent concrete Linien, Flächen und Körper, nicht aber materielle Linien, Flächen und Körper genannt werden dürfen, weil ihren Elementen wohl, wie den Atomen der Materie, endliche Ausdehnung, Beweglichkeit und Undurchdringlichkeit, aber noch nicht die Fähigkeit irgend welcher gegenseitiger Fernwirkungen beigelegt wird.

Auf diese Art könnte jedes Gebilde der concreten Geometrie alle überhaupt denkbaren Formen durchlaufen, wenn nicht die gegenseitige Undurchdringlichkeit seiner Elemente vorhanden wäre, und es entsteht jetzt die Frage, inwieweit die genannte Eigenschaft den Formenkreis jedes gegebenen concreten Gebildes einschränkt?

Das einfachste concrete Gebilde ist nun die concrete, knotenfreie, geschlossene Linie, für welche sich jene Frage wie folgt, präcisiren lässt: Es soll ein vollständiger Überblick über sämtliche, typisch von einander verschiedene Formen gegeben werden, welche eine solche Linie annehmen kann, ohne dass bei ihren Transformationen an irgend einer Stelle zwei freie Enden entstehen.

Die Erledigung des vorgelegten Problems ist in den vorangegangenen Untersuchungen enthalten, deren einfachste Resultate schon durch das Studium jener Erscheinungen zu gewinnen sind, welche ringförmig geschlossene, knotenfreie Bänder bei in sich selbst zurücklaufenden Längsschnitten zeigen.

Es schien mir daher auch zweckmässig, vor Allem die diesbezüglichen Sätze zu entwickeln und, da dieselben eine gemeinassliche, graphische Interpretation gestatten, hiertüber in einer selbstständigen, populären Schrift zu berichten.

Was nunmehr die Lösung selbst anbelangt, welche ich in der vorliegenden Arbeit für das erwähnte Problem geliefert habe, so tritt ihr eigenthümlicher Character am schärfsten hervor, wenn man eine analoge Aufgabe für eine als veränderlich gedachte Linie jenes idealen Raumes, welcher nach Euclid's Axiomen construirt wird, analytisch zu präcisiren sucht.

Es seien x, y, z, t vier reelle, auf dieselbe Masseinheit beziehbare, stetig veränderliche Grössen, ferner:

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_m, \dots \Phi_n; \Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_m, \dots \Psi_n$$

Functionen von x, y, z , dagegen:

$$f_1, f_2, \dots f_m, \dots f_n; F_1, F_2, \dots F_m, \dots F_n$$

einwerthige Functionen der einzigen Veränderlichen t , welche — unter $t_1, t_2, \dots t_m, \dots t_n$ lauter numerisch verschiedene Specialisirungen von t verstanden — mit einander durch die Relationen:

$$f_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)\dots(t-t_n)F_1(t)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\dots(t_1-t_n)F_1(t_1)},$$

$$f_2(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_3)\dots(t-t_n)F_2(t)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)\dots(t_2-t_n)F_2(t_2)},$$

$$\dots$$

$$f_m(t) = \frac{(t-t_1)\dots(t-t_{m-1})(t-t_{m+1})\dots(t-t_n)F_m(t)}{(t_m-t_1)\dots(t_m-t_{m-1})(t_m-t_{m+1})\dots(t_m-t_n)F_m(t_m)},$$

$$\dots$$

$$f_n(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_{n-1})F_n(t)}{(t_n-t_1)(t_n-t_2)\dots(t_n-t_{n-1})F_n(t_n)}$$

zusammenhängen und für keinen einzigen in Betracht kommenden Werth von t unendlich gross werden.

Man kann hiebei $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n; \Psi_1, \Psi_2, \dots \Psi_n$ so wählen, dass die n -Gleichungssysteme:

$$\Phi_1 = 0, \Psi_1 = 0; \Phi_2 = 0, \Psi_2 = 0; \dots \Phi_n = 0, \Psi_n = 0$$

n -Raumcurven von vorgeschriebenen geometrischen Formen analytisch darstellen, und nach Einführung der, insgesamt von Null verschieden vorausgesetzten reellen Constanten:

$$P_1, P_2, \dots P_m, \dots P_n; Q_1, Q_2, \dots Q_m, \dots Q_n$$

die beiden Gleichungen:

$$P_1 f_1 \Phi_1 + P_2 f_2 \Phi_2 + \dots + P_m f_m \Phi_m + \dots + P_n f_n \Phi_n = 0,$$

$$Q_1 f_1 \Psi_1 + Q_2 f_2 \Psi_2 + \dots + Q_m f_m \Psi_m + \dots + Q_n f_n \Psi_n = 0$$

bilden, in welchen t jetzt als ein veränderlicher Parameter zu betrachten ist. Dieselben characterisiren augenscheinlich für jedes specielle System der Functionen: f_1, f_2, \dots, f_n und der Constanten: $P_1, P_2, \dots, P_n; Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ eine veränderliche ideale Linie, welche, falls t stetig von 0 bis ∞ wächst, für $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ successive die Gestalt der 1ten, 2ten, \dots nten vorgeschriebenen Raumcurve annimmt.

Allerdings kann ausserdem noch die Forderung gestellt werden, dass nicht nur jene Raumcurven, sondern auch alle Zwischenformen der betreffenden idealen Linie geschlossene Curven bilden sollen, aber selbst dann erscheint es unmöglich, eine bestimmte Reihe typisch von einander verschiedener Grundformen anzugeben, auf welche alle denkbaren Formen des untersuchten Gebildes eindeutig beziehbar wären.

Gemäss diesen Erwägungen besitzt also meine Lösung des ersten Problems der concreten Geometrie hauptsächlich insoferne einen eigenthümlichen Character, als sie nach Einführung einer bestimmten Reihe eindeutig präcisirter Formentypen unveränderliche mathematische Beziehungen zwischen veränderlichen Gebilden liefert, deren Variabilität durch keine wie immer geartete analytische Beschreibung vollständig wiedergegeben werden könnte.

Das zweite Problem der concreten Geometrie betrifft die Feststellung des characteristischen Formenkreises für den einfachsten geschlossenen Liniensystem, also für jenes Liniensystem, welches durch Verschmelzung der vier Enden zweier concreter knotenfreier Linien erhalten wird.

Auch hier treten alle Grundtypen des fraglichen Formenkreises in gewissen Flächen auf, und zwar in jenen Gebilden, welche aus zwei, kreuzförmig mit einander verbundenen Streifen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und, längs den Mittellinien der ersteren in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen, so dass meine hierüber publicirte Arbeit zugleich die vollständige Beschreibung der im einfachsten geschlossenen

Liniencomplexe erzeugbaren Doppelverbindungen, Verknüpfungen und Verschlingungen erster Ordnung liefert.

Der weitere Entwicklungsgang der Betrachtungen ist nunmehr klar vorgezeichnet; an die Untersuchung des einfachsten, aus zwei concreten Linien gebildeten geschlossenen Liniencomplexes wird jene der einfachsten, aus 3, 4, . . . n concreten Linien zusammengesetzten geschlossenen Liniencomplexes anzureihen sein, und ist es in Anbetracht der kleinen Zahl von Gattungsbegriffen, welche die bisher von mir gelösten Probleme der concreten Geometrie erfordert haben, zu erwarten, dass sich endlich eine verhältnissmässig geringe Zahl oberster Classenbegriffe für alle typisch von einander verschiedenen Formen ergeben wird, welche concrete, geschlossene Liniencomplexe überhaupt durchlaufen können.

Auf Grundlage der, diesem neuen und ausgedehnten Forschungsgebiete entspringenden Resultate werden sich dann, da die concreten Linien gemäss ihrer Definitionsweise ebenso wie die übrigen Gebilde der concreten Geometrie aus dreidimensionalen Elementen bestehen, auch die typisch von einander verschiedenen Formenkreise geschlossener concreter Flächen und Körper vollständig präcisiren lassen, wodurch die Lehren der genannten Disciplin speciell für die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen Bedeutung gewinnen werden. Denn alle jene geschlossenen Flächen, für deren Punkte — als Orte der unabhängigen complexen Variablen aufgefasst — mehrwerthige Functionen der letzteren eindeutig bestimmt sind, dürfen als geschlossene concrete Flächen betrachtet werden, welche sich speciell aus unendlich kleinen dreidimensionalen Elementen aufbauen.¹

¹ Ich bin zu dieser Auffassungsweise Riemann'scher Flächen, welche auch mit der, von F. Klein entwickelten physikalischen Auffassungsweise derselben (s. dessen 1882 zu Leipzig erschienene Schrift: „Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale“) vereinbar ist, zuerst durch folgenden Ausspruch C. Neumann's (Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, p. 163) geführt worden: Wir setzen ein für alle mal fest, dass zwischen zwei Theilen einer Riemann'schen Windungsfläche, welche einander in irgend einer Linie durchsetzen, längs dieser Linie hin kein Zusammenhang, also auch keine Nachbarschaft stattfinden soll.

Aber abgesehen davon, dass die concrete Geometrie für den eben erwähnten Zweig der reinen Analysis von Nutzen sein wird, kann sie ausserdem bei jenen physikalisch-mechanischen Untersuchungen eine Verwerthung finden, welche die möglichen Gleichgewichts- und Bewegungsfiguren geschlossener materieller Systeme von veränderlicher Gestalt betreffen. Da nämlich die gleichzeitig möglichen Bewegungen der Elemente solcher Systeme nicht nur durch ihre gegenseitige Undurchdringlichkeit sondern auch durch wechselseitige Attractions- und Repulsionskräfte eingeschränkt werden, ist es von vornherein evident, dass alle typisch von einander verschiedenen Formen solcher materieller Gebilde in jenen der correspondirenden concreten Gebilde enthalten sind, also die Kenntniss der letzteren zugleich die Directive für eine Systemisirung der ersteren liefert.

Auf diese Art kann die concrete Geometrie in ihrer weiteren Ausbildung auch bei vergleichenden Studien über die Formen organischer Gebilde eine Rolle spielen, insoweit hiebei das Bestreben zur Geltung kommt, die Fülle der empirisch gegebenen Formen auf eine möglichst geringe Zahl möglichst einfacher Grundtypen zu beziehen.

Zum Schlusse der vorliegenden Arbeit mögen jetzt noch in Kürze die Gründe dargelegt werden, aus welchen ich bei der Lösung meiner Probleme weder den auf die Umschlingungen zweier geschlossener Linien bezüglichen Satz von Gauss, noch die von B. Listing und G. Tait für Knoten gewählten Darstellungsweisen verwerthen konnte.

Was zunächst den Gauss'schen Satz ¹ betrifft, so besagt derselbe bekanntlich, dass — unter x, y, z die Coordinaten irgend

¹ Dieser Satz, bekanntlich der einzige, in welchem Gauss das Gebiet der Topologie in Betracht gezogen hat, wird von seinem Entdecker mit folgenden historisch interessanten Bemerkungen (s. Gauss' Werke, V. Bd. pag. 605) eingeleitet: „Von der Geometria Situs, die Leibnitz ahnte, und in die nur einem Paar Geometern (Euler und Vandermonde) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts. Eine Hauptaufgabe aus dem Grenzgebiete der Geometria Situs und der Geometria Magnitudinis wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen.“

eines Punktes der einen, unter x', y', z' jene irgend eines Punktes der anderen geschlossenen Linie, unter Δ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x'-x, & y'-y, & z'-z \\ dx, & dy, & dz, \\ dx', & dy', & dz' \end{vmatrix}$$

verstanden — das durch beide Linien ausgedehnte Doppelintegral:

$$\iint \frac{\Delta}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{1/2}} = 4m\pi$$

ist, wenn m die Anzahl der Umschlingungen vorstellt.

Bringt man behufs praktischer Verwerthung des Integrales eine der beiden Curven durch Biegung in eine horizontale Ebene, so zeigt sich sofort, dass die zweite Curve, wenn man dieselbe von irgend einem ihrer Punkte aus vollständig durchläuft, die Ebene der ersten Curve bei manchen Umschlingungen von oben nach unten, bei anderen von unten nach oben durchsetzen kann. Es wird also wie schon C. Maxwell¹ erkannt, aber erst O. Boeddicker² eingehend nachgewiesen hat, nothwendig, zweierlei Arten von Umschlingungen zu unterscheiden, je nachdem dieselben infolge von Durchsetzungen erster Art oder von solchen zweiter Art entstehen, wonach der numerische Werth des genannten Doppelintegrales von Fall zu Fall durch das Product: $4\epsilon(a-b)\pi$ bestimmt erscheint, in welchem a die Anzahl der Umschlingungen erster Art, b jene der Umschlingungen zweiter Art vorstellt, und ϵ gleich $+1$ oder -1 zu setzen ist, je nachdem $a-b$ positiv oder negativ ausfällt.

Hieraus folgt aber weiter, dass der numerische Werth jenes Doppelintegrales beispielsweise für eine Doppelverbindung zweier Curven vom Typus: $[(+)_a(+)_b]$, ($a > b$) ebenso gross ausfällt, wie für eine einfache Verbindung $(a-b)$ ter Art, mithin speciell für $a = b$ nicht nur für zwei unverschlungene Curven, sondern auch für zwei Curven in einer Doppelverbindung vom Typus: $[(+)_a^2]$ verschwindet.

¹ S. h. dessen 1873 zu Oxford erschienenes Werk: „A treatise on Electricity and Magnetism“, vol. II. p. 40, 41.

² S. h. dessen 1876 zu Stuttgart erschienene Schrift: „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen mit Anwendungen in der Electrodynamic“, p. 52—58.

Auf diese Art steht der Gauss'sche Satz zu dem, was ich als positive, respective negative Aufhängung einer concreten Linie auf einer zweiten bezeichne, im Allgemeinen in keiner eindeutigen Beziehung, und war daher auch eine Anwendung desselben auf die von mir behandelten Fragen a priori ausgeschlossen.

Um endlich noch B. Listing's¹ und G. Tait's² Darstellungsweisen³ gegebener Knoten, soweit hiebei später von mir verwendete Knoten in Betracht gezogen wurden, ersichtlich zu machen und einen directen Vergleich mit meiner Darstellungsweise derselben Gebilde zu ermöglichen, habe ich die betreffenden Knoten auf Taf. X und XI der vorliegenden Arbeit einerseits in den von mir gewählten Gestalten, anderseits in den, ihnen von jenen Mathematikern gegebenen Formen abgebildet und drücke die zwischen den verschiedenen Verschlingungen

¹ S. h. dessen 1848 zu Göttingen erschienene „Vorstudien zur Topologie“, p. 54—58.

² S. h. ausser dessen Arbeit: „On knots“ (Transactions of the royal society of Edinburgh, vol. XXVIII, part I, p. 145—190) noch eine Reihe kleinerer Aufsätze über dasselbe Thema in den „Proceedings of the royal society of Edinburgh“, Session 1876—77 u. 1878—79.

³ Listing hat auch zuerst versucht, Verschlingungen symbolisch zu characterisiren, wobei er speciell dem positiven Knoten erster Art, der Verknüpfung vom Typus: $[(-)_1(+)_1]$ und jener von dem Typus: $[(-)_1^2(+)_1^2]$ die „Complexions-Symbole“:

$$\left. \begin{matrix} \{2\delta^3\} \\ \{3\lambda^2\} \end{matrix} \right\}, \quad \left. \begin{matrix} \{2\delta^4 + \delta^2\} \\ \{2\lambda^3 + 2\lambda^2\} \end{matrix} \right\}, \quad \left. \begin{matrix} \{\delta^5 + 3\delta^3\} \\ \{\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2\} \end{matrix} \right\}$$

zuordnete und die Thatsache, dass die in Fig. 52 und 54 dargestellten Verschlingungen in einander transformirbar sind, durch die symbolische Gleichung:

$$\left. \begin{matrix} \{\delta^5 + 3\delta^3\} \\ \{\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2\} \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} \{2\delta^4 + 2\delta^2\} \\ \{\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2\} \end{matrix} \right\}$$

ausdrückte. Tait bezieht dagegen seine Verschlingungen in erster Linie auf gewisse Buchstabenschemata, so z. B. die vier einfachsten Verschlingungen, nämlich die Knoten erster und zweiter Art und die beiden Verknüpfungen von den Typen: $[(+)_1^2]$ und $[(-)_1(+)_1]$ auf die Schemata:

$$\begin{aligned} & ACBACB|A, \quad ADBECADBEC|A, \\ & ACBDCAD|A, \quad ACBECADBED|A, \end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass meine Typengleichungen weder mit Listing's noch mit Tait's Symbolik in irgend einem Zusammenhange stehen.

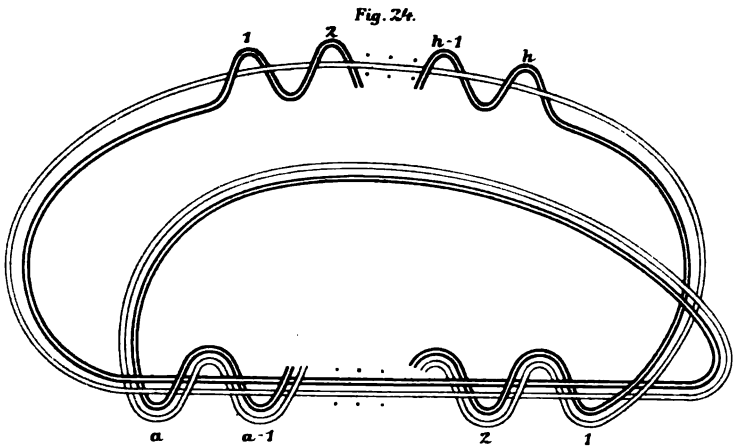
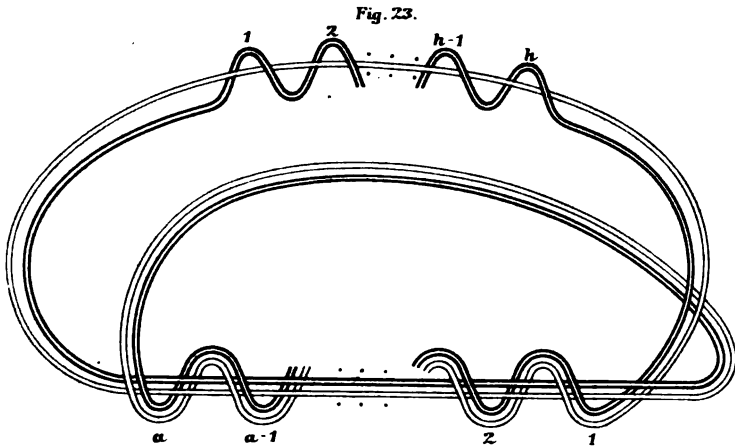
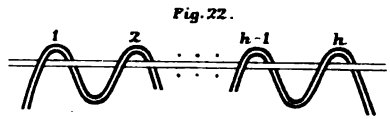
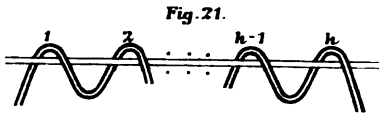
geltenden Beziehungen im Folgenden symbolisch aus, wobei die Namen: Listing und Tait der Kürze wegen auf deren Anfangsbuchstaben reducire und für die Worte: „transformirbar in“ das Zeichen $\overline{\sim}$ benütze.

Das Experiment lehrt nämlich, dass die nachstehenden Transformationen ausführbar sind:

- F. 29 (L., T.), F. 30 (T.) $\overline{\sim}$ F. 41, ($T = [(+)_1]$);
 F. 31, 32 (T.) $\overline{\sim}$ F. 42, ($T = [(+)_1^2]$);
 F. 33, 34, 35, 36 (L., T.) $\overline{\sim}$ F. 43, ($T = [(-)_1, (+)_1]$);
 F. 37, 38 (T.) $\overline{\sim}$ F. 44, ($T = [(+)_2]$);
 F. 39 (T.) $\overline{\sim}$ F. 45, ($T = [(+)_2, (+)_1]$);
 F. 40 (T.) $\overline{\sim}$ F. 46, ($T = [(+)_1, (+)_2]$);
 F. 47, 48 (T.) $\overline{\sim}$ F. 59, ($T = [(-)_1, (+)_1^2]$);
 Fig. 49 (T.) $\overline{\sim}$ F. 60, ($T = [(+)_2, (-)_1]$);
 F. 50, 51 (T.) $\overline{\sim}$ F. 61, ($T = [(-)_1, (+)_1, (-)_1]$);
 F. 52, 53, 54 (L., T.) $\overline{\sim}$ F. 62, ($T = [(-)_1^2, (+)_1^2]$);
 F. 55, 56 (T.) $\overline{\sim}$ F. 63, ($T = [(+)_1^2]$);
 F. 57, 58 (T.) $\overline{\sim}$ F. 64, ($T = [(+)_1, (+)_2]$).

In diesem Schema, welches alle von Listing graphisch dargestellten Knoten und fast die Hälfte sämmtlicher von Tait abgebildeter Knoten enthält, repräsentiren F. 41 und 44 speciell die positiven Knoten erster und zweiter Art, Fig. 42, 43, 45, 46, 60 Verknüpfungen erster Ordnung, Fig. 59, 61 solche zweiter Ordnung, F. 62 eine Verknüpfung dritter Ordnung, endlich Fig. 63, 64 Knotenverbindungen erster Ordnung, und dürfte wohl schon eine oberflächliche Vergleichung der in einander transformirbaren Figuren genügen, um die grössere Einfachheit meiner Knotenformen gegenüber jenen von Listing und Tait erkennen zu lassen.

Eine Verwendung der letzteren Knotenformen in meinen bisherigen Arbeiten auf dem Gebiete der concreten Geometrie wäre daher mit der, vom wissenschaftlichen Standpunkte nothwendigen Forderung unvereinbar gewesen, die in Betracht gezogenen Erscheinungen nicht nur vollständig, sondern auch möglichst einfach zu beschreiben.



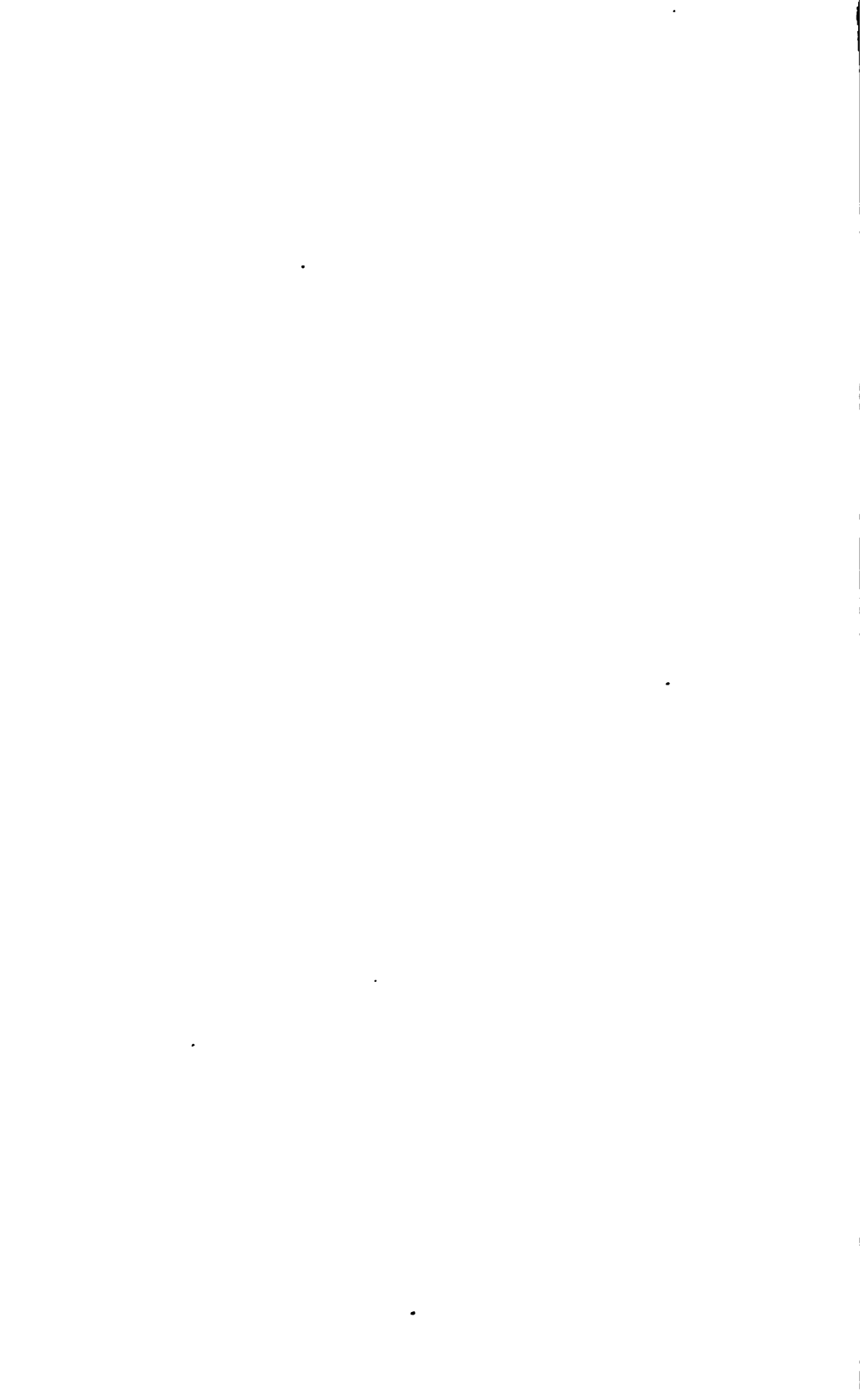


Fig. 25.

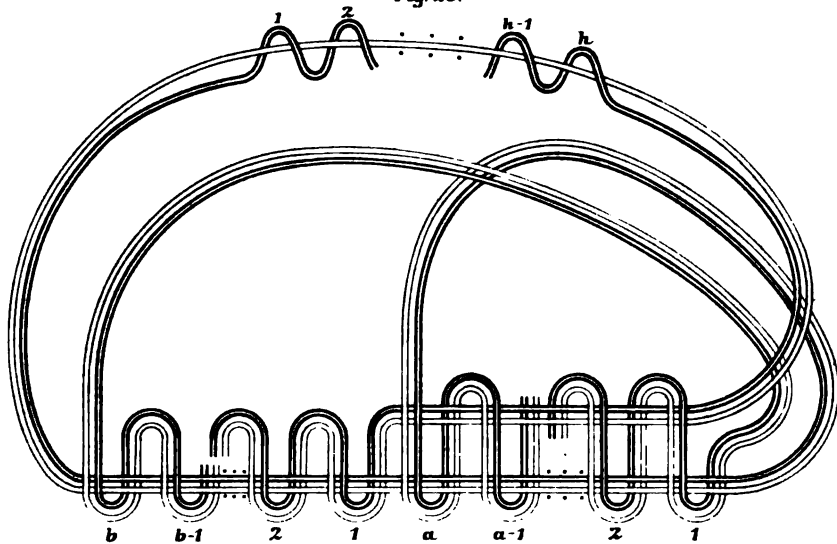
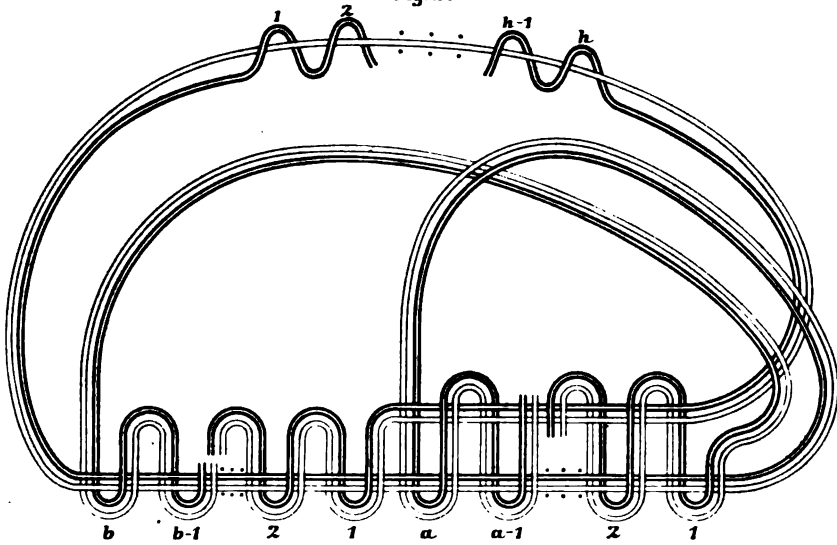


Fig. 26.



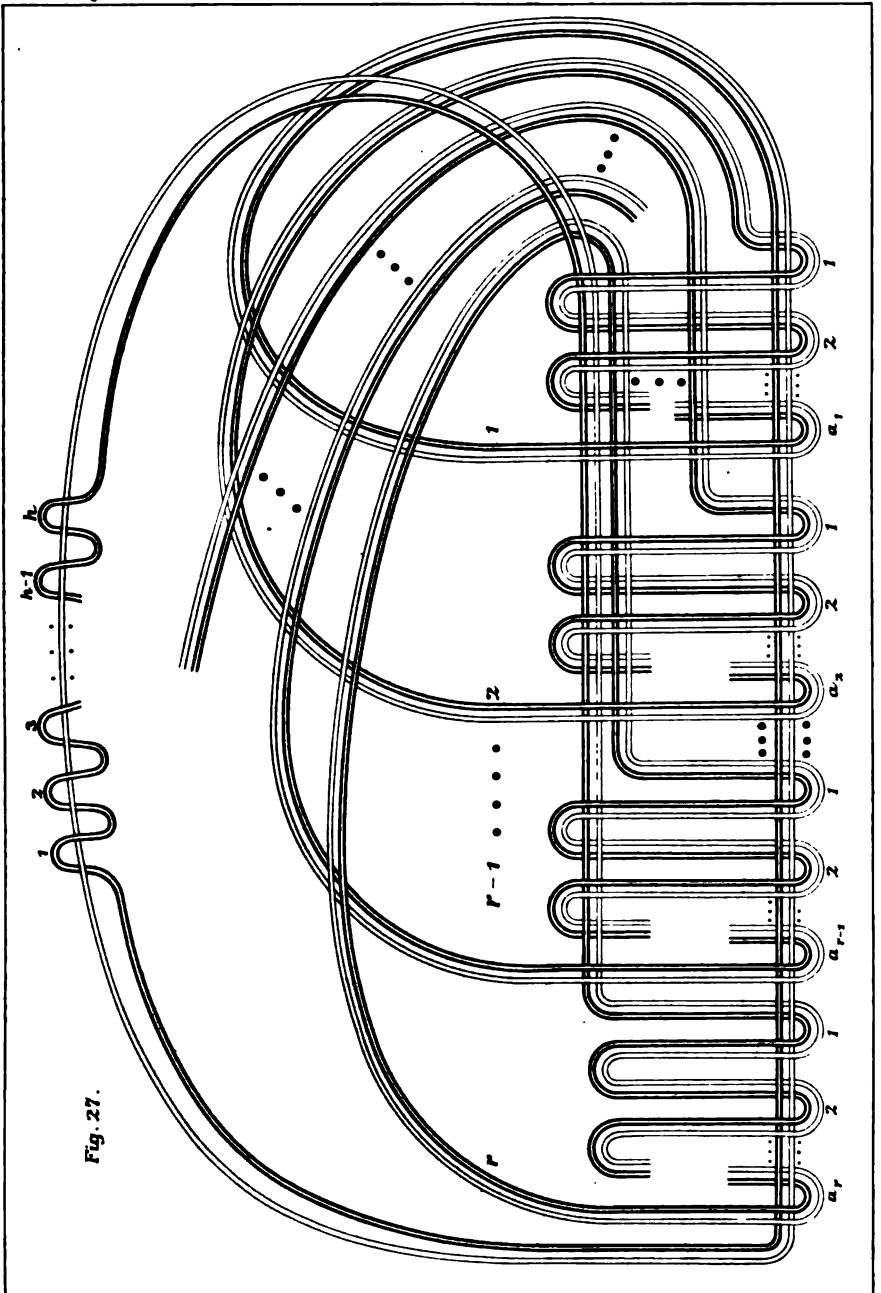


Fig. 27.

Autor del. F Hease lith.

K.k. Hof- u. Staatsdruckerei

Sitzungsb. d. kais. Akad. d. W. math. naturw. Classe LXXXVIII Bd. II. Abth. 1883.

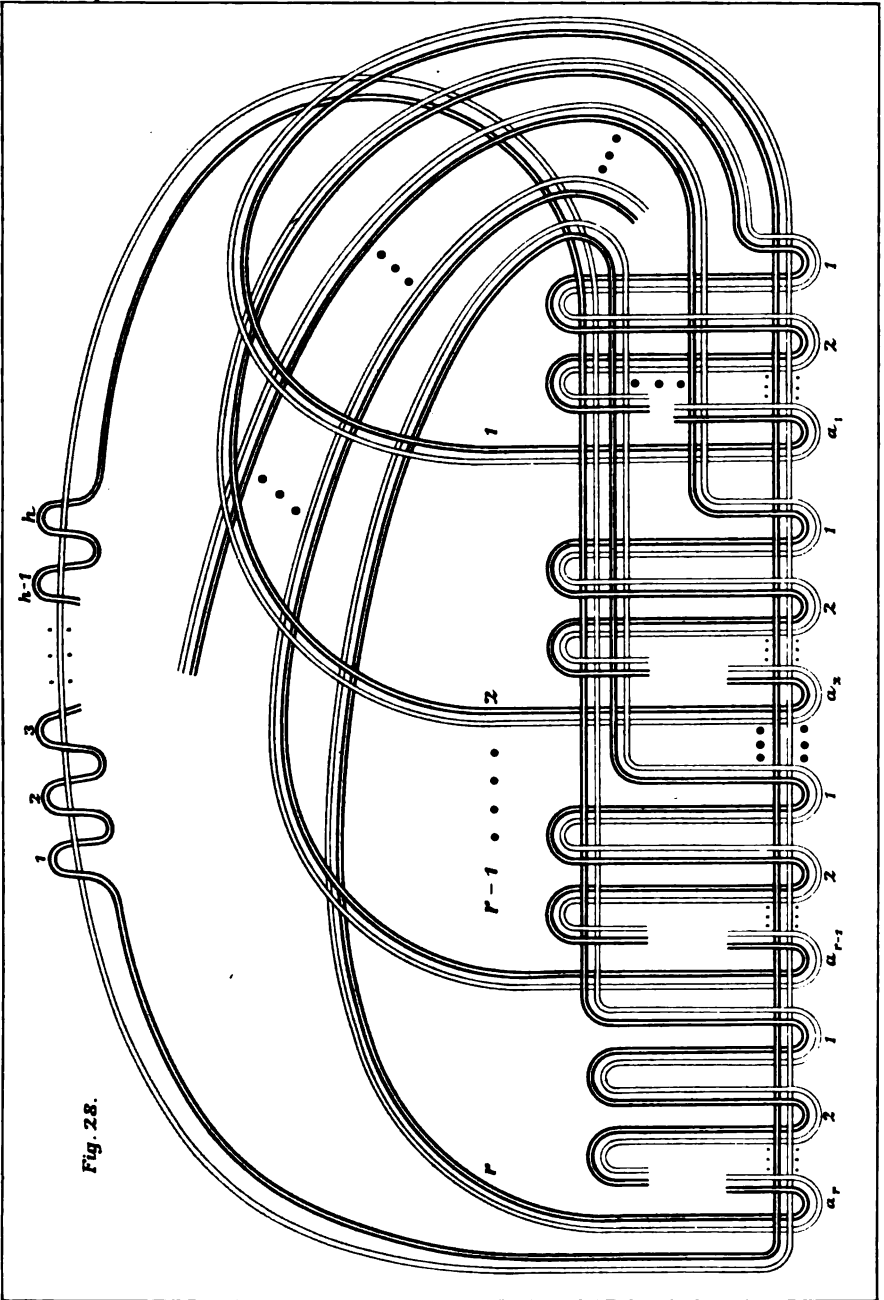


Fig. 28.

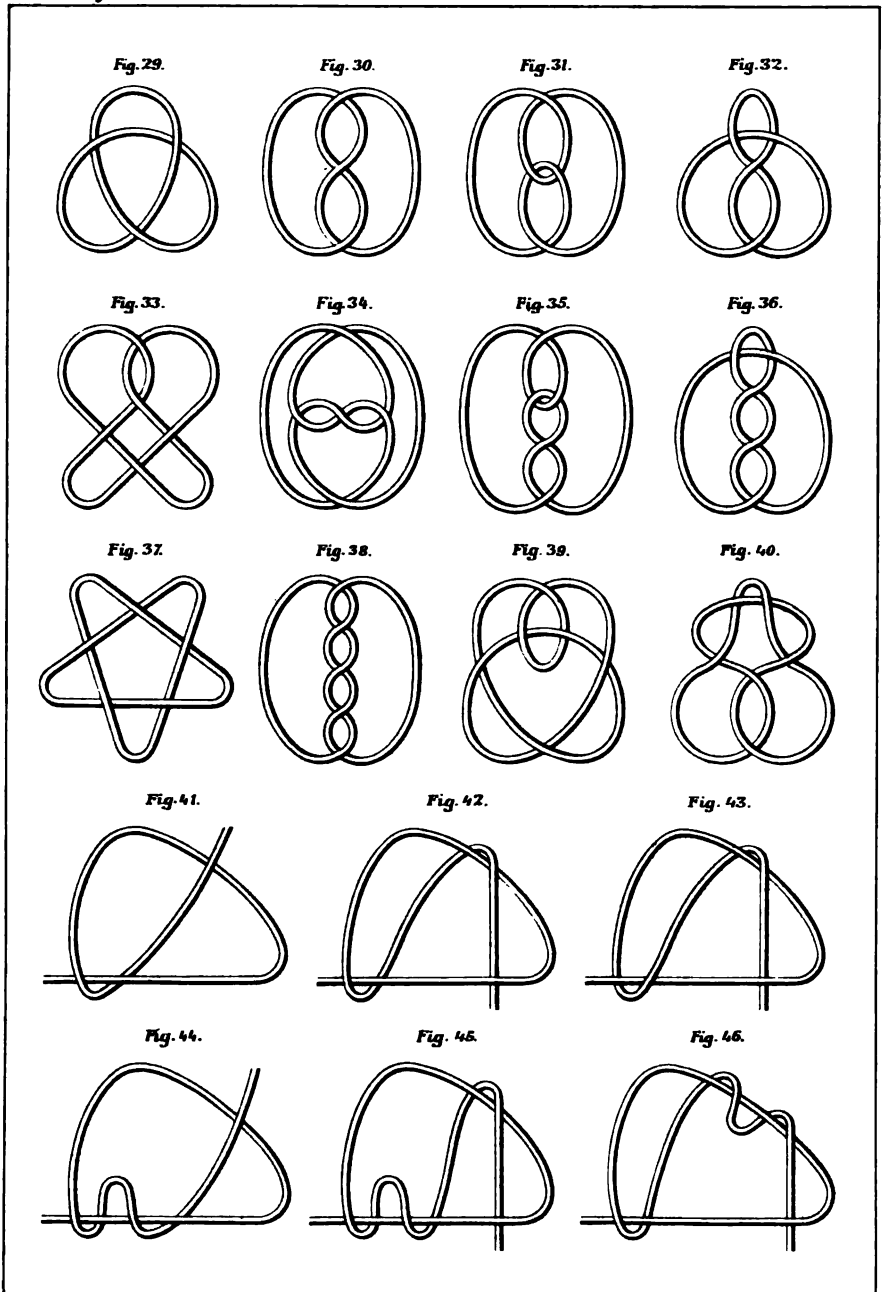


Fig. 47.

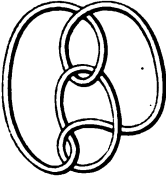


Fig. 48.

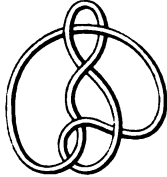


Fig. 49.

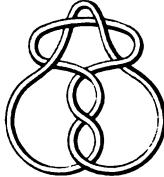


Fig. 50.

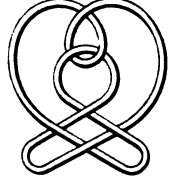


Fig. 51.

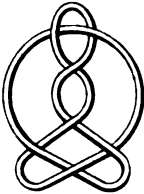


Fig. 52.

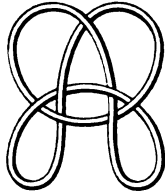


Fig. 53.

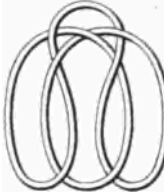


Fig. 54.

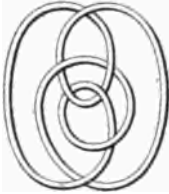


Fig. 55.

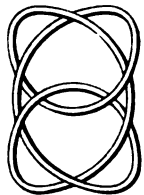


Fig. 56.

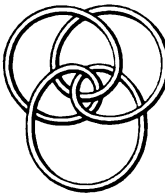


Fig. 57.

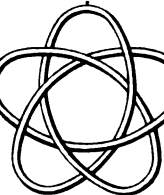


Fig. 58.

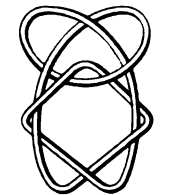


Fig. 59.

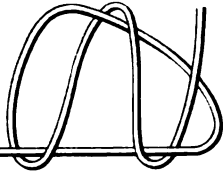


Fig. 60.

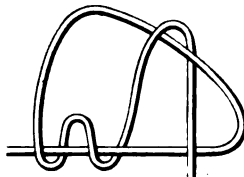


Fig. 61.

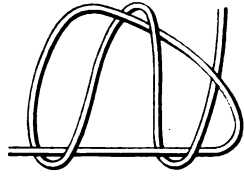


Fig. 62.

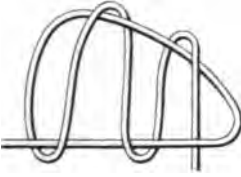


Fig. 63.

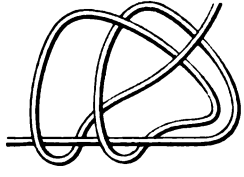
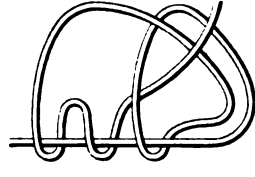


Fig. 64.





Über die Bessel'schen Functionen.

Von Leopold Gegenbauer.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1883.)

In den folgenden Zeilen wird zunächst eine kurze Mittheilung über eine Classe von Entwicklungen nach Bessel'schen Functionen erster Art gemacht, von welcher bisher nur einzelne specielle Fälle von O. Schlömilch und E. Beltrami behandelt wurden; sodann werden mehrere bestimmte Integrale ausgewerthet und einige Relationen zwischen bestimmten Integralen abgeleitet, in welchen bekannte Formeln aus der Theorie der symmetrischen Potentialfunctionen, auf welche H. Weber und E. Beltrami aufmerksam gemacht haben, als specielle Fälle enthalten sind.

Bedenkt man, dass:

$$\cos x = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J^{-\frac{1}{2}}(x)$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J^{\frac{1}{2}}(x)$$

ist, wo $J^{\mu}(x)$ die bekannte Bessel'sche Function erster Art bezeichnet, so sieht man, dass die Fourier'schen Reihen:

$$f(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} \cos \lambda x$$

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda} B_{\lambda} \sin \lambda x$$

wo λ die Reihe der ganzen positiven Zahlen durchläuft, falls dieselben als Entwicklungen nach Kreisfunctionen, welche nach den

Vielfachen des Argumentes fortschreiten, aufgefasst werden, als specielle Fälle der allgemeinen Entwicklungsformen:

$$f(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} x^{-\mu} J^{\mu}(\lambda x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda} B_{\lambda} x^{-\mu} J^{\mu+1}(\lambda x)$$

wo μ irgend eine reelle Zahl ist und λ die Reihe der ganzen positiven Zahlen durchläuft, angesehen werden können. Den speciellen Fall $\mu = 0$ dieser beiden Entwicklungsformen hat Herr O. Schlömilch in seiner Abhandlung: „Über die Bessel'sche Function“ (Zeitschrift für Mathematik und Physik, II. Jahrg., pag. 137 ff.) mitgeteilt und daselbst auch die Coefficienten dieser speciellen Entwicklungsformen durch Doppelintegrale ausgedrückt.

Wenn man berücksichtigt, dass die Reihe der ganzen positiven Zahlen mit der Reihe der positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$\sin \pi z = 0$$

übereinstimmt, so sieht man, dass die angeführten Fourier'schen Reihen auch Entwicklungen nach Kreisfunctionen sind, deren Argumente alle reellen positiven Wurzeln einer bestimmten transcendenten Gleichung durchlaufen. Bei dieser Auffassung ergeben sich zunächst als Verallgemeinerungen der Fourier'schen Reihen im Gebiete der Entwicklungen nach Bessel'schen Functionen erster Art die Reihen:

$$f(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} x^{-\mu} J^{\mu}(\rho_{\lambda} x)$$

wo die Grössen ρ_{λ} die verschiedenen reellen positiven Wurzeln einer der beiden transcendenten Gleichungen:

$$(ax)^{-\mu} J^{\mu}(ax) = 0$$

$$[(ax)^{-\mu} J^{\mu}(ax)]' = 0$$

sind.

Ein specieller Fall dieser Entwicklungsformen, nämlich der Fall $\mu=0$, findet sich schon in Fourier's „Théorie analytique de la chaleur“. Die allgemeine Form wurde von Hermann Hankel in seiner Abhandlung: „Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen“ (Mathem. Annalen, VIII. Bd., pag. 471 ff.), L. Schläfli in der Arbeit: „Über die Convergence der Entwicklung einer arbiträren Function $f(x)$ nach den Bessel'schen Functionen $J^a(\beta_1, x)$, $J^a(\beta_2, x)$, . . ., wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $J^a(\beta) = 0$ vorstellen“ (Mathematische Annalen, X. Bd., p. 137 ff.) und in neuester Zeit in besonders eingehender Weise von Ulisse Dini in seinem vortrefflichen Werke: „Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale“ (Pisa 1880) untersucht. Herr Ulisse Dini hat auch die allgemeinere Entwicklungsform, welche man erhält, wenn man für die Grössen ρ_i die reellen positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$ax[(ax)^{-\mu} J^\mu(ax)]' - h(ax)^{-\mu} J^\mu(ax) = 0$$

nimmt, in dem oben erwähnten Werke ausführlich behandelt.

Die Coëfficienten dieser Entwicklungsformen sind durch einfache Integrale ausdrückbar.

Die von Herrn O. Schlömilch aufgestellten Entwicklungsformen können nun ebenfalls unter dem eben auseinandergesetzten Gesichtspunkte betrachtet werden, und bilden dann specielle Fälle einer allgemeinen Classe von Entwicklungen nach Bessel'schen Functionen erster Art, die nun kurz besprochen werden soll.

Die von O. Schlömilch angegebenen Entwicklungen haben nämlich folgende Gestalt:

$$f(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} J^0(\rho_{\lambda} x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda} B_{\lambda} J^1(\rho_{\lambda} x)$$

wo die ρ_{λ} die reellen positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$(\pi x)^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}}(\pi x) = 0$$

sind. Verallgemeinerungen dieser Reihen sind demnach die Entwicklungen:

$$f(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} x^{-(\mu-p)} J^{\mu}(\rho_{\lambda} x)$$

wo p eine ganze positive Zahl ist und die Grössen ρ_{λ} die verschiedenen reellen positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$1) \quad x^{-(\mu+\nu)} \{m J^{\mu+\nu}(ax) + n x [J^{\mu+\nu}(ax)]'\} = 0 \quad [\nu \geq \epsilon]$$

sind, wo a , m , n reelle Constanten bezeichnen.

Ausser den schon erwähnten speciellen Fällen dieser Entwicklungsformen wurden bisher nur die Fälle:

$$\mu = \frac{1}{2}, p = 1, \nu = -\frac{1}{2}, n = 0$$

$$\mu = \frac{1}{2}, p = 1, \nu = -\frac{1}{2}, m = 0$$

$$\mu = -\frac{1}{2}, p = 0, \nu = \frac{1}{2}, n = 0$$

$$\mu = -\frac{1}{2}, p = 0, \nu = \frac{1}{2}, m = 0$$

welche trigonometrische Reihen liefern, deren Terme nach den reellen positiven Wurzeln einer der beiden transcendenten Gleichungen:

$$J^0(ax) = 0$$

$$J^1(ax) = 0$$

fortschreiten, von Herrn Eugenio Beltrami behandelt. („Intorno ad un teorema di Abel e ad alcune sue applicazioni.“ Nota del M. E. prof. E. Beltrami, letta al R. Istituto Lombardo nell'adunanza del 20 maggio 1880. „Intorno ad alcune serie trigonometriche.“ Nota del M. E. prof. E. Beltrami, letta al R. Isti-

tuto Lombardo nell' adunanza del 3 giugno 1880. Rendiconti del R. Istituto Lombardo. Serie II; Vol. XIII, fasc. X e XI, XIII).

In dem Falle $\nu=0$ sind die Coëfficienten dieser Entwicklungsformen, wie schon erwähnt wurde, durch einfache Integrale ausdrückbar; in allen anderen Fällen lassen sie sich, wie nun gezeigt werden soll, durch Doppelintegrale ausdrücken.

Multiplicirt man die Gleichung:

$$J^\mu(\alpha x) = \frac{(\alpha x)^\mu}{2^\mu} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{(\alpha x)^{2\lambda}}{2^{2\lambda} \Pi(\lambda) \Pi(\mu+\lambda)}$$

mit $x^{\mu+1}(1-x^2)^{\nu-1} dx$ und integrirt in Bezug auf x von $x=0$ bis $x=+1$, so erhält man, da:

$$\int_0^1 x^{2\mu+2\lambda+1} (1-x^2)^{\nu-1} dx = \frac{\Pi(\mu+\lambda) \Pi(\nu-1)}{2 \Pi(\mu+\nu+\lambda)}$$

ist:

$$\int_0^1 J^\mu(\alpha x) x^{\mu+1} (1-x^2)^{\nu-1} dx = \frac{\alpha^\mu \Pi(\nu-1)}{2^{\mu+1}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\alpha^{2\lambda}}{2^{2\lambda} \Pi(\lambda) \Pi(\mu+\nu+\lambda)}$$

oder:

$$2) \int_0^1 J^\mu(\alpha x) x^{\mu+1} (1-x^2)^{\nu-1} dx = \frac{2^{\nu-1} \Pi(\nu-1)}{\alpha^\nu} J^{\mu+\nu}(\alpha) \quad [\mu > -1, \nu > 0]$$

Setzt man in dieser Formel:

$$\alpha = \rho, y$$

multiplicirt sodann mit $y^{\nu+1} J^{\mu+\nu}(\rho, y) dy$ und integrirt von $y=0$ bis $y=a$, so erhält man die Relation:

$$\begin{aligned} & \int_0^a y^{\nu+1} J^{\mu+\nu}(\rho, y) dy \int_0^1 J^\mu(\rho, y) x^{\mu+1} (1-x^2)^{\nu-1} dx \\ &= \frac{2^{\nu-1} \Pi(\nu-1)}{\rho^\nu} \int_0^a y J^{\mu+\nu}(\rho, y) J^{\mu+\nu}(\rho, y) dy \end{aligned}$$

Transformirt man das Integral auf der linken Seite dieser Gleichung durch die Substitution:

$$y.x = z$$

so verwandelt sich dasselbe in:

$$\int_0^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_1 y) dy \int_0^y J^{\mu}(\rho_1 z) z^{\mu+1} (y^2 - z^2)^{\nu-1} dz$$

welches Integral auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\int_0^a J^{\mu}(\rho_1 z) z^{\mu+1} dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_2 y) (y^2 - z^2)^{\nu-1} dy$$

Mit Hilfe der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, von welcher die Bessel'sche Function erster Art ein particuläres Integral ist, findet man bekanntlich die Relationen:

$$\int_0^a y J^{\mu+\nu}(\rho_1 y) J^{\mu+\nu}(\rho_2 y) dy = \frac{a}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \left| \begin{array}{cc} J^{\mu+\nu}(a\rho_1), & J^{\mu+\nu}(a\rho_2) \\ \rho_1 [J^{\mu+\nu}(a\rho_1)]', & \rho_2 [J^{\mu+\nu}(a\rho_2)]' \end{array} \right|$$

($\rho_1 \leq \rho_2$)

$$\int_0^a y (J^{\mu+\nu}(\rho_1 y))^2 dy = \frac{a^2}{2} \left| \left\{ \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_1} \right)^2 - 1 \right\} J^{\mu+\nu}(a\rho_1), \quad [J^{\mu+\nu}(a\rho_1)]' \right|$$

Man hat daher schliesslich die Formeln:

$$\int_0^a J^{\mu}(\rho_1 z) z^{\mu+1} dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_2 y) (y^2 - z^2)^{\nu-1} dy =$$

$$\frac{2^{\nu-1} \Pi(\nu-1) a}{\rho_1^{\nu} (\rho_1^2 - \rho_2^2)} \left| \begin{array}{cc} J^{\mu+\nu}(a\rho_1), & J^{\mu+\nu}(a\rho_2) \\ \rho_1 [J^{\mu+\nu}(a\rho_1)]', & \rho_2 [J^{\mu+\nu}(a\rho_2)]' \end{array} \right|$$

($\rho_1 \geq \rho_2$)

$$\int_0^a J^{\mu}(\rho_2 z) z^{\mu+1} dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_1 y) (y^2 - z^2)^{\nu-1} dy =$$

$$\frac{2^{\nu-2} \Pi(\nu-1) a^2}{\rho_2^{\nu}} \left| \left\{ \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_2} \right)^2 - 1 \right\} J^{\mu+\nu}(a\rho_2), \quad [J^{\mu+\nu}(a\rho_2)]' \right|$$

Setzt man:

$$\chi_{\mu, \nu}^{(z)} = \chi(z) = \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho y) (y^2 - z^2)^{\nu-1} dy$$

so findet man nach einigen leichten Rechnungen, dass diese Function der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt:

$$\chi''(z) + \frac{2\mu+1}{z} \chi'(z) + \rho^2 \chi(z) = 2(\nu-1) a^{-(\mu+\nu-2)} (a^2 - z^2)^{\nu-2} J^{\mu+\nu}(a\rho) - \rho a^{-(\mu+\nu-1)} (a^2 - z^2)^{\nu-1} J^{\mu+\nu-1}(a\rho)$$

Setzt man der Reihe nach:

$$a=1, \mu=-\frac{1}{2}, \nu=\frac{1}{2}$$

$$a=1, \mu=\frac{1}{2}, \nu=\frac{1}{2}$$

$$a=\pi, \mu=-1, \nu=\frac{1}{2}, \rho=n_1$$

wo n_1 eine ganze Zahl ist, so erhält man für die dadurch entstehenden speciellen Functionen $\chi(z)$ die schon von Eugenio Beltrami aufgestellten Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \chi''(z) + \rho^2 \chi(z) + \frac{\rho J^1(\rho)}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{J^0(\rho)}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} &= 0 \\ \chi''(z) + \frac{2}{z} \chi'(z) + \rho^2 \chi(z) + \frac{\rho J^0(\rho)}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{J^1(\rho)}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} &= 0 \\ \chi''(z) - \frac{1}{z} \chi'(z) + n^2 \chi(z) + \frac{z^2 \cos n_1 \pi}{(\pi^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}} &= 0 \end{aligned}$$

Es seien nun ρ_λ und ρ_τ zwei verschiedene Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$x^{-(\mu+\nu)} \{m J^{\mu+\nu}(ax) + nx [J^{\mu+\nu}(ax)]'\} = 0 \quad [\mu > -1, \nu > 0]$$

Alsdann verwandeln sich die obigen Gleichungen in die folgenden:

$$\int_0^a y J^{\mu+\nu}(\rho_\lambda y) J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y) dy = 0 \quad (\rho_\lambda \leq \rho_\tau)$$

$$\int_0^a y (J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y))^2 dy = \frac{a^2}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\tau} \right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_\tau} \right)^2 \right\} (J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau))^2$$

($n \leq 0$)

$$\int_0^a y (J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y))^2 dy = \frac{a^2}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{n\rho_\tau}{m} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\tau} \right)^2 \right] \right\} (J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau))^2$$

($m \geq 0$)

Aus der ersten von diesen Gleichungen folgt bekanntlich, dass die Wurzeln der eben erwähnten transcendenten Gleichung sämmtlich reell sind; denn hätte diese Gleichung eine complexe Wurzel, so müsste sie, da alle ihre Coëfficienten reell sind, auch die conjugirte complexe Wurzel besitzen. Würde man diese zwei conjugirten Grössen für ρ_λ und ρ_τ nehmen, so hätte man unter dem Integralzeichen einer Function, welche im ganzen Integrationsintervalle stets dasselbe Zeichen besässe, deren Integral also nicht gleich Null sein kann, ausser wenn sie selbst identisch gleich Null ist. Dies ist aber nicht der Fall, und daher sind alle Wurzeln der oben erwähnten transcendenten Gleichung reell. Man sieht ferner leicht aus dem asymptotischen Ausdrucke für die Bessel'sche Function erster Art, dass die obige Gleichung unendlich viele Wurzeln besitzt. Aus der bekannten Form der Bessel'schen Functionen erster Art endlich ergibt sich sofort, dass die Wurzeln der Gleichung paarweise dem absoluten Betrage nach gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind.

Für die erwähnten speciellen Werthe der Grössen ρ_λ und ρ_τ hat man die folgenden Relationen:

$$\int_0^a J^\mu(\rho_\lambda z) z^{\mu+1} dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y) (y^2 - z^2)^{\nu-1} dy = 0$$

[$\rho_\lambda \geq \rho_\tau$]

$$\int_0^a J^\mu(\rho_\tau z) z^{\mu+1} dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y) (y^2 - z^2)^{\nu-1} dy =$$

$$= \frac{2^{\nu-2} \Pi(\nu-1) a^2}{\rho_\tau^\nu} \left\{ 1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\tau} \right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_\tau} \right)^2 \right\} (J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau))^2$$

[$n \leq 0$]

$$\int_0^a J^\mu(\rho_\tau z) z^{\mu+1} dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\tau y) (y^2 - z^2)^{\nu-1} dy =$$

$$= \frac{2^{\nu-2} \Pi(\nu-1) a^2}{\rho_\tau^\nu} \left\{ 1 + \left(\frac{n\rho_\tau}{m} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\tau} \right)^2 \right] \right\} ([J^{\mu+\nu}(a\rho_\tau)]')^2$$

[$m \leq 0$]

Ist nun die Function $f(x)$ so beschaffen, dass nicht nur $x^{2\mu-p+1} f(x)$, sondern auch das Quadrat dieses Ausdruckes in dem Intervalle $0 \dots a$ integrabel ist, so hat man die Entwicklung:

$$f(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} x^{-(\mu-p)} J^{\mu}(\rho_{\lambda} x) \quad [\mu > -1; 0 \leq x < a]$$

wo die Summation sich über alle positiven Wurzeln ρ_{λ} der erwähnten transcendenten Gleichung erstreckt und:

$$A_{\lambda} = \frac{\rho_{\lambda}^{\nu}}{2^{\nu-2} \Pi(\nu-1) a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_{\lambda}} \right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_{\lambda}} \right)^2 \right\} (J^{\mu+\nu}(a\rho_{\lambda}))^2}$$

$$\int_0^a x^{2\mu-p+1} f(x) dz \int_z^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_{\lambda} y) (y^2 - z^2)^{\nu-1} dy$$

$$= \frac{\rho_{\lambda}^{\nu}}{2^{\nu-2} \Pi(\nu-1) a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_{\lambda}} \right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_{\lambda}} \right)^2 \right\} (J^{\mu+\nu}(a\rho_{\lambda}))^2}$$

$$\int_0^a y^{\mu+\nu-p-1} J^{\mu+\nu}(\rho_{\lambda} y) dy \int_0^1 x^{2\mu-p+1} f(yx) (1 - x^2)^{\nu-1} dx$$

[$n \geq 0$]

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\rho_\lambda^\nu}{2^{\nu-2} \Pi(\nu-1) a^2 \left\{ 1 + \left(\frac{n\rho_\lambda}{m} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\lambda} \right)^2 \right] \right\} \left[J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda) \right]^2} \\
 &\quad \int_0^a x^{2\mu-p+1} f(x) dx \int_0^a y^{-(\mu+\nu-1)} J^{\mu+\nu}(\rho_\lambda y) (y^2 - x^2)^{\nu-1} dy \\
 &= \frac{\rho_\lambda^\nu}{2^{\nu-2} \Pi(\nu-1) a^2 \left\{ 1 + \left(\frac{n\rho_\lambda}{m} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\lambda} \right)^2 \right] \right\} \left[J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda) \right]^2} \\
 &\quad \int_0^a y^{\mu+\nu-p-1} J^{\mu+\nu}(\rho_\lambda y) dy \int_0^1 x^{2\mu-p+1} f(yx) (1-x^2)^{\nu-1} dx
 \end{aligned}$$

[m \ge 0]

ist.

Setzt man speciell:

$$p = 0$$

$$f(x) = (\beta x)^{-\nu} J^\mu(\beta x)$$

wo β von jeder der Wurzeln $\pm \rho_\lambda$ verschieden sein soll, so erhält man die Formeln:

$$(\beta x)^{-\nu} J^\mu(\beta x) = \frac{2}{an} \beta^{-(\mu+\nu)} \{ m J^{\mu+\nu}(a\beta) + n\beta [J^{\mu+\nu}(a\beta)] \}.$$

$$\sum_{\lambda} \frac{\rho_\lambda^\nu x^{-\mu} J^\mu(\rho_\lambda x)}{(\rho_\lambda^2 - \beta^2) \left\{ 1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\lambda} \right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_\lambda} \right)^2 \right\} J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda)}$$

[n \ge 0]

$$(\beta x)^{-\nu} J^\mu(\beta x) = \frac{2}{an} \beta^{-(\mu+\nu)} \{ m J^{\mu+\nu}(a\beta) + n\beta [J^{\mu+\nu}(a\beta)] \}.$$

$$\sum_{\lambda} \frac{\rho_\lambda^{\nu+1} x^{-\mu} J^\mu(\rho_\lambda x)}{(\rho_\lambda^2 - \beta^2) \left\{ 1 + \left(\frac{n\rho_\lambda}{m} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_\lambda} \right)^2 \right] \right\} [J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda)]}$$

[m \le 0]

Setzt man in diesen zwei Formeln:

$$\beta = 0$$

so verwandeln sich dieselben in die folgenden:

$$x^\mu = \frac{\Pi(\mu) a^{\mu+\nu-2}}{2^{\nu-1} m \Pi(\mu+\nu)} \{ma+n(\mu+\nu)\} \cdot \sum_{\lambda} \frac{\rho_{\lambda}^{\nu-2} J^{\mu}(\rho_{\lambda} x)}{\left\{1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_{\lambda}}\right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_{\lambda}}\right)^2\right\}} J^{\mu+\nu}(a\rho_{\lambda}) \quad [n \leq 0]$$

$$x^\mu = - \frac{\Pi(\mu) a^{\mu+\nu-2}}{2^{\nu-1} m \Pi(\mu+\nu)} \{ma+n(\mu+\nu)\} \cdot \sum_{\lambda} \frac{\rho_{\lambda}^{\nu-1} J^{\mu}(\rho_{\lambda} x)}{\left\{1 + \left(\frac{n\rho_{\lambda}}{m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu+\nu}{a\rho_{\lambda}}\right)^2\right]\right\}} [J^{\mu+\nu}(a\rho_{\lambda})] \quad [m \leq 0]$$

Aus der letzten Formel folgt für:

$$m = 1, \quad n = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}$$

die specielle Relation:

$$1 = - \frac{a^{\nu}}{2^{\nu} \Pi\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{\lambda} \frac{\rho_{\lambda}^{\frac{2\nu-1}{2}} \sin \rho_{\lambda} x}{x [J^{\frac{2\nu+1}{2}}(a\rho_{\lambda})]}$$

Es soll nun auch ein Ausdruck für die Entwicklungscoefficienten A_{λ} für den Fall gegeben werden, dass die in der Gleichung 1) auftretende Constante ν negativ ist.

Es sei $F(z)$ eine Function von z von der Beschaffenheit, dass nicht nur $z^{-2}F(z)$, sondern auch das Quadrat dieses Ausdruckes in dem Intervalle $0 \dots a$ integrabel ist. Dieselbe lässt sich alsdann in eine Reihe von der Form:

$$F(z) = \sum_{\lambda} B_{\lambda} z^{\mu-\nu+2} J^{\mu-\nu}(\rho_{\lambda} z)$$

entwickeln, wo die Grössen ρ_{λ} die Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$3) \quad x^{-(\mu-\nu)} \{m J^{\mu-\nu}(ax) + nx [J^{\mu-\nu}(ax)]'\} = 0 \quad [\nu > 0]$$

sind. Diese Entwicklung ist innerhalb des genannten Intervalles mit Ausnahme einer discreten Punktmenge in gleichem Grade convergent und die Entwicklungscoefficienten B_λ sind durch die Relationen:

$$B_\lambda = \frac{2}{a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\mu - \nu}{a\rho_\lambda} \right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_\lambda} \right)^2 \right\} (J^{\mu-\nu}(a\rho_\lambda))^2} \int_0^a y^{-(\mu-\nu+1)} F(y) J^{\mu-\nu}(\rho_\lambda y) dy$$

[$n \leq 0$]

$$B_\lambda = \frac{2}{a^2 \left\{ 1 + \left(\frac{n\rho_\lambda}{m} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu - \nu}{a\rho_\lambda} \right)^2 \right] \right\} ([J^{\mu-\nu}(a\rho_\lambda)])^2} \int_0^a y^{-(\mu-\nu+1)} F(y) J^{\mu-\nu}(\rho_\lambda y) dy$$

[$m \leq 0$]

gegeben.

Schreibt man in der obigen Entwicklung xz für z , multiplicirt sodann mit $(1-z)^{\nu-1} \frac{dz}{z}$ und integrirt in Bezug auf z von $z=0$ bis $z=1$, so erhält man unter Berücksichtigung der Relation 2) sofort die Gleichung:

$$f(x) = \int_0^1 F(xz) (1-z^2)^{\nu-1} \frac{dz}{z} = \sum_\lambda \frac{2^{\nu-1} \Pi(\nu-1)}{\rho_\lambda^\nu} B_\lambda x^{\mu-2\nu+2} J^\mu(\rho_\lambda x)$$

[$\mu - \nu > -1$]

Nun ist, wenn q der Bedingung:

$$0 < q < 1$$

genügt, bekanntlich:

$$F(y) - F(0) = \frac{2y \sin q\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{u^{2q} du}{(1-u^2)^2} \int_0^1 \frac{F(yzu) dz}{(1-z^2)^{1-q}}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist aber:

$$F(0) = 0$$

ferner:

$$f(yu) = \int_0^1 F(yzu)(1-z^2)^{\nu-1} dz$$

Man hat daher für $q = \nu$ die Relation:

$$F(y) = \frac{2y \sin \nu\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{u^{2\nu} f(yu)}{(1-u^2)^\nu} du$$

Es besteht also die Entwicklung:

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} x^{-(\mu-p)} J^{\mu}(\rho_{\lambda} x)$$

[$\mu - \nu > -1, 0 < \nu < 1$]

wo die Grössen ρ_{λ} die verschiedenen reellen positiven Wurzeln der transcendenten Gleichung 3) sind und:

$$A_{\lambda} = \frac{2^{\nu+1} \Pi(\nu-1) \sin \nu\pi}{\pi \rho_{\lambda}^{\nu} a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\mu-\nu}{a\rho_{\lambda}} \right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_{\lambda}} \right)^2 \right\} (J^{\mu-\nu}(a\rho_{\lambda}))^2}$$

$$\int_0^a y^{-(\mu-\nu)} J^{\mu-\nu}(\rho_{\lambda} y) dy \int_0^1 \frac{z^{2\nu} [(yz)^{2\mu-2\nu-p+2} \varphi(yz)]' dz}{(1-z^2)^\nu}$$

$$= \frac{2^{\nu+1} \Pi(\nu-1) \sin \nu\pi}{\pi \rho_{\lambda}^{\nu} a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\mu-\nu}{a\rho_{\lambda}} \right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_{\lambda}} \right)^2 \right\} (J^{\mu-\nu}(a\rho_{\lambda}))^2}$$

$$\int_0^a z^{2\nu} [z^{2\mu-2\nu-p+2} \varphi(z)]' dz \int_z^a \frac{y^{-(\mu-\nu+1)} J^{\mu-\nu}(\rho_{\lambda} y) dy}{(y^2 - z^2)^\nu}$$

[$n \geq 0$]

$$A_{\lambda} = \frac{2^{\nu+1} \Pi(\nu-1) \sin \nu\pi}{\pi \rho_{\lambda}^{\nu} a^2 \left\{ 1 + \left(\frac{n\rho_{\lambda}}{m} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu-\nu}{a\rho_{\lambda}} \right)^2 \right] \right\} ([J^{\mu-\nu}(a\rho_{\lambda})]')^2}$$

$$\int_0^a y^{-(\mu-\nu)} J^{\mu-\nu}(\rho_{\lambda} y) dy \int_0^1 \frac{z^{2\nu} [(yz)^{2\mu-2\nu-p+2} \varphi(yz)]' dz}{(1-z^2)^\nu}$$

$$\frac{2^{\nu+1} \Gamma(\nu-1) \sin \nu\pi}{\pi \rho_\lambda^\nu a^2 \left\{ 1 + \left(\frac{n\rho_\lambda}{m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\mu-\nu}{a\rho_\lambda}\right)^2 \right] \right\} \left(\left[J^{\mu-\nu}(a\rho_\lambda) \right]' \right)^2}$$

$$\int_0^a z^{2\nu} [z^{2\mu-2\nu-p+2} \varphi(z)]' dz \int_z^a \frac{y^{-(\mu-\nu+1)} J^{\mu-\nu}(\rho_\lambda y) dy}{(y^2-z^2)^\nu}$$

[m ≤ 0]

ist.

Geht man, wenn $\nu = \frac{1}{2}$ ist, von der Entwicklung:

$$F(z) = \sum_\lambda B_\lambda z^{\frac{2\mu+1}{2}} J^{\frac{2\mu-1}{2}}(\rho_\lambda z)$$

aus, schreibt in derselben xz für z , multiplicirt sodann mit $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ und integrirt in Bezug auf z von 0 bis 1, so erhält man in diesem speciellen Falle für die Entwicklungscoefficienten A_λ die folgenden Ausdrücke:

$$A_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi \rho_\lambda}} \frac{2}{a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{2\mu-1}{2a\rho_\lambda}\right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_\lambda}\right)^2 \right\} \left(J^{\frac{2\mu-1}{2}}(a\rho_\lambda) \right)^2}$$

$$\int_0^a y^{-\frac{2\mu-3}{2}} J^{\frac{2\mu-1}{2}}(\rho_\lambda y) dy \int_0^1 \frac{[(zy)^{2\mu-p} \varphi(zy)]' dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi \rho_\lambda}} \frac{2}{a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{2\mu-1}{2a\rho_\lambda}\right)^2 + \left(\frac{m}{n\rho_\lambda}\right)^2 \right\} \left(J^{\frac{2\mu-1}{2}}(a\rho_\lambda) \right)^2}$$

$$\int_0^a [z^{2\mu-p} \varphi(z)]' dz \int_z^a \frac{y^{-\frac{2\mu-3}{2}} J^{\frac{2\mu-1}{2}}(\rho_\lambda y) dy}{\sqrt{y^2-z^2}}$$

[n ≥ 0]

$$A_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi \rho_\lambda}} \frac{2}{a^2 \left\{ 1 + \left(\frac{n\rho_\lambda}{m}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{2\mu-1}{2a\rho_\lambda}\right)^2 \right] \right\} \left(\left[J^{\frac{2\mu-1}{2}}(a\rho_\lambda) \right]' \right)^2}$$

$$\int_0^a y^{-\frac{2\mu-3}{2}} J^{\frac{2\mu-1}{2}}(\rho_\lambda y) dy \int_0^1 \frac{[(zy)^{2\mu-p} \varphi(zy)]' dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi \rho_\lambda}} \frac{2}{a^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\rho_\lambda}{m} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{2\mu-1}{2a\rho_\lambda} \right)^2 \right] \right\} \left(\left[J^{\frac{2\mu-1}{2}}(a\rho_\lambda) \right]' \right)^2}$$

$$\int_0^a [z^{2\mu-2} \varphi(z)] dz \int_z^a \frac{y^{-2\mu-3} J^{2\mu-1}(\rho_\lambda y) dy}{\sqrt{y^2 - z^2}}$$

[$m \leq 0$]

Es sind demnach auch für negative ν die Functionen $\chi_{\mu, \nu}(z)$ die zur Isolirung der einzelnen Coëfficienten tauglichen Multipliatoren.

Es mag noch hervorgehoben werden, dass aus der Relation:

$$\chi'_{\mu, \nu}(z) = -a^{-(\mu+\nu)} z J^{\mu+\nu}(a\rho_\lambda) (a^2 - z^2)^{\nu-1} - \rho_\lambda z \chi_{\mu+1, \nu}(z)$$

sofort folgt, dass in allen früheren Formeln, wenn $z = 0$ ist, die Multipliatoren $\chi_{\mu, \nu}(z)$ durch $-\frac{1}{\rho_\lambda z} \chi'_{\mu-1, \nu}(z)$ ersetzt werden können.

Ebenso sieht man auch, dass die in den Ausdrücken der Coëfficienten A_λ auftretenden Doppelintegrale durch partielle Integration noch weiter umgeformt werden können.

Ich gehe nun zur Auswerthung einiger bestimmter Integrale über.

Multiplieirt man die von Herrn L. Schläfli abgeleitete Formel:

$$J^m(x) J^n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi J^{m+n}(2x \cos \varphi) \cos(m-n)\varphi d\varphi$$

(„Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen über die Bessel'schen Functionen.“ Mathem. Annalen, 3. Bd., pag. 134 ff.), wo m und n ganze Zahlen sind, mit $x^{z-m-n-1} dx$ und integrirt von $x=0$ bis $x=\infty$, so erhält man, wenn man auf der rechten Seite der so entstehenden Gleichung die Integrationsordnung umkehrt und die von mir aufgestellte Formel:

$$4) \int_0^{\infty} x^{\alpha-\nu-1} J_{\nu}(ax) dx = 2^{\alpha-\nu-1} a^{\nu-\alpha} \frac{\Pi\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{2\nu-\alpha}{2}\right)} \left[0 < \alpha < \nu + \frac{3}{2}\right]$$

(„Über einige bestimmte Integrale“. Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 72. Band, II. Abtheilung, Juni-Heft, Jahrgang 1875) berücksichtigt, die Relation:

$$\int_0^{\infty} J^m(x) J^n(x) x^{\alpha-m-n-1} dx = \frac{\Pi\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)}{\pi \Pi\left(m+n-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(m-n)\varphi \cos^{m+n-\alpha} \varphi d\varphi \quad [0 < \alpha < m+n+1]$$

Berücksichtigt man, dass:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta} v \cos^{\gamma} v dv = \frac{\pi}{2^{\beta+1}} \frac{\Pi(\beta)}{\Pi\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) \Pi\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \quad [\beta > -1]$$

ist, so erhält man sofort:

$$\int_0^{\infty} J^m(x) J^n(x) x^{\alpha-m-n-1} dx = \frac{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right) \Pi(m+n-\alpha)}{2^{m+n-\alpha+1} \Pi\left(m+n-\frac{\alpha}{2}\right) \Pi\left(m-\frac{\alpha}{2}\right) \Pi\left(n-\frac{\alpha}{2}\right)} \quad [0 < \alpha < m+n+1].$$

Setzt man speciell:

$$\alpha = m+n$$

so erhält man die Formeln:

$$\int_0^{\infty} J^m(x) J^n(x) \frac{dx}{x} = 0 \quad [m \geq n \text{ und } m-n \text{ gerade}]$$

$$\int_0^\infty J^m(x) J^n(x) \frac{dx}{x} = (-1)^{\frac{m-n-1}{2}} \frac{2}{\pi(m^2-n^2)}$$

[$m \geq n$ und $m-n$ ungerade]

$$\int_0^\infty (J^m(x))^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2m} \quad [m > 0].$$

Die erste und dritte von diesen speciellen Formeln hat Herr E. Heine mitgetheilt (Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendungen von Dr. E. Heine, 2. Auflage, 1. Band, pag. 255 f.)

Ein anderes allgemeines Integral, in welchem das zuletzt angegebene als specieller Fall enthalten ist, kann auf folgendem Wege gefunden werden.

Multiplicirt man die Gleichung:

$$5) J^{n+\nu}(\rho_1 y) J^{n+\nu}(\rho_2 y) = \frac{(\rho_1 \rho_2 y)^\nu \Pi(n)}{2^{2\nu-1} \Pi(\nu-1) \Pi(n+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \right]$$

$$\cdot \int_0^\pi (\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \varphi)^{-\frac{\nu}{2}} J^\nu(y \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \varphi}) \cdot C'_n(\cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi$$

mit $y^{\alpha-2\nu-1} dy$ und integrirt in Bezug auf y von $y = 0$ bis $y = \infty$, so erhält man, wenn man auf der rechten Seite der dadurch entstehenden Gleichung die Integrationsordnung umkehrt und die Formel 4) berücksichtigt, die Relation:

$$\int_0^\infty J^{n+\nu}(\rho_1 y) J^{n+\nu}(\rho_2 y) y^{\alpha-2\nu-1} dy =$$

$$\frac{(\rho_1 \rho_2)^\nu \Pi(n) \Pi\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{2^{4\nu-2} \Pi(\nu-1) \Pi\left(\nu - \frac{\alpha}{2}\right) \Pi(n+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \right]^2$$

$$\cdot \int_0^\pi (\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \varphi)^{-\frac{\alpha}{2}} C'_n(\cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi$$

oder nach einer von mir a. a. O. mitgetheilten Formel:

$$\int_0^{\infty} J^{n+\nu}(\rho_1 y) J^{n+\nu}(\rho_2 y) y^{\alpha-2\nu-1} dy =$$

$$= \frac{\Pi\left(\frac{\alpha}{2} + n - 1\right) (\rho_1 \rho_2)^{n+\nu}}{2^{2\nu-2\alpha+1} \Pi\left(\nu - \frac{\alpha}{2}\right) \Pi(n+\nu) (\rho_1^2 + \rho_2^2)^{n+\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\cdot F\left(\frac{\alpha+2n}{4}, \frac{\alpha+2n+2}{4}, n+\nu+1, \frac{4\rho_1^2 \rho_2^2}{(\rho_1^2 + \rho_2^2)^2}\right)$$

$$\left[0 < \alpha < \nu + \frac{3}{2}\right].$$

Setzt man speciell:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

so verwandelt sich diese Formel, da

$$F(\beta, \gamma, \delta, 1) = \frac{\Pi(\delta-1) \Pi(\delta-\gamma-\beta-1)}{\Pi(\delta-\beta-1) \Pi(\delta-\gamma-1)}$$

ist, in die folgende:

$$\int_0^{\infty} [J^{n+\nu}(\rho y)]^2 y^{\alpha-2\nu-1} dy =$$

$$= \frac{\Pi\left(\frac{\alpha}{2} + n - 1\right) \Pi\left(\nu - \frac{\alpha+1}{2}\right)}{2^{2\nu+n+1-\frac{\alpha}{2}} \Pi\left(\nu - \frac{\alpha}{2}\right) \Pi\left(\nu + \frac{2n-\alpha}{4}\right) \Pi\left(\nu + \frac{2n-\alpha-2}{4}\right)} \rho^{2\nu-\alpha}$$

$$\left[0 < \alpha < \nu + \frac{3}{2}\right].$$

Setzt man in dieser Formel:

$$\rho = 1, \quad \alpha = 2, \quad \nu = 1$$

so erhält man die Relation:

$$\int_0^{\infty} (J^{n+1}(y))^2 \frac{dy}{y} = \frac{1}{2(n+1)} \quad [n \geq 0 \text{ und ganzzahlig}],$$

welche oben auf einem anderen Wege abgeleitet wurde.

Multiplieirt man ferner die Gleichung 5) mit

$$(x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} J^\mu(\rho_3 \sqrt{x^2+y^2}) y dy$$

und integrirt sodann in Bezug auf y von $y = 0$ bis $y = \infty$, so erhält man, wenn man auf der rechten Seite der dadurch entstehenden Gleichung die Integrationsordnung umkehrt, die Formel:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J^{n+\nu}(\rho_1 y) J^{n+\nu}(\rho_2 y) J^\mu(\rho_3 \sqrt{x^2+y^2}) (x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} y dy &= \\ = \frac{(\rho_1 \rho_2)^\nu \Pi(n)}{2^{2\nu-1} \Pi(\nu-1) \Pi(n+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \right]^2 & \\ \cdot \int_0^\pi (\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \varphi)^{-\frac{\nu}{2}} C_n^\nu(\cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi & \\ \cdot \int_0^\infty J^\nu(y \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \varphi}) \frac{J^\mu(\rho_3 \sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}} y^{\nu+1} dy & \end{aligned}$$

Nun ist aber, wie Herr Sonine gezeigt hat (*Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries*⁴. *Mathematische Annalen* 16. Band, pag. 1 ff.):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J^\nu(\alpha y) y^{\nu+1} (x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} J^\mu(\rho_3 \sqrt{x^2+y^2}) dy &= 0 \quad [\rho_3 < \alpha] \\ \int_0^\infty J^\nu(\alpha y) y^{\nu+1} (x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} J^\mu(\rho_3 \sqrt{x^2+y^2}) dy &= \\ = \frac{\alpha^\nu}{\rho_3^\mu} \frac{(\rho_3^2 - \alpha^2)^{\frac{\mu-\nu-1}{2}}}{x^{\mu-\nu-1}} J^{\mu-\nu-1}(x \sqrt{\rho_3^2 - \alpha^2}) & \quad [\rho_3 > \alpha] \end{aligned}$$

und daher verwandelt sich die letzte Gleichung in die folgende:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J^{n+\nu}(\rho_1 y) J^{n+\nu}(\rho_2 y) J^\mu(\rho_3 \sqrt{x^2+y^2}) (x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} y dy &= \\ = \frac{(\rho_1 \rho_2)^\nu \Pi(n) x^{\nu-\mu+1}}{2^{2\nu-1} \Pi(\nu-1) \Pi(n+2\nu-1) \rho_3^\mu} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \right]^2 & \end{aligned}$$

$$\int_0^{\beta} (\rho_3^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos \varphi)^{\nu-1} \cdot J^{\nu-1} (x \sqrt{\rho_3^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos \varphi}) C_n^{\nu}(\cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi,$$

wo

$$\beta = 0, \pi, \arccos \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2}{2\rho_1\rho_2}$$

ist, je nachdem

$$\rho_3^2 < (\rho_1 - \rho_2)^2, \rho_3^2 > (\rho_1 - \rho_2)^2, (\rho_1 - \rho_2)^2 < \rho_3^2 < (\rho_1 + \rho_2)^2$$

ist. Den speciellen Fall $n = 0$ dieser Formel hat Herr Sonine a. a. O. auf einem anderen Wege hergeleitet.

Aus dieser Formel leitet man sofort ab, dass;

$$\int_0^{\infty} J^{\nu}(\rho_1 y) J^{\nu}(\rho_2 y) J^{\nu}(\rho_3 y) \frac{dy}{y^{\nu-1}} = 0$$

ist, wenn $\rho_3^2 < (\rho_1 - \rho_2)^2$ oder $\rho_3^2 > (\rho_1 + \rho_2)^2$ ist, und dass in den übrigen Fällen die Relation:

$$\int_0^{\infty} J^{\nu}(\rho_1 y) J^{\nu}(\rho_2 y) J^{\nu}(\rho_3 y) \frac{dy}{y^{\nu-1}} = \frac{\Pi(n)}{2^{\nu-2} \Pi(\nu-1) \Pi(n+2\nu-1) (\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{\nu}} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \right]^2 \cdot [(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)(\rho_1 + \rho_2 - \rho_3)(\rho_1 + \rho_3 - \rho_2)(\rho_2 + \rho_3 - \rho_1)]^{\nu - \frac{1}{2}} \cdot C_n^{\nu} \left(\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2}{2\rho_1\rho_2} \right)$$

besteht. Das Integral auf der linken Seite dieser Gleichung, welches für $n = 0$ schon von Sonine mitgeteilt wurde, wird also nicht nur gleich Null, wenn sich kein Dreieck bilden lässt, dessen Seiten die Längen ρ_1, ρ_2, ρ_3 haben, sondern auch, wenn diese Grössen so beschaffen sind, dass der Ausdruck $\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2}{2\rho_1\rho_2}$ eine Wurzel der Gleichung $C_n^{\nu}(x) = 0$ ist. Die Wurzeln dieser

Gleichung sind bekanntlich sämmtlich reell und ungleich und liegen innerhalb des Intervalles $-1 \dots +1$.

Multiplirt man die Gleichung:

$$J^\nu(\alpha x) = \frac{(\alpha x)^\nu}{2^\nu \sqrt{\pi} \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} e^{\alpha xy i} (1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dy$$

mit $e^{-\alpha x} x^{\mu-\nu} J^\mu(\gamma x) dx$ und integrirt von $x = 0$ bis $x = \infty$, so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung auf der rechten Seite der dadurch entstehenden Gleichung, wenn man die von mir a. a. O. mitgetheilte Formel:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{\mu-\nu} J^\nu(\gamma x) dx = \frac{\Pi(2\mu)}{2^\mu \Pi(\mu)} \frac{\gamma^\mu}{(a^2 + \gamma^2)^{\frac{2\mu+1}{2}}}$$

welche gilt, so lange der reelle Bestandtheil von a grösser ist, als der imaginäre von γ , berücksichtigt, die Relation:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{\mu-\nu} J^\nu(\alpha x) J^\mu(\gamma x) dx = \frac{\Pi(2\mu) \alpha^\nu \gamma^\mu}{2^{\mu+\nu} \sqrt{\pi} \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dy}{(\gamma^2 + x^2 - \alpha^2 y^2 + 2\alpha x y i)^{\frac{2\mu+1}{2}}}$$

Folgende specielle Fälle dieser Formel mögen besonders hervorgehoben werden:

$$\mu = 0, \quad \nu = 1, \quad \alpha y = u$$

$$\mu = 0, \quad \nu = 0, \quad y = \cos \varphi$$

$$\mu = 0, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \alpha y = u$$

$$\mu = 0, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \alpha = xi, \quad xy = u.$$

Dieselben liefern, wenn z und γ reelle Grössen bezeichnen, die folgenden Integralrelationen:

$$\int_0^\infty e^{-|z|x} J^1(\alpha x) J^0(\gamma x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{\alpha \pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - u^2} du}{\sqrt{\gamma^2 + (z + iu)^2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-|z|x} J^0(\alpha x) J^0(\gamma x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\gamma^2 + (z + \alpha i \cos \varphi)^2}}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-|z|x} J^0(\gamma x) \sin \alpha x \frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{+x} \frac{du}{\sqrt{\gamma^2 + (z + iu)^2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-|z|x} J^0(\gamma x) \sin \text{hyp}(x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_{-x}^{+x} \frac{du}{\sqrt{\gamma^2 + (z - u)^2}}$$

$$[|z| > |x|]$$

Da der Ausdruck:

$$\int_{-x}^{+x} \frac{du}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (z - u)^2}}$$

die Potentialfunction einer homogenen geraden Linie von der linearen Dichtigkeit 1, welche die Punkte $z = -x$ und $z = +x$ der z -Axe verbindet, vorstellt, so liefert die letzte Gleichung für alle z , welche der Bedingung $|z| > |x|$ genügen, für diese Potentialfunction den von Herrn E. Beltrami in seiner Abhandlung: „Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche“ (Memoria dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Serie IV. Tomo II.) mitgetheilten Ausdruck:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-|z|x} J^0(\gamma x) \sin \text{hyp}(x) \frac{dx}{x} \quad [\gamma^2 = x_1^2 + y_1^2]$$

Wenn man die zweite von diesen Gleichungen mit $2\pi\gamma dy$ multiplicirt und in Bezug auf γ von 0 bis γ integrirt, so verwandelt sich die linke Seite derselben in:

$$2\pi\gamma \int_0^{\infty} e^{-|z|x} J^1(\gamma x) J^0(\alpha x) \frac{dx}{x}$$

während die rechte Seite in:

$$2 \int_0^{\pi} \sqrt{\gamma^2 + (z + \alpha i \cos \varphi)^2} d\varphi - 2\pi z$$

den bekannten Ausdruck der Potentialfunction einer homogenen Kreisscheibe von der Flächendichtigkeit 1 und dem Radius γ , welche sich in der xy -Ebene befindet und deren Mittelpunkt der Ursprung ist, übergeht. („Das Potential eines homogenen Kreises“ von E. Heine. Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 76. Band). Die erste von diesen vier Gleichungen liefert demnach für diese Potentialfunction die beiden Ausdrücke:

$$2\pi\gamma \int_0^\infty e^{-|z|x} J^1(\gamma x) J^0(\alpha x) \frac{dx}{x}, \quad 2 \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\gamma^2 - u^2} du}{\sqrt{\alpha^2 + (z+iu)^2}}$$

$[\alpha^2 = x_1^2 + y_1^2],$

von denen der erste von Herrn H. Weber in der Arbeit: „Über die Bessel'schen Functionen und ihre Anwendung in der Theorie der elektrischen Ströme“ (Journal für die reine und angewandte Mathematik von Borchardt, 75. Band) und von Herrn Eugenio Beltrami a. a. O. mitgetheilt wurde, den zweiten hat in neuester Zeit Herr E. Beltrami in seiner Abhandlung: „Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica“ (Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie IV, Tomo IV) aufgestellt.

Die dritte Gleichung spricht die Identität zweier bekannter Ausdrücke für die Potentialfunction aus, welche auf einer in der Ebene $z=0$ gelegenen Kreisfläche mit dem Radius α den constanten Werth 1 annimmt.

Multiplicirt man ferner die Gleichung 5) mit $e^{-zy} y^{-\nu} J^\nu(\gamma y) dy$ und integrirt in Bezug auf y von $y=0$ bis $y=\infty$, so erhält man, wenn man die Integrationsordnung auf der rechten Seite der so entstehenden Gleichung umkehrt und die eben abgeleitete Integralrelation berücksichtigt, die Formel:

$$6) \int_0^\infty e^{-zy} y^{-\nu} J^{\nu+\nu}(\rho_1 y) J^{\nu+\nu}(\rho_2 y) J^\nu(\gamma y) dy =$$

$$= \frac{(\rho_1 \rho_2)^\nu \gamma^\nu \Pi(2\nu) \Pi(n)}{2^{2\nu+\mu-1} \sqrt{\pi} \Pi(\nu-1) \Pi\left(\frac{2\mu-1}{2}\right) \Pi(n+2\nu-1) \left[\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right) \right]^2} \cdot$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^\pi \frac{(1-x^2)^{\frac{2\mu-1}{2}} C_n''(\cos \varphi) dx d\varphi}{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \varphi + z^2 - \gamma^2 x^2 - 2\gamma zi)^{\frac{2\nu+1}{2}}}$$

wo der reelle Bestandtheil von z grösser sein muss, als der imaginäre von γ .

Setzt man in dieser Gleichung:

$$n = 0, \quad \nu = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad \gamma = xi, \quad \kappa x = u,$$

so verwandelt sich dieselbe in die folgende:

$$\int_0^\infty e^{-|z|\nu} J^0(\rho_1 y) J^0(\rho_2 y) \operatorname{sinhyp}(xy) \frac{dy}{y} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{+x} \int_0^\pi \frac{du d\varphi}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \varphi + z^2 + u^2 - 2zu}} \quad [|\kappa| > |\kappa'|]$$

falls z und x reelle Grössen sind.

Nun ist aber:

$$2\rho_2 \int_{-x}^{+x} \int_0^\pi \frac{du d\varphi}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \varphi + z^2 + u^2 - 2zu}} \quad [\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2]$$

die Potentialfunction der Mantelfläche eines homogenen Kreiscylinders von der Flächendichtigkeit 1, dessen Axe die z -Axe ist und welcher von zwei Kreisen mit dem Radius ρ_2 geschlossen wird, die in den Ebenen $z = +x$ und $z = -x$ liegen. Man hat demnach für diese Potentialfunction auch den von Herrn E. Beltrami in der zuerst erwähnten Abhandlung mitgetheilten Ausdruck:

$$4\pi\rho_2 \int_0^\infty e^{-|z|\nu} J^0(\rho_1 y) J^0(\rho_2 y) \operatorname{sinhyp}(xy) \frac{dy}{y}.$$

Multiplirt man die Gleichung 6) mit $\gamma^{-\mu}$ und setzt sodann γ gleich Null, so verwandelt sich dieselbe in:

$$\int_0^\infty e^{-z\nu} J^{n+\nu}(\rho_1 y) J^{n+\nu}(\rho_2 y) dy = \frac{\Pi(n) \Pi(2\nu)}{2^{2\nu-1} \Pi(\nu-1) \Pi(n+2\nu-1)} \cdot$$

$$\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \right]^2 \int_0^\pi \frac{C_n''(\cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + z^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \varphi}}.$$

Setzt man in dieser Formel der Reihe nach:

$$n = 0, \quad \nu = 0$$

$$n = 0, \quad \nu = 0, \quad \rho_1 = \rho_2 = ib, \quad z = 2a, \quad \varphi = 2\psi$$

so erhält man die Relationen:

$$\int_0^\infty e^{-|z|y} J^0(\rho_1 y) J^0(\rho_2 y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + z^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \varphi}}$$

$$\int_0^\infty e^{-2ay} (J^0(iby))^2 dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \psi}} \quad [a > |b|].$$

Da nun der Ausdruck:

$$\rho_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + z^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos \varphi}} \quad [\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2]$$

die Potentialfunction einer homogenen Kreisperipherie von der linearen Dichtigkeit 1, welche in der xy -Ebene liegt und den Ursprung zum Mittelpunkte hat, vorstellt, während der Ausdruck

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \psi}}$$

die Potentialfunction einer homogenen Kreisperipherie von der Masse 1 ist, wenn man unter a und b die halbe Summe und die halbe Differenz des grössten und kleinsten Abstandes des potenzirten Punktes vom Umfange versteht, so hat man für diese Potentialfunctionen die Ausdrücke:

$$2\pi \rho_2 \int_0^\infty e^{-|z|y} J^0(\rho_1 y) J^0(\rho_2 y) dy$$

$$2 \int_0^\infty e^{-2ay} (J^0(iby))^2 dy$$

welche man Herrn E. Beltrami verdankt, der den ersten in der zuerst angeführten Abhandlung, den zweiten in der Arbeit:

„Sulle funzioni cilindriche“ (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. XVI.) mittheilte.

Schreibt man, um weitere Integrale abzuleiten, in der oben angegebenen Schlöfli'schen Relation $-n$ für n berücksichtigt, dass für ganzzahlige n :

$$J^{-n}(x) = (-1)^n J^n(x)$$

ist, und setzt:

$$m = n + 2r$$

$$2\varphi = \psi,$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$7) \quad J^{n+2r}(x) J^n(x) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\pi J^{2r}(x\sqrt{2+2\cos\psi}) \cos(n+r)\psi d\psi.$$

Multipliziert man diese Relation mit $e^{-\frac{x^2}{a}} x^{2r+1} dx$ und integrirt in Bezug auf x von $x=0$ bis $x=\infty$, so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung auf der rechten Seite der so entstehenden Gleichung, da, wie ich gezeigt habe:

$$\int_0^\infty e^{-a_1 x^2} x^{r+1} J^r(a_1 x) dx = \frac{a_2^r}{(2a_1^2)^{r+1}} e^{-\frac{a_1^2}{4a_2}}$$

ist, die Relation:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{a}} x^{2r+1} J^{n+2r}(x) J^n(x) dx = \frac{(-1)^n a^{2r+1}}{2^{r+1} \pi} \cdot \int_0^\pi e^{-\frac{a(1+\cos\psi)}{2}} (1+\cos\psi)^r \cos(n+r)\psi d\psi.$$

Aus der Gleichung:

$$J^n(\alpha) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi e^{2i \cos \vartheta} \cos n \vartheta d\vartheta$$

folgt:

$$\int_0^\pi e^{2i \cos \vartheta} \cos n \vartheta \cos^s \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{i^{s-1}} \frac{d^s J^n(\alpha)}{d\alpha^s}$$

und daher hat man schliesslich:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} x^{2r+1} J^{n+2r}(x) J^n(x) dx =$$

$$= \frac{i^{n+r} a^{2r+1}}{2} \frac{d^r}{da^r} \left\{ e^{-\frac{a}{2}} J^{n+r} \left(\frac{a}{2i} \right) \right\}.$$

Multipliziert man die Formel 7) mit $e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}} x^{2r+1} dx$ und integrirt in Bezug auf x von $x = 0$ bis $x = \infty$, so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung unter Benützung einer von mir früher mitgetheilten Formel die Relation:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}} x^{2r+1} J^{n+2r}(x) J^n(x) dx =$$

$$= \frac{(-1)^n \Pi(4r+1) a^{\frac{4r+1}{2}}}{2^r \Pi(2r) \pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+r)\psi(1+\cos\psi)^r d\psi}{(1+2a+2a \cos\psi)^{\frac{4r+3}{2}}}.$$

Nun ist aber:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(n+r)\psi(1+\cos\psi)^r d\psi}{(1+2a+2a \cos\psi)^{\frac{4r+3}{2}}} = \frac{(-1)^r \Pi\left(\frac{4r+1}{2}\right)}{2^r \Pi\left(\frac{2r+1}{2}\right)}.$$

$$\cdot \frac{d^r}{da^r} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+r)\psi d\psi}{(1+2a+2a \cos\psi)^{\frac{2r+3}{2}}} \right\}$$

ferner:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(n+r)\psi d\psi}{(1+2a+2a \cos\psi)^{\frac{2r+3}{2}}} = \frac{(-1)^{n+r} \Pi\left(n+2r+\frac{1}{2}\right) \pi a^{n+r}}{\Pi(n+r) \Pi\left(r+\frac{1}{2}\right) (1+2a)^{n+2r+\frac{3}{2}}}.$$

$$\cdot F\left(\frac{4r+2n+3}{4}, \frac{4r+2n+5}{4}, n+r+1, \frac{4a^2}{(1+2a)^2}\right)$$

und daher:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}} x^{2r+1} J^{n+2r}(x) J^n(x) dx =$$

$$\frac{\Pi(4r+1) \Pi\left(\frac{4r+1}{2}\right) \Pi\left(n+2r+\frac{1}{2}\right) a^{\frac{4r+1}{2}}}{2^{2r} \Pi(2r) \Pi(n+r) \left[\Pi\left(\frac{2r+1}{2}\right)\right]^2}.$$

$$-\frac{dr}{da^r} \left\{ \frac{a^{n+r}}{(1+2a)^{n+2r+\frac{3}{2}}} F\left(\frac{4r+2n+3}{4}, \frac{4r+2n+5}{4}, n+r+1, \frac{4a^2}{(1+2a)^2}\right) \right\}.$$

Schreibt man in der Schläfli'schen Relation $\rho_1 \sqrt{x^2+z^2}$ für x , multiplicirt dieselbe sodann mit $(x^2+z^2)^{-\frac{m+n}{2}} J^r(\rho x) x^{r-1} dx$ und integrirt in Bezug auf x von 0 bis ∞ , so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung auf der rechten Seite der so entstehenden Gleichung, da, wie Herr Sonine a. a. O. gezeigt hat,

$$\int_0^{\infty} J^p(\rho_1 \sqrt{x^2+z^2}) (x^2+z^2)^{-\frac{p}{2}} J^r(\rho x) x^{r-1} dx =$$

$$= \frac{2^{r-1} \Pi(r-1)}{\rho^r} \frac{J^p(\rho_1 z)}{z^p} \quad [\rho > \rho_1 \quad p > r-1 > -1]$$

ist, die Relation:

$$\int_0^{\infty} J^n(\rho_1 \sqrt{x^2+z^2}) J^m(\rho_1 \sqrt{x^2+z^2}) (x^2+z^2)^{-\frac{m+n}{2}} J^r(\rho x) x^{r-1} dx =$$

$$= \frac{2^r \Pi(r-1)}{\pi \rho^r z^{m+n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{m+n}(2\rho_1 z \cos \varphi) \cos(m-n)\varphi d\varphi \quad [\rho > 2\rho_1]$$

oder

$$\int_0^{\infty} J^n(\rho_1 \sqrt{x^2+z^2}) J^m(\rho_1 \sqrt{x^2+z^2}) (x^2+z^2)^{-\frac{m+n}{2}} J^r(\rho x) x^{r-1} dx =$$

$$= \frac{2^{r-1} \Pi(r-1) J^m(\rho_1 z) J^n(\rho_1 z)}{\rho^r z^{m+n}} \quad [\rho > 2\rho_1].$$

Für $z = 0$ verwandelt sich diese Relation in die folgende:

$$\int_0^{\infty} J^n(\rho_1 x) J^m(\rho_1 x) J^r(\rho x) x^{r-m-n-1} dx = \frac{\Pi(r-1)}{2^{m+n+1-r} \Pi(m) \Pi(n)} \frac{\Gamma_1^{n+n}}{\rho^r}$$

$$[\rho > 2\rho_1].$$

Auf demselben Wege lässt sich aus der Gleichung 5) die Formel:

$$\int_0^\infty J^\nu(\rho_1 \sqrt{x^2+z^2}) J^\nu(\rho_2 \sqrt{x^2+z^2}) (x^2+z^2)^{-\nu} J^r(\rho x) x^{r-1} dx = \frac{2^{r-1} \Pi(r-1)}{\rho^r} \frac{J^\nu(\rho_1 z) J^\nu(\rho_2 z)}{z^{2\nu}} \quad [\rho > \rho_1 + \rho_2]$$

herleiten, welche für $z = 0$ in die specielle Formel:

$$\int_0^\infty J^\nu(\rho_1 x) J^\nu(\rho_2 x) J^r(\rho x) x^{r-2\nu-1} dx = \frac{2^{r-1} \Pi(r-1)}{[2^\nu \Pi(\nu)]^2} \frac{(\rho_1 \rho_2)^\nu}{\rho^r} \quad [\rho > \rho_1 + \rho_2]$$

übergeht.

Durch wiederholte Anwendung des eben angewendeten Verfahrens findet man sofort die allgemeinen Relationen:

$$\int_0^\infty J^\nu(\rho_1 \sqrt{x^2+z^2}) J^\nu(\rho_2 \sqrt{x^2+z^2}) \dots J^\nu(\rho_s \sqrt{x^2+z^2}) J^r(\rho x) (x^2+z^2)^{-\frac{s\nu}{2}} x^{r-1} dx = \frac{2^{r-1} \Pi(r-1)}{\rho^r} \frac{J^\nu(\rho_1 z) J^\nu(\rho_2 z) \dots J^\nu(\rho_s z)}{z^{s\nu}} \quad [\rho > \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_s]$$

$$\int_0^\infty J^\nu(\rho_1 x) J^\nu(\rho_2 x) \dots J^\nu(\rho_s x) J^r(\rho x) x^{r-s\nu-1} dx = \frac{2^{r-1} \Pi(r-1)}{[2^\nu \Pi(\nu)]^s} \frac{(\rho_1 \rho_2 \dots \rho_s)^\nu}{\rho^r} \quad [\rho > \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_s]$$

$$\int_0^\infty J^{m+n}(\rho_1 \sqrt{x^2+z^2}) J^{m+n}(\rho_2 \sqrt{x^2+z^2}) J^{m+n}(\rho_3 \sqrt{x^2+z^2}) \dots J^{m+n}(\rho_s \sqrt{x^2+z^2}) J^r(\rho x) (x^2+z^2)^{-\frac{s(m+n)}{2}} x^{r-1} dx = \frac{2^{r-1} \Pi(r-1)}{\rho^r} \frac{J^{m+n}(\rho_1 z) J^{m+n}(\rho_2 z) \dots J^{m+n}(\rho_s z)}{z^{s(m+n)}} \quad [\rho > 2\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_s]$$

$$\int_0^\infty J^n(\rho_1 x) J^m(\rho_1 x) J^{m+n}(\rho_2 x) J^{m+n}(\rho_3 x) \dots J^{m+n}(\rho_s x) J^r(\rho x) x^{r-s(m+n)-1} dx = \frac{\Pi(r-1)}{[2^{m+n} \Pi(m+n)]^{s-1}} \frac{(\rho_1 \rho_2 \dots \rho_s)^{m+n}}{2^{m+n+1-r} \rho^r \Pi(m) \Pi(n)} \quad [\rho > 2\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_s]$$

Über die von Prof. Wolf vermuthete Doppelperiode der Sonnenfleckenhäufigkeit.

Von D. J. Korteweg.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Juli 1883.)

In neuerer Zeit ist von Herrn Wolf (Astronomische Mittheilungen Nr. 57, Zürich) eine höchst sinnreiche Methode zur Bestimmung von Perioden in der Sonnenfleckenhäufigkeit angewendet worden, die man schematisch folgendermassen darstellen kann:

Es besitze irgend eine periodische Erscheinung, deren Verlauf während längerer Zeit durch Zahlen ausgedrückt worden ist, die Periode T , welche durch unregelmässige Störungen mehr oder weniger undeutlich hervortritt, deren Dauer wenigstens nicht genau bekannt ist. Man wähle dann statt T verschiedene Versuchswerthe. Ist T' einer dieser Werthe, dann stellt man, so weit die Reihe der zu benützensden Angaben reicht, für einen gegebenen Moment a , alle Angaben, die sich auf die Momente:

$$\dots\dots a - 2T', a - T', a, a + T', a + 2T' \dots\dots \text{u. s. w.}$$

beziehen, zusammen und bestimmt deren Mittelwerth. Diese Mittelwerthe bilden eine neue Reihe (Mittelreihe), die sich in der Periode T' genau wiederholt, denn es ist deutlich, dass für die Momente a und $a + T'$ derselbe Mittelwerth gefunden werden muss.

War nun die Versuchsperiode T' weit von der wahren Periode T entfernt, dann werden die einzelnen Glieder der Mittelreihe nur wenig vom Mittelwerthe aller zu benützensden Angaben abweichen. Es werden dann nämlich bei der Bestimmung eines jeden Gliedes der Mittelreihe Angaben zusammengenommen, welche auf verschiedene Phasen der periodischen Erscheinung Beziehung haben, deren Mittelwerth also, indem sich die zufälligen

Störungen grösstentheils heben, ungefähr die mittlere Intensität der Erscheinung während der ganzen Zeit der Beobachtungen darstellt.

War darentgegen T' nur sehr wenig von T verschieden, dann kommen nur solche Angaben zusammen, die zu einer gleichen Phase der Erscheinung gehören; es werden also die Mittelwerthe, je nach den Momenten worauf sie sich beziehen, sehr verschieden ausfallen und wenn T' ganz gleich T sein sollte, zusammen den mittleren, von zufälligen Störungen befreiten periodischen Verlauf der Erscheinung darstellen.

Im ersten Falle also werden die einzelnen Glieder der neuen Reihe wenig, im zweiten viel vom allgemeinen Mittelwerthe aller Angaben abweichen. Bestimmt man nun die mittlere Abweichung, d. h. die Wurzel aus dem Mittel der Quadrate der Abweichungen der einzelnen Glieder vom allgemeinen Mittelwerthe, dann muss diese Grösse für $T' = T$ einen Maximalwerth erreichen und man ist also im Stande, unter den verschiedenen Versuchsperioden diejenige herauszufinden, die der wahren Periode am nächsten liegt.

Es kann auch vorkommen, dass die in Betracht gezogene Erscheinung weniger einfacher Natur ist, so dass in ihr mehrere Perioden T_1 , T_2 u. s. w. zugleich auftreten. Man darf dann annähernd für jeden Augenblick die Zahl, welche die Intensität der Erscheinung misst, als die Summe des allgemeinen Mittelwerthes und der von den verschiedenen Perioden bedingten Abweichungen auffassen. Wählt man dann eine Versuchsperiode T' , die mit einer der Perioden, z. B. T_2 nahezu identisch ist, dann heben sich die von den anderen Perioden bedingten Abweichungen grösstentheils auf und die Glieder der betreffenden Mittelreihe geben uns eine Darstellung vom Verlaufe, den die Erscheinung nehmen würde, wenn sich nur diese eine Periode in ihr vorfände. Wählt man dahingegen eine von jeder Periode T_1 , T_2 u. s. w. beträchtlich verschiedene Versuchsperiode T' , dann nähern sich alle Glieder der Mittelreihe dem allgemeinen Mittelwerthe. Man wird also mehrere, durch Minimalwerthe getrennte Maximalwerthe der mittleren Abweichung finden, welche jede für sich eine der in der Erscheinung eintretenden Perioden T_1 , T_2 u. s. w. anzeigen.

Indem nun Herr Wolf diese Methode auf die 1877 von ihm in den Abhandlungen der „Royal astronomical Society“ veröffentlichten ausgeglichenen monatlichen Relativzahlen der Sonnenfleckenhäufigkeit für die Jahre 1751 bis 1870 anwendete, fand er zwei Maximalwerthe der mittleren Abweichung, die sich auf Perioden von 10 und $11\frac{1}{3}$ Jahr beziehen, getrennt durch einen Minimalwerth für die Versuchsperiode von $10\frac{1}{2}$ Jahr. Daraus zieht er dann den wichtigen und scheinbar so wohlbegründeten Schluss, dass in der Sonnenfleckenhäufigkeit „ausser einer allfälligen grösseren Periode ganz entschieden zwei kleinere Perioden von 10 und $11\frac{1}{3}$ Jahr auftreten“, und dass weiter „durch die Combination dieser beiden Perioden die starken Schwankungen in Länge und Höhe hervorgerufen werden, welche die einzelnen Perioden gegenüber der mittleren Periode zeigen.“ Noch weiter geht Herr Faye (Compt. rend. 18. Dec. 1882, Nr. 25), indem er die Vermuthung ausspricht, die längere Periode würde als selbstständige Periode wohl ganz verschwinden können, sie entstehe wahrscheinlich nur durch Interferenz der beiden kürzeren.

Als ich nun damit beschäftigt war dieses auch von mir gar nicht angezweifelte Resultat, einigen nahe liegenden Prüfungen zu unterwerfen, zeigte sich zu meinem Erstaunen, dass es diese Prüfungen nicht aushielt, und daher auf eine Illusion beruhen müsste. Weil aber die Methode so sinnreich und vielleicht berufen ist in anderen Fällen grosse Dienste zu leisten, glaube ich die Sache besprechen zu sollen, dass man wisse, vor welchen Illusionen man sich zu hüten habe. Auf zwei ganz verschiedenen Wegen werde ich darthun, dass die zweite Wolf'sche Periode keine wirkliche Existenz hat, und dann weiter nachweisen, welche Eigenthümlichkeit des von Herrn Wolf zu seinen Berechnungen benutzten Theiles der Curven der Sonnenfleckenhäufigkeit die beiden Maxima der mittleren Abweichung hervorruft. Schliesslich bleibt dann noch kurz zu besprechen, welche Ansicht über die Natur der Sonnenfleckenperiodicität durch diese Untersuchung meines Erachtens an Wahrscheinlichkeit gewinnt.

I.

Zunächst wollte ich mich überzeugen, ob die beiden angegebenen Perioden durch ihre Combination der Hauptsache nach

in dem von Herrn Wolf zu seinen Berechnungen benutzten Zeitraum (1751—1870) vom Verlaufe der Sonnenfleckenhäufigkeit Rechenschaft geben können. Dazu habe ich erstens mittelst den von Herrn Wolf Tab. II, S. 229 seiner Astronomischen Nachrichten Nr. 57 gegebenen Zahlen die Curve construirt (Fig. 1), welche aus der Combination dieser beiden Perioden hervorgeht; indem ich für jedes Jahr die um den allgemeinen Mittelwerth $47 \cdot 8$ vermehrte Summe der diesem Jahre nach beiden Perioden zugehörigen Abweichungen berechnete.

Nehme ich z. B. das Jahr 1780, so ist die dazu gehörige Abweichung der zehnjährigen Periode identisch mit der vom Jahre 1760, also $+19 \cdot 0$; die der $11\frac{1}{3}$ jährigen mit der vom Jahre $1757\frac{1}{3}$, also (mittelst Interpolation) $+28 \cdot 0$. Die Ordinate der Combinationscurve ist also hier $47 \cdot 8 + 19 \cdot 0 + 28 \cdot 0 = 94 \cdot 8$.

Zweitens habe ich dann mittelst den von Herrn Wolf in den Abhandlungen der Royal astronomical Society (1877) mitgetheilten ausgeglichenen relativen Jahreszahlen den wirklichen Verlauf der Sonnenfleckenhäufigkeit daneben durch eine andere Curve dargestellt (Fig. 1).

Auf die Eigenthümlichkeiten dieser beiden Curven werde ich vorläufig nur so weit eingehen, um zu constatiren, dass überall wo die Combinationscurve ein stark ausgesprochenes Maximum oder Minimum zeigt, auch wirklich sich ganz in der Nähe ein solches in der Curve der wahren Sonnenfleckenhäufigkeit vorfindet. Auch folgende Tabelle zeigt dieses sehr klar.

Zeitraum (1751—1870).

Stark ausgesprochene

Maxima $>69 \cdot 0$ der Combinationscurve 1758 1769 1780 1791 1828 1838 1848 1859 1870

Nächstliegende wirkliche

Maxima 1761 1769 1778 1788 1829 1837 1848 1860 1870

Stark ausgesprochene

Minima $<20 \cdot 0$ der Combinationscurve 1754 1764 1775 1785 1833 1844 1855 1865

Nächstliegende wirkliche

Minima 1755 1766 1775 1784 1833 1843 1856 1867

Die paar Fälle, wo der Abstand zwischen den berechneten und gefundenen Maximis und Minimis mehr als zwei Jahre beträgt.

verlieren durch Betrachtung der Curve noch von ihrem Gewichte; jedenfalls kommt es niemals vor, dass, wenn ein stark ausgesprochenes Maximum oder Minimum der Combinationscurve stattfindet, die andere Curve eine entgegengesetzte Phase zeigen sollte.

Ich schliesse hieraus also erstens, dass, wenn die beiden **Wolf'schen Perioden wirklich bestehen**, der Verlauf der Sonnenfleckenhäufigkeit von beiden zusammen dermassen beherrscht wird, dass die anderen vielleicht daneben vorhandenen Perioden und die zufälligen Störungen nicht im Stande sind, ein aus den Wolf'schen Perioden hervorgehendes, stark ausgesprochenes Maximum oder Minimum zu heben und zweitens, dass man an der Länge der beiden Perioden keine einigermaßen beträchtlichen Änderungen anzubringen hat.

Es liegt nun nahe, die Combinationscurve der beiden Perioden auch rückwärts bis 1609 fortzusetzen und, weil es wohl nicht möglich ist für diesen Zeitraum die Sonnenfleckenhäufigkeit durch bestimmte Zahlen auszudrücken, doch wenigstens die Maxima und Minima der Curve mit den wirklich wahrgenommenen der Zeit nach zu vergleichen. In Fig. 2 ist die Combinationscurve dargestellt und sind daneben die Stellen verzeichnet, wo sich nach den Angaben von Wolf in den Abhandlungen der Roy. Astr. Soc. (1877) wirkliche Maxima und Minima vorgefunden haben. Schon in einer Entfernung von 39 Jahren vom Anfangsjahre 1751 des von Herrn Wolf benützten Zeitraumes ist alle Übereinstimmung zwischen der Curve und dem wirklichen Verlaufe der Sonnenfleckenhäufigkeit verschwunden. Im Jahre 1712 zeigt die Curve ein Maximum an; es fand aber damals ein Minimum statt. Derselbe Umstand wiederholte sich 1689. Umgekehrt findet man in den Jahren 1705, 1685, 1674 Minima der Curve ganz nahe bei wahrgenommenen Maxima. Dieser völlige Mangel an Übereinstimmung tritt auch in folgender Tabelle deutlich hervor:

Zeitraum (1609—1750).

Stark ausgesprochene

Maxima > 69·0 der Com-

binationscurve	1610	1621	1658	1668	1678	1689	1700
					1712	1738	1748

Nächstliegende wirkliche

Maxima1615·5 1626 1660 1675 1675 1693 1705·5
1718 1739 1750

Stark ausgesprochene

Minima <20·0 der Com-
binationcurve1615 1663 1674 1685 1695 1705 1743

Nächstliegende wirkliche

Minima1611 1666 1679·5 1689·5 1698 1712 1745

Schon hieraus allein kann man, wie ich meine, mit Sicherheit auf die Unwahrscheinlichkeit des Vorhandenseins der beiden Wolf'schen Perioden schliessen. Es wäre ja unerklärlich, dass die beiden Perioden, welche die aus ihnen hervorgehenden stark ausgesprochenen Phasen im Zeitraum 1751—1871 dem wirklichen Verlaufe der Sonnenfleckenhäufigkeit aufzudrängen wussten, im Zeitraume 1609—1750 dazu aber gänzlich unfähig gewesen sein sollten.

Übrigens kann man mit kleinen Änderungen in der Länge der Perioden ganz gewiss nicht auskommen, weil die Widersprüche sich schon in so geringer Entfernung vom Jahre 1751 zeigen.

II.

Wie dem sei, jedenfalls schien es mir wünschenswerth noch eine andere Prüfung anzustellen und sich dabei nicht auf den älteren Wahrnehmungen, sondern auf den von Herrn Wolf zur Berechnung seiner Perioden benützten Zahlen selbst zu stützen. Achtet man darauf, wie scharf in der von Wolf gegebenen, von uns Fig. 3 wiederholten graphischen Darstellung vom Werthe der mittleren Abweichung die beiden Maxima durch ein Minimum von einander getrennt sind, so bleibt wohl kein Zweifel übrig, dass auch bei Beschränkung der Untersuchung, z. B. auf zwei Drittel des von Herrn Wolf benützten Zeitraumes (wenn beide Perioden wirklich existiren) noch eine deutliche Spur ihrer Existenz sichtbar bleiben muss. Ich habe also den Zeitraum 1751—1873, wofür die monatlichen und jährlichen Relativzahlen der Sonnenfleckenhäufigkeit von Wolf bestimmt worden sind (Tr. R. A. S. l. c.) in drei Sectionen (1751—1791) (1792—1832) (1833—1873) zerlegt und dann erstens für die

beiden ersten zusammen; zweitens für die beiden letzten zusammen die mittlere Abweichung für verschiedene Versuchsperioden zwischen 9 und $12\frac{1}{2}$ Jahr berechnet.

Zur Abkürzung der Rechnungen habe ich mir dabei eine kleine Änderung in dem von Herrn Wolf befolgten Verfahren erlaubt. Diesernämlich benützt zur Berechnung seiner sogenannten Differenzreihen die relativen Monatszahlen und erhält also z. B. für die Versuchsperiode von 10 Jahren eine Differenzreihe von 120 Zahlen, die sich jede auf einen bestimmten Monat der Periode beziehen. Später ersetzt er dann je 12 aufeinanderfolgende Zahlen durch ihren Mittelwerth und bildet so eine neue Reihe (Jahresreihe) von 10 Gliedern, die dann schliesslich zur Berechnung der mittleren Abweichung der Periode verwendet wird.

Statt dessen bin ich bei meinen Berechnungen von den Wolf'schen ausgeglichenen relativen Jahreszahlen ausgegangen und habe ich also für dieselbe Versuchsperiode sofort eine Jahresreihe von 10 Glieder erhalten. Da wo ich, wie z. B. für die Versuchsperiode von $9\frac{1}{2}$ Jahr, die Zahl für $1760\frac{1}{2}$ bedurfte, habe ich zwischen den Zahlen für 1760 und 1761 interpolirt.

Der Hauptsache nach kommt das darauf hinaus, dass, wo Herr Wolf am Schlusse seiner Berechnungen Monatszahlen zu Jahreszahlen zusammenzieht, dieses bei mir schon im Anfang geschehen ist. Dass die Änderung unwesentlich ist, zeigt auch die nahe Übereinstimmung zwischen den von mir für die Periode (1751—1873) und den von Herrn Wolf für die Periode (1751—1871) erhaltenen mittleren Abweichungen.

Folgende Tabellen zeigen die Resultate meiner Rechnungen.

A. Zeitraum (1751—1832) (Section I+II).

Abweichungen vom allgemeinen Mittelwerthe 48·7 für den ganzen Zeitraum.

Länge der Ver- suchs- periode in Jahren	1751	1752	1753	1754	1755	1756	1757	1758	1759	1760	1761	1762	1763	Mittlere Ab- weichung
9	+17·21	+18·5 ³	+7·5	-2·2	-11·3	-14·5	-15·7	-8·4	+7·0	—	—	—	—	12·5
9½	+16·9	+9·0	-1·4	-9·2	-15·6 ⁵	-20·5	-14·0	+5·8	+21·4	+20·2	—	—	—	14·5 ³
10	+5·7	-3·7	-9·5	-16·0	-20·0	-11·8	+5·9	+19·1	+18·7	+11·5	—	—	—	13·5
10½	+1·9 ⁵	-4·4	-10·0	-14·0 ⁵	-10·8	+1·3	+11·7 ⁵	+8·8	+4·1	+6·8	+5·1	—	—	8·3
11	-4·2	-9·7	-11·2	-11·3	-7·7	+4·6	+6·9	+11·0	+11·0	+10·4	+6·7	—	—	9·0
11½	-12·0	-14·7	-12·0	-5·2	+4·9	+6·5	+13·6	+18·0	+10·9	+2·7	-5·5	-14·0	—	10·9
12	-8·2	-5·7	+2·3	+10·0	+12·5	+14·7	+14·0	+5·9	-4·8	-14·3	-16·6 ⁵	-17·5	—	11·6
12½	+2·7	+13·8	+20·8	+14·5	+6·8	+0·8 ⁵	-6·6	-10·2 ⁵	-17·0	-18·2	-9·1	-4·6	-0·4	11·9

¹ Diese Zahl ist also erhalten durch Subtraction des Gesamtmittels 48·7 der ganzen Periode vom Mittelwerthe der zehn relativen Jahreszahlen für 1751, 1760, 1769, 1778, 1787, 1796, 1805, 1814, 1823, 1832.

² Hier konnten, weil 1833 ausserhalb der Periode liegt, nur neun relative Jahreszahlen benützt werden.

³ Das Jahr 1760 liegt hier schon zur Hälfte im zweiten Abschnitte der Mittelreihe, der eine genaue Wiederholung des ersten Abschnittes ist. Will man also dem Theile der Mittelreihe, der sich auf die Jahre 1751 und 1760 bezieht, keinen zu grossen Einfluss geben, dann muss zur Berechnung der mittleren Abweichung zu den übrigen neun Quadraten nur das halbe Quadrat von 20·2 addirt und dann durch 9½ dividirt werden.

B. Zeitraum (1792—1873) (Section II+III).

Abweichungen vom allgemeinen Mittelwerthe 48.9 für den ganzen Zeitraum.

Länge der Versuchs- periode in Jahren	1792	1793	1794	1795	1796	1797	1798	1799	1800	1801	1802	1803	1804	Mittlere Ab- weichung
9	+ 5.7	+ 3.3	+ 4.2	- 1.2	- 5.7	- 5.3	- 3.1	- 1.6	+ 3.1	—	—	—	—	4.0
9½	+ 7.4	+ 7.4	+ 7.6	- 3.0	- 8.1	- 8.3	- 5.0	- 1.1	+ 0.3	+ 4.9	—	—	—	6.1
9¾	+ 11.8	+ 3.3	- 4.5	- 12.0	- 11.5	- 5.0	+ 0.3	+ 3.4	+ 7.4	+ 10.0	—	—	—	7.91
10	- 1.0	- 9.8	- 14.8	- 11.4	- 3.3	+ 2.9	+ 9.3	+ 12.2	+ 13.2	+ 4.25	—	—	—	9.6
10¼	- 15.2	- 15.7	- 10.0	0.0	+ 11.2	+ 15.3	+ 16.9	+ 9.95	+ 0.3	- 9.6	- 19.5	—	—	12.12
10½	- 17.2	- 10.0	+ 6.35	+ 20.3	+ 23.8	+ 17.8	+ 7.7	+ 3.3	- 15.1	- 22.9	- 23.65	—	—	16.4
11	+ 20.4	+ 40.2	+ 30.1	+ 16.7	+ 3.3	- 9.5	- 13.0	- 28.9	- 33.6	- 23.6	- 7.6	—	—	24.2
11½	+ 25.8	+ 15.7	+ 5.5	- 5.4	- 16.6	- 28.4	- 34.7	- 27.9	- 9.6	+ 19.3	+ 33.9	+ 32.3	—	23.2
12	+ 13.2	+ 0.5	- 12.2	- 24.1	- 25.8	- 20.3	- 5.1	+ 9.2	+ 22.9	+ 19.0	+ 12.9	+ 12.3	—	16.6
12½	- 4.9	- 11.0	- 10.8	- 4.4	- 3.2	+ 4.35	+ 9.8	+ 8.0	+ 3.4	+ 3.7	+ 5.3	+ 3.7	- 3.0	6.6

Korteweg.

¹ Zu den übrigen neun Quadraten ist $\frac{3}{4}$ des Quadrates von 10.0 addirt.

² Zu den übrigen zehn Quadraten ist $\frac{1}{4}$ des Quadrates von 19.5 addirt.

C. Zeitraum (1751—1873) (Section I + II + III).

Abweichungen vom allgemeinen Mittelwerthe 48·9 für den ganzen Zeitraum.

Längere Versuchs- periode in Jahren	1751	1752	1753	1754	1755	1756	1757	1758	1759	1760	1761	1762	1763	Mittlere Ab- weichung	Mittlere Abweichung von Wolf'schen Gründe (1751— 1873)
9	+11·4	+10·3	+4·6	—1·4	—4·9 ⁵	—7·5	—11·2	—5·5	+3·3	—	—	—	—	7·5	—
9½	+10·4	+6·5	+0·9	—3·6	—7·1	—8·9	—10·4	—1·4	+8·2	+11·5	—	—	—	7·5	9·2
10	+7·9	—3·0	—14·5	—22·2	—21·7 ⁵	—11·1	+6·3	+19·8	+21·7	+17·8	—	—	—	16·1	16·4
10½	—8·1	—2·4	+3·7	+5·0	+5·0	+7·2	+8·2	+0·2	—6·1	—9·8	—9·2	—	—	6·4	5·6
11	+5·0	—5·1	—12·9	—15·6	—16·8	—13·5	—10·8	+2·1	+17·8	+29·5	+20·2	—	—	15·5	15·0
11½	—22·0	—24·7	—19·6	—4·5	+17·7	+24·8	+24·1	+17·7	+8·2	—1·6	—11·4	—21·9	—	18·1	17·4
12	+6·5	+15·2	+14·7	+12·2	+9·6	+7·9	+2·4	—8·3	—18·7	—22·2	—17·7 ⁵	—5·1	—	13·1	12·6
12½	+3·8	+7·7	+7·4	—1·8	—8·7	—9·8	—7·2	—5·1	—4·0	+1·3	+8·1	+8·3	+4·0	6·6	7·4

Ein Blick auf diese Tabellen oder auf die daraus construirten Curven der mittleren Abweichung (Fig. 3) zeigt sofort, dass die Methode von Herrn Wolf zu ganz entgegengesetzten Resultaten führt, je nachdem man sie auf verschiedene Zeiträume anwendet. Der ersten Tabelle zufolge würde man zwar auch auf das Bestehen zweier Perioden schliessen müssen, deren Dauer aber nicht übereinstimmen würde mit den aus den Berechnungen des Herrn Wolf, oder den aus der dritten Tabelle hervorgehenden Perioden. Auch ist das Minimum viel weniger tief eingeschnitten. In der zweiten Tabelle dahingegen findet man auch nicht die geringste Spur eines Minimums. Wegen der Wichtigkeit dieses Resultates habe ich für diese Tabelle auch die Versuchsperioden von $9^{\frac{3}{4}}$ und $10^{\frac{1}{4}}$ Jahr berechnet, um mich zu überzeugen, ob sich doch nicht in der Nähe der vermeintlichen zweiten Periode von zehn Jahren eine leise Andeutung eines Maximalwerthes der mittleren Abweichung befinden möchte. Es ist dies nicht der Fall. Die graphische Darstellung (Fig. 3) zeigt, dass die verschiedenen mittleren Abweichungen eine sehr regelmässige Curve bilden, die ein einziges Maximum in der Nähe von $11^{\frac{1}{4}}$ Jahr besitzt.

III.

Es fragt sich jetzt noch, wie es denn möglich ist, dass die Methode von Wolf, wenn man sie auf den ganzen Zeitraum (1751—1873) anwendet, so ganz bestimmt ein Minimum der mittleren Abweichung zwischen zwei Maximis erkennen lässt, ohne dass dem die wirkliche Existenz zweier Perioden zu Grunde liegt.

Betrachtet man etwas genauer den Verlauf der Curve der Sonnenfleckenhäufigkeit (Fig. 1) zwischen den Jahren 1751 bis 1873, dann sieht man, dass sie sich in drei ungefähr gleich lange Abschnitte zerlegen lässt, die einen ganz verschiedenen Charakter zeigen.

Im ersten und dritten Abschnitte treten jedesmal vier Maxima auf, die sich im Vergleiche mit den drei Maximis des zweiten Abschnittes durch grössere und selbst meistens beträchtlich grössere Höhe auszeichnen. Der mittlere (zweite) Abschnitt hat, wie es sich wegen des geringeren Werthes der dort auftretenden Schwankungen erwarten liess, bei der Berechnung der Monats-

und Jahresreihen relativ wenig Einfluss geübt. Dieses geht hervor aus der Betrachtung der beiden Curven von Fig. 1. Eben in diesem zweiten Abschnitte findet man zwischen beiden Curven nur wenig Übereinstimmung. Man hat also die Erklärung des Entstehens der beiden durch ein tiefeingeschnittenes Minimum getrennten Maximis wohl nur im ersten und dritten Abschnitte zu suchen.

Bestimmt man nach einander den Abstand vom ersten, zweiten, dritten, vierten Maximum der Sonnenfleckenhäufigkeit im ersten Abschnitte vom ersten, zweiten, dritten, vierten Maximum im zweiten Abschnitte, so findet man:

$$\begin{array}{r}
 1837-1761 = 76 \\
 1848-1769 = 79 \\
 1860-1778 = 82 \\
 1870-1788 = 82 \\
 \hline
 \text{im Mittel } 79\frac{3}{4}
 \end{array}$$

Die Abstände der den Erhebungen vorangehenden Minimis liefern denselben Mittelwerth. Nimmt man endlich für jede der acht Erhebungen statt der Zeit des Maximums, die für zufällige Störungen sehr empfindlich ist, die mittlere Zeit zwischen den beiden Schnittpunkten mit der Linie der mittleren Sonnenfleckenhäufigkeit ($48 \cdot 9$), dann findet man für die Abstände der Erhebungen des ersten und dritten Abschnittes:

$$\begin{array}{r}
 1837 \cdot 6 - 1760 \cdot 5 = 77 \cdot 1 \\
 1848 \cdot 9 - 1770 \cdot 0 = 78 \cdot 9 \\
 1860 \cdot 2 - 1779 \cdot 0 = 81 \cdot 2 \\
 1871 \cdot 0 - 1789 \cdot 1 = 81 \cdot 9 \\
 \hline
 \text{im Mittel } 80 \cdot 0
 \end{array}$$

Hieraus lassen sich ohne Weiteres die beiden Maxima und das Minimum der mittleren Abweichung für die Versuchsperioden 10, $11\frac{1}{8}$ und $10\frac{1}{2}$ Jahr erklären. Wählt man nämlich die Versuchsperiode $\frac{80 \cdot 0}{8} = 10$ Jahren und berechnet man die Glieder der betreffenden Mittelreihe, so kommen in ein und dasselbe Glied, das schon Zahlen aus der Nähe der hohen Maximis des

ersten Abschnittes enthält, auch aus dem dritten Abschnitte nur grössere Zahlen aus der Nähe der Maximis. In ein anderes Glied werden dahingegen aus dem ersten und dritten Abschnitte hauptsächlich nur Minimalwerthe zusammen kommen. Beide Glieder werden zu grossen Abweichungen vom allgemeinen Mittelwerthe Veranlassung geben. Dasselbe gilt für die Versuchsperiode $\frac{80 \cdot 0}{7} = 11$ Jahre, 5 Monate. Auch hier muss also ein Maximalwerth der mittleren Abweichung gefunden werden.

Wählt man dahingegen die Versuchsperiode $\frac{80 \cdot 0}{7\frac{1}{2}} = 10$ Jahre, 8 Monate, so wird dasselbe Glied der Mittelreihe zugleich Maximalwerthe aus dem ersten Abschnitte und Minimalwerthe aus dem dritten enthalten, oder umgekehrt. Es findet also überall Compensation statt und die mittlere Abweichung kann nur einen geringen Werth bekommen. ¹

Eine nähere Betrachtung der Zahlenreihen, aus deren Mittelwerthen die einzelnen Glieder der Mittelreihe hervorgehen, bestätigt diese Ansicht. Namentlich für die zehnjährige Versuchsperiode ist es deutlich, dass der grosse Werth ihrer mittleren Abweichung lediglich aus einer Art Interferenz zwischen den grösseren Maximis entsteht. Ich gebe hier die Zahlenreihen, aus denen die beiden Glieder der Mittelreihe mit den grössten negativen und positiven Abweichungen entstehen.

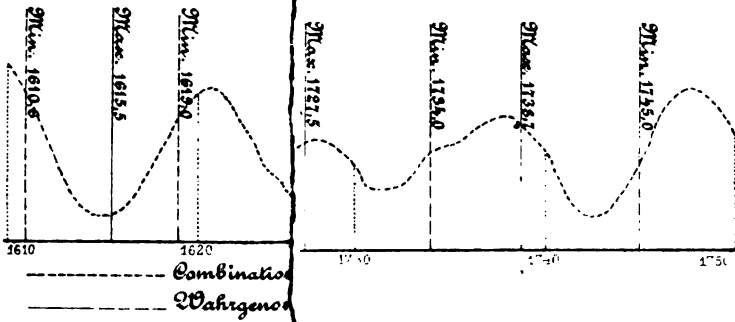
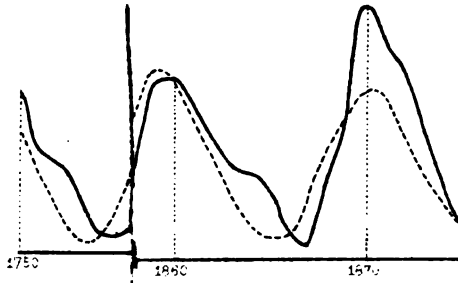
Jahreszahl	I. Section				II. Section				III. Section			
1754	13·5	36·7	27·4	10·3	38·0	71·4	16·2	8·1	13·3	19·3	21·0	45·2
1759	54·6	103·4	123·4	116·9	7·1	3·1	23·5	67·2	83·4	95·4	90·3	78·6

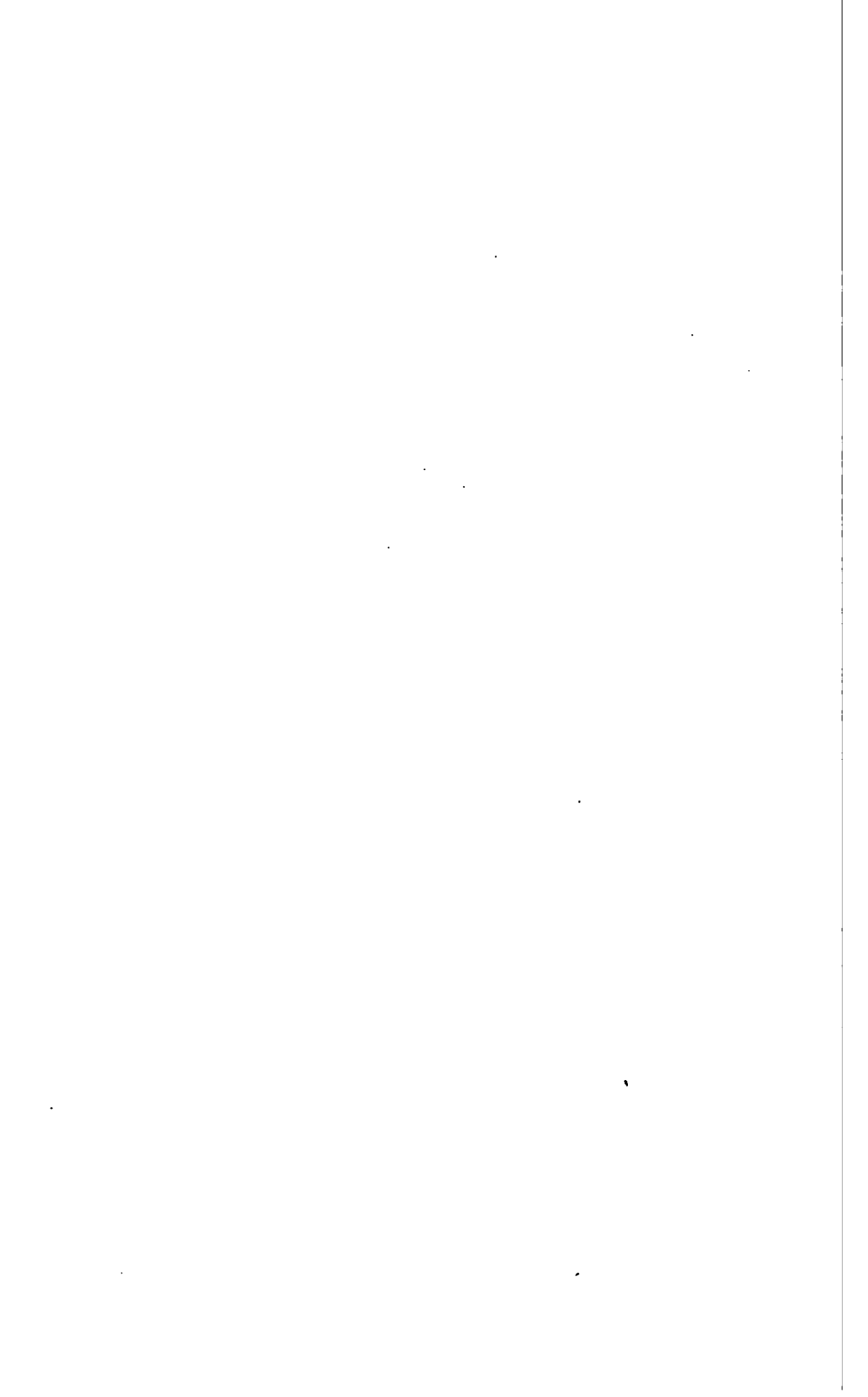
IV.

Man verstehe mich wohl. Dass die Anwesenheit zweier Maximis der mittleren Abweichung diese so einfache Erklärung

¹ Man möchte der Meinung sein, dass für die Versuchsperioden $\frac{80}{9} = 8$ Jahr, 11 Monate und $\frac{80}{6} = 13$ Jahr, 4 Monate neue Maxima der mittleren Abweichung auftreten müssten. Ich habe mich überzeugt, dass dem nicht so ist, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil dann schon in jedem Abschnitte für sich eine starke Compensation stattfindet zwischen Maximal- und Minimalwerthen.

D. J. Korteweg: Über d





zulässt, darin allein ist kein Grund vorhanden, die zweite Periode (von 10 Jahren) in der Sonnenfleckenhäufigkeit zu verwerfen. Es bleibt dann noch immer das Dilemma bestehen: entweder die hohen Maxima aus deren Interferenz die Erscheinung genügend erklärt wird, entstehen selbst aus dem Zusammenwirken zweier Perioden; oder sie entstehen so nicht. Im ersten Falle müssten die beiden Maxima der mittleren Abweichung bestehen bleiben — wenn auch vielleicht nicht mehr so deutlich ausgesprochen — wenn man die Interferenz durch Ausserachtlassung eines Theiles der Curve der Sonnenfleckenhäufigkeit aufhebt, falls nur der übrigbleibende Theil gross genug ist, die zufälligen Abweichungen zu heben, d. h. einen regelmässigen Verlauf der Mittelreihen und der Reihe der mittleren Abweichung zu sichern. Auch müssten da, wo ausserhalb des zur Rechnung benutzten Zeitraumes beide Perioden nach derselben Richtung hin zusammengewirkt haben, Maxima und Minima nachzuweisen sein. Es ist also hauptsächlich auf Grund der beiden in §. II und §. III angestellten Prüfungen, dass ich das Recht zu haben glaube, auszusprechen, die zweite zehnjährige Periode sei fictiv. Man kann aber noch weiter gehen und behaupten, dass auch die Periode von circa 11 Jahren mittlerer Länge, deren Existenz selbstverständlich nicht zu leugnen ist, keine unveränderliche Dauer besitzen kann.

So wie ihre Amplitude zweifellos säculären Änderungen unterworfen ist, kann dieses auch mit ihrer Länge der Fall sein. Dem Augenscheine nach würde man selbst vermuthen, dass zu grösseren Amplituden kleinere Längen gehören. Überhaupt können keine Perioden von scharf bestimmter und unveränderlicher Dauer in der Sonnenfleckenhäufigkeit vorhanden sein, denn sonst hätte die von Herrn Wolf benutzte Methode sie aufdecken müssen. Und dieses negative Resultat ist vielleicht nicht ohne Wichtigkeit. Est stimmt nämlich viel besser mit der Hypothese, dass die Periodicität einer der Sonne selbst innewohnenden Ursache zu verdanken ist, als mit der entgegengesetzten, dass äussere Einflüsse, wie Perihelstände, Conjunctionen und Oppositionen von Planeten, die Perioden sehr scharf bestimmter Länge besitzen, sie hervorrufen sollten.

Amsterdam, Juli 1883.

Bericht über die während der totalen Sonnenfinsterniss vom 6. Mai 1883 erhaltenen Beobachtungen.

Von **J. Palisa,**

Adjunct der k. k. Wiener Sternwarte.

Als im November vorigen Jahres die *Comptes rendus* die Mittheilung brachten, dass die französische Akademie die Ausendung einer wissenschaftlichen Expedition in den stillen Ocean zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss der Regierung vorgeschlagen habe, wurde in mir das Verlangen rege, mich dabei zu betheiligen und speciell mich der Aufsuchung etwaiger intramercurieller Planeten zu widmen, ein Thema, welches in dem Programme der französischen Akademie enthalten war, das übrigens meiner sonstigen Thätigkeit sehr nahe lag, und bei welchem ich meine Fertigkeiten besonders verwerthen konnte.

Ich theilte meinen Wunsch an geeigneter Stelle in Paris mit, doch lange hörte ich nichts über das Zustandekommen der Expedition; ja es schien sogar die ganze Sache sehr zweifelhaft geworden zu sein; doch endlich bekam ich Mitte Jänner die Nachricht, dass die Expedition gesichert sei. Der Präsident des Bureau des Longitudes, Herr Faye, lud mich ein, Theil zu nehmen, und theilte mir mit, dass ich so lange Gast der französischen Regierung sei, als sich die Expedition auf französischem Kriegsschiffe befindet, nämlich von Panama nach Caroline, und zurück bis St. Francisco. Die Reise bis Panama und von St. Francisco zurück musste ich jedoch aus Eigenem bestreiten. Es handelte sich darum, diese Bedingung erfüllen zu können.

Der Director der Sternwarte, Herr Prof. Weiss, nahm es auf sich, sowohl das hohe Unterrichts-Ministerium, als auch die kaiserliche Akademie der Wissenschaften um eine Reiseunterstützung zu bitten, welches Anliegen auch von Erfolg gekrönt war.

In erster Linie aber verdanke ich es der Huld und Munificenz Sr. Majestät, unseres allergnädigsten Kaisers, dass ich am 15. Februar meine Betheiligung nach Paris melden konnte. Ausserdem unterstützten mein Unternehmen einige Freunde der Astronomie durch freundliche Beiträge. Sobald auf diese Art meine Theilnahme an der Expedition gesichert war, wurde an die Auswahl der mitzunehmenden Instrumente und an deren Instandsetzung gegangen.

Als Hauptinstrument wählte ich den Merz'schen Kometsucher der Sternwarte, welcher bei 0^m16 Öffnung nur 1.4 Meter Focallänge hat. Das schwächste Ocular hat ein Gesichtsfeld von drei Graden bei 13facher Vergrösserung. Dieses Fernrohr war bisher auf der nach Villarceau's Idee von Schneider ausgeführten Montirung angebracht. Ich konnte diese Montirung theils wegen des Gewichtes, mehr aber noch desshalb nicht benutzen, weil ich ein Instrument für die Polhöhe von 10 Grad brauchte. Es wurde daher das Steinheil'sche Fernrohr, welches seinerzeit Herr Director Weiss in Aden benützt hatte, von seinem Stative, das eine Veränderung der Polhöhe von 0° bis 70° gestattet, abgenommen, und der Kometsucher daran angebracht, was binnen kurzer Zeit durch den Mechaniker der Sternwarte, Herrn Ressel, ausgeführt war.

Als zweites Instrument wurde ein kleines gebrochenes Passageninstrument von 48 Mill. Öffnung von Starke, ebenfalls Eigenthum der Sternwarte, mitgenommen. Ich wollte damit die Zeit, Länge und Breite bestimmen, ferner kam hiezu ein Meteoroskop und ein Chronometer Molyneux.

Am 26. Februar verliess ich Wien und begab mich nach Paris, wo ich mich den übrigen Mitgliedern anschloss. Diese waren J. Janssen, Director der Sternwarte in Meudon, Chef der Expedition, E. Trouvelot, Adjunct, E. Pasteur, Photograph an jener Anstalt und P. Tacchini, Director der Sternwarte in Rom. Am 5. März Morgens trafen wir in St. Nazaire ein, besorgten noch einige Einkäufe, da es bekannt war, dass unser Ziel Caroline eine unbewohnte Insel sei, und am 6. März verliessen wir mit dem Dampfer Ville de St. Nazaire der transatlantischen Gesellschaft Europa. Die Fahrt nach Co'lon ging glücklich von statten, denn nur die ersten fünf Tage waren

etwas unruhig. Am 27. landeten wir in Colon, übersetzten die Landenge am 29. und schifften uns am 31. März auf die französische Glatdeck-Corvette „Eclairer“ ein, dessen Commandant, Fregattencapitän Pougin de la Maisonneuve, uns auf das beste empfing und Alles that, um unsere Zwecke zu fördern. Die Reise wurde fast ganz unter Dampf zurückgelegt und bei jedem Windhauch Segel gesetzt, um nur rascher am Ziele zu sein. Leider stellte sich der Passat erst am zehnten Tage ein, so dass wir erst am 19. April bei den Marquesas-Inseln vorbei kamen und daselbst einen 12stündigen Aufenthalt nahmen, um Kohlen und Lebensmittel zu ergänzen. Am 22. April Abends langten wir vor dem Eiland Caroline an. Hier fanden wir das amerikanische Kriegsschiff Hartford vor, welches eine amerikanische Expedition binnen 30 Tagen von Callao hierher gebracht hatte, und zwei Tage vorher angekommen war.

Unser Commandant erbat sich Mittheilungen über die Verhältnisse der Landung, welche bereitwilligst ertheilt wurden, so dass unsere Ausschiffung schon am nächsten Tage begonnen werden konnte. Dies war übrigens eine ungemein schwierige Operation, denn die Insel ist ein niedriges Koralleneiland, von einem ziemlich breiten Korallenriff umgeben, welches fortwährend unter Wasser steht, aber niemals und nirgends so hoch bedeckt ist, dass ein Boot bis zum Land fahren könnte. Dieses Riff besitzt an der Ostseite einen längeren und an der Westseite einen nur 20 Meter langen Einschnitt.

Auf der Insel befinden sich zwei, dem Eigenthümer der Insel gehörende, zur Zeit leer stehende Häuser, und da dieselben sich dem kürzeren Einschnitte bedeutend näher befinden, so wurde letzterer als Landungsplatz gewählt. Das mit Kisten beladene Boot fuhr in diesen Einschnitt hinein, wo es etwas gegen die Brandung geschützt war. Einige Matrosen hielten das Boot, während andere die Kisten aushoben und sofort über das Riff bis zum festen Land trugen.

Das Wetter und die See waren unserer Operation äusserst günstig, denn wenn die See nur etwas bewegt gewesen wäre, so wäre das Landen an dieser Stelle absolut unmöglich gewesen, und diese Operation an der anderen Stelle vorzunehmen, hätte den grossen Nachtheil gehabt, dass der Landtransport bis in die

Nähe der Wohnhäuser sehr viel Kraft und Zeit erfordert hätte. Durch die Unvorsichtigkeit eines Matrosen kam eine meiner kleineren Kisten, welche das Stativ des Passageninstrumentes enthielt, mit dem Meerwasser in etwas zu innige Berührung, wodurch mir später einige Schwierigkeiten erwuchsen. Nachdem binnen $2\frac{1}{2}$ Tagen alles gelandet, als auch an Ort und Stelle geschafft war, auch der Commandant ein Detachement Matrosen zurückgelassen hatte, verliess uns unser Schiff, um nach Taiti zu gehen. Am 26. April wurde mit dem Baue unserer Observatorien begonnen. Mein Sechszöller war noch denselben Tag beisammen, aber für das Passageninstrument musste erst ein Pfeiler gemauert werden. Am 27. Abends war derselbe fertig; als ich aber das Instrument rectificiren wollte, zeigte es sich, dass die Fäden der grossen Feuchtigkeit halber schlaff geworden waren. Am 28. Morgens wollte ich frische Fäden einziehen, fand sie aber alle wieder gespannt, und ich konnte mich der Hoffnung hingeben, dass das Übel behoben sei; indess wiederholte sich Abends dasselbe, so dass ich mich am 29. April entschliessen musste, neue Fäden einzuziehen.

Leider konnte ich meine eigens dazu mitgenommenen Apparate und Präparate nicht finden, und ich war bereits untröstlich, als mir der Chef der amerikanischen Expedition, Herr E. S. Holden, zu Hilfe kam, und mir eine mit einem eingeritzten Netze versehene Glimmerplatte anbot, welches Anbieten ich mit grosser Freude annahm. Abends begann ich also das Instrument zu rectificiren, und Fädendistanzen zu bestimmen. Es war jetzt mittlerweile die Zeit für Beobachtungen von Mondculminationen vorüber, denn der Mond culminirte bereits bei Tag und Mondsterne waren mit dem Passageninstrumente bei Tage nicht sichtbar.

In dieser Richtung war indess die amerikanische Expedition besser daran, da dieselbe ein grösseres Passageninstrument zur Verfügung hatte und auch einige Tage früher angekommen war. In der That konnte sie die Länge aus Mondculminationen bestimmen. Herr Holden theilte mir Folgendes als geographische Coordinaten des amerikanischen Centralpfeilers mit:

$$\varphi = -10^{\circ} 0' 1.3 \pm 0.5$$

$\lambda = 10^{\text{h}} 1^{\text{m}} 1.7$	westl. von Gr.	Chronometertübertragung nach 30tägiger Reise.
$= 10 0 52.4$	" " "	Mondculminationen.
$= 10 0 53.4$	" " "	Chronometertübertragung zwi- schen Caroline und Taiti.

Da die amerikanische Expedition aus 8 Astronomen und einigen Officieren bestand, somit viel stärker als wir war, hatte sie es auf sich genommen, die Insel aufzunehmen und andere Nebenbeobachtungen auszuführen. Herr Holden war so freundlich, die geographischen Relationen zwischen den übrigens ganz nahe beieinander befindlichen Expeditionen ermitteln zu lassen.

Während der Installirung unserer Observatorien waren wir vom Wetter sehr begünstigt, und wir konnten auch auf ferneres gutes Wetter hoffen, als in der Nacht vom 3. auf den 4. Mai ein kolossales Gewitter niederging, welches uns zwar mit gutem Trinkwasser versorgte, allein unsere Stimmung tief herabdrückte und nebstbei an den Instrumenten des Herrn Janssen ziemlich bedeutende Havarien hervorrief. Am 5. wurde es gegen Mittag etwas reiner, so dass wir neuerdings Hoffnung schöpften. Der Morgen des 6. fing aber mit einem Regen an, es heiterte sich zwar wieder auf, allein um $9\frac{1}{2}^{\text{h}}$ ging ein kleiner Platzregen nieder. Nichtsdestoweniger wurde während der Totalität die Sonne und ihre Umgebung rein von Wolken, wenn auch am Nordhorizonte bis zu bedeutender Höhe dicke Haufenwolken, ähnlich den Scirocco-Wolken der Adria rasch dahin fuhren. Der Himmel war, durch den vorangegangenen Regen ausgekehrt, um so durchsichtiger.

Die Aufgabe, mit welcher ich mich während der Totalität beschäftigen wollte, war die Aufsuchung intramercurieller Planeten.

Vor meiner Abreise nach Paris glaubte ich, dass ich dieses Thema allein bearbeiten werde, und richtete mir zu diesem Zwecke eine Sternkarte her, in welcher ich alle Sterne bis zur 7. Grösse nach der Bonner Durchmusterung einzeichnete.

Indess hatte ich Herrn E. S. Holden, Director der Sternwarte zu Madison (Wis), und Herrn E. L. Trouvelot zu Mitarbeitern.

Ausserdem beabsichtigte Herr Janssen, zwei sehr empfindliche Platten während der ganzen Finsterniss zu exponiren, und hoffte, Sterne bis zur 5. Grösse auf denselben zu erhalten. Das Gesichtsfeld der photographischen Apparate für diesen Zweck betrug bei 25 Grad. Herr Janssen wünschte, dass Trouvelot und ich uns derart in die Gegend des Himmels theilen, dass wir auf verschiedenen Seiten der Sonne mit der Durchsuehung beginnen, und erst nach Absolvirung der einen Seite auf die andere Seite übergehen sollten. Das Loos theilte mir die östliche, Herrn Trouvelot die westliche Seite zu.

Herr Holden verehrte uns beiden je eine lithographirte Sternkarte, welche mit der, von mir angelegten vollkommen identisch, in einem kleineren Massstabe gehalten war. Dieselbe war in der amerikanischen Zeitschrift „Science“ publicirt. Da dieselbe mir etwas handlicher zu sein schien als die meine, zog ich dieselbe der anderen vor. Auf dieser Karte war die Position der Sonne für die Zeit der Totalität sowie die Ekliptik eingetragen. Die Aufsuchung musste sich meiner Ansicht nach zuerst längs der Ekliptik halten, und dann selbstverständlich so weit als möglich nördlich und südlich von derselben gehen; ich selbst glaubte, 3 Grade in jeder Richtung bewältigen zu können.

Fünf Minuten vor Eintritt der Totalität begann ich mit dem Fernrohr den Himmel in der Richtung gegen Saturn abzusuchen, der damals die Position $3^h 43^m 6 + 17^\circ 54'$ hatte.

Ich fand ihn auch sofort, ohne dass ich vorher genau wusste, an welcher Stelle er in's Gesichtsfeld treten sollte. Ich machte eine Positionsbestimmung, um eine gute Indexfehler-Bestimmung zu haben. Als die Totalität begonnen hatte, fing ich südlich der Sonne gegen Saturn hin zu suchen an. Ich fand wohl Saturn, aber keinen Stern auf dem Wege, und doch waren einige Sterne 7. Grösse auf der Karte eingezeichnet. Die erste Minute war so verstrichen, und ich noch immer mit dieser Stelle beschäftigt. Ich ging zur Sonne zurück, und begann nördlicher zu suchen. Ich fand jetzt die dort befindlichen Sterne 5. und 6. Grösse. Das Aussehen derselben war weiss und blass, während der Saturn,

den ich wiederholt sah, eine rothe Farbe zeigte, jedenfalls war der Farbenunterschied zwischen den sichtbaren Sternen und ihm viel bedeutender als er es am Nachthimmel ist. Die in dieser Himmelsgegend stehenden Sterne 7. Grösse konnte ich gleichfalls nicht sehen, und es war mir jetzt klar, wesshalb ich südlich der Ekliptik keinen Stern gesehen hatte. Ich notirte alle Sterne, welche ich wahrnehmen konnte. Es sind die folgenden:

BD	Grösse	α 1855·0	δ 1855·0
+16°484	6·0	3 ^h 31 ^m 15 ^s ·2	+16° 4'2
+19,477	4·2	3 3 20·8	+19 10·7
+19,578	5·5	3 33 57·8	+19 13·9
+19,582	6·0	3 35 24·5	+19 12·5
+20,527	4·5	3 6 34·5	+20 30·5
+20,542	5·0	3 12 51·0	+20 37·3
+20,551	5·0	3 14 24·8	+20 13·4
+20,556	5·8	3 16 4·2	+20 17·4

Nachdem ich mich mit dieser Seite der Sonne sehr eingehend beschäftigt hatte, ging ich am Schluss der vierten Minute auf die andere Seite der Sonne über. Hier fiel mir ein weisser Stern, der in der Nähe der Sonne stand, durch seine Helligkeit auf. Ich stellte ihn ein, und als die Kreise abgelesen waren, war auch die Totalität vorüber. Es stellte sich heraus, dass es der Stern $BD +16^{\circ}355^1$ war, dessen Position dort mit $\alpha = 2^h 41^m 13^s \cdot 1$ und $\delta = +16^{\circ}51'6$ angegeben ist.

Die Grösse ist in der Bonner Durchmusterung mit 5·7, von Heiss mit 6·5 angegeben. Vielleicht ist derselbe schwach veränderlich. Alles zusammenfassend, kann ich erklären, dass in dem Streifen, welcher durch die Punkte (Aequinox 1855·0) $2^h 52^m +14^{\circ}$ und $+19^{\circ}$, ferner $3^h 40^m +16^{\circ}$ und $+22^{\circ}$ markirt ist, kein Stern der fünften Grösse oder heller vorhanden war, den meine Karte, oder was dasselbe, die Bonner Durchmusterung nicht enthalten hätte.

Die Contacte habe ich wie folgt beobachtet:

1 In den Comptes rendus XCVII, 10, p. 595 ist in Folge eines Druckfehlers dieser Stern als $BD +14^{\circ}, 355$ angegeben.

I. 1883	Mai 5.	22 ^h 3 ^m 33 ^s 6	} mittl. Carol.-Zeit; der erste Contact dürfte wahrscheinlich einige Secunden zu spät beobachtet sein.
II.	5.	23 31 53·2	
IV.	6.	1 10 35·2	

Für die sonstigen Erscheinungen habe ich mir kaum einen eingehenden Blick gegönnt; ich wollte keine Secunde der kostbaren Zeit meinem Programme verlieren.

Das gleiche Resultat hat Herr Holden erhalten, während Trouvelot, der sich programmässig mit der westlichen Seite der Sonne beschäftigte, einen rothen Stern gesehen hat, den er für einen intramercuriellen Planeten zu halten scheint. Leider hat er keine Position des Gestirnes genommen und es lässt sich daher nichts Sicheres darüber entscheiden.

Trouvelot erzählt aber in dem gleich nach der Sonnenfinsterniss abgefassten und in den Comptes rendus XCVII, 10 publicirten Bericht Folgendes:

„Pendant que je cherchais à amener l'étoile en question dans l'oculaire du six-pouces, le timonier Michel Guillaume, qui était assis derrière moi, occupé au chronomètre, s'écria qu'il voyait l'étoile à l'oeil nu.“

Über den Stern, den Steuermann Michel gesehen hat, bin ich nun in der Lage, etwas Genaueres mitzuthellen. Vor Allem möchte ich erwähnen, dass mir Herr Trouvelot erzählt hat, Michel hätte gerufen: „Monsieur, je vois l'étoile, que vous cherchez.“ Daraus scheint man folgern zu können, dass, während Herr Trouvelot den Stern wieder zu finden suchte, der Steuermann hinter dem Fernrohr sitzend und über das Fernrohr visirend, den von Trouvelot gesuchten Stern erblickte. Freilich war er da der Gefahr ausgesetzt, einen mehr gegen den Horizont, also nördlicheren Stern, für den gesuchten zu halten. Da es mich interessirte, die Sache möglichst klarzustellen, nahm ich am vierten Tage nach der Finsterniss den Steuermann zu meinem Zelte, stellte hier das mitgebrachte Meteoroskop auf, und ersuchte ihn, die Sonne und dann die Gegend einzustellen, in welcher nach seiner besten Erinnerung der bewusste Stern gestanden ist.

Die Zeit war so gewählt, dass die Sonne dieselbe Höhe hatte, wie am Tage der Finsterniss. Er stellte ein 9. Mai 23^h30^m mittl. Ortszeit.

	Azimuthkreis	Höhe
Sonne	125°	64°
Rother Stern	92	49·5
Sonne	124	62
Rother Stern	93	49·5

oder im Mittel

Sonne 124°5 63°0 Stern 92°5 49°5

Man findet nun aus diesen Angaben für den Winkel an der Sonne in dem Dreiecke Zenith, Sonne, Stern 111°4 und die Seite Stern, Sonne 21°7. Gibt man diese Grössen zur Sonnenposition der Totalität hinzu, so erhält man unter der Annahme der Sonnencoordinaten $\alpha = 43^\circ 30'$ $\delta = +16^\circ 38'$ als Coordinaten des vom Steuermann Michel gesehenen Sternes $\alpha = 23^\circ 6'$ $\delta = +27^\circ 24'$.

In dieser Position ist zwar kein heller Stern, der mit freiem Auge sichtbar wäre; es kann aber auch nach den Angaben Trouvelot's in dieser Position sein Stern nicht gestanden haben, da er sagt, er habe 10 Grad nördlich von der Sonne, also bei 26·5 Grad, zu suchen begonnen und erst beim vierten Strich (balayage) den rothen Stern angetroffen. Andererseits ist es aber bei den Angaben Trouvelot's gewiss sehr auffällig, dass er 41 und ϵ Arietis gesehen, hingegen den viel helleren α Arietis übersehen habe, da er auf diesen Stern stossen musste, wenn er so gesucht hat, wie er angibt.

Ferner findet man, wenn man die Position des Steuermanns auf eine Karte aufträgt, dass die Verbindungslinie seines Sternes und des Sonnencentrums knapp an α Arietis vorbeigeht, dessen Position $\alpha = 30^\circ 6'$ $\delta = +22^\circ 53'$ ist. Bedenkt man nun, dass eine Richtung viel leichter zu merken ist, als eine Distanz, so kann man wohl mit Gewissheit behaupten, dass der Steuermann Michel α Arietis gesehen hat, und es ist auch wahrscheinlich, dass Trouvelot's rother Stern α Arietis war.

Ich habe selbstverständlich Herrn Trouvelot von meinen Untersuchungen und deren Resultat in Kenntniss gesetzt. Die zwei photographischen Platten, welche die Frage der Existenz intramercurieller Planeten lösen helfen sollten, zeigen in der That mehrere Sterne, doch konnten dieselben nicht sofort untersucht werden, und es ist mir ein diesbezügliches Resultat bisher noch unbekannt. Sollte trotz der bisherigen Erfahrungen nochmals Jemand unternehmen, bei Sonnenfinsternissen nach intramercuriellen Planeten zu suchen, dann wird es sich empfehlen, in erster Linie jenen Sternen Aufmerksamkeit zu schenken, welche eine rothe Farbe zeigen. Es ist nämlich auffallend, dass auch die beiden von Watson gesehenen und für intramercurielle Planeten gehaltenen Sterne als roth bezeichnet werden. Oder sollte eine ganze Sorte von Sternen bei Sonnenfinsternissen den so auffallenden Unterschied in der Färbung geben, welchen ich bei Saturn gesehen habe? Ich glaube, dass diese Frage bei einer der nächsten Sonnenfinsternisse untersucht werden sollte, indem zuerst das Factum zu verificiren und dann eingehendere Untersuchungen zu pflegen wären.

Die nächsten Tage und besonders nach der am 9. Mai erfolgten Abreise der amerikanischen Expedition war es Tag für Tag trübe und ich konnte die beabsichtigte Beobachtung der Mondculminationen nicht ausführen.

Von anderwärtigen Beobachtungen habe ich nur die während der Fahrt im stillen Ocean angestellte Vergleichung des Behrmann'schen Himmelsatlas mit dem Himmel anzuführen. Ich fand hiebei in diesem Atlas, welcher von Behrmann während einer Reise in südlichen Meeren binnen $1\frac{1}{2}$ Jahren angelegt wurde, nur sehr wenige Urrichtigkeiten, und auch diese nur bei den schwächsten, einem scharfen Auge eben noch sichtbaren Sternen, und führe dieselben hier an, weil dieser Atlas in Folge seines Formates auf Reisen sich sehr bequem benützen lässt.

Nach meiner Rückkehr verglich ich die betreffenden Stellen mit der Uranometria argentina, und fand, dass Gould mit mir in allen Fällen übereinstimmt.

Diese Beobachtungen sind:

7. April 1883.

Gould's 85 Antliae 1875·0 5^m8 10^h59^m0^s — 35° 7' 9
von mir 6^m geschätzt, fehlt bei Behrmann.

Von Gould's 216, 217 und 218 Velae

1875·0 5^m4 10^h26^m37^s — 44° 25' 6 und

6·4 10 27 12 — 43 58·5

wurde von mir der erstere (Doppelstern) 5^m, der letztere 6^m geschätzt. Behrmann's Atlas enthält bloß Gould's 216, 217 als 122 s Velae, es ist aber dort seine Grösse erheblich unterschätzt, da er bloß als 6^m4 angegeben wird. Der andere Stern fehlt. Beim Vergleichen mit dem Himmel macht es aber den Eindruck, als ob bei Behrmann Gould's 216, 217 fehle und 218 verzeichnet sei.

Den Behrmann'schen Stern 119 Velae 1840·0 6^m 154° 34' — 42° 18' habe ich nicht sehen können. Er ist vielleicht Gould's 208 Velae 1875·0 6^m 5 10^h 20^m 49^s — 42° 6' 1 oder auf 1840·0 reducirt 154° 50' — 41° 55' 5. Diese Position weicht aber von Behrmann's Position ziemlich ab.

Gould's 238 Velae 1875·0 6^m2 10^h54^m19^s — 43° 8' 2 ist von mir 6^m geschätzt worden, und fehlt bei Behrmann. Meine Bemerkung sagt, dass er gut zu sehen ist, während ich Behrmann's 1 Centauri = Gould's 236 Velae 6^m8 1875·0 10^h 49^m 48^s — 42° 21' 3 kaum wahrnehmen konnte.

Behrmann's 5 Centauri 1840·0 6^m5 164° 58' — 41° 47' wurde von mir 5^m geschätzt; er ist jedoch schwächer als Behrmann's 2 Centauri, welchen Behrmann 5^m angibt. Gould gibt erstere Sterne unter 4 Centauri die Grösse 5·5.

Behrmann's 22, 23 und 32 Centauri, deren Grössen und Positionen folgende sind:

1840·0	6 ^m	171° 49'	—	48° 16'
	6·5	171 53	—	46 29
	6	173 22	—	49 19

Die währ. d. tot. Sonnenfinsterniss v. 6. Mai 1883 erhalt. Beob. 1029

habe ich als nicht sichtbar notirt, hingegen bemerkt, dass Behrmann's 27 Centauri 1840·0 6^m 172°15'—45°55' mit freiem Auge doppelt und mit Opernglas dreifach zu sehen ist. Ausserdem habe ich hinzugefügt, dass die Verbindungslinie zwischen diesem Doppelstern und Behrmann's 29 Centauri 1840·0 6^m 172°28'—46°52' nach Behrmann's 21 Centauri 1840·0 5^m 171°48'—53°23' geht. Daraus geht hervor, dass ich die Gruppe Gould's 44, 45 und 53 Centauri, deren Positionen sind:

1875·0	6 ^m 0	11 ^h 29 ^m 12 ^s	—	46°40'9
.	5·5	11 29 53	—	46 56·9
	5·9	11 31 31	—	47 3·4

gesehen, und an die Stelle von Behrmann's 27 Centauri versetzt habe, ferner Behrmann's 29 Centauri mit Behrmann's 22 Centauri = Gould's 43 Centauri identificirt, und auf diese Weise die in Behrmann's Atlas vorfindliche Constellation gedeutet habe:

Gould's 268, 269 Centauri 1875·0 $\left\{ \begin{array}{l} 6^m7 \ 13^h \ 39^m36^s \text{ — } 49^\circ37'3 \\ 6\cdot0 \ 13 \ 39 \ 49 \text{ — } 49 \ 41 \ 6 \end{array} \right.$

fehlt bei Behrmann, und wurde von mir 5·5 geschätzt.

Behrmann's ν, φ, χ Centauri wurden von mir in Übereinstimmung mit Gould 4^m und nicht 5^m geschätzt.

Behrmann's 90 Centauri 1840·0 6^m 193°45'—33°23' habe ich nicht gesehen, dafür aber einen etwas nördlicher gelegenen Stern eingezeichnet, welcher wahrscheinlich

Gould's 162, 163 Centauri 1875·0 $\left\{ \begin{array}{l} 6^m4 \ 12^h \ 53^m42^s \text{ — } 32^\circ49'7 \\ 7\cdot0 \ 12 \ 54 \ 12 \text{ — } 32 \ 59\cdot9 \end{array} \right.$

ist. Behrmann's 90 Centauri ist auch bei Gould nicht enthalten.

Behrmann's 59 Hydrae 1840·0 6^m 185°56'—26°41' wurde von mir als selbst mit Opernglas nicht zu sehen notirt. Er fehlt auch bei Gould, dagegen fehlt bei Behrmann Gould's 332 Hydrae 1875·0 6^m4 12^h41^m15^s—24°10'2, welchen ich 6^m geschätzt habe.

Der Veränderliche *R Hydrae* wurde 7^m geschätzt.

8. April 1883.

Gould's 38, 39, 40 Carinae, deren Positionen

1875·0	6 ^m 8	7 ^h 17 ^m 20 ^s	—	52°	4'9
	7·0	7 17 21	—	52	4·7
	5·9	7 17 36	—	51	51·0 sind,

wurden von mir im Complex als 5^m geschätzt, jedoch bemerkt, dass der Stern länglich sei. Er fehlt bei Behrmann.

Bei Behrmann fehlen ferner folgende Gould'schen Sterne:

35 Carinae	1875·0	6 ^m 5	7 ^h 12 ^m 23 ^s	—	52°17'0	von mir 6 ^m 5	} geschätzt
47 Pictoris	"	5·7	6 5 55	—	62 7·9	" " 6	
26, 27 Muscae	"	6·7	11 32 10	—	66 55·6	" " 6·7	
34 oder	"	6·7	12 10 21	—	64 59·8	" " 6·5	
36 Muscae	"	6·8	12 13 38	—	65 8·9	" " 6	
43 Muscae	"	6·2	12 24 39	—	72 18·6	" " 6	

Ferner sah ich den, in Gould's Atlas vorkommenden, aber im Catalog fehlenden, unter 13^h9^m — 64°5 eingzeichneten Stern, und schätzte ihn 7^m. Vielleicht ist es im Atlas nur ein nicht beabsichtigter, schwärzerer Punkt, mit dem ich den Stern identificire.

9. April 1883.

Bei Behrmann fehlen:

Gould's 139, 140 Carinae	1875·0	} 6 ^m 5	9 ^h 25 ^m 39 ^s	—	61°	43'6
			7·0	9 26 24	—	61
						von mir 6 ^m 5 geschätzt.

Die währ. d. tot. Sonnenfinsterniss v. 6. Mai 1883 erhalt. Beob. 1031

220 Centauri $6^m 8$ $13^h 39^m 35^s$ — $48^\circ 29' 6$

von mir $6^m 5$ geschätzt.

11 Lupi $\left\{ \begin{array}{l} 6.3 \ 14 \ 19 \ 9 \text{ — } 45 \ 34.0 \\ 7.5 \ 14 \ 19 \ 29 \text{ — } 45 \ 38.9 \\ 7.7 \ 14 \ 19 \ 34 \text{ — } 45 \ 38.2 \end{array} \right.$

von mir 6^m geschätzt;

ferner waren die Sterne Gould's 9 und 10 Lupi

1875.0 $5^m 3$ $14^h 18^m 7^s$ — $44^\circ 39' 3$

4.9 $14 \ 18 \ 9$ — $44 \ 48.7$

sehr gut mit freiem Auge doppelt zu sehen, während Behrmann an dieser Stelle nur einen Stern gibt.

XXIV. SITZUNG VOM 16. NOVEMBER 1883.

Die Direction des k. Realgymnasiums in Belovar (Croatien) dankt für die Betheilung dieser Anstalt mit akademischen Schriften.

Herr Prof. Dr. Anton Fritsch in Prag übermittelt das vierte Heft seines mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften herausgegebenen Werkes: „Fauna der Gaskohle und der Kalksteine der Permformation Böhmens,“ enthaltend die Abbildungen und die Beschreibung der Familien der *Hylonomidae* und *Microbrachidae*, womit der I. Band dieses Werkes abschliesst.

Herr Prof. Dr. Heinrich Streintz in Graz übersendet ein Exemplar seines Werkes: „Die physikalischen Grundlagen der Mechanik.“

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak übersendet seine bereits in der Sitzung dieser Classe vom 18. October l. J. besprochene Abhandlung, betitelt: „Die Skapolithreihe.“

Das w. M. Herr Hofrath L. Schmarada überreicht eine Abhandlung des Herrn Alfred Nalepa, Assistenten der zoologischen Lehrkanzel an der Wiener Universität, unter dem Titel: „Die Intercellularräume des Epithels und ihre physiologische Bedeutung bei den Pulmonaten.“

Herr Dr. J. von Hepperger, Assistent an der Wiener Sternwarte, überreicht eine Abhandlung: „Über die Schweifaxe des Kometen 1874 III (Coggia)“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 231. Tomo XX. Octubre 15. Habana, 1883; 8°.

- Académie de Médecine:** Bulletin. 47^e année, 2^e série, tome XII. Nos. 40—44. Paris, 1883; 8^o.
- Academy of Natural Sciences of Philadelphia:** Proceedings. Part I. January to May, 1883. Philadelphia, 1883; 8^o.
- Akademie der Wissenschaften, königl. Preussische:** Berlin: Sitzungsberichte. 1882. Nr. XXXIX—LIV. Berlin, 1882; 8^o. — 1883. Nr. I—XXXVII. Berlin, 1883; 8^o.
- Über die unter Philon's Werken stehende Schrift. Über die Unzerstörbarkeit des Weltalls, von Jacob Bernays. Berlin, 1883; 4^o.
- Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven, von Max Noether. Berlin, 1883; 4^o. — Fragmente einer Monographie der Characeen von A. Braun; herausgegeben von Dr. Otto Nordstedt. Berlin, 1882; 4^o. — Die Schutzscheiden und ihre Verstärkungen von S. Schwendener. Berlin, 1882; 4^o. — Übersicht über die Ophiuriden, welche während der Reise S. M. S. Gazelle um die Erde 1874—1876 gesammelt wurden, von Th. Studer. Berlin, 1883; 4^o. — Verzeichniss der Crustaceen, welche während der Reise S. M. S. Gazelle an der Westküste von Afrika, Ascension und dem Cap der guten Hoffnung gesammelt wurden, von Th. Studer. Berlin, 1883; 4^o. — Alttrajanische Gräber und Schädel; von Rudolf Virchow. Berlin, 1882; 4^o.
- Annales des Ponts et Chaussées:** Mémoires et Documents. 3^e année, 6^e série, 9^e cahier. 1883. Septembre. Paris; 8^o.
- Archiv für Mathematik und Physik.** LXX. Theil. 2. Heft. Leipzig, 1883; 8^o.
- Bern, Universität:** Akademische Schriften pro 1882. 50 Stücke 8^o.
Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3^e période. Tome X. Nro. 9—15. Septembre 1883. Genève, Lausanne, Paris, 1883; 8^o.
- Chemiker-Zeitung:** Central-Organ. Jahrgang VII. Nr. 82—87. Cöthen, 1883; 4^o.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.** Tome XCVII. No. 18. Paris, 1883; 4^o.

- Gesellschaft, österreichische zur Förderung der chemischen Industrie; Berichte. V. Jahrgang Nr. 3. Prag, 1883; 4°.
- Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. XI. Nr. 7—10. Pola, 1883; 8°.
- Institute, the Anthropological of Great Britain and Ireland: The Journal. Vol. XIII. Nr. 11. November, 1883. London; 8°. — List of Members of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland. Corrected to November, 1883, London 8°.
- Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und Hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1883. Heft 5 & 6. Pola, 1883; 8°.
- Museu nacional do Rio de Janeiro: Archivos. Vol. I., 1876. Vol. IV., 1879: Vol. V., 1880; Rio de Janeiro; 4°.
- Muséum d'Histoire naturelle: Nouvelles Archives. Tome V^e — 2^e série 2^e fascicule. Paris, 1883; Fol.
- Nature. Vol. XXIX. Nr. 732. London, 1883.
- Observatory, the royal at Greenwich: The nautical Almanach and astronomical Ephemeris for the year 1887, London, 1883; 8°.
- Oficina meteorológica Argentina: Anales. Tomo III. Buenos Aires, 1882. Fol.
- Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Vol. XII. Disp. 6^a — 10^a. Roma, 1883; Fol.
- italiana di Antropologia, Etnologia e Psicologia comparata; Archivio. XIII. Volume, Fascicolo 2^a. Firenze, 1882; 8°.
- Societas scientiarum fennica: Acta. Tomus XII. Helsingforsiae. 1883; gr. 4°.
- Öfversigt af Förhandlingar. XXIV. 1881—1882. Helsingfors, 1882; 8°.
- Bidrag till Kännedom af Finlands Natur och Folk. 37. u. 38. Häftet. Helsingfors, 1882; 8°.
- Le Grand-Duché de Finland. Notice statistique par K. E. F. Ignatius. Helsingfors, 1878; 8°.

- Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève: Mémoires.**
Tome XXVIII. 1^{re} partie. Genève, Paris, Bale 1882—1883;
gr. 4^o.
- **des sciences physiques et naturelles de Bordeaux: Mémoires.**
2^e série, Tome V. 2^e cahier. Paris, Bordeaux, 1882; 8^o.
- **Impériale de Naturalistes de Moscou: Bulletin, Année 1882.**
Nos 3 & 4. Moscou, 1883; 8^o. — Année 1883. Nos 1. Moscou,
1883; 8^o.
- Verein, naturwissenschaftlicher für Sachsen und Thüringen:**
Zeitschrift für Naturwissenschaften. 4. Folge, II. Band, 3. u.
4. Heft. Halle a. S. 1883; 8^o.
-

XXV. SITZUNG VOM 22. NOVEMBER 1883.

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung: „Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie. XIII. Mittheilung. „Über du Bois-Reymond's Untersuchung der secundär-elektromotorischen Erscheinungen am Muskel.“

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. C. Freiherr v. Ettingshausen übersendet eine Abhandlung: „Über die genetische Gliederung der Flora der Insel Hongkong.“

Herr Prof. Dr. P. Knoll in Prag übersendet eine Abhandlung: „Beiträge zur Lehre von der Athmungsinervation. IV. Mittheilung. Athmung bei Erregung der Vaguszweige“.

Der Secretär legt eine Abhandlung von Herrn A. Heimerl, Assistent an der technischen Hochschule in Wien vor, betitelt: „Monographia sectionis *Ptarmicae Achilleae* generis. Die Arten, Unterarten, Varietäten und Hybriden der Section *Ptarmica* des Genus *Achillea*.“

Das w. M. Herr Director Dr. Steindachner überreicht eine in Gemeinschaft mit Herrn Professor G. Kolombatović verfasste ichthyologische Abhandlung unter dem Titel: „Beiträge zur Kenntniss der Fische der Adria“.

Das w. M. Herr Prof. Wiesner überreicht eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. Wiener Universität ausgeführte Arbeit des Herrn Bruno Bruckner, welche den Titel führt: „Beiträge zur genaueren Kenntniss der chemischen Beschaffenheit der Stärkekörner.“

Herr Dr. J. Holetschek, Adjunct der Wiener Sternwarte, überreicht eine Abhandlung: „Über die Bahn eines Kometen, der während seiner günstigen Helligkeit nicht aus den Sonnenstrahlen heraustreten kann.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

- Academia literarum Cracoviensis: Rocznik zarządu. Rok 1882.**
W Krakowie, 1883; 8°.
- — **Zbiór wiadomości do Antropologii Krakowej. Tom. VII.**
W Krakowie, 1883; 8°.
- — **Słownik wyrazów technicznych tyczących się budownictwa** przez Dr. a Teofila Żebrawskiego. W Krakowie, 1883; 8°.
- — **Sprawozdanie komisji, fizyograficznój. Tom. XVII.** W Krakowie, 1883; 8°.
- — **Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń wydziału matematyczno-przyrodniczego. Tom. X.** W Krakowie, 1883; 8°.
- — **Pamiętnik. Tom. VIII.** W Krakowie. 1883; 4°.
- Académie, Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Bulletin.** 52^e année, 3^e série, tom. 6. Nr. VIII. Bruxelles, 1883; 8°.
- Academy, the American of arts and sciences: Proceedings.** N. S. Vol. X. Whole series. Vol. XVIII. From May 1882, to May 1883. Boston, 1883; 8°.
- Accademia fisio-medico-statistica in Milano: Atti. Anno accademico 1883. Ser. IV. Vol. 1°.** Milano, 1883; 8°.
- Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch-deutsche der Naturforscher: Leopoldina, Heft XIX, Nr. 19—20.** Hallea. S., October 1883; 4°.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences.** Tom. XCVII. Nr. 19. Paris, 1883; 4°.
- Dorpat, Universität: Akademische Schriften pro 1882—83.** 52. Stücke. 4° & 8°.
- Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVI. Jahrgang.** Nr. 15. Berlin, 1883; 8°.
- **physikalisch-medicinische zu Würzburg: Verhandlungen.** N. F. XVII. Band. Würzburg, 1883, 8°.
- Instituto y Observatorio de Marina de la ciudad de San Fernando: Almanaque náutico.** 1885. Barcelona, 1883; 4°.
- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. XIII. Band,** Jahrgang 1881, Heft 2. Berlin, 1883; 8°.

- Journal für praktische Chemie. N. F. Band 28. Nr. 18 & 19.
Leipzig 1883; 8°.
- the American of science. 3. series. Vol. XVI. Nr. 155.
New Haven, 1883; 8°.
- Karpathen-Verein, ungarischer: Jahrbuch. X. Jahrgang,
1883. II. Heft. Késmárk; 8°.
- Kiew, Universität: Universitäts-Nachrichten. XXIII. Band. Nr.
5—9. Kiew, 1883; 8°.
- Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt
von Dr. A. Petermann. XXIX. Band, 1883. XI. Gotha; 4°.
- Museo nacional de México: Anales. Tom. III. Entrega 1ª.
Sumario. México, 1882; 4°.
- Nature. Vol. XXIX. No. 733. London, 1883; 8°.
- Nuovo Cimento. 3ª serie, Tom. XI. Maggio e Giugno. Pisa,
1882, 8°. — Tom. XII. Luglio e Agosto, Settembre e
Ottobre, Novembre e Dicembre 1882. Pisa; 8°.
- Observatoire de Moscou: Annales. Vol. IX. 1^{re} et 2^e livraisons.
Moscou, 1883; 4°.
- Osservatorio, Reale di Brera in Milano: Pubblicazioni.
Nr. XXIII. Milano, 1883; 4°.
- Société mathématique de France: Bulletin. Tom. XI, Nr. 4.
Paris, 1883; 8°.
- philomatique de Paris: Bulletin. 7^e série, tom. VII. Nr. 4.
1882—1883. Paris, 1883; 8°.
- Ouralienne d'Amateurs des sciences naturelles. Tom. VI,
livr. 3. Jekaterinburg, 1882; 4°.
- Society the royal of London: Philosophical Transactions. Vol.
173. — Parts III & IV. Vol. 174, — Parts I & II. London,
1883; 4°. — The Council of the Royal Society, 30th No-
vember, 1882. London; 4°.
- — Proceedings. Vol. XXIV. Nos. 221—223. London 1882;
8°. — Vol. XXV. Nos. 224—226. London, 1883; 8°.
- — Catalogue of the scientific books in the Library. General
Catalogue. London, 1883; 8°.
- Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ, II I. Jahrgang 1883
11. Heft; November. Berlin, 1883; 4°.

Über die Bestimmung von Punktgruppen aus ihren Polaren.

Von Emil Waelsch,

ord. Hörer an der deutschen technischen Hochschule zu Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1883.)

Im Juni l. J. hatte ich die Ehre der hohen Akademie eine Arbeit zu unterbreiten, welche sich mit der Bestimmung von Polargruppen für gegebene Pole und Fundamentalsysteme beschäftigte. Im nachfolgenden Aufsätze möge mir gestattet sein, die Umkehrung dieses Problems, nämlich die Bestimmung der Punktgruppen, welche gegebene Punkte zu Punkten ihrer Polaren besitzen, vorzuführen.

1. Um die folgenden Entwicklungen durch Citirung von nothwendigen Hilfssätzen aus der Theorie der Involutionen n -ter Ordnung k -ter Stufe (siehe die Abhandlungen von Professor Dr. Emil Weyr, Bd. 79 der Sitzb. der kais. Akad.) nicht zu stören, sollen dieselben jetzt schon zusammengestellt werden.

a) Zwei in einer J_n^k enthaltene $J_n^{k'}$ und $J_n^{k''}$ haben eine $J_n^{k'+k''-k}$ gemein.

b) Eine J_n^k ist durch $k+1$ von einander unabhängige Gruppen bestimmt; ist $k'+k''=k+1$, so bestimmen $J_n^{k'}$ und $J_n^{k''}$, welche eine $J_n^{k'+k''-k}$ gemein haben, eine J_n^k .

c) Eine J_n^k ist bestimmt durch $k-i$ J_n^{i+1} , welche eine J_n^i gemein haben.

d) Eine J_n^k besitzt gewisse neutrale Elemente, welche mit einem weitem Punkte des Trägers eine Gruppe der J_n^k bestimmen. Ein neutrales Element soll nun „von der σ -ten Stufe“ genannt werden, wenn erst durch σ -Punkte des Trägers eine Gruppe der Involution individualisirt ist. Die Anzahl der Punkte, aus welchen ein solches neutrales Element besteht, kann auch kleiner sein

als k , in welchem Falle aber σ vermehrt um diese Zahl grösser als k sein muss; ein vielfaches Element einer Involution ist ein neutrales Element der nullten Stufe.

Ein neutrales Element soll „hyperneutral“ heissen, wenn σ so gross ist, dass jede n -punktige Gruppe, welche es enthält, zur Involution gehört; ein n -faches Element einer J_n^k kann als hyperneutral aufgefasst werden.

2. Die \mathfrak{G}_n (siehe Artikel 1 von Geometr. Darstellung etc. im Juliheft der Sitzb. der kais. Akad.), welche für alle Gruppen (a) einer auf einer Geraden T befindlichen J_n^k , für einen festen Punkt o und für dieselben Punkte v und s construirt werden, bilden ein Curvensystem k -ter Stufe. Die Tangenten (t) ihres $(n-1)$ -fachen Punktes v bilden eine J_{n-1}^k , welche der J_n^k projectiv ist, und man hat daher (mit Hilfe von Satz 1 in G. D.):

Satz 1. Die r -ten Polaren eines Poles o bezüglich der Gruppen einer J_n^k bilden eine zu dieser projective J_{n-r}^k , welche mit $(J_n^k)_r^\sigma$ bezeichnet werden soll. (Vgl. Cremona Oberflächen, Seite 69.)

Es folgt auch:

Satz 2. Die $(J_n^k)_r^\sigma$ ist bestimmt durch die r -ten Polaren von o in Bezug auf die Theile der J_n^k , welche sie nach b) und c) festlegen.

Satz 3. Die Gruppen (a), für welche $n-r-\sigma$ gegebene Punkte (p) der r -ten Polare für einen Pol o angehören, bilden eine $J_n^{r+\sigma}$, welche in o ein $(n-r+1)$ -faches hyperneutrales Element und in den Punkten (p) $(r+1)$ -fache neutrale Elemente σ -ter Stufe besitzt. Denn nimmt man $r+\sigma$ Punkte (q) der Gruppe (a) an, so bilden die (a), welche diese enthalten, eine $J_n^{n-r-\sigma}$, welcher die $(J_n^{n-r-\sigma})_r^\sigma$ projectiv ist. Unter den Gruppen der letztern, welche nach Satz 1 eine $J_{n-r}^{n-r-\sigma}$ ist, gibt es nun eine die Gruppe (p) enthaltende, und dieser entspricht in der Projectivität mit $J_n^{n-r-\sigma}$ nur eine (a), welche die Punkte (q) besitzt. Durch die Punkte (q) ist demnach die ganze Gruppe (a) eindeutig bestimmt, wodurch der erste Theil des obigen Satzes bewiesen ist.

Wird o als $(n-r+1)$ -faches Element einer Gruppe (a) angenommen, so wird $(a)_r^\sigma$ (nach G. D. 3. b.) unbestimmt, kann

also auch die Punkte (p) enthalten. Demnach genügt eine Gruppe (a) , welche aus dem $(n-r+1)$ -fachen Punkt o und $r-1$ beliebigen Punkten der Geraden besteht, den gestellten Bedingungen, woraus sich die Singularität in o ergibt.

Nach dem ersten Theile dieses Satzes gibt es eine J_n^2 solcher (a) , welche einen Punkt p von (p) $(r+1)$ -mal enthalten und die übrigen $n-r-\sigma-1$ Punkte von (p) zu Punkten ihrer $(a)_r^\sigma$ haben. Dann fällt aber auch ein Punkt von $(a)_r^\sigma$ nach p , die Gruppen dieser J_n^2 haben daher die verlangte Eigenschaft, und p ist folglich ein $(r+1)$ -faches neutrales Element σ -ter Stufe der J_n^{r+k} .

(Die den Gruppen der $J_n^{r+\sigma}$ für bestimmte auf einem Strahle durch o gelegene Punkte v und s entsprechenden Curven \mathbb{C}_v , bilden ein Curvensystem $(r+\sigma)$ -ter Stufe, dessen Curven sich in ihrem n -ten mit os gemeinschaftlichen Punkte $(n-r+1)$ -punktig berühren.)

Aus Satz 3 folgt noch: Haben zwei n -punktige Gruppen für denselben Pol r -te Polaren, welche $n-r-\sigma$ Punkte gemein haben, so können sie, wenn sie nicht identisch sein sollen, nur $r+\sigma-1$ Punkte gemeinschaftlich besitzen.

In den nächsten Nummern werden Umkehrungen des Satzes 3 bewiesen werden.

3. Satz 4. Hat eine J_n^1 einen n -fachen Punkt o , so sind ihre $n-1$ Doppelpunkte die erste Polare von o bezüglich aller ihrer Gruppen. Setzt man nämlich in Satz 3 $r=1$, $\sigma=0$, so erhält man einen leicht auszusprechenden Satz, dessen Umkehrung, Satz 4, gilt, weil (nach Weyr, Über Involutionen höherer Grade; Crelles Journal Bd. 72) eine Involution bestimmt ist, sobald von ihr ein n -facher Punkt und $n-1$ Doppelpunkte gegeben sind.

Satz 5. Hat eine J_n^r ein $(n-r+1)$ -faches hyperneutrales Element o , so ist die $(J_n^r)_s^\sigma$ von der Stufe $r-s$. Die Gruppen von J_n^r , welche den Punkt o $(n-r+1)$ -mal enthalten, bilden nach der Definition eines hyperneutralen Elementes in d) eine J_n^{r-1} . $(J_n^{r-1})_1^\sigma$ ist eine J_{n-1}^{r-2} , deren Gruppen in o einen $(n-r+1)$ -fachen Punkt besitzen. Für eine beliebige zu J_n^r gehörende J_n^2 ist die $(J_n^2)_1^\sigma$ eine J_{n-1}^2 und schneidet, da J_n^2 mit J_n^{r-1} eine J_n^1 gemein hat, die obige J_{n-1}^{r-2} in einer J_{n-1}^1 . Da

nun die J_n^{r-1} und J_n^2 nach c) die J_n^r bestimmen, so bestimmen die J_{n-1}^2 und J_{n-1}^{r-2} nach Satz 2 die $(J_n^r)_1^o$; letztere ist daher eine J_{n-1}^{r-1} , welche in o ebenfalls ein $(n-r+1)$ -faches hyperneutrales Element besitzt. Hieraus folgt der obige Satz.

Ist in Satz 5 $s=r-1$, so ist $(J_n^r)_{r-1}^o$ eine J_{n-r+1}^r , welche in o einen $(n-r+1)$ -fachen Punkt hat. $(J_{n-r+1}^1)_1^o \equiv (J_n^r)_r^o$ besteht, daher nach Satz 4 aus den $n-r$ Doppelpunkten (p) der J_{n-r+1}^1 , welche nach Satz 3. $(r+1)$ -fache Punkte einer J_n^r sind, die mit der gegebenen J_n^r identisch sein muss. Hätte letztere einen andern $(r+1)$ -fachen Punkt, so müsste er zu der $(a)_r^o$ derjenigen Gruppe (a) gehören, die ihn enthält und müsste daher einer der Punkte (p) sein. Man kann daher sagen:

Satz 6. Hat eine J_n^r ein $(n-r+1)$ -faches hyperneutrales Element o , so besitzt sie $n-r \dots (r+1)$ -fache Punkte, welche die r -te Polare von o bezüglich jeder Gruppe der J_n^r bilden.

4. Satz 7. Hat eine J_n^k ein $(n-r+1)$ -faches hyperneutrales Element o (wobei $r \geq k$ sein muss) und ein neutrales $(r+1)$ -faches Element p von der Stufe $(k-r)$, so gehört p der r -ten Polare von o für jede Gruppe der Involution an; die Anzahl der Punkte p muss $\geq n-k$ sein. Nach c) ist die J_n^k durch $k-r+1$ J_n^r bestimmt, welchen die J_n^{r-1} (s. 3) angehört. Eine solche J_n^r hat in o ein $(n-r+1)$ -faches hyperneutrales Element und schneidet die J_n^{k-r} , welche dem Punkte p zugehört, nach a) in einer Gruppe. p ist daher einer ihrer $(r+1)$ -fachen Punkte und nach Satz 6 ein Punkt der $(J_n^r)_r^o$. Die sich so für die obigen $k-r+1$ J_n^r ergebenden Polaren bestimmen eine J_n^{k-r} , welche, nach Satz 2, identisch $(J_n^k)_r^o$ ist, und von der jede Gruppe den Punkt p enthält, weil die die Involution bestimmenden ihn enthalten. Hieraus folgt Satz 7.

Wäre die Anzahl der Punkte p grösser als $n-k$ z. B. $= n-k+l$, so müssten nach Satz 3 die möglichen Gruppen (a) , für welche diese Punkte der $(a)_r^o$ angehören, eine J_n^{k-l} bilden; da nun aber nach Satz 7 die Gruppen der angenommenen J_n^k solche Gruppen sind, so ist die Annahme $p > n-k$ unzulässig.

5. Die Sätze in 3 und 4 lassen für rationale Curven mannigfache Folgerungen zu, indem man z. B. auf diesen Curven nur J_n^r ,

welche von Geraden, Ebenen und Flächen ausgeschnitten werden, und welche ein $(n-r+1)$ -faches hyperneutrales Element o besitzen, aufzusuchen braucht. Es ergibt sich dann die Anzahl der singulären Punkte der Curve, welche dadurch defnirt sind, dass das schneidende Gebilde in ihnen $r+1$ zusammenfallende Punkte mit ihr gemein hat, als $n-r$, und dass diese Punkte die r -te Polare des Poles o für die Schnittgruppen sind. Satz 7 findet eine ähnliche Verwendung.

Bildet man die Curve auf eine Gerade ab, so kennt man, wenn die Bilder der hier genannten Singularitäten gegeben sind, sofort die Bilder ihrer Geraden-, Ebenen- und Flächengruppen und kann, indem man umgekehrt bekannte Sätze über Polargruppen auf einer Geraden auf rationale Curven überträgt zu Sätzen gelangen, welche sich nicht auf solche Polargruppen beziehen. So verhalten sich die linearen und Tangential-Gruppen einer C_3^3 oder Raum- C_4 mit Spitze wie die Tripel resp. Quadrupel einer Geraden, welche denselben Schwerpunkt haben. Beispiel: Die Punkte der Cissoide aus der Spitze erstens auf eine Parallele zur Spitzentangente, zweitens auf die Wendetangente projectirt.

Um zu dem Obigen ein anderes Beispiel vorzuführen, sei eine räumliche C_3 gegeben, welche eine Gerade g in einem Punkte o schneidet; dann bilden die Punktetripel der C_3 , deren Schmiegungebenen sich auf einem Punkte von g schneiden, eine cubische Involution, welche in o einen dreifachen Punkt hat. Daher besteht nach Satz 4 die erste Polargruppe von o für ein solches Tripel aus den Berührungspunkten der Tangentialebenen, welche sich von g an die Curve legen lassen. Projectirt man das Ganze aus einem Punkte von g auf eine Ebene, so erhält man die Sätze über C_3^4 , welche Herr Professor Emil Weyr im 81. Bande der Sitzb., S. 843 bekannt gegeben.

Von anderen Folgerungen sollen nachstehende hervorgehoben werden:

Hat eine	<table style="border: none; display: inline-table;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">Gerade</td> <td rowspan="3" style="font-size: 3em; padding: 0 5px;">}</td> <td rowspan="3" style="padding: 0 10px;">A in einem Punkte o mit einer</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">Ebene</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">Gerade</td> </tr> </table>	Gerade	}	A in einem Punkte o mit einer	Ebene	Gerade
Gerade	}	A in einem Punkte o mit einer				
Ebene						
Gerade						
ebenen	}	rationalen C_n eine				
räumlichen			n			
räumlichen			$n-1$			

} - punktige Be-

rührung, so besteht die erste } Polare dieses Punktes
 zweite }
 gerade } Berührungs-
 für eine ebene } Gruppe der Curve aus den Berührungs-
 ebene } Osculations-
 Tangenten }
 Punkten der Tangentialebenen } , welche sich von
 Schmiegungebenen }
 (A; B) an die Curve legen lassen und aus den
 Spitzen }
 Spitzen } der Curve, deren Anzahl nicht
 Inflexionspunkten }
 $\left. \begin{matrix} n-2 \\ > n-3 \\ n-3 \end{matrix} \right\}$ sein kann.

Die $n-2$ Wendepunkte einer ebenen C_n mit einem $(n-1)$ -fachen Punkt o , dessen Tangenten in eine Gerade zusammenfallen, sind die zweite Polare für jede gerade Gruppe der Curve und gehören der ersten Polare für jede solche Gruppe von n Punkten an, deren Tangenten sich in einem Punkte p schneiden. Der n -te Schnittpunkt von op mit der Curve ist auch ein Punkt der letzteren Polare.

Die $n-3$ Punkte, in welchen eine räumliche C_n mit einem $(n-2)$ -fachen Punkt o , dessen Tangenten in eine Gerade zusammenfallen, von einer Ebene hyperosculirt wird, sind die dritte Polare von o bezüglich jeder ebenen Gruppe der Curve.

Die Sätze, welche sich hieraus für einen Punkt einer Raum- C_3 und für eine Raum- C_4 mit Spitze, für einen Wendepunkt einer ebenen C_3^2 , einen Undulationspunkt einer ebenen C_4 , für eine C_3^3 u. s. w. ergeben, sollen nicht erst specialisirt, sowie auch die dualen, welche sich auf die Gruppen von Curvenpunkten beziehen, deren Tangenten, respective Schmiegungebenen durch einen Punkt gehen, nicht ausgesprochen werden.

6. Sind die Punkte (p) des Satzes 3 und ihr Pol o gegeben und ausserdem für einen Pol $o' \dots p'$ Punkte (p') seiner r' -ten Polare

für die fraglichen Gruppen (a) , so bilden die (a) , welche die Angabe von (p) liefert, wenn $n-r-\sigma = \rho$ gesetzt wird, eine $J_n^{n-\rho}$, für welche $(J_n^{n-\rho})_{r'}^{o'}$, eine $J_n^{n-\rho}$, ist. Durch die Punkte (p') ist eine in letzterer enthaltene $J_n^{n-\rho-\rho'}$ bestimmt, welcher in der ihr projectiven $J_n^{n-\rho}$ eine $J_n^{n-\rho-\rho'}$ entspricht, deren Gruppen (a) den gestellten Bedingungen genügen. Ist $\rho + \rho' = n$, die Stufe der letzten Involution, demnach 0, so ist die Gruppe (a) eindeutig bestimmt.

Man schliesst so weiter, dass wenn allgemein die Gleichung $\rho + \rho' + \rho'' + \rho''' \dots = n$ stattfindet, wobei die Zahlen $\rho' \rho'' \dots$ den gegebenen Polen $o'' o''' \dots$ in analoger Weise entsprechen, wie die Zahl ρ dem Pole o , dass dann (a) eindeutig bestimmt ist und erhält:

Satz 8. Eine n -punktige Gruppe ist eindeutig bestimmt, sobald für eine beliebige Anzahl Pole zusammen n -Punkte beliebiger ihrer Polaren gegeben sind.

7. Wie gross ist x , die Stufe und z , der Index, d. h. die Zahl der durch x gegebene Punkte bestimmten Gruppen des Systems derjenigen Gruppen (a) , welche ρ gegebene Punkte (p) zu Punkten einer ihrer r -ten Polaren haben?

Wird ein Pol o angenommen, so müssen nach Satz 3 die Gruppen (a) eine $J_n^{n-\rho}$ bilden. Es gibt so $\infty^{n-\rho}$, und wenn noch o variiert $\infty^{n-\rho+1}$ Gruppen (a) ; x ist daher gleich $n - \rho + 1$. Werden also $n - \rho + 1$ Punkte (a') von (a) angenommen, so sind hiedurch z Gruppen (a) bestimmt. Für jede dieser Gruppen hat die r -te Polare, deren Theil (p) ist, einen Pol und es ist daher z der Anzahl dieser Pole gleich; um z zu finden, kann demnach die letztere Zahl bestimmt werden.

Die $(n-r)$ -te Polare eines Punktes von (p) bezüglich aller (a) , welche die angenommenen Punkte (a') enthalten, und welche eine J_n^{r-1} bilden, sind nach Satz 1 Gruppen einer J_r^{r-1} , welche auf die J_n^{r-1} projectiv bezogen ist, und man erhält für jeden der Punkte (p) je eine Involution $J_1 J_2 \dots J_r$, welche, da sie in Bezug auf die Involution der (a) auch untereinander projectiv bezogen sind.

Nun gibt es, wie man aus Artikel 144 von Cremona, Oberflächen, entnimmt, $r\rho$ Punkte, welche zugleich in entsprechenden

Gruppen der ρ projectiven Involutionen liegen. Ein solcher Punkt ist in der $(n-r)$ -ten Polare eines jeden der Punkte (p) bezüglich einer Gruppe (a) enthalten, welcher die Gruppe (a') angehört, ist also einer der z gesuchten Punkte, und man hat:

Satz 9. Sind ρ Punkte der r -ten Polare gegeben, so bilden die zugehörigen Fundamentalgruppen (a) ein System von der Stufe $n+1-\rho$ und vom Index $r\rho$.

Hieraus folgt auch: Zwei n -punktige Gruppen, für welche zwei ihrer r -ten Polaren dieselben ρ -Punkte besitzen, können, wenn sie nicht identisch sein sollen, nur $n-\rho$ Punkte gemein haben.

SITZUNGSBERICHTE
DER
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH - NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVIII. Band. V. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

**Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie,
Mechanik, Meteorologie und Astronomie.**

XXVI. SITZUNG VOM 6. DECEMBER 1883.

In Verhinderung des Secretärs übernimmt Herr Professor Weyr dessen Functionen.

Das k. und k. Ministerium des Äussern übermittelt ein vom königl. niederländischen Colonien-Minister für die Akademie bestimmtes Exemplar eines die topographischen und geologischen Verhältnisse der Ostküste der Insel Sumatra darstellenden Atlases, welcher einen Bestandtheil eines von dem niederländischen Bergbau-Ingenieur R. O. M. Verbeck begonnenen Werkes bildet.

Herr Dr. A. B. Meyer, Director des zoologischen Museums in Dresden, übermittelt die IV. und V. Lieferung seiner mit Unterstützung der Generaldirection der königl. Sammlungen für Kunst und Wissenschaft in Dresden herausgegebenen: „Abbildungen von Vogel-Skeletten.“

Das c. M. Herr Prof. V. v. Ebner übersendet eine Abhandlung des Herrn stud. phil. J. H. List an der Universität in Graz: „Über eine Wirbel-Synostose bei *Salamandra maculosa* Laur.“

Der Secretär-Stellvertreter legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über einige zahlentheoretische Functionen“, von Herrn Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck.
2. „Über den Mechanismus der Fernwirkung elektrischer Kräfte“, von Herrn Prof. Dr. J. Odstrčil am Obergymnasium in Teschen.
3. „Bestimmung der Polhöhe und des Azimuthes auf der Sternwarte Kremsmünster“, von Herrn Prof. Dr. W. Tinter an der technischen Hochschule in Wien.

Herr Prof. Dr. Fr. Toul a erstattet den Schlussbericht über seine in dem Gebiete zwischen Niš, Leskovac, Trn und Sofia, in

den Jahren 1875 und 1880 im Auftrage der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften ausgeführten geologischen Untersuchungen, und überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Geologische Untersuchungen im westlichen Theile des Balkan und in den angrenzenden Gebieten. X. Von Pirot nach Sofia, auf den Vitoš, über Pernik nach Trn und über Stol nach Pirot.“

Dr. Norbert Herz, Assistent an der technischen Hochschule in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Bahnbestimmung des Planeten 289 Russia“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Acta mathematica. Zeitschrift 1:4. Stockholm, Berlin, Paris, 1883; 4^o.

Akademie der Wissenschaften, königl. Bayerische: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe. 1883. Heft I. und II. München, 1883; 8^o.

— — Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe, XIV. Band. 2. Abtheilung. München, 1883; 4^o.

— — Die Kälterteckfälle im Mai von Wilhelm von Bezold. München, 1883; 4^o. — Zur Theorie der geodätischen Linie und des geodätischen Dreiecks von A. Brill. München, 1883; 4^o. — Die Bestimmung wahrer Tagesmittel der Temperatur unter besonderer Berücksichtigung langjähriger Beobachtungen von München von Fritz Erk, mit einleitenden Bemerkungen von Wilh. von Bezold. München, 1883; 4^o. — Die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation von Ph. v. Jolly. 2. Abhandlung. München, 1881; 4^o. — Das Rückenmark des *Proteus anguineus* von Dr. Ferdinand Klausner. München, 1883; 4^o. — Die Regenverhältnisse in Indien, nebst dem indischen Archipel und in Hochasien. Theil II von Hermann von Schlagintweit-Sakunlunski. München, 1881; 4^o.

Akademie königliche der Wissenschaften: Öfversigt af Förhandlingar. 40. de Ärg. Nr. 1—6. Stockholm, 1883; 8^o.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigenblatt. XXI. Jahrgang. Nr. 29—34. Wien, 1883; 8^o.

Archivio per le scienze mediche. Vol. VII, fascicoli 1 und 2. Torino, 1883; 8^o.

- Central-Station, königl. meteorologische: Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern. Jahrg. V. Heft 1 und 2. München, 1883, gr. 4^o.
- — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern während des Juni, Juli, September und October 1883. Folio.
- Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII, Nr. 88 u. 89. Cöthen, 1883; 4^o.
- Commission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel. Vierter Bericht für die Jahre 1877 bis 1881. II. Abtheilung. Berlin, 1883; Flo.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVII. Nrs. 20 & 21. Paris, 1883; 4^o.
- Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. IV. Jahrgang. 1883. Heft XI. November. Berlin, 1883; 4^o.
- Ferdinandenum für Tirol und Voralberg: Zeitschrift. 3. Eolge. 27. Heft. Innsbruck, 1883; 8^o.
- Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVI. Jahrgang, Nr. 16. Berlin, 1883; 8^o.
- physikalisch-chemische: Bulletin. Tome XV, Nr. 7. St. Pétersburg, 1883; 8^o.
- für Salzburger Landeskunde: Mittheilungen. XXIII. Vereinsjahr. 1883. Salzburg; 8^o.
- österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XVIII. Band. Novemberheft, 1883. Wien; 4^o.
- Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XLIV. Jahrg. Nr. 41 bis 48. Wien, 1883; 4^o.
- Göttingen, Universität: Akademische Schriften pro 1883. 60 Stücke 4^o u. 8^o.
- Hortus petropolitans: Acta. Tomus VIII. Fasciculus II. St. Pétersburg, 1883; 8^o.
- Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. VIII. Jahrgang, Nr. 41—48. Wien, 1883; 4^o.
- Institut, königl. sächsisches meteorologisches: Jahrbuch 1883. 1. Lieferung. Leipzig. 1883; gr. 4^o.
- Institute, the Canadian: Proceedings. Vol. I., Fasciculus Nr. 3. Toronto, 1883; 8^o.

- Johns Hopkins University: American chemical Journal. Vol. V. Nos. 4 u. 5. Baltimore. 1883; 8°.
- Musée, royal d'Histoire naturelle de Belgique: Annales. Tome VIII. 1^{re} partie. Conchyliologie des terrains tertiaires et Atlas. Bruxelles, 1878; folio. Tome VII, 3^e partie. Description des Ossements fossiles des environs d'Anvers et Atlas. Bruxelles, 1882; folio.
- Nature. Vol. XXIX. Nrs. 734 & 735. London, 1883; 8°.
- Observatory, the a monthly Review of Astronomy. Nos. 78 & 79. London, 1883; 8°.
- Osservatorio del real collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino mensuale. Ser. III., Vol. III. Nos. 3—7. Torino, 1883; 4°.
- Société des Ingénieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 4^e serie, 36^e année. 9^e Cahier. Paris, 1883; folio.
- des Sciences naturelles de Neuchatel: Bulletin. Tome XIII. Neuchatel, 1883; 8°.
- royale malacologique de Belgique. Annales. Tome XVII. Année. 1882. Bruxelles; 8°.
- Society, the royal astronomical: Monthly Notires. Vol. XLIII. No. 9. Supplementary number. London. 1883; 8°.
- the royal geographical: Proceedings & monthly Record of Geographyc. Vol. V. Nr. 11. London, 1883; 8°.
- Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang. Nr. 41 bis 48. Wien, 1883; 4°.
-

Über die Schweifaxe des Kometen 1874 III (Coggia).

Von Dr. J. v. Hepperger,
Assistent an der k. k. Sternwarte zu Wien.

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. November 1883.)

Nachdem Bessel's bahnbrechende Untersuchungen über die am Halley'schen Kometen wahrgenommenen Ausströmungen neue Gesichtspunkte aufgedeckt hatten, welche viel zur Erklärung dieser räthselhaften Erscheinungen beitrugen, und zugleich auch den Weg erkennen liessen, wie man durch Beobachtung zur Kenntniss der Grösse der Kräfte, welche diese Erscheinungen in's Leben rufen, gelangen kann, hielt man bei der Berechnung ähnlicher Erscheinungen durch längere Zeit hindurch fast genau an den Formeln fest, welche in genannten Untersuchungen angegeben sind. Bessel hatte jedoch hierin sein vorzügliches Augenmerk auf die Erklärung der Erscheinungen gerichtet, welche die gegen die Sonne gekehrten Ausströmungen darboten, und erst in zweiter Linie zeigen wollen, wie die gefundenen Formeln transformirt werden können, um auch die Kraft zu bestimmen, welche den Schweiftheilen die von ihnen eingehaltenen Bahnen vorschreibt.

Die Dürftigkeit der Aufzeichnungen über die Schweiflagen früherer grosser Kometen, sowie eine Fülle anderweitiger Arbeiten, hatten Bessel die Gelegenheit benommen, seine Formeln in solchem Maasse zu verwerthen, um das Bedürfniss zu fühlen, über die Anwendbarkeit derselben eine nähere Untersuchung anzustellen. Und so kam es, dass, während die Bessel'sche Formel nur auf solche Schweifmoleküle passende Anwendung findet, welche sich in nur geringer Entfernung vom Kometenkerne befinden, dieselbe auch für weit abstehende Schweiftheilchen häufig in Verwendung gebracht worden ist, für welche

sie schon sehr unrichtige Resultate lieferte. Erst Prof. Bredichin erkannte im Verlaufe seiner umfangreichen Studien über Bildung und Structur von Kometenschweiften die Nothwendigkeit, die Bewegungsverhältnisse vom Kerne des Kometen einigermassen entfernter Schweifmoleküle nach strengen Formeln zu behandeln.

Seine Berechnung der Repulsionskraft aus den vom Director der Athener Sternwarte, Herrn J. Schmidt angestellten Beobachtungen über die successiven Lagen der Schweifaxe des Kometen 1874 III (Coggia) ist aber noch vermittelt der Bessel'schen Näherungsformel durchgeführt. Nachdem ich mich schon früher mit der Bahnbestimmung dieses Kometen beschäftigt hatte und die bedeutende Schweifentwicklung desselben die Anwendbarkeit der Bessel'schen Formel in vielen Fällen zweifelhaft erscheinen liess, unternahm ich eine Neuberechnung der Schmidt'schen Beobachtungen nach strengem Rechnungsverfahren. Da es sich hiebei nur um Punkte handelte, welche in der Schweifaxe gelegen sind, so genügte es bei den einschlägigen Rechnungen, nur die Lage der Axe in's Auge zu fassen.

Nach der herrschenden Vorstellungsweise von der Bildung der Kometenschweife wird in einer bestimmten Zeit vom Kometenkerne in der Richtung gegen die Sonne eine gewisse Masse von Ausströmungsproducten entsendet, welche vom Momente ihrer Bildung angefangen, unter dem Einflusse einer constanten Repulsionskraft stehen, von welcher ich im vorliegenden Falle annehme, dass sie für gleichzeitige Gebilde auch gleichgrosse Werthe besitze. In Folge dieser Kraft werden sich die auf den Radiusvector projecirten Geschwindigkeiten der strömenden Materie stetig vermindern, bis sie endlich den Werth Null erreichen; von diesem Momente an tritt, bei gleichzeitigem Wachsen dieser Geschwindigkeiten in entgegengesetzter Richtung das Abströmen der Materie in den Schweif ein, dessen Entwicklung in die Breite von den auf den Radiusvector senkrechten Geschwindigkeitscomponenten abhängen wird, welche die Randtheile des Ausströmungskegels besaßen. Die Schweifaxe wird aber ihrer Lage nach hievon unabhängig sein, wenn, wie es beim Kometen 1874 III, soviel man aus Beobachtungen entnehmen kann, in der That zuetroffen zu haben scheint, die Axe des Ausströmungskegels mit dem Radiusvector zur Sonne zusammen-

fiel. Sie ist die Linie, in welcher sich die seit Beginn der Ausströmungen successive in den Scheitelpunkt ihrer Umhüllungsfläche gelangten Moleküle befinden würden, wenn dieselben in ihrer fernerer Bewegung durch den Körper des Kometen nicht weiter gestört worden wären. Um demnach die Gestalt der Axe ermitteln zu können, handelt es sich vorerst darum, die Bahn eines solchen Moleküles zu bestimmen. Bei der Kleinheit der gewöhnlich innerhalb der Coma liegenden Umhüllungsfläche der Ausströmungen kann man für deren Scheitelpunkt wohl auch den Kern des Kometen substituiren, und ich werde nun in Kürze die Formeln entwickeln, durch welche die Bewegung eines Theilchens bestimmt wird, das direct vom Kometenkerne ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgegangen sein soll, und dessen relative Bewegung gegen denselben lediglich in Folge einer constanten Differenz in dem Wirken der auf die Einheit der Entfernung reducirten Solarkraft vor sich gehe. Da sich nach den gemachten Voraussetzungen das Theilchen in der Ebene der Kometenbahn bewegen muss, wähle ich dieselbe zur Coordinatenebene, das Sonnencentrum zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Systems, dessen Abscissenaxe mit der Axe der Kometenbahn zusammenfällt. Ich nehme an, dass der Komet eine parabolische Bahn besitze, und beim Passiren des Perihels in den ersten Quadranten des gewählten Coordinatensystems eintrete. Die Periheldistanz des Kometen sei durch q bezeichnet.

Es sei die Wirkung der Sonne auf das Theilchen in der Entfernung ρ vom Sonnencentrum durch $\frac{k^2 \mu}{\rho^2}$ ausgedrückt, worin

k^2 die Gauss'sche Constante bedeutet; μ stellt hienach, den absoluten Werth der Newton'schen Gravitation als Einheit genommen, die Kraft dar, mit welcher die Sonne in der Einheit der Entfernung auf das Theilchen wirkt. Anziehenden Kräften sollen positive, abstossenden negative Werthe von μ entsprechen. Bei normalen Kometenschweiften, die eine von der Sonne abgekehrte Lage besitzen, und auf welche allein ich in dieser Abhandlung Rücksicht nehmen werde, muss μ stets kleiner sein als $+1$, kann jedoch viel grössere negative Werthe erhalten. Da sonach die Grösse $1 - \mu$, welche gewöhnlich als die dem Theilchen zukommende Repulsionskraft bezeichnet wird, ausnahmslos positive

Werthe erhält, werde ich sie in den Entwicklungen der Formeln, bei welchen das Vorzeichen von μ besonders beachtet werden muss, durch das Quadrat einer anderen Grösse (v) ausdrücken:

$$1 - \mu = v^2.$$

Es kennzeichnet sich der Unterschied zwischen anziehender und abstossender Wirkung der Sonne auf das Theilchen darin, dass im ersten Falle

$$v^2 < 1,$$

während im zweiten

$$v^2 > 1;$$

der Übergang zwischen beiden Fällen wird vermittelt durch den Specialfall

$$v^2 = 1; \quad \mu = 0,$$

in welchem also die Wirkung der Sonne auf das Theilchen Null ist.

Sind x , y die rechtwinkligen Coordinaten des Theilchens, so lauten die Fundamentalgleichungen seiner Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{k^2(1-v^2)}{\rho^3} x; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{k^2(1-v^2)}{\rho^3} y.$$

Durch Integration dieser Gleichungen erhält man

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = h^2 + \frac{2k^2(1-v^2)}{\rho}$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c.$$

Die Bestimmung der Constanten h und c ist sehr einfach, da im Momente der Trennung des Theilchens vom Kometenkerne sowohl die Coordinaten als auch die Geschwindigkeiten des Theilchens identisch sind mit denen des Kometenkernes, dessen Polarcoordinaten r und v seien. Die Werthe von h und c ergeben sich hiernach:

$$h^2 = \frac{2k^2 v^2}{r}; \quad c = k\sqrt{2q}.$$

Weiters ergibt sich nach bekanntem Verfahren:

$$dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{h^2 \rho^2 + 2k^2(1-\nu^2)\rho - c^2}} = \frac{\rho d\rho}{k\sqrt{2} \sqrt{\frac{\nu^2}{r} \rho^2 + (1-\nu^2)\rho - q}}$$

Bezeichnet w den Winkel, welchen der Radiusvector ρ mit der X-Axe bildet, so dass

$$x = \rho \cos w; \quad y = \rho \sin w$$

werden, so besteht die Relation

$$\rho^2 dw = c dt;$$

die Differentialgleichung der Curve, in welcher sich das Theilchen bewegt, lautet sonach

$$dw = \frac{\sqrt{q} d\rho}{\rho \sqrt{\frac{\nu^2}{r} \rho^2 + (1-\nu^2)\rho - q}};$$

ich werde bei der hier vorzunehmenden Integration die beiden Fälle auseinanderhalten, in denen $1-\nu^2$ entweder einen positiven oder negativen Werth besitzt.

1) $1-\nu^2 > 0$

$$\rho = \frac{p}{1+e \cos(w-\chi)};$$

χ bedeutet hierin die Integrationsconstante, p den Parameter und e die Excentricität der Curve. Die beiden letzteren Grössen erscheinen durch die Gleichungen

$$p = \frac{2q}{1-\nu^2}; \quad e^2 - 1 = \frac{4q\nu^2}{r(1-\nu^2)^2} = \frac{4\nu^2 \cos^2 \frac{v}{2}}{(1-\nu^2)^2}$$

in einfacher Weise bestimmt. Die Curve, in welcher sich das Theilchen bewegt, ist sonach durch einen Hyperbelast dargestellt, dessen concave Seite der Sonne zugewendet ist. Der Winkel χ , unter welchem sich die Axen der Hyperbel und Parabel durchschneiden, bestimmt sich auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} e\rho \cos(w-\chi) + \rho &= p \\ e r \cos \chi + e y \sin \chi + \rho &= p \\ d\rho &= -e \cos \chi dx - e \sin \chi dy. \end{aligned}$$

Andererseits erhält man aus:

$$x = \rho \cos w \quad \text{und} \quad y = \rho \sin w$$

$$d\rho = \cos w \, dx + \sin w \, dy.$$

Die Elimination von $d\rho$ ergibt:

$$(e \cos \chi + \cos w) \, dx + (e \sin \chi + \sin w) \, dy = 0.$$

Indem ich mit Hilfe der Gleichung

$$x \, dy - y \, dx = c \, dt$$

dy ausscheide, erhalte ich

$$(e \cos \chi + \cos w) \, dx + (e \sin \chi + \sin w) \left(\frac{y}{x} \, dx + \frac{c}{x} \, dt \right) = 0$$

$$e \cos \chi + \cos w + (e \sin \chi + \sin w) \operatorname{tg} w \, dx = - \frac{c}{x} (e \sin \chi + \sin w) \, dt$$

$$\rho [1 + e \cos(w - \chi)] \, dx = -c (e \sin \chi + \sin w) \, dt$$

$$p \, dx = -c (e \sin \chi + \sin w) \, dt.$$

Da

$$c = k \sqrt{2q} \quad \text{und} \quad p = \frac{2q}{1 - v^2}$$

sind die Geschwindigkeitscomponenten nach den Coordinaten-
axen folgende:

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{k(1 - v^2)}{\sqrt{2q}} (e \sin \chi + \sin w)$$

$$\frac{dy}{dt} = + \frac{k(1 - v^2)}{\sqrt{2q}} (e \cos \chi + \cos w).$$

Für den Ausgangspunkt des Theilchens vom Kometenkerne, wo $w = v$, müssen diese Geschwindigkeitscomponenten identisch sein mit denen des Kometen, deren Werthe nachstehende sind:

$$- \frac{k}{\sqrt{2q}} \sin v \quad \text{und} \quad + \frac{k}{\sqrt{2q}} (1 + \cos v).$$

Daraus erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$e \sin \chi = \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \sin v$$

$$e \cos \chi = \frac{1+\nu^2 \cos v}{1-\nu^2}.$$

Indem man mit Hilfe dieser Relationen e und χ aus der Curvengleichung eliminiert, erhält man

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\frac{2q}{1-\nu^2}}{1+e \cos(w-\chi)} = \frac{2q}{\cos w + \nu^2 \cos(w-v) + 1-\nu^2} \\ &= \frac{q}{\cos^2 \frac{w}{2} - \nu^2 \sin^2 \frac{w-v}{2}}. \end{aligned}$$

2) $1-\nu^2 < 0$.

Da in diesem Falle ν^2-1 eine positive Grösse ist, gebe ich der Differentialgleichung der Curve die folgende Form:

$$dw = \frac{\sqrt{q} dz}{\rho \sqrt{\frac{\nu^2}{r} \rho^2 - (\nu^2-1)\rho - q}}.$$

Durch Integration erhält man

$$\rho = \frac{p'}{e' \cos(w-\chi') - 1}.$$

Diese Curve ist eine Hyperbel, welche dem Brennpunkte, in dem sich die Sonne befindet, die convexe Seite zukehrt. Die Constanten erscheinen durch nachfolgende Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} p' &= \frac{2q}{\nu^2-1}; \quad e'^2-1 = \frac{4q\nu^2}{r(\nu^2-1)^2}; \quad e' \sin \chi' = \frac{\nu^2}{\nu^2-1} \sin v \\ e' \cos \chi' &= \frac{1+\nu^2 \cos v}{\nu^2-1}. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Curve erhält durch Einsetzung der entsprechenden Ausdrücke für p' , e' , χ' folgende Gestalt:

$$\rho = \frac{p'}{e' \cos(w - \chi') - 1} = \frac{2q}{\cos w + v^2 \cos(w - v) - v^2 + 1}$$

$$= \frac{q}{\cos^2 \frac{w}{2} - v^2 \sin^2 \frac{w - v}{2}}.$$

Eine Vergleichung der beiden Formeln für die Curve, in welcher sich das Theilchen bewegt, je nachdem $1 - v^2 > 0$ oder $1 - v^2 < 0$,

1) $1 - v^2 > 0$

2) $1 - v^2 < 0$

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(w - \chi)}$$

$$\rho = \frac{p'}{e' \cos(w - \chi') - 1}$$

lässt erkennen, dass die eine in die andere übergeht, wenn man setzt:

$$p' = -p$$

$$e' = -e$$

$$\chi' = \chi.$$

Die gleichen Beziehungen lassen sich aber auch aus einer directen Vergleichung der in den beiden Fällen für p , e , χ und p' , e' , χ' geltenden Relationen ableiten. Der Winkel χ ist hierbei in jenem Quadranten zu wählen, welcher den Vorzeichen von $\sin v$ und $\operatorname{tg} \chi$ entspricht.

Es ist also nach den gemachten Bemerkungen überflüssig, die diesbezüglichen Formeln verschieden zu gestalten, je nachdem $1 - v^2 \geq 0$, da ein Formelsystem ausreicht, wenn man nur die Hilfsgrössen mit dem ihren Bestimmungsgleichungen entsprechenden Vorzeichen in die weitere Rechnung einführt.

Ich werde nun eine Beziehung zwischen t und w ableiten, ausgehend von den Gleichungen

$$\rho^2 dw = k\sqrt{2q} dt$$

$$\rho = \frac{2q}{(1 - v^2)[1 + e \cos(w - \chi)]}.$$

Die Elimination von ρ ergibt

$$\frac{(2q)^{\frac{3}{2}}}{k(1-\nu^2)} \frac{dw}{[1+e \cos(w-\chi)]^2} = dt$$

Das unbestimmte Integral der linken Seite dieser Differentialgleichung ist

$$\frac{q^{\frac{3}{2}}(1-\nu^2)}{k \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot \nu^3 \cos^3 \frac{\nu}{2}} \left\{ \frac{2e \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(w-\chi)}{1 - \frac{e-1}{e+1} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(w-\chi)} \right. \\ \left. - \log. \text{ nat.} \frac{1 + \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(w-\chi)}{1 - \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(w-\chi)} \right\}$$

Die Zeit t möge von dem Momente ab gezählt werden, in welchem das Theilchen den Kern des Kometen zu verlassen im Begriffe ist, so dass der Anfangswerth von w durch die Grösse ν gegeben ist. Im Verlaufe der Zeit T habe die Anomalie des Kometen den Werth ν_0 erreicht. T bestimmt sich aus der Gleichung

$$T = q^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2}}{k} \left\{ \operatorname{tg} \frac{\nu_0}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\nu_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\nu}{2} \right\} = q^{\frac{3}{2}} (M_0 - M).$$

Nach Vornahme der Substitutionen

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\nu - \chi)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F' = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (w - \chi)$$

$$\lambda = \text{Mod. log. vulg.}$$

erscheint der dem Werthe ν_0 entsprechende Werth von w an die Gleichung gebunden:

$$\frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot k \cdot \lambda \cdot v^3}{1-v^2} \cos^3 \frac{v}{2} (M_0 - M) - e \lambda (\operatorname{tg} F' - \operatorname{tg} F) + \log \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2} F')}{\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2} F)} = 0.$$

Diese Formel eignet sich zur Bestimmung von w aus gegebenen Werthen der Grössen

$$q, 1-\mu, v, v_0.$$

Ich werde nun die Formeln zusammenstellen, deren man sich bedienen kann, um für einen beliebigen Zeitpunkt die Lage der Schweifaxe eines Kometen zu ermitteln, wenn der Werth der Repulsionskraft als bekannt angenommen wird. Da dieselben Formeln sowohl für positive wie negative Werthe von μ verwendbar sind, so werde ich zu der von Bessel aufgestellten und seither allgemein angenommenen Bezeichnungsart der Repulsionskraft zurückkehren.

Es bedeuten:

q = Periheldistanz des Kometen;

v = Anomalie des Kometen zur Zeit, in welcher ein Theilchen den Kern des Kometen verlassen hat;

v_0 = Anomalie des Kometen zur Zeit, in welcher die Polarcordinaten dieses Theilchens w, ρ sind;

$1-\mu$ = die dem Theilchen zukommende Repulsionskraft;

λ = Mod. log. vulg.

Die Lage der Schweifaxe kann durch ein constructives Verfahren aus einem System zusammengehöriger Werthe von w, ρ erhalten werden, welche man aus in passenden Intervallen angenommenen Werthen für v in folgender Weise bestimmt.

Zuerst berechnet man sich e und χ aus den Gleichungen

$$e \sin \chi = \frac{1-\mu}{\mu} \sin v$$

$$e \cos \chi = \frac{1 + (1-\mu) \cos v}{\mu}$$

Der Winkel χ ist in dem durch das Vorzeichen von $\sin v$ und $\operatorname{tg} \chi$ bestimmten Quadranten zu wählen. e erhält hiernach einen negativen Werth, wenn $1 - \mu > 1$; weiters bestimmt man sich F aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} F = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (v - \chi)$$

und hat dann F' im Wege fortgesetzter Versuche aus der Gleichung

$$e\lambda \operatorname{tg} F' - \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} F' \right) = \frac{\lambda}{\mu} \left(\sqrt{2(1-\mu)} \cos \frac{v}{2} \right)^3 k(M_0 - M) \\ + e\lambda \operatorname{tg} F - \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} F \right). \quad 1)$$

zu ermitteln. Ist auf diese Weise F' gefunden, so erhält man w aus der Relation:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (w - \chi) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} F'$$

und ρ aus

$$\rho = \frac{\frac{2q}{\mu}}{1 + e \cos (w - \chi)}$$

Prof. Bredichin hat in seinen in den Moskauer Annalen, V, 2 veröffentlichten Formeln für die hyperbolische Bewegung auch darauf Rücksicht genommen, dass das Theilchen mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit den Kern des Kometen verlässt, und die Formeln selbst so eingerichtet, dass ein System hievon für den Fall $1 - \mu < 1$, das andere für den Fall $1 - \mu > 1$ zu gebrauchen ist. Die Formeln beider Systeme sind den hier entwickelten sehr ähnlich, und eignen sich vorzugsweise dazu, um w , ρ zu bestimmen, wenn $1 - \mu$ als bekannt angenommen wird.

Wenn aber aus einer Beobachtung eines in der Schweifaxe des Kometen gelegenen Punktes der entsprechende Werth von $1 - \mu$ bestimmt werden soll, empfiehlt es sich, der Gleichung 1) eine andere Form zu geben, dadurch, dass man die in ihr vor-

kommenden Grössen e , F , F' mit Hilfe der übrigen Gleichungen direct als Functionen von μ , v , w ausdrückt. Dieselbe Gleichung, welche man auf diese Weise durch Elimination von e und χ aus 1) erhält, kann man auch direct durch Integration der Gleichung

$$\rho^2 dw = k\sqrt{2g} dt$$

ableiten, welchen Weg ich hier einschlagen werde, um nachzuweisen, dass die Bestimmung von $1-\mu$ durch dieselbe Formel ausgeführt werden kann, gleichviel, ob der Werth von μ positiv oder negativ ist.

Die Gleichung der Bahncurve des Theilchens lautet:

$$\rho = \frac{q}{\cos^2 \frac{w}{2} - (1-\mu) \sin^2 \frac{w-v}{2}}$$

Die Elimination von ρ aus diesen zwei Gleichungen ergibt:

$$\frac{dw}{\left[\cos^2 \frac{w}{2} - (1-\mu) \sin^2 \frac{w-v}{2} \right]^2} = \frac{k\sqrt{2}}{q^{\frac{3}{2}}} dt.$$

Durch die Substitution

$$\frac{\sqrt{1-\mu} \sin \frac{w-v}{2}}{\cos \frac{w}{2}} = z$$

transformirt sich obige Gleichung in die folgende:

$$\frac{dw}{\cos^3 \frac{w}{2} (1-z^2)^2} = \frac{k\sqrt{2}}{q^{\frac{3}{2}}} dt.$$

z^2 bleibt stets innerhalb der Grenzen Null und Eins, da ρ einen positiven endlichen Werth besitzen muss:

$$0 \leq z^2 < 1.$$

Durch Differentiation erhält man:

$$\frac{dw}{\cos^2 \frac{w}{2}} = \frac{2 dz}{\sqrt{1-\mu} \cos \frac{v}{2}}$$

Es ist aber auch

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{w}{2}} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{w}{2} = \frac{1+z^2+2\sqrt{1-\mu} \sin \frac{v}{2} \cdot z - \mu}{(1-\mu) \cos^2 \frac{v}{2}}$$

Indem ich den Ausdruck $\frac{dw}{\cos^2 \frac{w}{2}}$ als Function von z darstelle, bekomme ich:

$$\frac{k\sqrt{2}}{q^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{2}{\left(\sqrt{1-\mu} \cos \frac{v}{2}\right)^3} \cdot \frac{1+z^2+2\sqrt{1-\mu} \sin \frac{v}{2} \cdot z - \mu}{(1-z^2)^2} dz.$$

Die Integration der rechten Seite dieser Gleichung kann ausgeführt werden nach den Formeln:

$$\int \frac{(1+z^2) dz}{(1-z^2)^2} = \frac{z}{1-z^2}$$

$$\int \frac{z dz}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{1-z^2}$$

$$\int \frac{dz}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{1-z^2} + \frac{1}{4} \log. \text{ nat. } \frac{1+z}{1-z}.$$

Das unbestimmte Integral obiger Differentialgleichungen lautet sonach:

$$\frac{k\sqrt{2}}{q^{\frac{3}{2}}} t = \frac{2}{\left(\sqrt{1-\mu} \cos \frac{v}{2}\right)^3} \left\{ \frac{(2-\mu)z + 2\sqrt{1-\mu} \sin \frac{v}{2}}{2(1-z^2)} - \frac{\mu}{4} \log. \text{ nat. } \frac{1+z}{1-z} \right\} + \text{Constante.}$$

Indem ich wieder die Zeit vom Momente der Loslösung des Theilchens vom Kerne des Kometen an zähle, habe ich für $t=0$: $w=v$, $z=0$

$$0 = \frac{2}{\left(\sqrt{1-\mu} \cos \frac{v}{2}\right)^3} \sqrt{1-\mu} \sin \frac{v}{2} + \text{Constante.}$$

Dadurch, dass ich die Zeit als Function der Anomalie ausdrücke und die Constante der Integration eliminire, erhalte ich

$$\begin{aligned} k\sqrt{2} (M_0 - M) &= \frac{1}{\left(\sqrt{1-\mu} \cos \frac{v}{2}\right)^3} \left\{ \frac{(2-\mu)z + 2\sqrt{1-\mu} \sin \frac{v}{2}}{1-z^2} \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{1-\mu} \sin \frac{v}{2} - \frac{\mu}{2} \log. \text{nat.} \frac{1+z}{1-z} \right\} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{1-\mu} \cos \frac{v}{2}\right)^3} \left\{ \frac{(2-\mu)z + (1+z^2)\sqrt{1-\mu} \sin \frac{v}{2}}{1-z^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1-\mu} \sin \frac{v}{2} - \frac{\mu}{2} \log. \text{nat.} \frac{1+z}{1-z} \right\}. \end{aligned}$$

Durch Restitution des Werthes von z ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{\{(2-\mu)z + (1+z^2)\sqrt{1-\mu} \sin \frac{v}{2}\}}{1-z^2} \\ &= \frac{\sqrt{1-\mu}}{\cos^2 \frac{w}{2} - (1-\mu) \sin^2 \frac{w-v}{2}} \left\{ (2-\mu) \sin \frac{w-v}{2} \cos \frac{w}{2} \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{v}{2} \cos^2 \frac{w}{2} + (1-\mu) \sin^2 \frac{w-v}{2} \sin \frac{v}{2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{1-\mu}}{\cos^2 \frac{w}{2} - (1-\mu) \sin^2 \frac{w-v}{2}} \left\{ \sin \frac{w-v}{2} \cos \frac{w}{2} + \sin \frac{v}{2} \cos^2 \frac{w}{2} \right. \\ &\quad \left. + (1-\mu) \sin \frac{w-v}{2} \left(\cos \frac{w}{2} + \sin \frac{w-v}{2} \sin \frac{v}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sqrt{1-\mu} \cos \frac{v}{2}}{\cos^2 \frac{w}{2} - (1-\mu) \sin^2 \frac{w-v}{2}} [\sin w + (1-\mu) \sin(w-v)].$$

Dieser Ausdruck in obige Gleichung eingesetzt, ergibt:

$$k\sqrt{2}(M_0 - M =$$

$$\frac{\mu}{2(\sqrt{1-\mu} \cos \frac{v}{2})^2} \left\{ \frac{\sqrt{1-\mu} \cos \frac{v}{2}}{\mu} \cdot \frac{\sin w + (1-\mu) \sin(w-v)}{\cos^2 \frac{w}{2} - (1-\mu) \sin^2 \frac{w-v}{2}} \right.$$

$$\left. - \frac{2\sqrt{1-\mu} \sin \frac{v}{2}}{\mu} - \log. \text{ nat.} \frac{\cos \frac{w}{2} + \sqrt{1-\mu} \sin \frac{w-v}{2}}{\cos \frac{w}{2} - \sqrt{1-\mu} \sin \frac{w-v}{2}} \right\}$$

Durch die Substitution

$$\frac{\sqrt{1-\mu} \sin \frac{w-v}{2}}{\cos \frac{w}{2}} = \text{tg } \psi$$

wonach

$$\log. \text{ nat.} \frac{\cos \frac{w}{2} + \sqrt{1-\mu} \sin \frac{w-v}{2}}{\cos \frac{w}{2} - \sqrt{1-\mu} \sin \frac{w-v}{2}} = \log. \text{ nat.} \text{tg.} (45^\circ + \psi)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \log. \text{tg} (45^\circ + \psi)$$

wird, erhält die Bestimmungsgleichung für $1-\mu$ unter Berücksichtigung der Relation

$$\cos^2 \frac{w}{2} - (1-\mu) \sin^2 \frac{w-v}{2} = \frac{q}{\rho}$$

folgende Form:

$$\log. \text{tg}(45^\circ + \psi) + \frac{2\lambda\sqrt{1-\mu}}{\mu} \cos \frac{v}{2} \left\{ k\sqrt{2} (1-\mu) \cos^2 \frac{v}{2} (M_0 - M) \right.$$

$$\left. + \text{tg} \frac{v}{2} - \frac{\rho}{2q} [\sin w + (1-\mu) \sin(w-v)] \right\} = 0; \quad 2)$$

die Bestimmung von $1-\mu$ aus einer Beobachtung eines in der Schweifaxe des Kometen gelegenen Punktes wird auf folgende Weise ausgeführt.

Aus dem scheinbaren Orte eines solchen Punktes und den bekannten Elementen der Bahn des Kometen wird nach den Bessel'schen Formeln (Astron. Nachr. Bd. 13) die Lage des Punktes in der Ebene der Kometenbahn berechnet. Ein in dieser Ebene gelegenes rechtwinkliges Coordinatensystem habe den Mittelpunkt des Kometenkernes zum Ursprung und die Verlängerung des Radiusvectors (r_0) des Kometen zur Abscissenaxe. Die Coordinaten ξ , η des supponirten in der Schweifaxe gelegenen Theilchens sind demnach als durch Beobachtung gegebene, bekannte Grössen zu betrachten, aus denen mit Hilfe der Gleichungen

$$\rho \cos(v_0 - w) = \xi + r_0$$

$$\rho \sin(v_0 - w) = \eta$$

ρ und w direct bestimmt werden können. η erhält einen positiven Werth, wenn der Schweif in seiner Bewegung der Verlängerung des Radiusvectors des Kometen nachfolgt, das ist, wenn $v_0 > w$.

Aus den nunmehr bekannten Werthen von ρ und w berechnet man hierauf:

$$(1-\mu) \sin^2 \frac{w-v}{2} = \frac{\rho \cos^2 \frac{w}{2} - q}{\rho}$$

und

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \frac{\rho \cos^2 \frac{w}{2} - q}{\rho \cos^2 \frac{w}{2}}.$$

Bis hierher ist das Rechnungsverfahren ein directes. Nun beginnen die Versuche. Durch eine bestimmte Annahme über den Werth von $1-\mu$ erhält man aus

$$\sin^2 \frac{w-v}{2} = \frac{\rho \cos^2 \frac{w}{2} - q}{\rho (1-\mu)}$$

den zugehörigen Werth von v , worauf sich die in Gleichung 2) vorkommenden Grössen $\cos \frac{v}{2}$, M , $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$, $\sin(w-v)$ beziehen, und berechnet damit den Ausdruck

$$\frac{2\lambda\sqrt{1-\mu} \cos \frac{v}{2}}{\mu} \left\{ k\sqrt{2}(1-\mu) \cos^2 \frac{v}{2} (M_0 - M) + \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right. \\ \left. - \frac{\rho}{2q} [\sin w + (1-\mu) \sin(w-v)] \right\}.$$

Der Werth von $1-\mu$ ist so lange abzuändern, bis der Werth dieses Ausdruckes die Gleichung 2) erfüllt.

Da die Durchführung jedes einzelnen Versuches mehrfache Rechnungsoperationen nothwendig macht, empfiehlt es sich, die Anzahl der zu machenden Versuche dadurch zu verringern, dass man sich die Kenntniss eines sehr genäherten Werthes von $1-\mu$ auf anderem Wege verschafft.

In dem Specialfalle $\mu = 0$, in welchem das Schweiftheilchen als imponderable erscheint, verschwindet der logarithmische Theil der Gleichung (2) und reduciren sich die Formeln auf:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{q}{\cos(w - \frac{1}{2}v) \cos \frac{1}{2}v} \\ k\sqrt{2} \cos^2 \frac{v}{2} (M_0 - M) + \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \operatorname{tg}(w - \frac{v}{2}) &= 0 \end{aligned} \right\} \mu = 0.$$

Ich werde hievon später Gebrauch machen.

Durch Elimination von v aus diesen beiden Gleichungen erhalte man eine Relation zwischen ρ , w , v_0 , durch welche die Gestalt der Schweifaxe bestimmt wäre für die Zeit, in welcher die Anomalie des Kometen den Werth v_0 besitzt. Die Supposition $\mu \leq 0$ complicirt zwar das Verfahren, lässt aber eine approximative Lösung des Problems, die Gestalt der Schweifaxe für eine bestimmte Zeit zu ermitteln, bis zu einem beliebigen Grade von Genauigkeit immerhin noch zu. Ich werde zur Vereinfachung des Verfahrens die Annahme machen, dass μ unabhängig sei von v .

Ich habe zum Ausgangspunkte der diesbezüglichen Entwicklungen die Gleichung

$$\rho^2 dw = r^2 dv$$

gewählt. ρ hat, wie schon erwähnt, ganz dieselbe Form für positive sowohl, wie für negative Werthe von μ , und ist an die Gleichung gebunden:

$$\rho = \frac{2q}{\cos w + (1-\mu) \cos(w-v) + \mu}; \quad r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}.$$

Bedeutet wieder v die Anomalie des Kometen zur Zeit der Lostrennung des Theilchens, und entspricht in Bezug auf die Zeit ebenso w dem v_0 , so hat man:

$$\int_v^w \frac{dw}{[\cos w + (1-\mu) \cos(w-v) + \mu]^2} = \frac{1}{4} \int_v^{v_0} \frac{dv}{\cos^4 \frac{1}{2} v}.$$

Für $w = v$ geht der Ausdruck $\cos w + (1-\mu) \cos(w-v) + \mu$ über in $2 \cos^2 \frac{1}{2} v$, weshalb ich ihm die Form gebe:

$$\cos w + (1-\mu) \cos(w-v) + \mu = 2 \cos^2 \frac{1}{2} v (1-\zeta).$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach ζ ergibt:

$$\zeta = \left(1 - \frac{\mu}{2 \cos^2 \frac{v}{2}}\right) [1 - \cos(w-v)] + \operatorname{tg} \frac{v}{2} \sin(w-v).$$

Sonach habe ich

$$\int_v^w \frac{dw}{[\cos w + (1-\mu) \cos(w-v) + \mu]^2} = \int_v^{v_0} \frac{dv}{4 \cos^4 \frac{v}{2} (1-\zeta)^2}$$

und unter Berücksichtigung der früheren Relation:

$$\int_v^w \frac{dw}{(1-\zeta)^2} = \cos^4 \frac{v}{2} \int_v^{v_0} \frac{dv}{\cos^4 \frac{v}{2}}$$

Da $\zeta < 1$ ist, kann ich den Ausdruck $\frac{1}{(1-\zeta)^2}$ in eine nach steigenden Potenzen von ζ fortschreitende Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{(1-\zeta)^2} = 1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + 4\zeta^3 + 5\zeta^4 + \dots$$

Da ζ eine Grösse derselben Ordnung ist, wie $w-v$, so wird bei einigermassen grossen Werthen von $w-v$ die Convergenz der Reihe eine nur langsame sein. Zur Vermeidung jedoch von noch grösseren Complicationen werde ich über die vierte Potenz von ζ nicht hinausgehen, und folgerichtig mich auch mit Gliedern von der Ordnung $(w-v)^4$ begnügen. Durch Einführung der abkürzenden Bezeichnungen:

$$z = w - v; \quad \mathfrak{S} = 1 - \frac{\mu}{2 \cos^2 \frac{v}{2}}; \quad \delta = \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

wird

$$\zeta = \mathfrak{S}(1 - \cos z) + \delta \sin z$$

$$\zeta = \mathfrak{S}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots\right) + \delta\left(z - \frac{z^3}{6} + \dots\right),$$

oder annähernd

$$\zeta = \delta z + \frac{\mathfrak{S}}{2} z^2 - \frac{\delta}{6} z^3 - \frac{\mathfrak{S}}{24} z^4$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\zeta)^2} &= 1 + 2\delta z + 3\left(\delta^2 + \frac{\mathfrak{S}}{3}\right)z^2 + 4\left(\delta^3 + \frac{3}{4}\mathfrak{S}\delta - \frac{\delta}{12}\right)z^3 \\ &+ 5\left(\delta^4 + \frac{6}{5}\mathfrak{S}\delta^2 - \frac{1}{5}\delta^2 + \frac{3}{20}\mathfrak{S}^2 - \frac{1}{60}\mathfrak{S}\right)z^4. \end{aligned}$$

Die Grössen \mathfrak{S} und δ sind von w unabhängig, und bei der vorzunehmenden Integration daher als Constante zu betrachten.

Aus

$$z = w - v$$

$$dz = dw$$

folgt:

$$\begin{aligned} \int_v^w \frac{dw}{(1-\zeta)^2} &= \int_0^z \frac{dz}{(1-\zeta)^2} = z + \delta z^2 + \left(\delta^2 + \frac{\mathfrak{S}}{3}\right)z^3 \\ &+ \left(\delta^3 + \frac{3}{4}\mathfrak{S}\delta - \frac{\delta}{12}\right)z^4 + Az^5. \end{aligned}$$

Da durch die Integration die Ordnung der Glieder erhöht worden ist, werde ich von nun an auch Grössen fünfter Ordnung noch beibehalten. Die Bedeutung des Coëfficienten A erhält von selbst.

In z sowohl, als auch in \mathcal{S} und δ kommt noch v vor, welches durch v_0 und w ausgedrückt werden muss.

$$z = w - v = v_0 - v - (v_0 - w)$$

$$v = v_0 - (v_0 - v).$$

Durch Annahme der Bezeichnungen

$$v_0 - v = x$$

$$v_0 - w = y$$

ergibt sich $z = x - y$; im Verlaufe der späteren Rechnung wird sich zeigen; dass y eine Grösse dritter Ordnung ist, wenn x als eine Grösse erster Ordnung angenommen wird. Nachdem ich nur Grössen fünfter Ordnung noch in Betracht ziehe, erhalte ich:

$$z = x - y$$

$$z^2 = x^2 - 2xy$$

$$z^3 = x^3 - 3x^2y$$

$$z^4 = x^4$$

$$z^5 = x^5.$$

Es bleibt nun noch übrig, die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von z als Functionen von x darzustellen.

$$\delta = \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{v_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

Setze ich der Kürze halber

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0 = \varepsilon$$

so wird

$$\delta = \left(\varepsilon - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \left(1 - \varepsilon \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \varepsilon^3 \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} \right)$$

Weiterer Entwicklungen bedarf es nicht, da die niederste Potenz von z , mit welcher δ multiplicirt erscheint, die zweite ist. Die Reihenform für die Tangente ist:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24}$$

daher

$$\delta = \varepsilon - \frac{1+\varepsilon^2}{2} \left[x - \frac{\varepsilon x^2}{2} + \frac{1+3\varepsilon^2}{12} x^3 \right]$$

$$\mathcal{S} = 1 - \frac{\mu}{2 \cos^2 \frac{\nu}{2}} = 1 - \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2} \delta^2.$$

Da \mathcal{S}^2 nur in dem mit x^5 multiplicirten Gliede vorkommt, so bedarf es hiebei nur des ersten Gliedes der Reihe für δ^2 , welches ε^2 ist. Sonach wird

$$\mathcal{S}^2 = \left[1 - \frac{\mu}{2} (1 + \varepsilon^2) \right]^2.$$

Die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von z , als Functionen von x ausgedrückt, sind der Reihe nach:

$$\delta = \varepsilon - \frac{1+\varepsilon^2}{2} \left[x - \frac{\varepsilon x^2}{2} + \frac{1+3\varepsilon^2}{12} x^3 \right]$$

$$\delta^2 + \frac{\mathcal{S}}{3} = \frac{2-\mu}{6} + \frac{6-\mu}{6} \varepsilon^2 - \frac{6-\mu}{6} (1+\varepsilon^2) \left[\varepsilon x - \frac{1+3\varepsilon^2}{4} x^2 \right]$$

$$= a - bx + cx^2$$

$$\delta^3 + \frac{3}{4} \mathcal{S} \delta - \frac{\delta}{12} = \left(1 - \frac{3}{8} \mu \right) \varepsilon^3 + \frac{16-9\mu}{24} \varepsilon -$$

$$\frac{1+\varepsilon^2}{2} \left[\left(1 - \frac{3}{8} \mu \right) 3\varepsilon^2 + \frac{16-9\mu}{24} \right] x = f - gx$$

$$A = \delta^4 + \frac{6}{5} \mathcal{S} \delta^2 - \frac{1}{5} \delta^2 + \frac{3}{30} \mathcal{S}^2 - \frac{1}{60} \mathcal{S} =$$

$$\frac{1+\varepsilon^2}{2} \left(2\varepsilon^2 - \frac{6}{5} \varepsilon^2 \mu - \frac{17}{60} \mu + \frac{3(1+\varepsilon^2)}{40} \mu^2 \right) + \frac{2}{15}$$

Indem ich nun die Werthe dieser Coëfficienten in die Reihe für $\int_0^x \frac{dz}{(1-\zeta)^2}$ einsetze, und zugleich z durch x und y ausdrücke, erhalte ich:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dz}{(1-\zeta)^2} &= x-y+(x^2-2xy)\left[\varepsilon-\frac{1+\varepsilon^2}{2}\left(x-\frac{\varepsilon x^2}{2}+\frac{1+3\varepsilon^2}{12}x^2\right)\right] \\ &\quad + (x^3-3x^2y)(a-bx+cx^2)+x^4(f-gx)+Ax^5 \\ &= x+\varepsilon x^2+x^3\left(-\frac{1+\varepsilon^2}{2}+a\right)+x^4\left(\frac{\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{4}-b+f\right) \\ &\quad +x^5\left(-\frac{(1+\varepsilon^2)(1+3\varepsilon^2)}{24}+c-g+A\right) \\ &\quad -y\{1+2\varepsilon x+x^2(-1+\varepsilon^2)+3a\} \\ &= x+\varepsilon x^2-\frac{x^3}{6}(1-3\varepsilon^2+(1+\varepsilon^2)\mu)+A_4x^4+A_5x^5 \\ &\quad -y\cdot\left\{1+2\varepsilon x+x^2\left(2\varepsilon^2-\frac{1+\varepsilon^2}{2}\mu\right)\right\}. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{4}-\frac{6-\mu}{6}\varepsilon(1+\varepsilon^2)+\frac{8-3\mu}{8}\varepsilon^3+\frac{16-9\mu}{24}\varepsilon \\ &= \frac{\varepsilon}{12}\left(-1+3\varepsilon^2-\frac{5(1+\varepsilon^2)\mu}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_5 &= -\frac{(1+\varepsilon^2)(1+3\varepsilon^2)}{24}+\frac{(6-\mu)(1+\varepsilon^2)(1+3\varepsilon^2)}{24}- \\ &\quad \frac{1+\varepsilon^2}{2}\left(\frac{24-9\mu}{8}\varepsilon^2+\frac{16-9\mu}{24}\right)+A \\ &= -\frac{1+\varepsilon^2}{8}\left(1+7\varepsilon^2-\frac{7}{6}\mu-\frac{7}{2}\mu\varepsilon^2\right)+A \\ &= \frac{1+\varepsilon^2}{8}\left(-1+\varepsilon^2+\frac{\mu}{30}-\frac{13\mu\varepsilon^2}{10}+\frac{3\mu^2(1+\varepsilon^2)}{10}\right)+\frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Nachdem der Ausdruck $\int_0^x \frac{dz}{(1-\zeta)^2}$ als Function von x und y bereits entwickelt worden ist, kehre ich zurück zur Gleichung

$$\int_0^v \frac{dz}{(1-\zeta)^2} = \int_0^v \frac{dv}{(1-\zeta)^2} = \cos^2 \frac{v}{2} \int_0^{v_0} \frac{dv}{\cos^2 \frac{v}{2}}$$

und werde nun auch den letzten Theil der Doppelgleichung als Function von x darstellen.

$$\begin{aligned} & \int_0^{v_0} \frac{dv}{\cos^2 \frac{v}{2}} \\ &= 2 \left\{ \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \left(\operatorname{tg}^3 \frac{v_0}{2} - \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right) \right\} \\ &= 2 \left\{ \left(\operatorname{tg} \frac{v_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\operatorname{tg} \frac{v_0}{2} - \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right)^3 \right\} \\ &= \frac{\sin(v_0 - v)}{\cos^2 \frac{v_0}{2} \cos^2 \frac{v}{2}} + \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \frac{v_0 - v}{2}}{\cos^3 \frac{v_0}{2} \cos^3 \frac{v}{2}} \end{aligned}$$

$$v_0 - v = x; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0 = \epsilon$$

$$\int_0^x \frac{dz}{(1-\zeta)^2} = \cos^2 \frac{v}{2} \int_0^{v_0} \frac{dv}{\cos^2 \frac{v}{2}} =$$

$$\sin x \cdot \frac{\cos^2 \frac{v}{2}}{\cos^2 \frac{v_0}{2}} + \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{v_0}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{v}{2}}{\cos \frac{v_0}{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{v}{2}}{\cos \frac{v_0}{2}} &= \cos \frac{v_0 - v}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \operatorname{tg} \frac{v_0 - v}{2} \right) = \cos \frac{x}{2} + \epsilon \sin \frac{x}{2} \\ &= 1 + \frac{\epsilon x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{\epsilon x^3}{48} + \frac{x^4}{384} \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^2 \frac{v}{2}}{\cos^2 \frac{v_0}{2}} = 1 + \epsilon x + \frac{\epsilon^2 - 1}{4} x^2 - \frac{\epsilon x^3}{6} - \frac{\epsilon^2 - 1}{48} x^4$$

$$\sin x \cdot \frac{\cos^2 \frac{v}{2}}{\cos^2 \frac{v_0}{2}} = x + \varepsilon x^2 + \frac{3\varepsilon^2 - 5}{12} x^3 - \frac{\varepsilon x^4}{3} - \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{16} - \frac{1}{120} \right) x^5$$

$$\frac{2}{3} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x \cos \frac{v}{2}}{\cos^2 \frac{v_0}{2} \cos \frac{v_0}{2}} = \frac{1 + \varepsilon^2}{12} \left(x^3 + \frac{\varepsilon x^4}{2} - \frac{x^5}{4} \right)$$

Durch Summirung der beiden Ausdrücke ergibt sich:

$$\int_0^x \frac{dz}{(1-z)^2} = x + \varepsilon x^2 + \frac{\varepsilon^2 - 1}{3} x^3 + \frac{\varepsilon(\varepsilon^2 - 7)}{24} x^4 + \left(\frac{1}{120} - \frac{\varepsilon^2 - 1}{16} - \frac{1 + \varepsilon^2}{48} \right) x^5$$

Durch Vergleichung dieser Reihe mit der für $\int_0^x \frac{dz}{(1-z)^2}$ früher abgeleiteten erhält man:

$$y \left\{ 1 + 2\varepsilon x + x^2 \left(2\varepsilon^2 - \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \mu \right) \right\} = \frac{x^3}{6} (-1 + 3\varepsilon^2 - (1 + \varepsilon^2)\mu - 2\varepsilon^2 + 2) + x^4 \left(A_4 - \frac{\varepsilon(\varepsilon^2 - 7)}{24} \right) + x^5 \left(A_5 - \frac{1}{120} + \frac{\varepsilon^2 - 1}{16} + \frac{1 + \varepsilon^2}{48} \right)$$

Die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x reduciren sich auf:

$$A_4 - \frac{\varepsilon(\varepsilon^2 - 7)}{24} = \frac{5\varepsilon(1 + \varepsilon^2)(1 - \mu)}{24}$$

$$A_5 - \frac{1}{120} + \frac{\varepsilon^2 - 1}{16} + \frac{1 + \varepsilon^2}{48}$$

$$= \frac{1 + \varepsilon^2}{8} \left(-1 + \varepsilon^2 + \frac{\mu}{30} - \frac{13\mu\varepsilon^2}{10} + \frac{3\mu^2(1 + \varepsilon^2)}{10} + \frac{1}{6} \right) + \frac{2}{15} - \frac{1}{120} + \frac{\varepsilon^2 - 1}{16}$$

$$= \frac{1 + \varepsilon^2}{8} \left(-\frac{5}{6} + \varepsilon^2 + \frac{\mu}{30} - \frac{13\mu\varepsilon^2}{10} + \frac{3\mu^2(1 + \varepsilon^2)}{10} \right) + \frac{1 + \varepsilon^2}{16}$$

$$= \frac{1 + \varepsilon^2}{240} (30\varepsilon^2 - 39\varepsilon^2\mu + 9\varepsilon^2\mu^2 + 9\mu^2 - 10 + \mu)$$

$$= \frac{(1 + \varepsilon^2)(1 - \mu)}{240} (30\varepsilon^2 - 10 - 9\mu(1 + \varepsilon^2))$$

Nachdem nun die Coëfficienten auf die einfachste Form gebracht worden sind, lautet die Gleichung zwischen x und y

$$y\left[1+2\epsilon x+x^2\left(2\epsilon^2-\frac{1+\epsilon^2}{2}\mu\right)\right]=\frac{(1+\epsilon^2)(1-\mu)}{6}\left[x^3+\frac{5\epsilon}{4}x^4+\frac{30\epsilon^2-10-9\mu(1+\epsilon^2)}{40}x^5\right].$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass wenn x als eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird, y eine solche dritter Ordnung ist.

Die nächste Operation wird darin bestehen, x in eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe zu entwickeln, wodurch man v_0-v als Function von v_0-w erhält. Indem ich dann den hieraus für v resultirenden Werth in die Gleichung

$$\rho = \frac{2q}{\cos w + (1-\mu)\cos(w-v) + \mu}$$

einsetze, erhalte ich unmittelbar die Gleichung der Curve, welche die Schweifaxe darstellt für die Zeit, in der die Anomalie des Kometen den Werth v_0 besitzt. Um die erste der angedeuteten Operationen auszuführen, empfiehlt es sich, statt des y eine neue Grösse, die ich mit u bezeichnen will, in die Rechnung einzuführen, in der Weise, dass

$$u^3 = \frac{6y}{(1+\epsilon^2)(1-\mu)}.$$

u erhält hierdurch dieselbe Ordnung, welche x besitzt, mit welchem es durch die Gleichung

$$0 = x^3 + \frac{5\epsilon}{4}x^4 + \frac{30\epsilon^2-10-9\mu(1+\epsilon^2)}{40}x^5 - u^3\left[1+2\epsilon x+x^2\left(2\epsilon^2-\frac{1+\epsilon^2}{2}\mu\right)\right]$$

verknüpft ist. Diese Gleichung lässt erkennen, dass x in eine Reihe entwickelt werden kann, von dem Baue:

$$x = u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots$$

Die Coëfficienten höherer Potenzen von u können aus der vorangehenden Gleichung nicht mehr vollständig bestimmt werden, weshalb ich deren Aufführung unterlasse.

Nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten erhält man:

$$a_2 = \frac{\epsilon}{4}; \quad a_3 = \frac{5\epsilon^2 + 4}{48} - \frac{11(1 + \epsilon^2)}{120} \mu.$$

Der Ausdruck für x lautet sonach

$$x = u + \frac{\epsilon}{4} u^2 + \left(\frac{5\epsilon^2 + 4}{48} - \frac{11(1 + \epsilon^2)}{120} \mu \right) u^3.$$

Diesen Werth von x werde ich jetzt in die Gleichung

$$\frac{2q}{\rho} = \cos w + (1 - \mu) \cos(w - v) + \mu$$

substituieren.

$$\begin{aligned} \cos(w - v) &= \cos(x - y) = 1 - \frac{x^2 - 2xy}{2} + \frac{y^4}{24} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{xy}{12} + \frac{y^4}{24} - \frac{(1 + \epsilon^2)(1 - \mu)}{6} xu^3. \end{aligned}$$

Indem ich x durch u ausdrücke, erhalte ich nach gehöriger Reduction:

$$\cos(w - v) = 1 - \frac{u^2}{2} - \frac{\epsilon}{4} u^3 + \left(\frac{1}{8} + \frac{\epsilon^2}{32} - \frac{3(1 + \epsilon^2)}{40} \mu \right) u^4.$$

Durch Annahme der Bezeichnung

$$m = \frac{1}{4} + \frac{\epsilon^2}{16} - \frac{3(1 + \epsilon^2)}{20} \mu$$

geht obige Gleichung über in

$$\cos(w - v) = 1 - \frac{u^2}{2} - \frac{\epsilon}{4} u^3 + \frac{1}{2} m u^4$$

und dem zufolge

$$\frac{2q}{\rho} = \cos w + \mu + (1 - \mu) \left(1 - \frac{u^2}{2} - \frac{\epsilon}{4} u^3 + \frac{1}{2} m u^4 \right)$$

oder

$$\frac{q}{\rho} = \cos^2 \frac{w}{2} - (1 - \mu) \frac{u^2}{4} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} u - m u^2 \right),$$

worin

$$\epsilon = \operatorname{tg} \frac{v_0}{2}; u^2 = \frac{6 \cos^2 \frac{v_0}{2}}{1-\mu} (v_0 - w)$$

Diese Relation ist eine Näherungsformel der Gleichung der Schweifaxe, bezogen auf ein System von Polarcordinaten, dessen Anfangspunkt im Sonnencentrum gelegen ist, und dessen Axe gegen den Perihelpunkt der Kometenbahn gerichtet ist. u ist in Theilen des Radius auszudrücken. Ist die Wirkung der Sonne auf die Schweiftheilchen eine abstossende, so wird $1-\mu > 1$ und ist daher μ negativ zu nehmen.

Zur Vorbereitung des Überganges von dem Polarcordinatensysteme zu dem schon früher erwähnten rechtwinkligen $[\xi, \eta]$, dessen Ursprung im Mittelpunkte des Kometenkopfes liegt, und dessen Abscissenaxe mit der Verlängerung des Radiusvectors des Kometen zusammenfällt, werde ich die Polargleichung der Curve einer kleinen Transformation unterwerfen, indem ich die Gleichung

$$\frac{q}{r_0} = \cos^2 \frac{v_0}{2}$$

hievon in Abzug bringe.

$$\frac{q}{r_0} - \frac{q}{\rho} = \cos^2 \frac{v_0}{2} - \cos^2 \frac{w}{2} + \frac{1-\mu}{4} u^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} u - mu^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{v_0}{2} - \cos^2 \frac{w}{2} &= -\sin \frac{1}{2} (v_0 - w) \sin \frac{1}{2} (v_0 + w) = -\frac{1}{2} \sin v_0 \cdot y \\ &= -\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} y = -\frac{\epsilon(1-\mu)}{6} u^3 \end{aligned}$$

Hiebei sind wieder schon Glieder vernachlässigt, welche den Factor y^2 erhielten. Dadurch erhält man:

$$\frac{q}{r_0} - \frac{q}{\rho} = \frac{1-\mu}{4} u^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{6} u - mu^2 \right)$$

oder

$$\frac{4q}{1-\mu} \cdot \frac{\rho - r_0}{r_0 \rho} = u^2 - \frac{\epsilon}{6} u^3 - mu^4.$$

Hieraus ersieht man, dass das Vorzeichen der Anomalie des Kometen auf die Gestalt der Schweifaxe einen nur geringen Einfluss ausübt, da nur das zweite Glied der Gleichung, dessen Coëfficient $\frac{\varepsilon}{6}$ ist, hievon abhängt, und der absolute Werth von v_0 zur Zeit einer bedeutenden Schweifentwicklung ohnehin gewöhnlich klein ist.

Den beabsichtigten Übergang zum neuen Coordinatensystem vermitteln die Formeln

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos(v_0 - w) - r_0 \\ \eta &= \rho \sin(v_0 - w).\end{aligned}$$

Indem ich wieder y^2 als verschwindend klein annehme, bekomme ich

$$\begin{aligned}\xi &= \rho - r_0 \\ \eta &= \rho \cdot \frac{(1 + \varepsilon^2)(1 - \mu)}{6} u^2 = \frac{r_0 \rho (1 - \mu)}{6q} u^2 \\ \frac{\eta}{\xi} &= \frac{1 - \mu}{6q} \cdot \frac{r_0 \rho}{\rho - r_0} \cdot u^2 = \frac{(1 - \mu)}{6q} \frac{r_0 (\xi + r_0)}{\xi} u^2.\end{aligned}$$

Den $\frac{r_0 \rho}{\rho - r_0}$ entsprechenden Ausdruck aus der Curvengleichung entnehmend, erhalte ich

$$\frac{3}{2} \frac{\eta}{\xi} = \frac{u}{1 - \frac{\varepsilon}{6} u - m u^2}.$$

Aus der früheren Gleichung folgt

$$\frac{3}{2} \frac{\eta}{\xi} = \frac{(1 - \mu) r_0 (\xi + r_0)}{4q \xi} u^2.$$

Durch Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen erhalte man die Gleichung der Curve in der Form $f(\xi, \eta) = 0$.

Wenn es sich darum handelt, aus der Beobachtung eines in der Schweifaxe gelegenen Punktes den entsprechenden Werth von $1 - \mu$ zu bestimmen, so dürfen die Grössen ξ , η , r_0 , q als bekannt vorausgesetzt werden. $\frac{\eta}{\xi}$ ist die Tangente des gewöhn-

lich mit φ bezeichneten Winkels, welchen die den Kometenkern und den Punkt ξ, η verbindende Gerade mit der Verlängerung des Radiusvectors einschliesst.

Aus der ersten obiger Gleichungen folgt mit Rücksichtnahme auf:

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \varphi$$

$$\frac{3}{2} \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{4} \epsilon \operatorname{tg} \varphi u - \frac{3}{2} m \operatorname{tg} \varphi \cdot u^2 = u$$

Durch die Bezeichnung:

$$\operatorname{cotg} \varphi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \epsilon \operatorname{tg} \varphi \right) = C$$

kann ich vorstehende Gleichung auf die Form bringen:

$$u^2 + \frac{2C}{m} u = \frac{1}{m}$$

woraus folgt:

$$u = \frac{C}{m} \left(\sqrt{1 + \frac{m}{C^2}} - 1 \right)$$

Die Substitution $\frac{\sqrt{m}}{C} = \operatorname{tg} \Theta$ ergibt

$$u = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Theta}{\sqrt{m}}$$

Die zweite der Eliminationsgleichungen lässt sich auch schreiben:

$$1 - \mu = \frac{6q\xi \operatorname{tg} \varphi}{r_0(\xi + r_0)} \cdot \frac{1}{u^3}$$

Nach Einführung der Bezeichnung

$$\frac{6q\xi \operatorname{tg} \varphi}{r_0(\xi + r_0)} = B$$

folgt aus beiden vorangehenden Gleichungen

$$1 - \mu = B \left(\sqrt{m} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \Theta \right)^3 \quad 3)$$

B und C sind für jede einzelne Beobachtung direct berechenbar. Da aber m eine Function von μ ist, kann der Werth von $1-\mu$ nur auf indirectem Wege bestimmt werden.

Sehr vereinfacht wird diese Bestimmung dadurch, dass man die Werthe der Function

$$\log \sqrt{m} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{10} - \frac{7}{80} \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} + \frac{3}{20} \cdot \frac{1-\mu}{\cos^2 \frac{v_0}{2}} \right)$$

in eine Tafel bringt, deren Argumente $\frac{v_0}{2}$ und $\log(1-\mu)$ sind.

Wie aus der Form obigen Ausdruckes zu ersehen ist, sind die Werthe von $\log \sqrt{m}$ vom Vorzeichen der Anomalie unabhängig. Ich habe eine solche Tafel in der Ausdehnung berechnet, wie sie bei Kometenschweiften vom zweiten Typus in der Mehrheit der Fälle genügen dürfte, und werde selbe am Schlusse dieser Abhandlung aufführen.

Die Bestimmung von $1-\mu$ aus ξ , η , φ geschieht dann folgendermassen. Zuerst berechnet man

$$B = \frac{6q\eta}{r_0(\xi+r_0)} \quad \left. \begin{array}{l} v_0 = \text{Anomalie} \\ r_0 = \text{Radiusvect.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{d. Kometen zur} \\ \text{Zeit d. Beob.} \end{array}$$

$$C = \operatorname{cotg} \varphi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \operatorname{tg} \varphi \right)$$

Hierauf nimmt man einen gewissen Werth von $\log(1-\mu)$ an und schlägt den zugehörigen Werth von $\log \sqrt{m}$ in der Tafel auf, erhält dann

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\sqrt{m}}{C}$$

und bestimmt mit dem also gefundenen Werthe von Θ den Ausdruck

$$B \left(\sqrt{m} \operatorname{cotg} \frac{\Theta}{2} \right)^3;$$

erweist sich der auf diese Art gefundene Werth vorstehenden Ausdruckes von dem angenommenen Werthe von $\log(1-\mu)$ verschieden, so ist letztere Grösse so lange abzuändern, bis die Gleichung

$$1-\mu = B \left(\sqrt{m} \cotg \frac{\Theta}{2} \right)^3$$

erfüllt erscheint. Aus

$$d \log \left[B \left(\sqrt{m} \cotg \frac{\Theta}{2} \right)^3 \right] = \frac{9}{20 \cdot \lambda} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Theta}{m \cos^2 \frac{v_0}{2}} d(1-\mu)$$

folgt, dass der Werth von $B \left(\sqrt{m} \cotg \frac{1}{2} \Theta \right)^3$ sich im Vergleiche zu $1-\mu$ nur sehr langsam ändert, so lange Θ kleine Werthe erhält, welcher Fall immer eintritt, wenn $1-\mu$ die Einheit nicht viel überschreitet und $C \geq 1$ wird.

Insoweit Grössen von der Ordnung $(w-v)^6$ und $(v_0-w)^2$ schon vernachlässigt werden dürfen, ist die Formel (3) in der That eine Gleichung.

Für sehr kleine Werthe von u kann man in der abgeleiteten Näherungsformel zur Bestimmung der Gestalt der Schweifaxe

$$\frac{3}{2} \frac{\eta}{\xi} = \frac{u}{1 - \frac{\epsilon}{6} u - m u^2} = u + \frac{\epsilon}{6} u^2 + \dots$$

die höheren Potenzen von u gegen die erste vernachlässigen, und erhält sonach

$$\frac{3}{2} \frac{\eta}{\xi} = u.$$

Da ξ eine Grösse von derselben Ordnung ist, wie u^2 , so kann ich in diesem Falle den Ausdruck $\frac{\xi}{\xi+r_0}$ ersetzen durch $\frac{\xi}{r_0}$, wodurch die aus der Coordinatentransformation resultirende Gleichung sich vereinfacht auf:

$$\frac{3}{2} \frac{\eta}{\xi} = \frac{(1-\mu)r_0^2}{4q\xi} u^3.$$

Durch Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die Formel:

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\sqrt{q\xi}}{3r_0\sqrt{1-\mu}}.$$

Das ist die Bessel'sche Formel für den Fall, dass der Komet sich in einer Parabel bewegt, da dann $p=2q$ wird.

Aus den Schmidt'schen Beobachtungen, welche ich später anführen werde, hat Prof. Bredichin mit Hilfe der Schulhof'schen Elemente des Kometen

$$T = 1874 \text{ Juli } 8 \cdot 8566 \text{ m. Z. Greenwich,}$$

$$\pi = 271^\circ \quad 6' \quad 19''$$

$$\Omega = 118 \quad 44 \quad 25$$

$$i = 66 \quad 20 \quad 59$$

$$\log q = 9.82983$$

Bewegung direct

die nachfolgenden Werthe von ξ , η , r_0 berechnet, welche sich ausnahmslos auf 9^h m. Z. Greenw. der betreffenden Beobachtungstage beziehen. Die mit I bezeichnete Columne enthält die hieraus vermittelt der Bessel'schen Formel von Prof. Bredichin abgeleiteten Werthe von $1-\mu$. Columne II enthält die Werthe von $1-\mu$, welche ich aus denselben Daten vermittelt der Formel

$$1-\mu = B \left(\sqrt{m} \cotg \frac{1}{2} \Theta \right)^3$$

berechnet habe. Die mit $1-\mu$ überschriebene Columne enthält die Werthe, welche der strengen Formel

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg}(45^\circ + \psi) + \frac{2\lambda\sqrt{1-\mu}}{\mu} \cos \frac{v}{2} \left\{ k\sqrt{2}(1-\mu)\cos^2 \frac{v}{2} (M_0 - M) \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{p}{2q} [\sin w + (1-\mu) \sin(w-v)] \right\} = 0 \end{aligned}$$

entsprechen, die mit l bezeichnete Spalte gibt die scheinbare (von der Erde aus gesehene) Entfernung des beobachteten, in der Schweifaxe gelegenen Punktes vom Kerne des Kometen.

1874	$\log r_0$	$\log \xi$	$\log \eta$	l	I	II	$1-\mu$
Juni 1	0.0046	8.0860	7.3504	0.4	0.425	0.393	0.39
2	9.9986	8.4327	7.7125	1.0	0.904	0.846	0.85
3	9926	8.3663	7.5603	0.9	1.183	1.122	1.12
4	9866	7.4756	6.3310	0.1	0.744	0.721	0.72
5	9801	8.3038	7.5752	0.7	0.479	0.443	0.44
6	9742	8.4000	7.4743	1.0	2.415	2.345	2.35
7	9680	8.3715	7.5072	0.9	1.754	1.692	1.69
8	9618	8.4720	7.7293	1.2	1.300	1.245	1.25
9	95.6	7.6800	6.8934	0.2	0.264	0.250	0.25
10	9495	8.4710	7.6707	1.2	1.789	1.737	1.74
11	9434	8.1147	7.5433	0.5	0.282	0.265	0.27
12	9373	8.4923	7.9112	1.3	0.724	0.694	0.69
13	9312	8.3323	7.7232	1.0	0.587	0.560	0.56
14	9251	8.4803	7.8867	1.4	0.790	0.763	0.76
15	9190	8.2390	7.5671	0.8	0.668	0.643	0.64
16	9130	8.6579	7.9703	2.2	1.937	1.926	1.93
17	9070	8.4222	7.7844	1.4	0.920	0.899	0.90
18	9012	8.4937	7.9100	1.6	0.869	0.855	0.86
19	8956	8.5385	8.0936	1.8	0.521	0.520	0.52
20	8899	8.5012	7.8051	1.8	1.562	1.556	1.56
21	8843	8.4304	7.7761	1.6	1.123	1.117	1.12
22	8791	8.5061	7.8631	2.0	1.299	1.304	1.30
23	8740	8.4452	7.7927	1.8	1.209	1.212	1.21
24	8689	8.0814	7.4419	0.8	0.504	0.500	0.50
25	8640	8.4053	7.8473	1.7	0.747	0.758	0.76
26	8596	8.3704	7.7964	1.6	0.757	0.770	0.77
27	8554	8.5147	8.2271	2.4	0.288	0.319	0.32
28	8514	8.5392	8.0099	2.6	0.941	0.986	0.99
29	8475	8.6330	8.2661	3.5	0.565	0.623	0.62
30	8441	8.5012	8.0219	2.7	0.711	0.754	0.75
Juli 1	8411	8.5862	7.9754	3.4	1.605	1.693	1.69
2	8382	8.7058	8.2115	4.7	1.253	1.375	1.38
3	8358	8.5923	8.0555	3.8	1.187	1.278	1.28
4	8340	8.5481	8.0109	3.6	1.082	1.167	1.17
5	8323	8.5264	7.8725	3.5	1.904	2.019	2.02
6	8311	8.5051	7.9452	3.5	1.104	1.192	1.19
7	8302	8.5132	8.0672	3.8	0.668	0.748	0.75
8	8298	8.4496	7.9829	3.4	0.636	0.706	0.71
9	8299	8.5768	8.1383	4.8	0.749	0.855	0.86
10	8303	8.5521	8.0952	4.6	0.768	0.874	0.87
11	8314	8.5058	8.1492	4.4	0.433	0.518	0.52
12	8324	8.4220	7.9982	3.6	0.484	0.558	0.56
	8324	8.9099	8.6941	13.1	0.571	0.816	0.83
13	8340	8.2007	7.6582	2.0	0.499	0.547	0.55
		8.3550	7.9342	3.1	0.406	0.470	0.47
		8.4728	8.0752	4.2	0.479	0.565	0.57
		8.5556	8.2139	5.3	0.448	0.550	0.55
		8.9821	8.7751	16.4	0.643	0.955	0.96
14	8361	8.1753	7.5551	1.8	0.666	0.720	0.72
		8.3524	7.8047	2.8	0.717	0.796	0.80
		8.4755	7.9720	3.9	0.777	0.881	0.88
		8.5589	8.1164	5.0	0.711	0.834	0.83
		9.0577	8.9303	23.8	0.525	0.891	0.91

1874	$\log r_0$	$\log \xi$	$\log \eta$	l	I	II	$1-\mu$
15	9·8393	8·4810	8·0405	4·1	0·580	0·679	0·68
		8·3552	7·9167	3·0	0·490	0·499	0·50
		9·0785	9·0512	26·9	0·343	0·700	0·73
16	8441	9·0920	9·0106	28·2	0·443	0·839	0·87
		9·3180	9·2148	47·4	0·825	1·758	1·73
17	8475	9·1060	9·0367	32·2	0·426	0·838	0·87
		9·3435	9·4651	60·3	0·306	1·156	1·21
18	8514	9·2789	9·2726	55·9	0·467	1·172	1·21
		9·1941	9·1599	44·6	0·436	0·966	1·01
		9·0799	9·0505	33·2	0·328	0·690	0·73
		8·9324	8·8273	19·8	0·331	0·578	0·60

Ich habe die nach der strengen Formel berechneten Werthe von $1-\mu$ nur in Einheiten der zweiten Decimale gegeben, weil in der weithinaus grösseren Anzahl von Fällen, wo nämlich $l \leq 5^\circ$ ist, eine schärfere Berechnung der Repulsionskraft aus den Daten der Beobachtung entweder nicht möglich ist, oder wenn schon in einzelnen Fällen die dritte Decimalstelle auf einige Einheiten genau bestimmt werden kann, die Werthe in Spalte II auch der strengen Formel vollständig genügen. Beobachtungen von in der Axe des Schweifes gelegenen Punkten, für welche $5^\circ 3' < l < 13^\circ 1'$ fehlen. Für jene Beobachtungen, für welche $l > 13^\circ$ ist, werde ich die Differenz $1-\mu-\text{II}$ in Einheiten der dritten Decimale hier ansetzen.

1874	$1-\mu-\text{II}$	l	1874	$1-\mu-\text{II}$	l
Juli 12	+10	$13^\circ 1'$	Juli 17	+33	32·2
13	+4	16·4		+52	60·3
14	+21	23·8	18	+39	55·9
15	+34	26·9		+34	44·6
16	+32	28·2		+41	33·2
	-28	47·4		+23	19·8

Während also bei grösseren Schweifentwicklungen die Bessel'sche Formel wesentlich unrichtige Resultate liefern kann, ermöglicht die Formel

$$1-\mu = B \left(\sqrt{m} \cotg \frac{1}{2} \Theta \right)^3$$

die Auffindung eines schon sehr genäherten Werthes von $1-\mu$, und erleichtert hiedurch bedeutend die Anwendung der strengen Formel zur Berechnung der Repulsionskraft, oder macht sie ganz überflüssig. Das arithmetische Mittel sämmtlicher Werthe von $1-\mu$ ist 0·923, während die Mittel von I und II 0·805, resp. 0·918 sind.

Unter Zugrundelegung der Hypothese, dass die Schweifentwicklung des Kometen 1874 III durchwegs in Folge einer unveränderten Kraftwirkung der Sonne auf die Ausströmungsproducte des Kometen vor sich gegangen sei, die Verschiedenheit der aus den einzelnen Beobachtungen gerechneten Werthe von $1-\mu$ daher ihren Grund nur in Beobachtungsfehlern habe, ergeben die Schmidt'schen Beobachtungen für die Grösse der Repulsionskraft den Werth

$$1-\mu = 0\cdot923.$$

Prof. Bredichin hat auch eine Anwendung von seinen Formeln auf den Kometen 1874 III gemacht, indem er die Beobachtungen vom 16. Juli hiedurch darzustellen suchte. Sein Verfahren bestand darin, dass er nach Annahme eines bestimmten Werthes von $1-\mu$ sich einige Punkte der hyperbolischen Curve berechnete, mit deren Hilfe er sich die Curve mit genügender Genauigkeit ziehen konnte, und dann den Werth von $1-\mu$ so lange abänderte, bis die auf diese Weise gewonnene Curve mit der aus den durch Beobachtung gegebenen Werthen von ξ , η construirten möglichst gut übereinstimmte. Dieses Verfahren ergab $1-\mu = 1\cdot2$, einen Werth, welcher mit dem aus den zwei Beobachtungen vom 16. Juli abgeleiteten Mittel von $1-\mu$, das ist 1·3, ziemlich gut harmonirt.

Noch bevor ich die Näherungsformeln entwickelt hatte, durch welche die Berechnung der Repulsionskraft mit einer für die meisten Fälle ausreichenden Genauigkeit durchgeführt werden kann, unternahm ich den Versuch, die Schmidt'schen Beobachtungen unter der Annahme $1-\mu = 1$ darzustellen. Ich werde den hiebei eingeschlagenen Weg, sowie die Resultate der Rechnung hier mittheilen, weil ich glaube, dass man hieraus am besten ersehen kann, welchen Einfluss Beobachtungsfehler auf die gerechneten Werthe von $1-\mu$ auszuüben im Stande sind.

Die Formeln, welche in diesem Falle, wo $\mu = 0$ ist, die Bewegung des Theilchens bestimmen, sind:

$$\rho = \frac{q}{\cos\left(w - \frac{r}{2}\right) \cos \frac{r}{2}}$$

$$k\sqrt{2} \cos^2 \frac{v}{2} (M_0 - M) + \operatorname{tg} \frac{v}{2} - \operatorname{tg}\left(w - \frac{v}{2}\right) = 0.$$

Nach Annahme eines bestimmten Werthes für r , welcher dem Zeitpunkte der Lostrennung des Theilchens entspricht, erhalte ich hieraus die Werthe von w , ρ für den Moment, in welchem die Anomalie des Kometen v_0 ist.

Bezeichnen a , b , c , A' , B' , C' die von den Bahnelementen des Kometen abhängigen Constanten der Reduction auf den Äquator, so sind die Äquatorialcoordinaten des Theilchens in Bezug auf die Sonne

$$\begin{aligned} \rho \sin a \sin (A' + w) \\ \rho \sin b \sin (B' + w) \\ \rho \sin c \sin (C' + w), \end{aligned}$$

woraus mittelst der bekannten Sonnencoordinaten die geocentrische Rectascension und Declination des Ortes, welchen das Theilchen unter den gemachten Voraussetzungen einnimmt, abgeleitet werden können. Das Elementensystem, welches ich zu den diesbezüglichen Rechnungen benützte, war dasselbe, welches mir als Grundlage zur Bahnbestimmung des Kometen 1874 III (Sitzungsb. d. kais. Akad. d. Wiss. LXXXVI. Bd.) gedient hatte, und lautet:

$$T = 1874 \text{ Juli } 8 \cdot 9009 \text{ m. Z. Berlin}$$

$$\pi = 271^\circ \quad 5' \quad 55''$$

$$\varrho = 118 \quad 43 \quad 16 \quad \left. \vphantom{\varrho} \right\} \text{mittl. Äq. } 1874 \cdot 0$$

$$i = 66 \quad 22 \quad 15 \quad \left. \vphantom{i} \right\}$$

$$\log q = 9 \cdot 82961.$$

Da hiernach Rectascension und Declination eines Theilchens für eine gegebene Beobachtungszeit mittelst eines angenommenen

Werthes von r direct abgeleitet werden können, habe ich für jede einzelne Beobachtung, durch passende Annahmen über den Werth von v , mehrere Punkte der Schweifcurve berechnet, aus denen ich für jede durch Beobachtung gegebene Rectascension die den Formeln entsprechende Declination durch Interpolation finden konnte. Der Ausdruck „Schweifcurve“ möge sich im Folgenden auf die der Rechnung, „Schweifaxe“ auf die der Beobachtung entsprechende Mittellinie des Schweifes beziehen. Ich werde mich folgender Bezeichnungen bedienen:

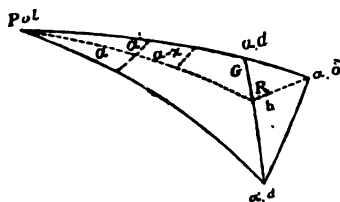
α = Rectasc. } des beobachteten, in der Schweifaxe gelegenen
 δ = Declin. } Punktes.

d = Declin. des Punktes der Schweifcurve, dessen Rect. = α ist.

α' = Rectasc. } eines benachbarten Punktes dieser Curve.
 d' = Declin. }

h = scheinbare, kürzeste Entfernung des beobachteten Punktes von der geocentrischen Projection der Schweifcurve auf die Himmelskugel. h erhält dasselbe Zeichen wie die Differenz $d - \delta$, und erscheint sonach positiv, wenn der beobachtete Punkt südlich von der Schweifcurve liegt.

Zur Veranschaulichung der nöthigen Rechnungen diene folgende Zeichnung, in welcher die einzelnen Linien Theile grösster Kreise darstellen. Der Winkel am Pole ($\alpha - \alpha'$), welcher in meinen Rechnungen höchstens 2 Grade beträgt, erscheint der Deutlichkeit der Figur halber stark vergrössert.



$$\operatorname{tg} G = \frac{\sin(\alpha - \alpha') \cos d'}{\sin d' \cos d - \cos d' \sin d \cos(\alpha - \alpha')}$$

oder annähernd

$$\operatorname{tg} G = \frac{\sin(\alpha - \alpha') \cos d'}{\sin(d' - d)}$$

$$h = (d - \delta) \sin G.$$

Bei der Kleinheit der scheinbaren Entfernung der Punkte α , d und α' , d' kann das zwischen ihnen gelegene Stück der Schweifcurve als Theil eines grössten Kreises aufgefasst werden. Der Durchschnittspunkt dieses Kreises mit der Linie h ist der Punkt der Schweifcurve, welcher dem beobachteten Punkte der Schweifaxe scheinbar am nächsten liegt. Sind x , y Rectasc. und Declin. des Punktes, so hat man

$$\sin(\alpha - x) = - \frac{\operatorname{tg} h \cos G}{\cos y}$$

Ich habe die Grössen α' , d' stets so wählen können, dass die Näherungsformel

$$\alpha - x = - \frac{h}{15} \frac{\cos G}{\cos \frac{d+d'}{2}}$$

hinreichende Genauigkeit bot. Da die Grösse h im Bogenmaasse ausgedrückt wird, erscheint hieraus der Winkel $\alpha - x$ im entsprechenden Zeitmaasse gegeben. Aus dem gefundenen Werthe von x lässt sich sodann durch Interpolation der Werth von v ermitteln, bei welchem das Theilchen den Kopf des Kometen verlassen haben müsste, um zur gegebenen Zeit im Punkte x , y sich befinden zu können.

Ich lasse nun die Resultate der Rechnung folgen mit dem Bemerkten, dass sich die Rectasc. und Declin. auf das Äquinox 1874.0 beziehen.

l bedeutet wieder die scheinbare Entfernung des beobachteten Punktes vom Kerne des Kometen. Die Zeitangaben beziehen sich auf mittlere Berliner Zeit.

1874	α	δ	d	α'	d'	v_0	$v_0 - v$	l	h
Juni 1·314	6° 49' 1	69° 13'	69° 14'	6° 50' 0	69° 18'	-70° 28'	10° 12'	0° 25'	+ 1'
2·334	6 55·9	69 33	69 37	6 54·4	69 31	69 18	15 46	0 59	+ 3
3·353	6 55·9	69 33	69 33	6 58·4	69 42	68 7	14 49	0 52	+ 0
4·335	6 50·9	69 5	69 4	6 51·5	69 8	66 56	5 16	0 6	- 0
5·354	6 57·9	69 29	69 32	6 57·3	69 29	65 41	13 40	0 43	+ 3
6·402	7 0·9	69 46	69 39	7 2·3	69 45	64 21	15 54	0 59	- 5
7·340	7 2·1	69 43	69 39	7 4·0	69 47	63 7	15 15	0 55	- 3
8·410	7 6·1	69 53	69 50	7 7·3	69 55	61 41	17 30	1 11	- 2
9·310	7 6·1	69 50	69 45	7 7·7	69 52	60 26	16 31	1 2	- 4
9·330	6 59·8	69 11	69 12	6 58·6	69 4	60 25	7 24	0 12	+ 0
10·310	7 9·6	69 58	69 54	7 11·1	70 0	59 1	18 6	1 15	- 3
11·420	7 6·3	69 25	69 29	7 7·1	69 33	57 24	12 9	0 33	+ 3
11·420	7 12·1	69 58	69 58	7 11·9	69 57	57 24	18 28	1 18	- 0
12·411	7 14·3	69 58	70 0	7 13·2	69 56	55 54	18 46	1 20	+ 1
13·407	7 12·8	69 44	69 45	7 12·2	69 42	54 22	16 4	0 59	+ 1
14·340	7 17·6	69 58	70 0	7 18·9	70 6	52 52	18 57	1 22	+ 1
15·340	7 15·0	69 33	69 36	7 15·6	69 39	51 14	14 47	0 50	+ 2
16·347	7 26·9	70 34	70 25	7 28·6	70 32	49 30	24 0	2 13	- 7
17·406	7 22·0	69 51	69 50	7 22·8	69 55	47 42	18 44	1 21	- 1
18·431	7 26·0	69 58	69 59	7 25·5	69 56	45 53	20 27	1 37	+ 1
19·437	7 30·0	69 58	70 8	7 26·9	69 51	44 2	21 41	1 50	+ 7
20·452	7 29·7	69 59	69 52	7 31·0	69 59	42 8	21 26	1 49	- 5
20·452	7 34·0	70 30	70 15	7 35·4	70 22	42 8	24 57	2 27	- 11
21·470	7 30·0	69 38	69 37	7 28·9	69 30	40 10	19 54	1 34	- 1
22·522	7 34·0	69 47	69 43	7 37·0	70 1	38 5	22 1	1 57	- 3
23·412	7 33·9	69 27	69 25	7 33·0	69 18	36 17	20 40	1 45	- 1
23·537	7 31·0	68 58	69 1	7 30·5	68 57	36 2	17 13	1 13	+ 2
24·383	7 38·0	69 33	69 31	7 36·9	69 24	34 16	22 45	2 8	- 1
24·550	7 30·0	68 25	68 27	7 30·6	68 32	33 55	14 6	0 49	+ 1
25·342	7 36·9	68 57	69 1	7 36·0	68 55	32 15	20 8	1 42	+ 2
26·550	7 37·9	68 32	68 37	7 37·4	68 32	29 37	19 30	1 37	+ 3
27·384	7 45·9	68 47	69 13	7 43·0	68 52	27 47	23 39	2 24	+ 16
28·342	7 45·9	68 45	68 47	7 47·1	68 56	25 38	24 25	2 38	+ 1
29·334	7 53·4	68 57	69 9	7 51·9	69 0	23 22	27 52	3 28	+ 8
30·338	7 48·4	67 57	68 0	7 47·5	67 53	21 1	24 24	2 45	+ 2
Juli 1·351	7 51·4	68 1	67 49	7 55·0	68 17	18 37	26 51	3 26	- 7
1·351	8 6·0	69 57	69 30	8 9·8	69 52	18 37	34 52	5 46	- 18
2·347	7 59·9	68 27	68 16	8 2·2	68 33	16 14	31 6	4 43	- 6
2·347	7 50·4	66 57	66 57	7 53·3	67 24	16 14	24 39	2 59	- 0
3·343	7 54·8	66 57	66 54	7 56·3	67 6	13 49	27 28	3 48	- 2
4·360	7 53·8	65 57	65 52	7 54·7	66 1	11 20	26 18	3 35	- 3
5·343	7 52·8	64 57	64 45	7 54·5	65 3	8 54	25 39	3 32	- 6
6·343	7 53·7	63 57	63 51	7 53·1	63 43	6 25	25 24	3 31	- 3
7·367	7 55·7	62 57	63 3	7 54·3	62 44	3 51	26 5	3 49	+ 3
8·574	7 54·2	60 57	61 3	7 53·6	60 55	- 0 49	24 25	3 23	+ 3
9·347	7 58·7	60 57	60 59	7 59·9	61 17	+ 1 7	28 11	4 45	+ 1
10·406	7 57·6	58 57	59 1	7 56·8	58 48	3 47	27 16	4 35	+ 2
11·344	7 57·9	56 57	57 19	7 59·8	57 52	6 7	26 44	4 26	+ 9
11·394	7 59·5	56 57	57 16	8 0·7	57 36	6 45	28 10	5 1	+ 8
12·341	7 54·8	53 57	54 13	7 56·7	54 52	8 36	24 1	3 35	+ 6

1874	α	δ	d	α'	d'	v_0	$v_0 - v$	l	h
Juli 12-397	8° 31' 161° 56	62° 21'	8° 29' 062° 1'	+ 8° 45'	42° 51'	13° 5'	+ 15'		
13-344	7 50·9 49 57 50 6	7 57 9 52 35	11 5	18 5	1 59	+ 4			
	7 53·8 50 57 51 19	7 57·2 52 35		22 13	3 5	+ 8			
	7 56·4 51 57 52 17	7 51·0 50 9		25 30	4 10	+ 8			
	7 59·6 52 57 53 23	7 53·6 51 14		28 15	5 17	+ 11			
	8 43·1 62 26 62 28	8 53·0 63 47		46 49	16 22	+ 1			
14-344	7 50·6 46 57 47 0	7 55·5 49 13	13 32	17 26	1 47	+ 1			
	7 52·7 47 57 48 0	7 57·4 49 57		21 32	2 50	+ 1			
	7 55·0 48 57 48 59	7 51·5 47 25		24 44	3 55	+ 1			
	7 57·7 49 57 50 4	7 52·6 47 57		27 37	5 0	+ 3			
	9 11·0 63 52 64 7	9 14·9 64 29		52 38	23 48	+ 11			
15-345	7 53·7 44 57 45 13	7 55·8 46 10	15 58	22 24	3 1	+ 6			
	7 55·7 45 57 46 8	7 52·9 44 51		25 30	4 5	+ 4			
	9 37·5 63 55 64 49	9 29·2 64 7		56 35	26 53	+ 43			
16-345	9 31·4 61 55 62 19	9 37·5 62 51	18 22	56 22	28 10	+ 19			
	12 28·1 70 29 68 7	12 33·0 68 3		76 14	47 22	- 140			
17-374	9 41·4 60 25 60 48	9 37·8 60 27	20 48	58 4	32 11	+ 18			
	14 1·0 64 58 62 39	13 56·3 63 21			60 18	- 84			
18-399	8 41·3 47 6 48 13	8 34·6 46 40	23 12	48 6	19 49	+ 40			
	9 41·3 56 55 57 47	9 46·3 58 20		58 14	33 13	+ 40			
	10 57·1 63 24 63 20	11 2·3 63 33		66 16	44 35	- 4			
	12 40·8 65 54 65 2	12 34·8 65 6		76 0	55 53	- 52			
20-346	8 41·2 39 8 38 3	8 44·0 38 46	27 37	50 35	21 14	- 40			
	9 21·3 46 55 46 27	9 27·0 47 24		57 4	31 53	- 20			
	10 1·2 52 24 52 7	9 52·9 51 8		61 33	40 20	- 14			
	10 41·2 55 24 55 54	10 35·3 55 27		64 59	46 53	+ 26			
	11 21·1 57 24 58 20	11 18·1 58 12		68 11	52 43	+ 53			
	12 1·0 58 6 59 47	11 55·8 59 38		71 19	58 1	+ 98			
	12 40·9 58 24 60 21	12 37·1 60 20		74 55	63 15	+ 117			
21-346	9 21·2 39 10 39 8	9 17·2 39 11	29 50	57 6	30 38	+ 34			
	10 1·2 46 4 46 19	9 56·2 45 38		61 45	40 42	+ 12			
	10 41·2 50 34 50 47	10 35·1 50 12		65 17	48 42	+ 11			
	11 21·2 53 4 53 48	11 26·3 54 6		68 19	55 22	+ 41			
	12 1·0 54 24 55 41	12 6·2 55 52		71 17	61 22	+ 75			
	12 31·0 55 24 56 30	12 25·4 56 23		73 42	65 47	+ 65			
22-346	9 21·2 32 5 31 31	9 18·5 30 58	31 59	58 0	29 56	- 25			
	10 1·2 38 54 38 30	9 59·1 38 11		62 16	40 32	- 19			
	10 41·1 44 24 43 43	10 46·7 44 19		65 41	49 47	- 35			
	11 21·0 48 6 47 27	11 17·3 47 9		68 36	57 36	- 35			
	12 1 0 50 54 50 1	11 55·4 49 45		71 28	64 38	- 50			

Wenn die unter der Annahme $1-\mu = 1$ nach gegebenem Verfahren abgeleitete Schweifcurve als die wahre Axe des Kometenschweifes aufgefasst werden dürfte, könnte man die Grösse h den Beobachtungsfehler nennen. Eine Zusammenstellung der denselben Beobachtungen entsprechenden Werthe von h , und der auf früherem Wege abgeleiteten Grösse $1-\mu$ liesse sonach

die Grösse der durch Beobachtungsfehler hervorgerufenen Änderungen in den Werthen von $1-\mu$ genau erkennen, wenn zur Bestimmung von h und $1-\mu$ dasselbe Elementensystem des Kometen angenommen worden wäre. Wenngleich nun letzteres strenge genommen nicht der Fall ist, und auch die Werthe von h in vielen Fällen die für Beobachtungsfehler zulässigen Grenzen überschreiten, so kann man sich trotzdem aus einer oberflächlichen Vergleichung ein Urtheil bilden über die Genauigkeit, welche in der Bestimmung der Werthe von $1-\mu$ anzustreben ist. Die Grenze des wahrscheinlichen Fehlers einer Beobachtung erweitert sich naturgemäss mit der Entfernung des beobachteten Punktes vom Kerne des Kometen. Wenn man in den Fällen, wo $l \leq 5^\circ$ ist, die Unsicherheit der Beobachtung auf nur 2' schätzt, so kann man ersehen, dass es vollkommen ausreichend ist, die Grösse $1-\mu$ nur in Einheiten der ersten Decimale auszudrücken, und sie nach der einfachen Bessel'schen Formel zu berechnen.

Vom 13. Juli angefangen, nahmen die entfernteren Partien des Schweifes schon bedeutend an Breite zu, wodurch die Unsicherheit in der Auffassung der Axe sich noch mehr vergrösserte. Wenn dieselbe in den Fällen, wo l grösser als 13° , aber merklich kleiner als die beobachtete Schweiflänge ist, auch nur 4' betrug, so würde die dadurch hervorgerufene Unsicherheit in den gerechneten Werthen von $1-\mu$ von der Ordnung $1-\mu-11$ sein, so dass es für diese Fälle genügen dürfte, die Werthe von $1-\mu$ nach der Formel:

$$1-\mu = B \left(\sqrt{m} \cotg \frac{1}{2} \vartheta \right)^3$$

zu berechnen. Diese Formel dürfte überdiess die Werthe von $1-\mu$ für sämtliche Beobachtungen mit ausreichender Genauigkeit geben, da in den Fällen, wo l der beobachteten Schweiflänge fast gleichkommt, die Unsicherheit der Beobachtung noch dadurch wesentlich gesteigert wurde, dass der Schweif auf eine bedeutende Entfernung hin fast gerade verlief, jedoch gegen sein Ende zu in eine merkliche Krümmung überging, in Folge dessen der Beobachter in der Auffassung der Mittellinie des lichtschwachen Theiles des Schweifes vom früheren Verlaufe der

Axe naturgemäss beeinflusst war. Es gilt diess namentlich für die am 16. Juli und den darauffolgenden Tagen gemachten Beobachtungen, wie sich aus den von Dir. Schmidt gemessenen Schweiflängen ergibt:

Juli 16	47°2
17	54·0
18	55·9
20	63·3
21	65·8
22	64·6

Eine der Beobachtungen vom 17. Juli bezieht sich demgemäss auf einen Punkt, welcher in der Verlängerung der Schweifaxe des Kometen gelegen zu sein schien. Derartige Beobachtungen können zur Rechnung nicht verwendet werden, wenn nicht zugleich die Distanz zwischen dem Kometenkerne und demjenigen Punkte der Schweifaxe angegeben ist, von welchem an die Richtung abgenommen worden ist.

Die Wirkung der Refraction konnte allgemein vernachlässigt werden, da in den Fällen, wo die beobachteten Punkte in der Nähe des Horizonts gelegen waren, dieselben durch Refraction fast nur in der Richtung der Schweifaxe verschoben erschienen.

Die an der Hand der Schmidt'schen Beobachtungen in dieser Abhandlung gepflogenen Untersuchungen über die den Schweifmolekülen des Kometen 1874 III eigenthümliche Repulsionskraft machen es wahrscheinlich, dass dieselbe während der ganzen Dauer der Sichtbarkeit des Kometen auf der nördlichen Halbkugel sich nicht merklich geändert, und einen von der Einheit nur sehr wenig abweichenden Werth besessen habe.

Tafel der Werthe von $\log \sqrt{m}$,

berechnet nach der Formel

$$\log \sqrt{m} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{10} - \frac{7}{80} \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} + \frac{3}{20} \frac{1-\mu}{\cos^2 \frac{v_0}{2}} \right)$$

Taf. I.

$\log (1-\mu)$	9·84	9·85	9·86	9·87	9·88	9·89	9·90	9·91
$\frac{1}{2} v_0$								
0°	9·6546	9·6571	9·6597	9·6623	9·6650	9·6677	9·6704	9·6731
1	46	71	97	24	50	77	04	31
2	46	72	98	24	50	77	04	31
3	46	72	98	24	51	78	05	32
4	47	72	98	25	51	78	05	33
5	47	73	9·6599	25	52	79	06	34
6	48	74	9·6600	26	53	80	07	35
7	48	74	01	27	54	81	08	36
8	49	75	02	28	55	82	10	38
9	9·6550	9·6576	9·6603	9·6630	9·6657	9·6684	9·6712	9·6739
10	9·6551	9·6578	9·6604	9·6631	9·6658	9·6686	9·6713	9·6742
11	52	79	06	33	60	88	16	44
12	54	80	07	34	62	90	18	46
13	55	82	09	36	64	92	20	49
14	56	84	11	39	66	95	23	52
15	58	85	13	41	69	9·6697	26	55
16	60	87	15	43	72	9·6700	29	59
17	62	90	18	46	75	04	33	62
18	64	92	20	49	78	07	37	66
19	9·6566	9·6595	9·6623	9·6652	9·6681	9·6711	9·6741	9·6771
20	9·6569	9·6597	9·6626	9·6655	9·6685	9·6715	9·6745	9·6775
21	71	9·6600	30	59	89	19	49	80
22	74	03	33	63	93	24	54	85
23	77	07	37	67	9·6698	28	60	91
24	80	10	41	71	9·6702	34	65	9·6797
25	83	14	45	76	07	39	71	9·6803
26	87	18	49	81	13	45	77	10
27	90	22	54	86	18	51	84	17
28	94	26	59	91	24	57	91	24
29	9·6598	9·6631	9·6664	9·6697	9·6730	9·6764	9·6798	9·6832
30	9·6603	9·6636	9·6669	9·6703	9·6737	9·6771	9·6806	9·6841
31	07	41	75	10	44	79	14	49
32	12	47	82	17	52	87	23	59
33	18	53	88	24	60	9·6796	32	69
34	9·6623	9·6659	9·6695	9·6732	9·6768	9·6805	9·6842	9·6879

Tafel II.

$\log(1-\mu)$	9.92	9.93	9.94	9.95	9.96	9.97	9.98	9.99
$\frac{1}{2} v_0$								
0°	9.6759	9.6787	9.6815	9.6843	9.6872	9.6901	9.6930	9.6960
1	59	87	15	43	72	01	30	60
2	59	87	15	44	72	01	31	60
3	60	88	16	44	73	02	32	61
4	60	88	17	45	74	03	33	62
5	61	89	18	46	75	05	34	64
6	63	91	19	48	77	06	36	66
7	64	92	21	50	79	08	38	68
8	66	94	23	52	81	10	40	70
9	9.6768	9.6796	0.6825	9.6854	9.6883	9.6913	9.6943	9.6973
10	9.6770	9.6798	9.6827	9.6857	9.6886	9.6916	9.6946	9.6976
11	72	9.6901	30	59	89	19	49	79
12	75	04	33	63	92	22	53	83
13	78	07	36	66	9.6896	26	57	87
14	81	10	40	70	9.6900	30	61	92
15	84	14	44	74	04	35	66	9.6997
16	88	18	48	78	09	40	71	9.7002
17	92	22	52	83	14	45	76	98
18	9.6796	27	57	88	19	50	82	14
19	9.6801	9.6832	9.6862	9.6893	9.6925	9.6956	9.6988	9.7021
20	9.6806	9.6837	9.6868	9.6899	9.6931	9.6963	9.6995	9.7028
21	11	42	74	9.6905	37	70	9.7002	35
22	17	48	80	12	44	77	10	43
23	23	55	87	19	52	85	18	52
24	29	61	9.6894	27	60	9.6993	27	61
25	36	68	9.6991	35	68	9.7002	36	70
26	43	76	09	43	77	11	46	80
27	50	84	18	52	86	21	56	9.7091
28	58	9.6892	27	61	9.6996	31	67	9.7102
29	9.6867	9.6901	9.6936	9.6971	9.7006	9.7042	9.7078	9.7114
30	9.6876	9.6911	9.6946	9.6982	9.7018	9.7054	9.7090	9.7126
31	85	24	57	9.6993	29	66	9.7103	40
32	9.6895	31	68	9.7005	42	79	16	54
33	9.6906	42	80	17	55	9.7093	31	69
34°	9.6917	9.6954	9.6992	9.7030	9.7068	9.7107	9.7146	9.7184

Tafel III.

$\log(1-\mu)$	0·00	0·01	0·02	0·03	0·04	0·05	0·06	0·07
$\frac{1}{2} v_0$								
0°	9·6990	9·7020	9·7050	9·7081	9·7112	9·7143	9·7175	9·7206
1	90	20	50	81	12	43	75	07
2	90	21	51	82	13	44	75	07
3	91	21	52	83	14	45	77	08
4	92	23	53	84	15	46	78	10
5	94	24	55	86	17	48	80	12
6	96	26	57	88	19	50	82	14
7	9·6998	28	59	90	21	53	85	17
8	9·7000	31	62	93	24	56	88	20
9	9·7003	9·7034	9·7065	9·7096	9·7128	9·7160	9·7192	9·7224
10	9·7006	9·7037	9·7069	9·7100	9·7131	9·7163	9·7196	9·7228
11	10	41	72	04	36	68	9·7200	33
12	14	45	77	08	40	73	05	88
13	19	50	82	13	45	78	10	43
14	23	55	87	19	51	83	16	49
15	28	60	92	24	57	90	23	56
16	34	66	9·7098	30	63	9·7196	29	63
17	40	72	9·7105	37	70	9·7203	37	71
18	46	79	11	44	78	11	45	79
19	9·7053	9·7086	9·7119	9·7152	9·7186	9·7219	9·7253	9·7288
20	9·7060	9·7093	9·7127	9·7160	9·7194	9·7228	9·7262	9·7297
21	68	9·7102	35	69	9·7203	37	72	9·7307
22	77	10	44	78	13	47	82	17
23	85	19	54	88	23	58	9·7293	29
24	9·7095	29	64	9·7199	34	69	9·7305	41
25	9·7105	39	75	9·7210	45	81	17	53
26	16	50	86	21	57	9·7293	30	66
27	26	62	9·7198	34	70	5·7307	43	80
28	38	74	9·7210	47	84	21	58	9·7395
29	9·7150	9·7187	9·7224	9·7261	9·7298	9·7335	9·7373	9·7411
30	9·7164	9·7201	9·7238	9·7275	9·7313	9·7351	9·7389	9·7427
31	77	15	53	9·7291	29	67	9·7406	45
32	9·7192	30	68	9·7307	46	9·7385	24	63
33	9·7207	46	9·7285	24	63	9·7403	42	9·7482
34°	9·7224	9·7263	9·7302	9·7342	9·7382	9·7422	9·7462	9·7503

Tafel IV

log (1- μ)	0·08	0·09	0·10	0·11	0·12	0·13	0·14	0·15
$\frac{1}{2} \varrho_0$								
0°	9·7238	9·7271	9·7303	9·7336	9·7369	9·7402	9·7436	9·7470
1	39	71	04	36	69	03	36	70
2	39	72	04	37	70	04	37	71
3	40	73	05	38	71	05	38	72
4	42	74	07	40	73	07	40	74
5	44	76	09	42	75	09	43	77
6	46	79	12	45	78	12	45	80
7	49	82	15	48	81	15	49	83
8	53	85	18	51	85	19	53	87
9	9·7256	9·7289	9·7322	9·7355	9·7389	9·7423	9·7457	9·7492
10	9·7261	9·7294	9·7327	9·7360	9·7394	9·7428	9·7462	9·7497
11	66	9·7299	32	65	9·7399	34	68	9·7503
12	71	9·7304	37	71	9·7405	40	74	09
13	77	10	44	78	12	46	81	16
14	83	16	50	84	19	53	88	23
15	89	23	57	9·7392	26	61	9·7496	31
16	9·7297	81	65	9·7400	34	69	9·7505	40
17	9·7305	89	73	08	43	78	14	49
18	13	47	82	17	52	88	24	59
19	9·7322	9·7357	9·7392	9·7427	9·7462	9·7498	9·7534	9·7570
20	9·7332	9·7367	9·7402	9·7437	9·7473	9·7509	9·7545	9·7582
21	42	77	13	48	85	21	57	9·7594
22	53	9·7388	24	60	9·7497	33	70	9·7607
23	64	9·7400	36	73	9·7509	46	83	21
24	77	13	49	9·7486	23	60	9·7598	35
25	9·7390	26	63	9·7500	37	75	9·7613	51
26	9·7403	40	77	15	53	8·7591	29	67
27	18	55	9·7493	30	69	9·7607	45	9·7684
28	33	71	9·7509	47	9·7585	24	63	9·7702
29	9·7449	6·7487	9·7526	9·7564	9·7603	9·7642	9·7682	9·7721
30	9·7466	9·7505	9·7543	9·7583	9·7622	9·7661	9·7701	9·7741
31	9·7484	23	62	9·7602	42	9·7682	22	62
32	9·7503	42	9·7582	22	62	9·7703	43	9·7784
33	22	63	9·7603	43	9·7684	25	66	9·7807
34°	9·7543	9·7584	9·7625	9·7666	9·7707	9·7749	9·7790	9·7832

Über die Bahn eines Kometen, der während seiner
 günstigsten Helligkeit nicht aus den Sonnenstrahlen
 heraustreten kann.

Von Dr. J. Holetschek,
Adjunct der Wiener Sternwarte.

(Mit 5 Holzschnitten.)

Das von den Beobachtern zu Sohag in Aegypten, 1882, Mai 16, in der Nähe der total verfinsterten Sonne wahrgenommene kometenartige Object ist bekanntlich weder vor, noch nach diesem gesehen worden. Ob dieser Umstand blos von der Mangelhaftigkeit der Nachsuchungen herrührt oder ob das Gestirn thatsächlich längere Zeit in den Sonnenstrahlen verborgen blieb, vor nach diesem Zeitraum aber zu lichtschwach war, um gesehen werden zu können, lässt sich wohl nicht entscheiden, immerhin hat es ein gewisses Interesse, die Möglichkeit des letzteren Falles etwas näher zu untersuchen.

Ein Komet kann im Allgemeinen aus zwei Gründen für unentdeckt sein; einmal, wenn seine Distanz von der Erde oder eine gewisse Grösse übersteigt, dann aber auch, wenn der scheinbarer geocentrischer Abstand von der Sonne, also die Elongation, nach jeder Richtung hin sehr gering ist. Diese Fälle sind vom Beobachtungsort auf der Erde unabhängig. Die bestimmte geographische Breite tritt aber noch ein Fall vor, welcher den zweiten in sich schliesst, nämlich der, dass ein Komet, wenn auch in grösserer Elongation, auch dann unentdeckt bleiben kann, wenn es ausser am Tage nur noch in der Dämmerung über dem Horizont steht, in der vollen Nacht aber unter dem Horizont, d. h. also, wenn es sich nur durch den heliakischen Auf- und Untergang

bestimmten Grenzen befindet; diesen letzten Fall habe ich jedoch nicht behandelt.

Die Grösse jener Elongation von der Sonne, innerhalb welcher ein Komet nicht mehr gesehen wird, ist wohl von Fall zu Fall verschieden, doch wissen wir mit Bestimmtheit, dass das Kometensuchen in beträchtlicher Sonnennähe nur ausnahmsweise Erfolg haben kann; ich werde daher hauptsächlich die Elongation $\psi = 15^\circ$ behandeln, die etwas kleiner ist, als der Abstand des Dämmerungskreises vom Horizont. Da aber solche Nachforschungen nur tief am Horizont, also im Osten beim Beginn und im Westen beim Verschwinden der Dämmerung betrieben werden können, hier jedoch, abgesehen von localen Hindernissen, besonders durch die atmosphärischen Verhältnisse beeinträchtigt, manchmal sogar unmöglich gemacht werden, werde ich auch noch die weitere Grenze, $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$, betrachten. Auf den Äquator bezogen und in Zeit ausgedrückt, beträgt also die innere Grenze 1^h , die äussere $1^h 30^m$.¹

Was die Helligkeit betrifft, so kann hier nur die theoretische Lichtintensität, $J = \frac{1}{r^2 \rho^2}$, in Rechnung gezogen werden. Es schwankt nun freilich jene Helligkeit, bei welcher gegenwärtig die Kometen entdeckt werden, für die einzelnen Gestirne mindestens ebenso stark, wie jene Elongation, innerhalb welcher ein Komet noch zu erkennen ist, doch scheint es der Erfahrung nicht zu widersprechen, wenn die untere Durchschnittsgrenze zwischen 0.06 und 0.12 liegend angenommen wird. So wurde, um nur einige extreme Beispiele aus den letzten Jahren anzuführen, der Komet 1874 IV bei $J = 0.14$ entdeckt, 1874 III (der grosse) und 1877 IV bei $J = 0.13$ und zwar alle drei von Coggia in Marseille; ferner 1880 II (Schäberle) bei $J = 0.06$ und 1882 I (Wells) bei $J = 0.08$; der Komet von 1812 wurde bei seiner Rückkehr am 1. Sept. 1883 schon bei $J = 0.03$ aufgefunden.

¹ Olbers sagt in einem Briefe an Bessel 1806, dass ein Komet $25^\circ - 30^\circ$ von der Sonne entfernt sein müsse, um gesehen zu werden. Da aber gegenwärtig das Kometensuchen grösstentheils mit besseren Hilfsmitteln betrieben wird, erscheint die Wahl von engeren Grenzen ganz gerechtfertigt.

Beobachtet wurden freilich manche Kometen nach ihrer Entdeckung bis zu noch kleineren Helligkeiten, doch lasse ich dieselben absichtlich aus dem Auge, da es weitaus leichter ist ein Gestirn von bekannter Position zu finden, als ein noch fremdes beim willkürlichen Herumsuchen nicht zu übersehen.

Ich nehme also die untere Grenze für die Helligkeit nicht fix, sondern lasse ihr einen Spielraum zwischen zwei anderen Grenzen. Man kann dieselben dahin deuten, dass Kometen, so lange J zwischen 0·06 und 0·12 liegt, in der Nähe des Horizontes, auf die ja hier durchgehends zu achten ist, nur mit Mühe, bei $J < 0·06$ aber gar nicht mehr zu erkennen sind. Mit $J > 0·06$ und noch mehr mit $J > 0·12$ gelangt man in das Gebiet der „günstigen“ Helligkeiten. Für den Werth 0·06, oder wenn man will 0·0625, habe ich mich darum entschieden, weil in ihm der ganz einfache, specielle Fall $r=2$, $\rho=2$ enthalten ist; die Wahl von $J=0·12$ wird später motivirt werden. Ganz streng jedoch habe ich mich in meinen Erörterungen an diese Grenzen nicht immer gehalten. Auch sind, wenn man dieselben zu starr findet, durch die den einzelnen Elongationen fast durchgehends beigetzten Zahlen für J die Mittel geboten, die Rechnungsergebnisse direct auch unter Voraussetzung einer anderen Helligkeitsgrenze zu discutiren.

Da die ganze Rechnung bloß einen Durchschnittscharakter hat, können ihre Resultate natürlich keine Anwendung finden auf solche Kometen, die durch eine besondere Grösse ausgezeichnet sind, und in Folge dessen nicht nur in ausserordentlich grossen Distanzen beobachtet werden können (siehe eine Zusammenstellung solcher Kometen in der englischen Wochenschrift „Nature“ vom 9. März 1882), sondern auch, wenn sie in eine bedeutende Erd- oder Sonnennähe gelangen, eine glänzende Erscheinung darbieten; so hat, um nur ein Beispiel aus der letzten Zeit anzuführen, der grosse Komet, der im September 1882 am hellen Tage sogar in der nächsten Nähe der Sonne beobachtet wurde, als Ausnahme zu gelten.

Andererseits sind sehr kleine Kometen, wie z. B. 1879 IV, der nur schwer zu beobachten war, obwohl die Lichtintensität Werthe zwischen 0·8 und 0·5 hatte, hier schon von vorneherein ohne Bedeutung; bei solchen Kometen wäre noch früher das entgegen-

gesetzte Thema zulässig, nämlich unter Annahme einer oberen Helligkeitsgrenze nachzusehen, in welchem Fall dieselben trotz ihrer Lichtschwäche sichtbar werden können.

Auch die Leistungsfähigkeit sehr grosser Teleskope muss ausser Acht gelassen werden, denn wenn auch mit solchen Instrumenten bekannte Kometen beobachtet werden, so wird mit denselben in der Regel doch nicht nach Kometen gesucht.

Die Rechnung begann ich mit der Aufsuchung jener Umstände, welche dem Verbleiben des Kometen innerhalb der Elongationen 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ am förderlichsten sind. Tritt er wirklich heraus, so ist zu ermitteln, ob an dieser Stelle J genügend klein ist, um zu der Behauptung zu berechtigen, dass hier der Komet übersehen werden kann. Damit den gestellten Anforderungen entsprochen wird, muss die Bahn eigenartigen Beschränkungen unterworfen sein, und diese sollen jetzt näher betrachtet werden. Die Kometenbahn wird dabei durchgehends als Parabel, die Erdbahn als Kreis vorausgesetzt.

Ich gehe von der Annahme aus, dass sich das Sichtbarwerden des Kometen auf beiden Ästen der Parabel nur dann möglichst vermindern lässt, wenn die grösste Lichtintensität mit der geringsten Elongation von der Sonne zusammenfällt und wenn die heliocentrischen und geocentrischen Wege des Kometen vor und nach dem Perihel zu dem Ort, den die Erde während des Periheldurchganges des Kometen einnimmt, symmetrisch liegen. Dies wird erreicht, wenn er sich zur Zeit des Perihels in Conjunction mit der Sonne und zugleich in der Ekliptik befindet. Unter dieser Voraussetzung hat jeder der beiden Äste an den Sichtbarkeitsverhältnissen ganz denselben Antheil, auf jedem macht sich der Komet in derselben Masse bemerkbar. Dagegen treibt ihn jedes Abgehen von dieser Symmetrie zwar auf dem einen Ast noch mehr in die Sonnenstrahlen hinein, dafür aber auf dem andern um ebensoviel wieder heraus; hier würde also schon ein Plus von Helligkeit entstehen, was eben vermieden werden soll.

Erst dann, wenn die Periheldistanz schon sehr gross (viel grösser als die Einheit) ist, entfällt die Forderung einer symmetrischen Lage der Parabeläste gegen die Erde. Dieser Fall entzieht sich aber beinahe schon der Rechnung, denn für bedeutende Periheldistanzen kann die Bahn selbstverständlich jede beliebige

haben, ohne dass wir solche Kometen zu Gesicht bekommen. Auch könnte man für dieselben eine, der vorliegenden engesetzte Untersuchung anstellen, nämlich (so wie für ansehnliche Körper auch hier) nachsehen, nicht, wann sie bei geringer Distanzen unsichtbar bleiben, sondern, wann sie bei bedeutender Entfernungen für uns sichtbar werden können. Ausnahmen dürfen wir uns hier nicht beschäftigen, und dass ein Komet mit einer enormen Periheldistanz, wie der von 1729, beobachtet werden konnte, steht bisher vereinzelt da.

In dieser ersten Bedingung ist eine weitere, mehr specielle Bedingung, nämlich die, dass die Axe der Kometenbahn ganz oder theilweise in der Ekliptik liegen muss. Nennen wir den Winkel, den die Axe mit der Ekliptik bildet, also die heliocentrische Breite des Perihels, b_0 , ist ferner ω der Abstand des Perihels vom Knoten und i die Neigung, so besteht die Gleichung

$$\sin b_0 = \sin \omega \sin i.$$

Soll daher $\sin b_0 = 0$ werden, so muss entweder ω oder $i = 0^\circ$ oder $= 180^\circ$ sein.

Diese Bedingung ist insoferne etwas einfacher als die erste, aus den vorgelegten Elementen einer Kometenbahn direct abgeleitet werden kann, wie weit dieselbe erfüllt ist, während die zweite der vorigen auch noch die Kenntniss der zur Perihelzeit stattfindenden Erd- oder Sonnenlänge erfordert wird.

Entfernt man sich von der Bedingung, dass die heliocentrische Breite des Perihels Null sein soll, so kann die Symmetrie der beiden Äste gegen den Erdort entweder gewahrt bleiben oder nicht. Im ersten Fall wird später noch untersucht werden, der andere Fall könnte zur Folge haben, dass die Distanz von der Erde auf dem einen Ast wesentlich grösser oder kleiner wird, als auf dem andern, und daher das Verborgenbleiben auf dem einen Ast durch das Sichtbarwerden auf dem andern zu Stande kommt, und dieser Fall ist daher schon von vorneherein auszuschliessen.

Betrachten wir, um schon hier eine kleine Untersuchung über die Helligkeiten anzustellen, den Fall, dass $q > 1$ ist, und denken wir uns, damit die theoretische Lichtintensität klein wird, das Perihel jenseits der Sonne, wobei wir vorerst die Bahnebene in der Ekliptik liegend annehmen; wie gross ist

die Helligkeit des Kometen im Perihel? (Natürlich abgesehen davon, dass er jetzt nicht wahrzunehmen wäre, da er sich hinter der Sonne befindet.) Da unter dieser Voraussetzung $r = q$ und $\rho = q+1$ ist, ergibt sich:

für $\log q = 0.00$	$J = 0.25$
0.04	0.19
0.08	0.14
0.12	0.11
0.16	0.08
0.20	0.06

Wenn wir nun die einem bestimmten q entsprechende Bahn aus der Ekliptik herausdrehen, etwa um den Parameter als Axe, so wird die im Perihel stattfindende Helligkeit grösser, weil ρ abnimmt. Wir können aber unter anderen auch die Forderung stellen, die Bahnebene für eine Reihe von verschiedenen q gerade so weit zu drehen, dass die Helligkeit J stets dieselbe bleibt. Soll z. B. im Perihel $J = 0.11$ betragen, so ist es gestattet, von $\log q = 0.12$ aufwärts, die Bahn aus der Ekliptik zu drehen, also von der Bedingung $\sin b_0 = 0$ abzugehen, und zwar umsomehr, je grösser q ist; wird gefordert, dass die Helligkeit 0.06 beträgt, so ist diese Änderung erst für $\log q > 0.20$ erlaubt.

Wir bestimmen nun die für b_0 zulässigen Werthe. Da der Parameter in der Ekliptik bleiben soll, ist $\omega = \pm 90^\circ$, wovon wir nur den positiven Werth benutzen wollen, und somit der Winkel der Bahnaxe mit der Ekliptik zugleich auch die Neigung der Bahnebene.

Es sind nun in dem ebenen Dreieck zwischen Erde, Sonne und Komet, worin die Seite Erde—Sonne = 1, Sonne—Komet = $r = q$ ist und die Seite Erde—Komet, ρ , aus der Relation $r^2 \rho^2 = \frac{1}{J}$ hervorgeht, alle drei Seiten bekannt; b_0 , also auch i , ist sonach das Supplement des der Seite ρ gegenüberliegenden Winkels. Da das Product der beiden Seiten r und ρ constant ist, so liegen alle Schnittpunkte derselben auf einer Cassinischen Curve.¹

¹ Diese Curve, für die vorliegende Arbeit nur von nebensächlicher Bedeutung, ist von Olbers, zum Theil auch von Bessel in Bezug auf die

Soll z. B. $J = 0.0625$ sein, so ist $\varphi = \frac{4}{q}$; man findet:

$\log q$	b_0
0.21	41°
0.23	61
0.25	75
0.27	88

Wenn man also bei einem gewissen q angelangt ist, so steigt der für eine bestimmte Helligkeit in der Neigung und auch in der Lage der Bahnaxe zulässige Spielraum mit wachsendem q sehr rasch an. Dieses specielle Beispiel gibt schon einen Beleg dafür, dass man von den aufgestellten Bedingungen nur bei grossen Periheldistanzen abgehen darf. Auf die Änderungen von i und b_0 kommen wir bei Betrachtung der Elongationen wieder zurück.

Die zuerst vorgeführte Bedingung, dass nämlich der Komet während seines Periheldurchganges nahe in Conjunction mit der Sonne sein muss, zerfällt in zwei, da er sich entweder jenseits oder diesseits der Sonne befinden kann. Bei Mercur und Venus werden diese Constellationen bekanntlich als obere und untere Conjunction unterschieden. In jenem Fall muss, wie sich herausstellt, q ziemlich gross (um 1 herum), in diesem dagegen sehr klein sein.

Diese beiden Fälle werde ich nun gesondert betrachten: Ich wähle zunächst jene Verhältnisse, unter denen der Komet am leichtesten in den Sonnenstrahlen verborgen bleibt, solange er eine Helligkeit besitzt, die bei grösserer Elongation seiner Auffindung günstig wäre, und beginne dann hievon allmählig abzugehen, indem ich untersuche, wie weit man die Bahnelemente variiren kann, ohne dass ein Sichtbarwerden zu erwarten steht. Gelangt man auf

Sichtbarkeit der Kometen näher untersucht worden. Siehe den Briefwechsel zwischen Olbers und Bessel aus dem Jahre 1806 und „Einige Bemerkungen über die Aufsuchung der Kometen“ von Olbers im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1809, ferner den Aufsatz in den Astr. Nachr. Band 103 von P. Harzer: „Über die Wahrscheinlichkeit, einen Kometen aufzufinden als Function seines geocentrischen Winkelabstandes von der Sonne“, welcher hauptsächlich eine Berichtigung der von Olbers aufgestellten Principien ist.

unzulässige Elongationen und Intensitäten, so bricht die Rechnung an dieser Stelle ab. Da die Grenzwerte grösseres Interesse bieten, so sind sie meist etwas umständlicher mitgetheilt.

Da die Erdbahn als Kreis angenommen ist, entsteht der Vortheil, dass man die Verhältnisse in allen jenen Fällen, in denen der Komet zur Zeit des Perihels zugleich in Conjunction mit der Sonne ist, nur für die eine Seite vom Perihel aus zu rechnen braucht, weil die zu beiden Seiten symmetrisch liegenden Partien congruent sind.

Ist L_0 die geocentrische Länge der Sonne zu der Zeit, in welcher der Komet im Perihel steht, und m ihre mittlere tägliche Bewegung ($59'8''$), so ist die jeweilige Länge der Sonne $L = L_0 + mt$, worin t nach dem Perihel positiv, vor demselben negativ genommen wird. In den folgenden Rechnungen ist, wo zwei congruente Partien bestehen, immer nur die nach dem Perihel liegende angeführt.

Als Fundamentalebene ist durchaus die Ekliptik gewählt.

I. Fall.

Komet im Perihel jenseits der Sonne.

Damit der Komet längere Zeit mit der Sonne nahezu in Conjunction bleiben kann, muss er directe Bewegung besitzen, und damit er nicht weit nördlich oder südlich von der Sonne heraustritt, muss die Ebene seiner Bahn nahezu mit der Ekliptik zusammenfallen. Die Rechnung wurde zuerst unter der einfachsten Voraussetzung, $i = 0$, geführt.

Da zur Zeit des Perihels die Länge der Sonne L_0 ist, so hat man unter der Annahme, dass der Komet im Perihel mit der Sonne in Conjunction ist, $\pi = L_0$, und somit ist schon über vier Elemente verfügt: $T =$ Moment, für welchen $t = 0$ ist; $\pi = L_0$; $i = 0$; Ω entfällt.

Es sind nun die Periheldistanzen q so zu wählen, dass der Forderung des Verborgenbleibens entsprochen wird. Ist l die heliocentrische Länge des Kometen, r sein Radius vector, ferner λ seine geocentrische Länge und ρ seine Entfernung von der Erde, so gelten, da sämmtliche Breiten Null sind, die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos(\lambda-L) &= r \cos(l-L) + R \\ \rho \sin(\lambda-L) &= r \sin(l-L) \end{aligned} \right\} 1)$$

woraus

$$\operatorname{tg}(\lambda-L) = \frac{r \sin(l-L)}{r \cos(l-L) + R} \quad 2)$$

$(\lambda-L)$ ist die Differenz zwischen der geocentrischen Länge des Kometen und der der Sonne, und da $i = 0$, auch identisch mit der gesuchten Elongation ψ ; ist dieselbe $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$, so befindet sich der Komet $\left\{ \begin{array}{l} \text{östlich} \\ \text{westlich} \end{array} \right\}$ von der Sonne. Diese Unterscheidung genügt vollkommen, da Elongationen im zweiten und dritten Quadranten gar nicht in Betracht kommen; es ist daher $\cos(\lambda-L)$ stets positiv. Da die Erdbahn als Kreislinie angenommen wird, ist durchgehends $R = 1$ gesetzt worden; der Conformität halber habe ich jedoch in den Formeln den Buchstaben R beibehalten.

Wegen $i = 0$ ist die heliocentrische Länge des Kometen l identisch mit der Länge in der Bahn, $\pi + v$, also, da $\pi = L_0$ ist.

$$l = L_0 + v \quad (v = \text{wahre Anomalie})$$

ferner ist

$$L = L_0 + mt$$

somit

$$l - L = v - mt.$$

L_0 fällt heraus, da es sich nicht um Längen selbst, sondern nur um Differenzen von Längen handelt.

Ich habe nun für mehrere Werthe von q ephemeridenmässig je eine längere Reihe von Elongationen $(\lambda-L)$ sammt den zugehörigen Distanzen berechnet. Indem ich die erhaltenen speciellen Zahlenwerthe unterdrücke, führe ich blos den Verlauf der Erscheinung im Allgemeinen an.

Ist q nicht weit von 1 entfernt, so kommt der Komet nach dem Perihel östlich von der Sonne langsam hervor, erreicht nach etwa 40 Tagen das Maximum seiner östlichen Elongation (jedoch kleiner als 15°) und nähert sich hierauf wieder der Sonne, mit welcher er nach ungefähr ebenso langer Zeit abermals in Conjunction tritt, während er hinter ihr vorbeigeht. Nun wandert er

immer rascher auf der Westseite heraus, doch ist, wenn er $\psi = -15^\circ$ passirt, $r\rho$ bereits grösser als 4, also $J < 0.0625$.

Es kommt zwar später noch zu einer secundären Annäherung an die Erde, doch sind die Distanzen schon so gewachsen, dass die Helligkeit nicht mehr diesen Grenzwert erreichen kann. Es sei hier gleich bemerkt, dass alle späteren Elongationen und deren Maxima, sowie die bei jedem Erdumlauf eintretenden secundären Annäherungen, die vom mathematischen Gesichtspunkt zwar ebenso interessant, für unseren praktischen Fall jedoch wegen der zu grossen Distanzen bedeutungslos sind, ganz ausser Acht gelassen werden.

Genau denselben Verlauf nimmt nun die Erscheinung des Kometen auch vor dem Perihel, nur mit dem Unterschiede, dass für negative Werthe von t die östlichen und westlichen Elongationen mit einander tauschen. Nach unseren Voraussetzungen bleibt also das Gestirn unter den hier kurz dargestellten Verhältnissen für die Erde ganz unsichtbar.

Besonderes Interesse und auch besondere Wichtigkeit hat das Maximum der östlichen Elongation, weil gerade hier eine ansehnliche Intensität des Kometen mit einem beträchtlichen Winkelabstand von der Sonne zusammenfällt. Eine directe Bestimmung desselben führt auf eine transcendente Gleichung auch dann, wenn man sich die Vereinfachung erlauben würde, für den Sinus oder die Tangente der Elongation den Bogen zu setzen. Ich habe daher die Maxima empirisch ermittelt.

Aus der schon erwähnten, ephemeridenmässig abgeleiteten Reihe von Elongationen lässt sich nämlich leicht durch Interpolation sowohl die grösste Elongation selbst, als auch das zugehörige t angenähert bestimmen, worauf eine directe Berechnung von zwei oder drei nahe an einander liegenden Positionen hinreichend genau entscheiden lässt, wo und in welcher Grösse dieses Maximum auftritt. Hat man auf diese Weise die Zeit des Maximums für ein bestimmtes q gefunden, so ist es leicht, sie auch für ein benachbartes q zu erhalten, und man kann daher, wenn man den Gang der Werthe einmal kennt, weiter schreiten, ohne eine überflüssige Rechnung machen zu müssen.

Tabelle I gibt für eine Reihe von Periheldistanzen mit dem Argument $\log q$ die Maxima der Elongationen ψ . Da sich die

Elongation in der Nähe des Maximums nur langsam ändert, hielt ich es für hinreichend, t bis auf halbe Tage genau anzugeben.

Beigesetzt sind auch in grösseren Intervallen die während dieser Elongation stattfindenden Helligkeiten J ; die für $\psi < 15^\circ$ geltenden sind zwar jetzt ohne Interesse, später jedoch, wenn die Bahn etwas aus der Ekliptik gedreht werden wird, sind sie insgesamt von Wichtigkeit. Man sieht, dass sie für die einzelnen q nur wenig von einander verschieden sind; es hat also q auf die Helligkeit innerhalb der hier betrachteten Grenzen nur wenig Einfluss, während dagegen die Elongationen viel bedeutender alterirt werden.

Tabelle der grössten Elongationen.

$\log q$	t	ψ	J	II. Conjunction
	Tage			Tage
0.08	21	0°32'	0.13	37.0
0.06	28½	1 28		51.2
0.04	33½	2 35		61.6
0.02	37½	3 51		69.9
0.00	40½	5 12	0.14	76.9
0.98	42½	6 38		82.9
9.96	44½	8 6		88.2
9.94	46	9 35		92.9
9.92	47	11 6	0.15	97.2
9.90	48½	12 38		101.1
9.88	49	14 9		104.6
9.86	49½	15 41		107.9
9.84	50	17 12	0.16	110.9
9.82	50½	18 42		113.7
9.80	51	20 11		116.3
9.78	51	21 39		118.8
9.76	51½	23 6	0.16	121.1

D)

Die letzte Columne enthält die Zeitpunkte der zweiten Conjunction, beantwortet also die Frage, wann $\lambda - L = 0$, somit auch $v - mt = 0$ wird. Zum ersten Male wird der Gleichung $v = mt$ im Perihel genügt, da hier v und t gleichzeitig Null sind,

und zwar für jedes beliebige q . Um nun auch die erste nach dem Perihel eintretende Conjunction (in der Tabelle als II. Conjunction bezeichnet) zu finden, hat man die Gleichung $v = mt$ für ein vorgelegtes q durch Versuche zu lösen. Man wählt, wenn sonst keine Näherung bekannt ist, einen beliebigen Werth von t , entnimmt mittelst $\frac{t}{q^{3/2}} = M$ aus der Barker'schen Tafel die wahre

Anomalie v , identificirt dieselbe mit mt , worauf man nach Division durch m ein neues t bekommt, welches der Wahrheit näher ist und als Ausgangswerth für den zweiten Versuch zu benutzen ist.

Aus den Anfangs- und Endwerthen dieser beiden Versuche lässt sich auf bekannte Weise ein neuer Werth für t bestimmen, der je nach dem gewünschten Genauigkeitsgrade dem wahren Werth schon ganz oder nahezu gleichkommt. Von den Zahlen dieser Columne wird bei der Variation der Neigung Gebrauch gemacht werden.

Geht man mit $\log q$ bis 9.86 und 9.76 herunter, so übersteigt, wie die Tabelle lehrt, die Elongation ψ bereits 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$, während die Helligkeit J noch immer 0.16 beträgt. Soll also der Komet unsichtbar bleiben, so darf man mit q nicht weiter herabgehen, sondern muss hier abbrechen. Durch Interpolation findet man, dass der genaue Grenzwert für $\psi = 15^\circ 0'$ bei $\log q = 9.8689$, also bei $q = 0.7395$ liegt, und für $\psi = 22^\circ 30'$ bei $\log q = 9.7683$, also bei $q = 0.5865$.

Wird $\log q > 0.1003$, nämlich $q > \sqrt[3]{2}$, so bleibt stets $v < mt$, somit $l - L < 0$, also auch $\lambda - L < 0$, d. h. der Komet tritt gar nicht mehr östlich von der Sonne, oder bestimmter gesagt vom Sonnenmittelpunkte heraus. Diese Bedingung kann man auf folgende Art finden. Für kleine v darf die bekannte Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{kt}{q^{3/2} \sqrt{2}}$$

geschrieben werden:

$$\frac{v}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{v}{2}\right)^3 = \frac{kt}{q^{3/2} \sqrt{2}}$$

worin aber jetzt k in Bogen zu verstehen und in Folge dessen mit m , der mittleren täglichen Bewegung der Erde, zu identificiren ist; man erhält somit

$$q^{3/2} \sqrt{2} \left(\frac{v}{2} + \frac{1}{3} \frac{r^3}{2^3} \right) = mt.$$

Da nun für jedes auch noch so kleine r stets $mt > r$ bleiben soll, so muss auch, wenn für mt der soeben gefundene Werth substituirt wird:

$$q^{3/2} \sqrt{2} \left(\frac{v}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3}{2^3} \right) > r$$

der

$$q^{3/2} \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{r^2}{2^3} \right) > 1 \text{ sein.}$$

Lässt man nun r gegen Null convergiren, so resultirt:

$$q^{3/2} > \sqrt{2} \text{ oder } q^3 > 2.$$

Da also für diesen Grenzfall $q = r = 1.26$, so ist $\rho = q + 1.26$, demnach $\frac{1}{r^2 \rho^2} = 0.12$, und aus diesem Grunde habe ich er Einleitung für die obere Grenze des Minimums der Entungshelligkeit eines Kometen die Zahl 0.12 gewählt.

Wir haben jetzt die Elongationen auf der Ostseite betrachtet. der Westseite haben dieselben kein Maximum, sondern sen fortwährend; sobald aber die Elongation $\psi = -15^\circ = -22\frac{1}{2}^\circ$ passirt wird, ist, wie schon erwähnt, $J < 0.06$. $\log q > 0.10$ tritt der Komet zwar nicht mehr östlich heraus, werden aber, wie die Rechnung lehrt, seine Sichtbarkeitsnisse auf der Westseite etwas günstiger, aber auch nur bis 1, wo ungefähr $\log q = 0.16$ ist. Für $\psi = -15^\circ$, zum Theil tr $\psi = -22\frac{1}{2}^\circ$ habe ich die Helligkeiten durch Rechnung Nachbarwerthe und nachherige Interpolation ermittelt; in der That so klein, dass der Komet unbeachtet bleiben für $\psi = -22\frac{1}{2}^\circ$ habe ich sie darum nicht alle berechnet, hier noch kleiner sind, als für $\psi = -15^\circ$.

Helligkeiten für die Elongation -15° und $-22\frac{1}{2}^\circ$.

log q	$\psi = -15^\circ$		$\psi = -22\frac{1}{2}^\circ$	
	t	J	t	J
0.24	56	0.035	77	0.030
0.20	66	0.039		
0.16	78	0.040		
0.12	89	0.038	107	0.029
0.08	99	0.034		
0.04	108	0.029		
0.00	116	0.025	130	0.020
9.96	123	0.022		
9.92	129	0.019		
9.88	134	0.016	147	0.013

II)

Da die Intensitäten von $\log q = 0.00$ aufwärts mit wachsendem q noch immer zunehmen, wurden hier ausnahmsweise auch grosse Werthe von q in Betracht gezogen, um die Versicherung zu erlangen, dass das Maximum von J überschritten oder doch wenigstens schon erreicht ist.

Die in den beiden Columnen t angeführten Zahlen bezeichnen — der Voraussetzung gemäss — jenen Zeitraum, in welchem der Komet den Weg vom Perihel zum Maximum der östlichen Elongation, hernach zur zweiten Conjunction mit der Sonne und schliesslich auf der Westseite bis zu der (nun stetig wachsenden) Elongation von -15° , beziehungsweise $-22\frac{1}{2}^\circ$ zurücklegt. Da nun ganz dieselben Verhältnisse auch vor dem Perihel (in umgekehrter Reihenfolge) stattfinden, so verbleibt der Komet $2t$ Tage innerhalb des zugehörigen „Strahlenkreises“.

Z. B. für $\log q = 9.88$ bleibt die Elongation ψ durch den langen Zeitraum von $2 \times 134 = 268$ Tagen kleiner als 15° und während $2 \times 147 = 294$ Tage kleiner als $22\frac{1}{2}^\circ$.

Verschiebung des Perihels.

Bisher ist $\pi = L_0$ angenommen. Da erst für $\log q < 9.87$ (beziehungsweise < 9.77) das Maximum der östlichen Elongation 15° (beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$) übersteigt, so lässt sich für alle Werthe von $\log q$, die grösser als die beiden bezeichneten sind, π nach West oder Ost variiren, ohne dass in Folge dessen die grösste Elongation über 15° (beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$) steigt. Diese für π zulässige Variation $d\pi$ ist um so grösser, je grösser q ist.

Da jetzt

$$\pi = L_0 \pm d\pi$$

o ist

$$l = L_0 \pm d\pi + v$$

nd da

$$L = L_0 + mt$$

hat man jetzt

$$l - L = v - mt \pm d\pi. \quad 3)$$

Da die Resultate für $+d\pi$ und $-d\pi$ congruent sein müssen, so wird die Rechnung nur für positive Werthe von $d\pi$ geführt.

Ich habe nun die Maximalwerthe von $d\pi$ ermittelt, und zwar näherlicher diejenigen, welche das Maximum der östlichen Elongation gerade bis 15° steigen lassen. Einen Näherungswerth für das, einem bestimmten q entsprechende $d\pi$ kann man sich leicht verschaffen, wenn man der früheren Berechnung des östlichen Maximums die Werthe von $(l-L)$ und r entlehnt. Da in der Gleichung 2) die Winkelwerthe — unserer Voraussetzung zufolge — nicht sehr gross werden können, ist es gestattet, in der Annäherung zu schreiben:

$$\lambda - L = \frac{r(l-L)}{r+R}$$

such, wenn man gleichzeitig $R = 1$ setzt:

$$\lambda - L = \frac{l-L}{1 + \frac{1}{r}}$$

Nun kann man zufolge der Relation 3) eine Verschiebung des Perihels um $d\pi$ dadurch ausführen, dass man diese Änderung einfach an die für $\pi = L_0$ geltende Differenz $(l-L)$ anbringt. Nennt man den Werth, welchen $(\lambda-L)$ in diesem Falle annimmt, ψ^0 , so ist

$$\psi^0 = \frac{(l-L) + d\pi}{1 + \frac{1}{r}}$$

und daraus

$$d\pi = \psi^0 \left(1 + \frac{1}{r}\right) - (l-L). \quad 4)$$

Ist $d\pi$ gefunden, so ergibt sich durch directe Berechnung einer Reihe von Elongationen der Zeitpunkt, auf welchen das Maximum fällt, worauf die zwischen der gefundenen Elongation und ψ^0 gewöhnlich noch auftretende Differenz $d\psi$ sofort beseitigt werden kann, wenn an $d\pi$ noch die Correction $d\psi \times \left(1 + \frac{1}{r}\right)$ angebracht wird. Ist auf diese Weise der genaue Werth von $d\pi$ für ein bestimmtes q bekannt, so lässt sich der Übergang auf ein benachbartes q bewerkstelligen, ähnlich wie man bei Berechnung einer Planetenephemeride leicht einen nahezu richtigen Werth der excentrischen Anomalie erhält, wenn die Rechnung schon begonnen hat.

Tabelle III enthält die für $\psi^0 = 15^\circ$ in der Perihellänge π zulässigen Variationen, denen in grösseren Intervallen auch jene Helligkeiten beigesetzt sind, die der Komet beim Passiren dieser, einem Maximum angehörenden Elongation von 15° hat.

log q	t	$d\pi$ \pm	J
9.92	49	7° 6'	0.15
9.94	48 $\frac{1}{2}$	9 50	
9.96	48	12 33	0.14
9.98	46	15 10	
0.00	45	17 43	0.13
0.02	42	20 7	
0.04	39	22 20	0.12
0.06	34 $\frac{1}{2}$	24 18	
0.08	27 $\frac{1}{2}$	25 53	0.11

III)

Fragen wir im Vorbeigehen, was in Folge dieser Verschiebung des Perihels mit dem auf der Westseite, also vor dem Perihel, stattfindenden Maximum geschieht, welches wir sonst in der Regel nicht speciell betrachten. Solange $\pi = L_0$ ist, sind die geocentrischen Wege des Kometen vor und nach dem Perihel congruent, jetzt aber, wo das östliche Maximum in Folge der Anbringung von $d\pi$ noch weiter vergrössert wurde, nämlich bis $\rho = 15^\circ$, kann das westliche Maximum nicht mehr so wie früher bestehen. Man findet nun durch directe Rechnung, dass durch Vergrösserung des östlichen Maximums das westliche verkleinert wird, ja sogar, wenn $d\pi$ hinreichend gross ist, auf die Ostseite erübertückt, wodurch also aus den negativen positive Elongationen entstehen und daher das Maximum scheinbar zu einem Minimum wird.

Ausser der bisher betrachteten, einem Maximum angehörenden Elongation passirt der Komet noch zweimal die Elongation $\alpha = 15^\circ$, zuerst wenn er zur Sonne hereinkommt, dann wenn wieder hinausgeht; an diesen beiden Stellen ist nun noch Helligkeit zu untersuchen. Da die Elongationen zu beiden Seiten des Perihels jetzt nicht mehr symmetrisch liegen, müssen wohl die Verhältnisse vor als nach dem Perihel gesondert achtet werden; da jedoch durch eine Verschiebung von π die Sichtbarkeitsverhältnisse auf der einen Seite zwar günstiger, dafür auf der anderen ungünstiger werden als früher, wo $\pi = L_0$ braucht man nur die erste Seite zu untersuchen, da jetzt der Komet auf der zweiten noch weniger sichtbar werden kann als früher.

Wenn wir $d\pi$ positiv wählen, die Länge des Perihels also vergrössern, so finden die günstigeren Verhältnisse auf der Ostseite der Sonne, und zwar vor dem Perihel statt ¹, somit bei negativem $d\pi$ auf der Westseite, und zwar nach dem Perihel. Ich habe die Rechnung für den ersten Fall ausgeführt, und theile hier die

Als Beispiele für diesen Fall kann man die gegenwärtigen Ergebnisse der periodischen Kometen von d'Arrest und Tempel (1873 II) annehmen. Jener passirt sein Perihel: 1884, Januar 13, also bei $L_0 = 293^\circ$, $\pi = 319^\circ$ ist, somit $\pi = L_0 + 26^\circ$; dieser: 1883, November 20, $L_0 = 238^\circ$, während $\pi = 306^\circ$ ist, somit $\pi = L_0 + 68^\circ$. Für beide Fälle ist $d\pi$ positiv.

Helligkeiten mit, welche der Komet unter Zugrundelegung der in Tabelle III enthaltenen jeweiligen Werthe von $+d\pi$ beim Passiren der Elongation von $22\frac{1}{2}^\circ$ und 15° besitzt.

log q	$\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$		$\psi = 15^\circ$	
	t	J	t	J
9.96	-120	0.024	-105	0.032
0.00	-106	0.032	- 89	0.045
0.04	- 91	0.044	- 68	0.068
0.08	- 73	0.059	- 39	0.106

IV)

Man sieht, dass durch die in Rede stehenden Änderungen von π bei grösseren Werthen der Periheldistanz ein Sichtbarwerden des Kometen auf der einen Seite vom Perihel ermöglicht wird (für $\log q = 0.08$ ist J bereits 0.106) und kann daraus die Regel ziehen, dass, wenn der Komet auf keiner Seite, also weder am Morgen- noch am Abendhimmel sichtbar werden soll, die Änderung von π sowohl für kleine als für grosse q nur mässig sein darf, dass man sich somit von der Forderung $\pi = L_0$ nirgends sehr weit entfernen darf.

Wir haben jetzt $d\pi$ unter der Bedingung ermittelt, dass die einem Maximum entsprechende Elongation $\psi^\circ = 15^\circ$ sein soll. Wäre $\psi^\circ = 22\frac{1}{2}^\circ$ gefordert, so würde man durch die Formel 4) in Verbindung mit der nach Gleichung 2) durchgeführten directen Rechnung finden, dass z. B. für $\log q = 0.00$ die Änderung $d\pi = 31^\circ$ und für $\log q = 0.08$ schon $d\pi = 39^\circ$ sein darf, wobei das Maximum, nämlich $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$, im ersten Beispiel 48 Tage, im zweiten 31 Tage nach dem Perihel eintritt.

Eine ausführliche Rechnung für diesen Fall unterlasse ich aber, denn durch noch grössere Änderung von π würden die Sichtbarkeitsverhältnisse auf der einen Seite zwar noch ungünstiger als für $\psi^\circ = 15^\circ$, auf der andern dagegen noch günstiger werden, und letzteres soll eben vermieden werden.

Änderung der Neigung.

Die bis jetzt behandelten Elongationen finden in der Ekliptik sind daher die für die Sichtbarkeitsverhältnisse eines bisher abgeleiteten Bedingungen nur dort anwendbar, Ekliptik Abends oder Morgens auf dem Horizont nahe steht, was für die Tropenländer während des ganzen ziemlich zutrifft. Elongationen nördlich oder südlich von sie haben hier jedoch wenig Bedeutung, weil das Gestirn in Fall nahe gleichzeitig mit der Sonne auf- und untergeht. verhält sich die Sache aber für höhere geographische wo sich die Ekliptik schon stark gegen den Horizont nkt. Hier kann ein in der Ekliptik befindliches Gestirn sehr grossen Elongationen immer noch in der Dämmerung, während andererseits Elongationen ausserhalb der eine besondere Wichtigkeit erlangen.

gehe also jetzt von der früher gemachten Voraussetzung, b und nehme, ähnlich wie mit π , so auch mit i Variationen die für dieses Element zulässigen Grenzen zu ermitteln. auch die Länge des Knotens in Rechnung zu ziehen, habe, an der Bedingung $\pi - \Omega = 0^\circ$ oder $= 180^\circ$ fest- $\Omega = \pi = L_0$ angenommen, wodurch das Argument der mit der wahren Anomalie v identisch wird und somit der Ekliptik reducirte Abstand des Gestirns vom Knoten aus

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \operatorname{tg} r \cos i \quad 5)$$

und wird. Da nun

$$l = L_0 + (l - \Omega)$$

$$L = L_0 + mt$$

$$l - L = (l - \Omega) - mt.$$

Die Elongation $(\lambda - L)$ und β , sowie die geocentrische ρ ergibt sich aus

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \beta \cos(\lambda - L) &= r \cos b \cos(l - L) + R \\ \rho \cos \beta \sin(\lambda - L) &= r \cos b \sin(l - L) \\ \rho \sin \beta &= r \sin b \end{aligned} \right\} \quad 6)$$

worin $\sin b = \sin v \sin i$ ist; aus $\sin b$ kann, da b ein mässiger Winkel ist, $\cos b$ genügend sicher bestimmt werden.

$(\lambda - L)$ ist die parallel zur Ekliptik, β (die geocentrische Breite) die senkrecht zur Ekliptik stattfindende Elongation; man findet demnach die totale Elongation ψ als Hypotenuse des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes aus

$$\cos \psi = \cos(\lambda - L) \cos \beta. \quad 7)$$

Es ist nun zu untersuchen, wie weit die Neigung für ein gegebenes q ansteigen darf, wenn der Komet, ausser auf der West- und Ostseite der Sonne, auch noch auf der Nord- und Südseite der Ekliptik unsichtbar bleiben soll.

Solange die Neigung klein ist, sind die Bewegungsumstände fast dieselben wie für $i = 0$. Der Komet erreicht also einige Zeit nach dem Perihel auf der Ostseite ein Maximum und tritt sodann mit der Sonne in Conjunction, aber jetzt unter einer von Null verschiedenen geocentrischen Breite, und diese habe ich zunächst ins Auge gefasst.

Da während der Conjunction sowohl $l - L = 0$ als $\lambda - L = 0$ ist, so hat man für diesen speciellen Fall zur Bestimmung von ϱ und β aus r und v die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho \cos \beta &= r \cos b + R \\ \varrho \sin \beta &= r \sin b \end{aligned}$$

worin wie früher $\sin b = \sin v \sin i$ und von $\sin b$ mittelst der trigonometrischen Tafeln gleich der Übergang auf $\cos b$ auszuführen ist.

Es handelt sich nun um die Beziehung zwischen dieser geocentrischen Breite und der zugehörigen Neigung der Bahn. Ein einfacher und für mässige Neigungen doch ziemlich richtige Resultate liefernder Ausdruck ergibt sich durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \sin b}{r \cos b + R} = \frac{r \sin v \sin i}{r \cos b + R} \quad 8)$$

aus der man erhält:

$$\sin i = \operatorname{tg} \beta \frac{r \cos b + R}{r \sin v}$$

oder in erster Annäherung:

$$i = \beta \frac{r+1}{r \sin v}.$$

Wird noch r durch $\frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}$ ersetzt, so resultirt

$$i = \beta \frac{1 + \frac{\cos^2 \frac{v}{2}}{2}}{\sin v} \quad 9)$$

worin — der Conjunction wegen — v an die Bedingung gebunden ist:

$$v = mt.$$

Ein vorläufiger Werth von t , der dieser Bedingung für ein vorgelegtes q genügt, kann aus Tabelle I, letzte Columnne, genommen werden, d. h. man ermittelt eigentlich in erster Annäherung die Zeit der Conjunction mit der Sonne unter der Voraussetzung $i = 0$ und identificirt die zugehörige wahre Anomalie mit der, welche für die gesuchte Neigung stattfinden würde, was eben so mehr zutrifft, je kleiner diese Neigung ist.

Ist ein Näherungswerth für i ermittelt, so kann also, da die Zeit der Conjunction noch nicht bekannt ist, mit dem aus mt folgenden t die Rechnung begonnen werden. Hat man v bestimmt, so bestimmt man $(l - \Omega)$ aus 5) und untersucht, ob die Differenz $(l - \Omega) - mt$ gleich Null ist. Da dies in der Regel nicht der Fall ist, rechnet man für ein in der Nähe befindliches t in derselben Weise, worauf man, die Änderungen der Differenzen proportionalnehmend, schon ziemlich genau jenes t findet, welches der Bedingung $(l - \Omega) = mt$ genügt, d. h. also jenem Zeitpunkt, in welchem der Komet unter Annahme der Neigung i in Conjunction mit der Sonne ist. Hierauf ergibt sich β aus 8).

Reicht β von 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$, welche beiden Werten gemeinschaftlich β^0 heissen mögen, ab, so erhält man, die Änderungen der Breite und der Neigung proportional voraussetzend, die gesuchte Neigung i^0 schon hinreichend genau aus

$$i^0 = i \frac{\beta_0}{\beta}$$

oder auch aus dem differentiellen Verhältniss

$$di = d\beta \frac{\rho \cos \beta}{r \sin v \cos i},$$

welches aus der Gleichung

$$\rho \sin \beta = r \sin v \sin i$$

resultirt, wenn man darin nur β und i als variabel betrachtet, die anderen Grössen (v, r, ρ) dagegen als constant gelten lässt, was natürlich um so eher zutrifft, je weniger i und damit auch β geändert wird.

Auf diese Weise ist das Schema V entstanden, welches jene Neigungen enthält, für welche ein Komet, der im Perihel mit der Sonne in oberer Conjunction sich befindet, die zweite Conjunction unter der geocentrischen Breite 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ passirt.

Alle Zahlen sind direct nachgerechnet, wobei sich herausstellte, dass die durch Näherung gefundenen Werthe für i nirgends mehr als um einen halben Grad von dem wirklichen abweichen. Beigesetzt ist jedesmal der Zeitpunkt t , in welchem der Komet die zweite Conjunction passirt, ebenso die Lichtintensität J .

log q	$\beta = 15^\circ$			$\beta = 22\frac{1}{2}^\circ$		
	t	i	J	t	i	J
0.00	73	25°	0.06	—	— $^\circ$	—
9.96	88	24	0.05	$86\frac{1}{2}$	$35\frac{1}{2}$	0.05
9.92	98	23	0.04	$99\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{2}$	0.04
9.88	106	23	0.03	109	35	0.03
9.84	113	$23\frac{1}{2}$	0.02	$116\frac{1}{2}$	$35\frac{1}{2}$	0.02
9.80	119	24	0.02	123	$36\frac{1}{2}$	0.02

V)

Nimmt man also zwischen $\log q = 0.00$ und 9.80 (eigentlich noch etwas weiter herab) die Neigung der Bahn zu etwa 24° , so beträgt die geocentrische Breite während der zweiten Con-

junction 15° und für eine Neigung von etwa 35° (nahe proportional) $22\frac{1}{2}^\circ$. Hier sind die Verhältnisse für alle q fast dieselben; geht man aber mit q über 1 hinaus, so gibt wohl die Näherungsformel 9) für die Neigung sehr rasch zunehmende Werthe, die sich jedoch bei directer Nachrechnung als illusorisch erweisen. Es zeigt sich nämlich, dass es nicht mehr möglich ist, durch Vergrößerung der Neigung i die geocentrische Breite β auf $22\frac{1}{2}^\circ$ oder 15° steigen zu lassen.

Man sieht, dass schon die Tabelle V für $\log q = 0.00$ in der zweiten Hälfte (für $\beta = 22\frac{1}{2}^\circ$) keine Werthe mehr enthält; dies hat seinen Grund darin, dass die während der zweiten Conjunction stattfindende Breite, wie man auch die Neigung annehmen mag, über ein gewisses Maximum nicht mehr hinaufzubringen ist.

Ich habe mir nun nebenbei auch die Aufgabe gestellt, die Größe dieses Maximums der Breite für etliche q zu bestimmen; nach einigen Versuchen, d. h. durch mehrmalige Anwendung des auf Seite 1119 untere Hälfte beschriebenen Verfahrens, wurde gefunden:

$\log q$	t	i	β
0.00	58	41°	21°
0.02	52	35	16
0.04	43	30	12

VI)

Diese Zahlen sind so zu verstehen. Rechnet man, mit kleinen Werthen von i beginnend und allmähig aufwärts steigend, die geocentrischen Breiten während der zweiten Conjunction, so erhält man dieselben z. B. für $\log q = 0.00$ nur so lange, bis man bei $i = 41^\circ$ angelangt ist, und zwar ist der zugehörige Werth $\beta = 21^\circ$; geht man aber mit i weiter aufwärts, so nehmen die Breiten schon wieder ab. Das Maximum der Breite tritt also nach dem Perihel ein. Ganz dasselbe gilt für die zweite Zeile in VI. Liesse man endlich die Neigung für das dritte q noch weiter ansteigen, so würde man soweit gelangen, dass die östliche Elongation gar nicht mehr stattfindet, sondern

der Komet gleich auf der Westseite hervortritt; dies geschieht dann, wenn der aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} (l - \Omega) = \operatorname{tg} v \cos i$$

resultirende Werth von $(l - \Omega)$ für jedes t kleiner als mt ausfällt.

In diesem allgemeineren Falle ist der schon früher behandelte enthalten. Setzt man nämlich hier $i = 0$, so ist $(l - \Omega) = v$ und die Bedingung, dass der Komet auf der Ostseite nicht zum Vorschein kommen soll, lautet: $v < mt$, wie früher. Was also für $i = 0$ erst dann eintritt, wenn $\log q > 0.10$ ist, tritt, wenn i einen von Null verschiedenen Werth hat, auch schon für etwas kleinere q ein.

Je grösser nun q ist, um so kleiner wird, wie man in VI angedeutet sieht, jenes i sein dürfen, welches bewirkt, dass $(l - \Omega) < mt$ wird, d. h. also, dass der Komet gar nicht mehr auf der Ostseite, sondern gleich auf der Westseite zum Vorschein kommt.

Für diese grösseren Werthe von q wäre es angezeigt, die in der Neigung zulässigen Grenzen unter der Bedingung zu ermitteln, dass gleichzeitig auch der Knoten, etwa gemeinschaftlich mit π verschoben würde, und zwar so, dass das Maximum der östlichen Elongation, welches unter der Annahme $\pi = L_0$ hier schon sehr klein ist, weiter nach Osten rückt, etwa bis 15° . Diese Arbeit habe ich jedoch unterlassen, hauptsächlich darum, weil solche Kometen weniger Interesse bieten, da sie der grossen Radii vectores wegen nur dann eine bedeutendere theoretische Helligkeit erlangen können, wenn sie zur Zeit des Perihels in sehr beträchtlichen Elongationen sich befinden, etwa in der Quadratur oder gar in der Opposition, während die vorliegende Untersuchung nur den Fall zu betrachten hat, dass der Komet nahe in Conjunction mit der Sonne steht. Später wird sich zeigen, dass in der That noch kein Komet mit parabolischer Bahn unter solchen Verhältnissen beobachtet wurde, welche den hier behandelten gleichen.

Die zuletzt betrachteten Elongationen finden nördlich oder südlich von der Sonne statt. So lange nun der Werth von q nicht weit unter 1 heruntersinkt, bleibt der Komet wirklich, wie man durch directe Berechnung einer Reihe von Positionen findet, auf dem ganzen Wege vom Perihel bis zur Passage der vorgeschriebenen Elongation innerhalb des „Strahlenkreises“, worauf

sich seine, beim Heraustreten ungefähr 0·06 betragende Helligkeit immer mehr vermindert; er wird somit nicht gesehen.

Geht man aber mit q weiter abwärts, so gelangt man von einem gewissen Punkte an zu solchen Stellen, an welchen er zwar noch immer die Conjunction mit der Sonne unter der vorgeschriebenen Breite passirt, seine grösste Elongation aber schon früher, nämlich in dem Quadranten zwischen dem Nord- und Ostpunkte erreicht und zwar in einem Abstand von der Sonne, der bereits mehr als 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$ beträgt. Er tritt also hier einige Zeit aus dem Strahlenkreise heraus, während gleichzeitig seine Helligkeit von 0·20 bis 0·06 herabsinkt, also theilweise noch immer zu gross ist.

Rechnet man z. B. mit $\log q = 9\cdot84$ und $i = 35^\circ 0'$ für eine Reihe von Tagen die Elongationen (nach den Gleichungen 6), so erhält man in der Nähe des Maximums folgende Zahlen:

t	$\lambda - L$	β	ψ	J
65	14° 41'	21° 7'	25° 31'	0·099
66	14 36	21 12	25 32	0·096
67	14 30	21 16	25 33	0·093
68	14 24	21 20	25 33	0·090
69	14 18	21 24	25 32	0·087
70	14 10	21 27	25 31	0·084.

ψ ergibt sich aus $(\lambda - L)$ und β durch die Relation 7).

Da ψ nur ein mässiger Winkel ist und somit die Bestimmung von ψ aus $\cos \psi$ unsicher wäre, habe ich noch die Formeln benützt

$$\sin \psi \cos P = \sin(\lambda - L) \cos \beta$$

$$\sin \psi \sin P = \sin \beta$$

in P jener Winkel ist, unter welchem der den Kometen mit Sonne verbindende Bogen gegen die Ekliptik geneigt ist.

Der Komet tritt also, wie die Werthe von ψ in diesem kleinen Auszug lehren, über den Strahlenkreis, dessen Radius $0'$ beträgt, um $3^\circ 3'$ heraus. Die Helligkeiten sind zwar hier mehr besonders gross, haben jedoch für kleinere t , also wenn der Komet von $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ bis $\psi = 25\frac{1}{2}^\circ$ wandert (im **na** nicht enthalten), noch beträchtliche Werthe.

Man muss daher, wenn der Komet hier nicht zum Vorschein kommen soll, einen Theil der im Schema V enthaltenen Neigungen herabdrücken, und es ist zu diesem Zweck vorerst das Verhältniss zwischen ψ und i zu suchen.

Da an dieser Stelle, abgesehen von den Distanzen, der Sinus der Elongation in Breite dem Sinus der Neigung proportional ist (Gleichungen 6), dagegen der Sinus der Elongation in Länge mit dem Cosinus der Breite multiplicirt ist, während gleichzeitig sowohl die Neigung und Breiten, als auch die Maxima der östlichen Elongation nur mässige Winkel sind, wird durch eine Änderung der Neigung hauptsächlich die Breite, sehr wenig dagegen die Länge beeinflusst. Man kann daher in der Gleichung 7) in erster Annäherung $\cos(\lambda-L)$ als constant betrachten und erhält, wenn man unter dieser Voraussetzung differenzirt:

$$\sin \psi \cdot d\psi = \cos(\lambda-L) \sin \beta \cdot d\beta.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der schon früher aufgestellten:

$$r \sin v \cos i \cdot di = \rho \cos \beta \cdot d\beta,$$

indem man $d\beta$ eliminirt, so ist

$$di = \frac{\rho \sin \psi}{r \sin v \cos i \cos(\lambda-L) \operatorname{tg} \beta} \cdot d\psi \quad 10)$$

$d\psi$ ist die Differenz zwischen ψ^0 (also 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$) und dem unter einer beliebigen Annahme für i abgeleiteten Werthe von ψ . Diese Formel habe ich nun zunächst auf das letzte Beispiel angewendet. Da in demselben, wenn $\psi^0 = 22^\circ 30'$ betragen soll, $d\psi = -3^\circ 3'$ ist und die Zahlenwerthe für alle anderen Grössen unmittelbar jener Berechnung entnommen werden können, welche zur Bestimmung von ψ geführt hat, lässt sich di sofort ermitteln. Es ergibt sich vorerst $di = -7^\circ$, somit als neuer Werth von $i = 35^\circ - 7^\circ = 28^\circ$, worauf bei abermaliger directer Rechnung der grössten Elongationen für ψ der Werth $22^\circ 34' 4$ resultirt, der also nur mehr um $4' 4$ zu gross ist. In Folge dieser bedeutenden Änderung hat sich aber auch der Zeitpunkt des Maximums verschoben; es findet nicht mehr bei $t = 67$ oder $t = 68$ statt, sondern für $t = 61$ oder $t = 62$;

es waren daher mehrere Columnen versuchsweise durchzurechnen, um die Zeit des Maximums zu finden. Bei nochmaliger Anwendung der Formel 10) ergibt sich $di = -11'$, also $i = 27^\circ 49'$, mit welchem Werth in der That genau $\psi = 22^\circ 30'$ wird.

Ausschlaggebend, weil am meisten veränderlich, erweist sich bei der Rechnung der Factor $\operatorname{tg} \beta$ im Nenner von 10).

Diese Berechnung ist schon etwas umständlicher als alle anderen bisherigen, weil hier die Formeln 6) ohne jede Vereinfachung zur Anwendung kommen, indem sowohl i als $(\lambda - L)$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt; ich habe sie übrigens nur für den äusseren Strahlenkreis gemacht.

Nach dem angedeuteten Vorgange sind nun die Werthe von i auch für die anderen Periheldistanzen bestimmt worden, wie sie sich in Tabelle VII vorfinden. Beigesetzt sind nebst den Helligkeiten auch die Winkel P , welche angeben, an welcher Stelle des Strahlenkreises, vom Ostpunkte nach Norden gezählt, das in Rede stehende Maximum $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ stattfindet (Positionswinkel), überes die beiden Katheten $(\lambda - L)$ und β , deren zugehörige Hypo-nuse eben ψ ist. Die wichtigsten Zahlen dieses Schemas sind natürlich in der Columnne i enthalten, und das sind also jene Neigungen, für welche die grösste Elongation ψ genau $22\frac{1}{2}^\circ$ trägt.

log q	t	i	$\psi = 22^\circ 5'$		P	J
			$\lambda - L$	β		
9·90	76	$34^\circ 2'$	$7^\circ 9'$	$21^\circ 1'$	70°	0·06
9·88	70	$32^\circ 7'$	$10^\circ 9'$	$19^\circ 8'$	62	0·08
9·86	65	$30^\circ 6'$	$13^\circ 3'$	$18^\circ 3'$	55	0·10
9·84	61	$27^\circ 8'$	$15^\circ 5'$	$16^\circ 5'$	48	0·11
9·82	58	$24^\circ 2'$	$17^\circ 6'$	$14^\circ 3'$	41	0·12
9·80	55	$19^\circ 5'$	$19^\circ 5'$	$11^\circ 5'$	32	0·14
9·78	52	$12^\circ 0'$	$21^\circ 4'$	$7^\circ 0'$	18	0·15

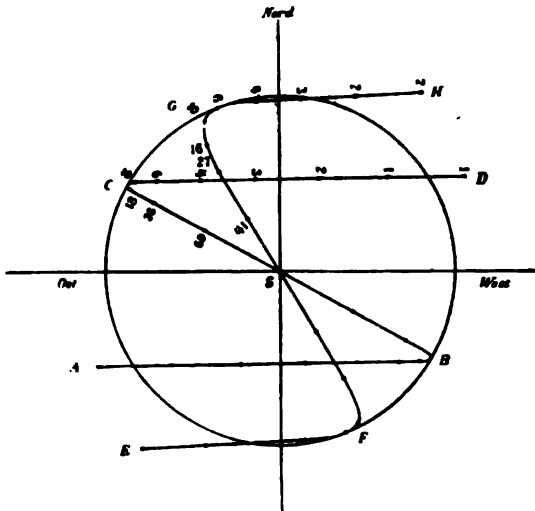
VII)

Man sieht, dass die Neigung, während sie für $\log q = 9\cdot90$ 34° betragen darf, für kleinere Periheldistanzen immer

rascher vermindert werden muss, wenn der Komet beim Maximum nicht über den Strahlenkreis mit dem Radius $22\frac{1}{2}^\circ$ hinausgehen soll. Geht man mit $\log q$ bis 9.768 herab, so ist man ohnehin schon an jener Stelle angelangt, wo, wie wir bereits wissen, nur mehr $i = 0$ zulässig ist. Für noch kleinere Periheldistanzen ginge der Komet schon für $i = 0$ über $22\frac{1}{2}^\circ$ hinaus.

Solange P nicht besonders gross ist, findet eine scharfe Berührung des Kometenweges mit der Peripherie des Strahlenkreises statt. Rückt aber die Berührungsstelle weiter von der Ekliptik weg, d. h. wird P grösser, so streicht der Komet einige Zeit an der Peripherie hin und verlässt sie sodann für immer, ohne vorerst noch beträchtlich ins Innere des Kreises zurückgekehrt zu sein. Das Maximum von ψ und die Durchschneidung des Strahlenkreises verschwimmen also allmählig in einander, wenn P gegen 90° ansteigt, was für $\log q > 9.90$ rasch erreicht ist. Hier ist die östliche Elongation ($\lambda - L$) nur mehr gering, dagegen jene Breite β , welche während des Maximums von ψ statthat, beinahe so gross wie ψ selbst. Da sonach der Komet zwischen dem Ost- und Nordpunkt in keinem erheblichen Grade mehr heraus-treten kann, sind von jetzt an, also von etwa $\log q = 9.92$ auf-

Fig. 1.



wärts, für i wirklich die früheren Werthe zulässig, wie sie im Schema V (freilich nur für zwei specielle Werthe von q) aufgestellt sind. Von der zugehörigen Helligkeit J ist auch nichts zu besorgen, da sie nur gering ist.

Um diese Auseinandersetzungen deutlicher zur Anschauung zu bringen, habe ich für die beiden Fälle

$$\begin{aligned} 1) \log q &= 9.80, & i &= 19^\circ 30' \\ \text{und } 2) \log q &= 9.90, & i &= 34^\circ 10' \end{aligned}$$

den Lauf des Kometen gerechnet und in Fig. 1 dargestellt. Die Sonne, bildet den Mittelpunkt des Strahlenkreises mit dem Radius $22\frac{1}{2}^\circ$; ein Grad grössten Kreises ist = 1 Millimeter gewählt. Der Kreis nimmt nicht einen bestimmten Ort am Himmel an, sondern wandert mit der Sonne stetig weiter, während sich der Komet relativ zur Sonne auf einer der beiden ∞ -förmigen Curven bewegt. Da sich der Komet während des Perihels in der Conjunction mit der Sonne befinden soll, fällt S mit dem Perihel zusammen, und da er hier zugleich durch den aufsteigenden Knoten gehen soll, durchläuft er die beiden Curven von unten nach oben.

Die Rechnung wurde in 16tägigen Intervallen geführt; die Intensitäten sind dem Weg des Kometen beigegeben, und um ganze Zahlen verwenden zu können, die Werthe 100 J . Im ersten Beispiel, nämlich $\log q = 9.80$ und $i = 19^\circ 30'$ ist die Curve $ABSCD$ an; sie berührt den Kreis ziemlich scharf, und da J beim Heraustreten aus dem Kreis (bei D), also beim Hineintreten (bei A) nur 0.01 beträgt, ist ein Sichtbarwerden nicht zu erwarten. Die Curve $EFGH$ entspricht der Neigung 2); sie berührt den Kreis nicht mehr so scharf, sondern nur an der Peripherie hin, während die Werthe von J zwischen 0.02 und 0.03 sich befinden. Da demnach hier der Komet sichtbar werden könnte, dürfte man, um dies zu verhindern, für die Neigung i nicht, wie es hier der Fall ist, bis 34° ansteigen lassen, sondern müsste sie kleiner wählen.

Die beiden Endpunkte der ersten Curve, A und D , gehören bestimmten Zeitpunkten an, deren jeder $10 \times 16 = 160$ Tage vom Perihel entfernt liegt; für die Endpunkte der zweiten Curve, E und H ,

ist dieser Betrag $9 \times 16 = 144$ Tage. Die erste Curve zeigt daher den Lauf des Kometen relativ zur Sonne während eines Zeitraumes von 320, die zweite von 288 Tagen.

Da S mit dem Perihel zusammenfällt, lehrt der Anblick der Zeichnung, dass die hier dargestellten Umstände das Unsichtbarbleiben des Kometen am meisten begünstigen, indem die Partien vor und nach dem Perihel an ihrer geocentrischen Stellung zur Sonne ganz denselben Antheil nehmen. Jede Verschiebung würde das Verborgensein zwar auf der einen Seite noch leichter, auf der anderen dagegen noch schwieriger machen, und dieser Fall, dass der Komet auf dem einen Ast seiner Bahn fast gar nicht, auf dem anderen aber um so besser gesehen wird, muss hier ausser Acht gelassen werden.

Drehung der Bahnaxe aus der Ekliptik.

Die Bahnaxe wurde bis jetzt immer in der Ekliptik liegend angenommen, und es soll nur in Kürze noch angedeutet werden, wie weit man von dieser Forderung abgehen darf. Zu diesem Zweck drehen wir, wie es schon in der Einleitung geschehen ist, die Bahn aus der Ekliptik heraus, fassen aber jetzt nicht so sehr die Intensitäten als vielmehr die Elongationen ins Auge.

Beschäftigen wir uns einen Augenblick mit dem Perihel, wo also $r = q$ ist. Da der Parameter in der Ekliptik bleiben, also $\pi - \Omega = \pm 90^\circ$, und der Komet im Breitenkreis der Sonne sich befinden soll, haben wir wieder das ebene Dreieck zwischen Erde, Sonne und Komet vor uns, worin aber jetzt nicht J , sondern der der Seite r gegenüber liegende Winkel, die vorgeschriebene Elongation ψ , als gegeben zu betrachten ist, während der der Seite ρ gegenüberliegende Winkel bestimmt werden soll; das Supplement dieses Winkels ist sodann $= b_0$. Da $\pi - \Omega = \pm 90^\circ$, so ist hier, abgesehen vom Vorzeichen, b_0 identisch mit i .

Als im vorigen Abschnitt bloß die Neigung geändert wurde, befand sich der eine Parabelast ebenso weit über, wie der andere unter der Ekliptik, da die Bahnaxe in der Ekliptik liegen blieb; bei der jetzigen Änderung werden aber beide Äste gemeinschaftlich und zwar in demselben Maass über oder unter die Ekliptik gedreht.

Man findet nun aus dem angedeuteten Dreieck, wenn $\psi = 15^\circ$ sein soll, u. a. folgende Werthe:

für $\log q = 0.10$	$b_0 = 27^\circ$
0.00	30
9.90	34
9.80	39.

Dieser Winkel dürfte also, wenn blos der Moment des Perihels in Betracht käme, die Bahnaxe mit der Ekliptik bilden, damit die, unserer Annahme gemäss nördlich oder südlich von der Sonne stattfindende Elongation 15° beträgt; die Winkel wachsen mit abnehmender Periheldistanz.

In Wirklichkeit sind aber diese Zahlen, da sie blos für einen einzigen Punkt der Bahn gelten, ohne Werth; denn obgleich die Elongation gerade hier die vorgeschriebene Grösse hat, würde der Komet doch, ähnlich wie wir es bei der Neigung gesehen haben, wenn auch nicht auf der Nord- oder Südseite, so doch an einer anderen Stelle der Peripherie des Strahlenkreises und namentlich beim Maximum der östlichen Elongation heraustreten.

Früher, als $b_0 = 0$ war, ging der Komet während der Wanderung von der Sonne bis zur grössten Elongation und von da zurück auf einem Durchmesser des Strahlenkreises; jetzt aber, wo er sich etwas über oder unter der Ekliptik befindet, kann sein Weg als eine diesem Durchmesser parallele Sehne betrachtet werden, deren Länge, da das Maximum der Elongation im gegenwärtigen Falle von dem früheren, für $i = 0$, also auch für $b_0 = 0$ geltenden nur wenig abweichen kann, ungefähr dieselbe ist wie früher.

Zieht man in einem Kreis eine Sehne, die dem Durchmesser an Länge gleich ist, so geht sie über die Peripherie hinaus, und zwar um so mehr, je weiter man sich von der Mitte des Kreises entfernt, also in unserem Falle, je grösser b_0 ist. Andererseits kann aber eine Sehne, an welche die Forderung geknüpft ist, dass ihre Endpunkte gerade auf der Peripherie liegen sollen, um so weiter vom Mittelpunkt abstehen, je kürzer sie ist. Dies vorausgeschickt, stellen wir nun, indem wir uns Tabelle I vor Augen halten, die Forderung, dass die grösste Elongation, auch wenn b_0 einen von Null verschiedenen Werth hat, nur 15° betragen soll. Diese Forderung kann aber erst für $\log q > 9.87$ erfüllt werden,

wobei dann b_0 um so grösser sein darf, je weiter wir mit q aufwärts gehen, weil auf diese Weise die Maxima der östlichen Elongationen, also die Sehnen, immer mehr abnehmen und daher auch die Gefahr, dass der Komet über die Peripherie des Strahlenkreises heraustritt, immer kleiner wird. Ist man endlich bei $\log q = 0.10$ angelangt, wo gar keine östliche Elongation mehr stattfindet, so ist für b_0 jener Werth zulässig, den wir soeben bei Betrachtung eines einzigen mit der Sonne in Conjunction befindlichen Punktes gefunden haben, nämlich $b_0 = 27^\circ$.

Wir sind also zu dem Schluss gelangt, dass b_0 , wenn $\psi = 15^\circ$ sein soll, successive alle Werthe von 0° bis 27° annimmt, während $\log q$ von 9.87 bis 0.10 steigt.

Rechnet man aber auch noch die Helligkeiten J , so findet man, dass für $\log q = 0.10$ und $b_0 = 27^\circ$ zu jener Zeit, wenn der Komet die Peripherie des Strahlenkreises passirt, noch immer $J = 0.13$ ist. Soll dieser ziemlich grosse Werth so zu sagen ungefährlich werden, so darf eben die Bahnaxe nicht einmal so weit aus der Ekliptik gedreht werden, als es hier angedeutet wurde.

Würde man nur den äusseren Strahlenkreis ($\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$) in Betracht ziehen, so könnte die Axe schon von $\log q = 9.77$ an aus der Ekliptik gedreht werden, und es könnte z. B. für $\log q = 0.10$ der Winkel b_0 bereits auf 40° steigen, so lange man für die Unsichtbarkeit nur die Elongationen ins Auge fassen wollte. Da aber hier, wie man gleichfalls durch Rechnung findet, die Helligkeit noch immer 0.14 ist, so darf von der Bedingung, dass b_0 klein bleiben soll, nicht so weit abgegangen werden. Wir können vielleicht als durchschnittliche Grenze $b_0 = 30^\circ$ wählen. Weitere Ausführungen und nähere Ermittlung von b_0 unterlasse ich, da die Verhältnisse bei wachsendem q ziemlich dieselben sind, wie sie sich bei der Neigung gezeigt haben.

Der erste Fall kann nun als erledigt angesehen werden. Ich habe zuerst jene Verhältnisse untersucht, welche das Verborgenbleiben des Kometen am meisten fördern, und hierauf drei Änderungen vorgenommen. Die Bahn wurde 1. in ihrer eigenen Ebene und der Ekliptik gedreht (π geändert), 2. um die Bahnaxe gedreht (i geändert) und 3. um den Parameter gedreht (b_0 und damit auch i geändert). Jede Variation wurde einzeln vorgenommen;

sie betraf, abgesehen von q , immer nur eines dieser Bahnelemente, während die übrigen jene Werthe behielten, welche das Sichtbarwerden am leichtesten verhindern. Da sich nun gezeigt hat, dass schon unter diesen speciellen Voraussetzungen keine bedeutende Variation zulässig ist, so leuchtet ein, dass bei gleichzeitiger Änderung mehrerer Elemente von der idealen Grundbedingung noch weniger abgegangen werden darf. Es können daher die hier abgeleiteten Zahlen sämmtlich nur als obere Grenzen gelten.

Über die Lage des Knotens habe ich eine genauere Untersuchung nicht angestellt, da schon aus der Forderung der Symmetrie zur Genüge hervorgeht, dass der Komet während seiner Conjunction mit der Sonne nicht nur im Perihel, sondern auch im (auf- oder absteigenden) Knoten sich befinden soll, dass jedoch von dieser Forderung um so mehr abgegangen werden darf, je kleiner die Neigung ist. Übrigens ist dieser Satz auch schon in der Bedingung enthalten, dass $\sin(\pi - \Omega) \sin i$ eine kleine Grösse sein soll.

Man kann also für die Knotenlänge die Bedingung aufstellen, dass für die grösste zulässige Neigung ($i = 35^\circ$) nahezu $\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = L_0$ sein soll, dass man sich aber mit abnehmender Neigung von dieser Bedingung mehr und mehr entfernen darf.

II. Fall.

Komet im Perihel diesseits der Sonne.

Unter dieser Voraussetzung ist die heliocentrische Länge des Perihels $l_0 = L_0 \pm 180^\circ$, also identisch mit der zur Zeit des Perihels stattfindenden heliocentrischen Länge der Erde; die Bahnaxe wird vorerst wieder in der Ekliptik liegend angenommen.

Da in dem jetzigen Falle retrograde Bewegungen eine grosse Rolle spielen werden, scheint es nicht unnütz, daran zu erinnern, dass das Bahnelement π etwas ganz anderes bedeutet, als die „heliocentrische Länge des Perihels“, welche wir hier mit l_0 bezeichnet haben.

Im I. Fall, wo nur directe Bewegungen in Betracht kommen und die Neigung sich nicht allzuweit von 0° entfernt, ist es gestattet, behufs einer vorläufigen Untersuchung π mit l_0 zu iden-

tificiren, jetzt aber nicht mehr. Da nun hier nicht das Element π , sondern l_0 gemeint ist, sollen die Formeln, welche zur Bestimmung der heliocentrischen Länge und Breite des Perihels, l_0 und b_0 , dienen, hieher gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} \cos b_0 \cos l_0 &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \cos b_0 \sin l_0 &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin b_0 &= \sin \omega \sin i \end{aligned} \right\} \quad 11)$$

oder auch, wenn man die Längen von Ω aus zählt:

$$\left. \begin{aligned} \cos b_0 \cos(l_0 - \Omega) &= \cos \omega \\ \cos b_0 \sin(l_0 - \Omega) &= \sin \omega \cos i \\ \sin b_0 &= \sin \omega \sin i \end{aligned} \right\} \quad 12)$$

Die dritte dieser Gleichungen hat ohnehin schon mehrfache Anwendung gefunden.

Ist nun q sehr klein, so kann die Neigung der Bahn auf die Sichtbarkeit nur wenig Einfluss haben, indem alle Bahnen, welche einem bestimmten Rotationsparaboloid als Erzeugungslinie dienen, ziemlich dieselbe Erscheinung darbieten. Mit wachsendem q ändern sich jedoch die Verhältnisse sehr rasch, und bald kommt man zu einer Stelle, an der man beginnen muss die Neigungen mehr und mehr zu beschränken, wenn der Komet unsichtbar bleiben soll. Zuerst sind Neigungen in der Nähe von 0° auszuschliessen, hierauf Neigungen von 90° u. s. f., so dass endlich, wenn q noch weiter ansteigt, für unsere Zwecke nur mehr Neigungen, die grösser als 90° sind, somit retrograde Bewegungen übrig bleiben.

Die Grösse der Sonnenkugel zieht übrigens eine scharfe Grenze, unter welche q nicht sinken kann. Untersuchen wir zuerst diesen minimalen Werth, setzen wir also q gleich dem Radius der Sonne, also $\log q = 7.668$. Ich habe für i drei Annahmen gemacht, nämlich $i = 0^\circ, 90^\circ$ und 180° . Die Rechnung geschieht wieder nach den Gleichungen 6) beziehungsweise 1), worin nur $(l-L)$ von Fall zu Fall anders zu ermitteln ist.

$$i = 0^\circ.$$

Hier ist

$$l = L_0 + 180^\circ + v$$

und da

$$L = L_0 + mt$$

so ist

$$l - L = 180^\circ + v - mt.$$

Man findet nun, wenn man für eine Reihe von t die Elongationen ψ und die Intensitäten J berechnet und die letzteren für $\psi = 15^\circ$ und $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ interpolirt, dass der Komet 24 Tage nach dem Perihel die westliche Elongation von 15° mit $J = 0.36$ passirt und 35 Tage nach dem Perihel die Elongation von $22\frac{1}{2}^\circ$ mit $J = 0.18$.

$$i = 90^\circ.$$

Jetzt kommen die Gleichungen 6), welche auch b enthalten, zur Anwendung. Für $i = 90^\circ$ ist nun

$$\sin b = \sin r$$

ferner

$$\cos b = \cos r, \text{ wenn } v < 90^\circ$$

$$\cos b = -\cos v, \text{ wenn } v > 90^\circ,$$

da $\cos b$ immer positiv bleiben muss. Die heliocentrische Länge ist constant und zwar

$$l = L_0 + 180^\circ, \text{ wenn } v < 90^\circ$$

$$l = L_0, \text{ wenn } v > 90^\circ.$$

Da bei einer so kleinen Periheldistanz für unseren Zweck nur $v > 90^\circ$ Interesse hat, ist zu setzen:

$$l - L = -mt.$$

Es ergibt sich nun, dass der Komet die Elongation von 15° nach 30 Tagen mit $J = 0.23$ und die Elongation von $22\frac{1}{2}^\circ$ nach $40\frac{1}{2}$ Tagen mit $J = 0.13$ passirt und zugleich 4° über die Ekliptik hinaustritt.

$$i = 180^\circ.$$

Jetzt ist

$$l = L_0 + 180^\circ - r$$

da ferner

$$L = L_0 + mt,$$

so ist

$$l-L = 180^\circ - v - mt.$$

Unter der jetzigen Annahme geht der Komet zuerst etwas auf der Ostseite heraus, sodann hinter der Sonne vorbei und passirt die westliche Elongation von 15° nach $35\frac{1}{2}$ Tagen mit $J = 0.16$ und die Elongation von $22\frac{1}{2}^\circ$ nach $45\frac{1}{2}$ Tagen mit $J = 0.10$.

Soll demnach ein Komet mit der kleinstmöglichen Periheldistanz für jede Neigung verborgen bleiben, so müsste seine Constitution eine derartige sein, dass er für $\psi = 15^\circ$ bei einer Helligkeit zwischen 0.16 und 0.36 nicht wahrgenommen werden kann, oder, falls $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ gewählt wird, dass er bei $J = 0.10$ bis $J = 0.18$ nicht mehr zu bemerken ist.

Für $\log q = 8.00$ habe ich die Rechnung ebenfalls durchgeführt und die Verhältnisse natürlich von den vorigen nicht wesentlich verschieden gefunden. Geht man aber mit q weiter aufwärts, so gestalten sich die Umstände schon bedeutend anders; betrachten wir z. B. $\log q = 9.00$.

Ist $i = 0^\circ$, so erreicht der Komet schon nach 6 Tagen die westliche Elongation von 15° mit $J = 9.4$ und die von $22\frac{1}{2}^\circ$ nach 15 Tagen mit $J = 1.6$, muss also ohne Zweifel gesehen werden.

Ist $i = 90^\circ$, so passirt er $(\lambda-L) = -15^\circ$ nach 33 Tagen mit $J = 0.27$ und $(\lambda-L) = -22\frac{1}{2}^\circ$ nach 44 Tagen mit $J = 0.15$, steigt aber gleichzeitig schon bis zu $20^\circ (= \beta)$ über die Ekliptik hinaus, so dass die totale Elongation ψ bereits 24° , beziehungsweise 29° ist; diese Annahme kann man also auch nicht mehr zulassen.

Ist aber $i = 180^\circ$, so tritt der Komet vorerst auf der Ostseite bis 14° heraus, worauf seine Helligkeit beim Herausrücken auf der Westseite nur mehr 0.06 beträgt. Jetzt entschlüpft er uns also fast mit Gewissheit, wenn er nicht etwa ausnahmsweise während der kurzen Zeit, in welcher er das Maximum der östlichen Elongation mit $J = 4.0$ passirt, bemerkt wird.

Für diese letzte Annahme, retrograde Bewegung, welche somit bei kleinen Periheldistanzen das meiste Interesse bietet, habe ich die Rechnungen ausführlicher gemacht.

Vorerst theile ich die Tabelle VIII mit, welche unter der Annahme $i = 180^\circ$ für eine Reihe von speciellen Werthen der Periheldistanz die Maxima der östlichen Elongation sammt dem zugehörigen t enthält, welchen Zahlen für $(\lambda - L) > 15^\circ$ auch J beigefügt ist. Da sich die Distanzen hier mit der Zeit sehr rasch ändern und der Zeitpunkt der grössten Elongation nicht scharf zu bestimmen ist, kann auch J nicht streng gegeben werden; es wurde daher nur eine Decimale angesetzt. Ausserdem wurden die Helligkeiten für jene Tage berechnet, an denen der Komet die westlichen Elongationen 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ passirt. Damit die Werthe der grössten Elongationen gleichmässiger weiter schreiten, ist hier nicht mehr $\log q$, sondern q selbst als Argument gewählt.

q	Ostseite			Westseite			
	Maximum			$(\lambda - L) = -15^\circ$		$(\lambda - L) = -22\frac{1}{2}^\circ$	
	t	$(\lambda - L)$	J	t	J	t	J
0.00	—	—		29.7	0.227	40.3	0.128
0.02	$4\frac{1}{2}$	$5^\circ 43'$		41.4	0.118	51.3	0.079
0.04	6	8 26		46.1	0.098	55.8	0.068
0.06	7	10 33		49.8	0.087	59.3	0.061
0.08	8	12 22		52.8	0.079	62.2	0.057
0.10	$8\frac{1}{2}$	13 59		55.5	0.073	64.8	0.054
0.12	9	15 28	3.8	58.0	0.069	67.2	0.052
0.14	10	16 51	3.5	60.2	0.066	69.4	0.050
0.16	11	18 10	3.3	62.3	0.063	71.4	0.048
0.18	$11\frac{1}{2}$	19 26	3.1	64.3	0.060	73.3	0.046
0.20	12	20 38	3.0	66.2	0.057	75.1	0.044
0.22	$12\frac{1}{2}$	21 49	2.9	68.0	0.055	76.9	0.043
0.24	13	22 58	2.8	69.7	0.054	78.6	0.042

VIII)

Nach dem in dieser Abhandlung üblichen Vorgang gibt die Tabelle zunächst nur die nach dem Perihel geltenden Sichtbarkeitsverhältnisse; die Zahlen liefern aber ebenso gut auch die Umstände vor dem Perihel, wenn nur die Vorzeichen von t und $(\lambda - L)$ gleichzeitig geändert werden, wodurch Ost- und Westseite einfach ihre Stellen vertauschen.

Um für ganz kleine Periheldistanzen das Schema vollständig ausführen zu können, ist noch der ideale Fall $q = 0.00$ mit aufgenommen, welcher eine geradlinige Bewegung des Kometen zum und vom Sonnenmittelpunkt voraussetzt. Die heliocentrische Länge ist hier ähnlich wie für $i = 90^\circ$ constant und zwar durchaus $l = L_0$, so dass also $l - L = -mt$ zu setzen ist. Die Werthe für den Radius vector r sind aus der „Tabula lapsus parabolici cometarum in solem“ in Lambert's „Insigniores orbitae cometarum proprietates“ genommen, können jedoch fast ebenso schnell direct berechnet werden durch die Formel

$$r^3 = \frac{(3kf)^2}{2}$$

oder

$$r = \frac{(3k)^{2/3}}{2^{1/3}} \cdot t^{2/3},$$

worin

$$\log \frac{(3k)^{2/3}}{2^{1/3}} = 9.04146 - 10$$

ist.

Die Tabelle VIII lehrt nun u. a. folgendes. Für grössere q (etwa 0.18 bis 0.24) lassen zwar die auf der Westseite stattfindenden sehr geringen Helligkeiten ein Sichtbarwerden nicht erwarten, dafür werden aber die Maxima von $(\lambda - L)$ auf der Ostseite schon zu gross, während gleichzeitig die zugehörigen Helligkeiten sehr bedeutende Werthe haben (3.1 bis 2.8). Für ganz kleine q werden dagegen die Helligkeiten auf der Westseite grösser als 0.06.

Ein geradlinig sich bewogender Komet, also mit der idealen Periheldistanz Null, müsste sichtbar werden, da er beim Passiren der Elongationen 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ die Helligkeiten 0.227 und 0.128 besitzt. Da also für grössere Periheldistanzen ($q > 0.23$) die beim Maximum der Elongation stattfindenden Helligkeiten schon sehr beträchtlich, für ganz kleine aber (etwa $q < 0.06$) die vom Perihel weiter entfernt liegenden Helligkeiten noch immer ziemlich ansehnlich ausfallen, so kann man behaupten, dass sich jene Periheldistanzen, für welche das Gestirn am leichtesten verborgen bleibt, zwischen diesen Grenzen befinden, also etwa um $q = 0.10$ oder 0.12 herum.

Durch Interpolation findet man, dass jenes q , für welches die grösste Elongation genau $\left. \begin{matrix} 15^\circ 0' \\ 22 \quad 30 \end{matrix} \right\}$ beträgt, = $\left. \begin{matrix} 0.114 \\ 0.232 \end{matrix} \right\}$ ist.

Weiter aufwärts als bis 0.23 darf man mit der Periheldistanz gewiss nicht mehr gehen, wenn der Komet, wie auf der Westseite, so auch auf der Ostseite unsichtbar bleiben soll; denn die Helligkeiten werden hier schon sehr gross.

Dass das Maximum der östlichen Elongation, sobald es einmal über 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$ steigt, fast durchgehends als entscheidend für die in den Elementen und besonders in der Periheldistanz zulässigen Grenzen betrachtet wird, hat, wie schon einmal gesagt wurde, darin seinen Grund, dass der Komet einzig an dieser Stelle gleichzeitig sowohl eine bedeutendere Elongation, als auch eine ansehnliche Helligkeit besitzt, da r wegen der Nähe des Perihels noch klein ist. Wenn er also in der Nähe der Sonne überhaupt wahrgenommen wird, so kann es am leichtesten nur hier geschehen (denn später, auf der Westseite, sind die Distanzen schon viel grösser geworden), und wenn er auf der Ostseite unbemerkt bleibt, so wird er es auf der Westseite noch mehr bleiben.

Hält man die Tabellen VIII und I sammt den für q gezogenen Grenzen gegen einander, so zeigt sich, dass, wenn der Komet unter der Annahme $\psi = 15^\circ$ unsichtbar bleiben soll, alle Periheldistanzen zwischen 0.11 und 0.74 auszuschliessen sind; wäre dagegen für den Radius des Strahlenkreises die weitere Grenze, $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$, als Bedingung gesetzt, so dürften blos die Periheldistanzen zwischen 0.23 und 0.59 unberücksichtigt bleiben. Je grösser daher ψ gewählt wird, umso enger rücken die Grenzen von q aneinander, umso kleiner wird also die Zahl der auszuschliessenden Periheldistanzen. Man gelangt daher, wenn man die Tabellen I und VIII genügend weit fortsetzt, zu einer Stelle, an welcher die Grenzen von q zusammenfallen und gleichzeitig auch die beiden ψ -Werthe, von denen der eine zu $i = 0$, der andere zu $i = 180^\circ$ gehört, einander gleich werden.

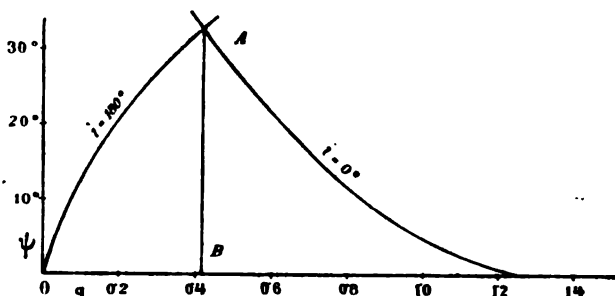
Es ist nun von Interesse, diesen Grenzwert von q zu ermitteln; das zugehörige Maximum der Elongation ($\lambda - L$) kann sodann leicht durch mehrmalige Durchrechnung der Formel 2) gefunden werden. Eine directe Bestimmung von q stösst auf

Schwierigkeiten, weil auf den beiden Elongationen, die einander gleich werden sollen, die Forderung des Maximums haftet; man gelangt jedoch auch durch Versuche leicht ans Ziel. Ich fand dieses fragliche $q = 0.417$.

Rechnet man also mit dieser Periheldistanz das Maximum der östlichen Elongation sowohl für den I. Fall ($i = 0$), als für den II. ($i = 180^\circ$), so erhält man denselben Werth; er beträgt $32^\circ 34'$. Zur näheren Bestimmung sei noch beigesetzt, dass dieses Maximum, wenn $i = 0$ ist, für $t = 51\frac{1}{2}$ Tage, und wenn $i = 180^\circ$ ist, für $t = 16\frac{1}{2}$ Tage eintritt; die Intensität J ist im ersten Fall $= 0.17$, im zweiten aber 2.3 .

Aus dieser Betrachtung ziehen wir folgenden Schluss. Wollte man die Forderung stellen, dass ein für uns unsichtbar bleibender Komet jede beliebige Periheldistanz besitzt (abgesehen von solchen, welche die Einheit schon bedeutend übersteigen), so müsste man gleichzeitig zugeben, dass er innerhalb der Elongation $\psi = 32^\circ 34'$ nicht mehr wahrzunehmen ist. Diese Zahl fällt noch etwas über die von Olbers gezogene Grenze hinaus und ist für die meisten Kometen — sehr lichtschwache ausgenommen — sicher zu gross. Da wir also wissen, dass die

Fig. 2.



Kometen bei $\psi < 32^\circ 34'$ noch zu erkennen sind, so kann ein solches Gestirn, welches bei seiner Anwesenheit in unserem Sonnensystem trotz sorgfältiger Durchmusterung des Himmels nicht gesehen wird, eine circa 0.4 betragende Periheldistanz nicht besitzen.

In Figur 2 sind die Maxima aus den Tabellen VIII und I durch Curven dargestellt und dabei die Periheldistanzen als

Abscissen ($0.02 = 1mm$), die Maxima der Elongationen als Ordinaten ($1^\circ = 1mm$) aufgetragen. Für die in den Tabellen nicht mehr enthaltenen q sind die Curven mit Hilfe des gemeinsamen Punktes A ausgezogen. Die Ordinate AB repräsentirt die gemeinsame grösste Elongation von $32^\circ 34'$, gehört also zur Abscisse $q = 0.417$.

Verschiebung des Perihels.

Wie weit darf man hier von der Bedingung, dass die heliocentrische Länge des Perihels $l_0 = L_0 + 180^\circ$ ist, abgehen? Die Tabelle der Maxima (VIII) lehrt, dass eine solche Variation, falls die grösste Elongation $22\frac{1}{2}^\circ$ betragen soll, nur für $q < 0.232$ eintreten, dann jedoch um so bedeutender sein kann, je kleiner q ist. Soll die grösste Elongation bloß 15° betragen, so ist die Verschiebung des Perihels, dl_0 , erst für $q < 0.114$ gestattet.

Um einen Näherungswerth für jene Perihellänge zu finden, welche die grösste östliche Elongation gerade bis zu einem bestimmten ψ° steigen lässt, darf man hier nicht mehr so wie im I. Fall vorgehen. Denn wenn auch, da $(\lambda - L)$ nicht grösser als $22\frac{1}{2}^\circ$ werden kann, für $\sin(\lambda - L)$ in erster Annäherung der Bogen gesetzt werden darf, so findet diese Vereinfachung doch auf die heliocentrische Winkeldifferenz $(l - L)$ jetzt keine Anwendung mehr, da dieser Bogen in Folge der raschen Bewegung des Kometen durchaus nicht klein zu sein braucht und es in den hier betrachteten Fällen wirklich auch gar nicht ist.

Man kann jedoch ein differentielles Verhältniss zwischen l_0 und ψ° auf folgende Art finden. Betrachten wir die Gleichung 2), so kann zunächst, da alle Bewegungen in der Ekliptik vor sich gehen ($i = 180^\circ$), die Längendifferenz $(\lambda - L)$ durch ψ ersetzt und daher geschrieben werden:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r \sin(l - L)}{r \cos(l - L) + R}$$

Differenzirt man nun, r und damit indirect auch ρ als constant annehmend, so kann $d(l - L)$ mit dl_0 identificirt werden, weil sich eine Verschiebung des Perihels um dl_0 einfach dadurch bemerkbar macht, dass die heliocentrische Länge l , also auch $(l - L)$ um dl_0 geändert wird. Man erhält so, wenn schliesslich

noch der Nenner $r \cos(l-L) + R$ durch $\rho \cos \psi$ ersetzt wird (Gleichungen 1):

$$dl_0 = \frac{\rho^2 \cdot d\psi}{r[R \cos(l-L) + r]} \quad 13)$$

Mit dieser Formel findet man unter Benützung jener Grössen, welche zur Berechnung der Maxima in der Tabelle VIII geführt haben, einen ersten Näherungswerth für dl_0 , der jedoch von der Wahrheit noch weit entfernt sein kann, da insbesondere die Zeit des Maximums ganz anderswohin fällt, als für $dl_0 = 0$. Der nächste Versuch liefert aber dl_0 schon viel genauer.

Unter der Voraussetzung $\psi^\circ = 22\frac{1}{2}^\circ$ habe ich für mehrere q die Maximalwerthe von dl_0 ermittelt und in Tabelle IX zusammengestellt. Es sei erwähnt, dass bei dieser Berechnung für $d\psi$ in erster Näherung die Differenz: $22\frac{1}{2}^\circ$ minus [Maximum aus Tabelle VIII] gesetzt wurde; als mit dem so erhaltenen dl_0 das Maximum der östlichen Elongation ψ' direct gerechnet war, wurde für den zweiten Versuch $d\psi = 22\frac{1}{2}^\circ - \psi'$ gesetzt und die Rechnung wiederholt, welche dann dl_0 meist schon so genau lieferte, dass das Maximum kaum mehr um eine Bogenminute von $22^\circ 30'$ abwich.

q	t	dl_0 \pm	J
0·08	16	33°59'	1·2
0·10	16	29 13	1·4
0·12	15 $\frac{1}{2}$	24 41	1·5
0·14	15 $\frac{1}{2}$	20 19	1·7
0·16	15	15 59	1·9
0·18	14 $\frac{1}{2}$	11 40	2·1

IX)

Nachdem wir nun die Maxima auf der Ostseite möglichst weit, nämlich bis $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$, herausgedreht haben, ist es nothwendig nachzusehen, ob dieser Vorgang für die vom Perihel weiter entlegenen Partien nachtheilige Folgen hat. Ich habe zu

diesem Zweck unter Annahme der hier für d_0 gefundenen Winkelwerthe mehrere Elongationen vor und nach dem Perihel berechnet, dieselben auf $\pm 15^\circ$ und $\pm 22\frac{1}{2}^\circ$ interpolirt und für diese zwei besonderen Stellen die Intensitäten J bestimmt. Dadurch entstanden die Tabellen X und XI. Die Rechnung musste für die Partien vor und nach dem Perihel separat geführt werden, weil dieselben jetzt nicht congruent sind.

Vor dem Perihel.

q	$\psi = +22\frac{1}{2}^\circ$		$\psi = +15^\circ$	
	t	J	t	J
0·08	-38	0·17	-30	0·28
0·10	-44	0·13	-35	0·21
0·12	-49	0·11	-40	0·16
0·14	-54	0·09	-46	0·12
0·16	-59	0·07	-51	0·10
0·18	-64	0·06	-56	0·08

X)

Nach dem Perihel.

q	$\psi = -15^\circ$		$\psi = -22\frac{1}{2}^\circ$	
	t	J	t	J
0·08	81	0·030	90	0·024
0·10	80	0·032	89	0·026
0·12	78	0·035	87	0·028
0·14	76	0·038	86	0·030
0·16	75	0·040	84	0·032
0·18	73	0·043	82	0·034

XI)

Wird also das Perihel um dl_0 (dessen Beträge im Schema IX enthalten sind) verschoben, so nimmt, wie wir bereits wissen, die Wahrscheinlichkeit des Sichtbarwerdens auf der einen Seite ab (Schema XI), auf der anderen dagegen zu (Schema X). Tabelle XI, welche somit die „ungefährlichen“ Intensitäten enthält, ist nur der Vollständigkeit wegen angesetzt worden; Tabelle X aber klärt uns in Verbindung mit Tabelle VIII darüber auf, um wie viel die Intensitäten in Folge der Addition von dl_0 wachsen.

Ist q noch ziemlich gross (0.14—0.18), so nimmt zwar J wenig zu, aber bloss aus dem Grunde, weil hier das an l_0 hinzugefügte dl_0 nur mässig ist. Für kleinere q aber, bei denen dl_0 schon bedeutend ist, erhält J bereits Werthe, deren Grösse mit unserer Voraussetzung nicht mehr verträglich ist (für $q = 0.08$ ist $J = 0.17$, beziehungsweise 0.28).

Wir schliessen daraus, dass es nur für etwas grössere q gestattet ist, l_0 um die im Schema IX aufgestellten Beträge von dl_0 zu ändern, die unter der Bedingung abgeleitet sind, dass das Maximum der östlichen Elongation genau bis $22^\circ 30'$ steigt.

Dagegen ist für kleinere q (etwa < 0.10) die im Schema IX vorgeführte Änderung nicht mehr erlaubt, weil sonst auf dem einen Parabelast J die von uns gesteckten Grenzen übersteigt.

Wir können also ungefähr sagen, dass dl_0 an dieser Stelle höchstens $25^\circ - 30^\circ$ betragen darf, und gelangen, wie im I. Fall, zu dem Schluss, dass die Verschiebung des Perihels für sämtliche hier in Betracht kommende Periheldistanzen nur mässig sein darf. Wäre die Verschiebung bedeutend, so würde der Komet für etwas grössere q (in der Nähe von 0.20) beim Maximum der östlichen Elongation über $22\frac{1}{2}^\circ$ heraustreten, während $J > 1$ ist; für kleinere q (in der Nähe von 0.10) würde er in einer vom Perihel weiter entlegenen Partie auf dem einen Parabelast beim Passiren des Strahlenkreises eine zwar nicht sehr grosse, aber immerhin mehr als 0.12 betragende Intensität besitzen.

Es ist hier wie sonst durchgehends angenommen, dass eine beträchtliche Intensität ($J > 1$) in der Nähe eines Maximums der Elongation (aber noch unter 15° , beziehungsweise $22\frac{1}{2}^\circ$) das Auffinden weniger begünstigt, als eine viel geringere (etwa $J = 0.12$) zu der Zeit, in welcher die Elongation bereits continuirlich wächst. Diese vielleicht befremdende Voraussetzung

möge man darin begründet finden, dass der Komet beim Maximum der Elongation wieder umkehrt (gegen die Sonne hin) und daher die Möglichkeit seiner Auffindung fraglicher ist als dort, wo er aus den Sonnenstrahlen endgiltig heraustritt (wenn auch mit kleinerer Intensität).

Änderung der Neigung.

Bis jetzt wurden die Elongationen für $i = 180^\circ$ gerechnet, und es ist nun zu untersuchen, wie weit man sich von dieser Bedingung entfernen darf, ohne dass der Komet sichtbar wird.

Ich habe zu diesem Zweck ganz so wie im I. Fall damit begonnen, für ein bestimmtes q jene Werthe von $180^\circ - i$ zu ermitteln, welche das Maximum der östlichen Elongation genau auf $22\frac{1}{2}^\circ$ ansteigen lassen, und dazu wieder das differentielle Verhältniss 10) benützt. Da zeigte sich nun, nachdem unter Annahme eines willkürlichen i eine Reihe von Elongationen berechnet waren und sodann die Formel 10) in Anwendung kam, dass der Winkel $180^\circ - i$, also die Abweichung von der Bedingung $i = 180^\circ$ sehr beträchtlich ausfällt und dass die Sichtbarkeitsverhältnisse selbst dann noch nicht wesentlich von den für $i = 180^\circ$ geltenden verschieden sind, wenn man mit i bis auf 135° und noch weiter heruntergeht.

Diese bedeutenden Änderungen haben zur Folge, dass die Rechnung unter Anwendung der Formel 10) öfter als im I. Fall wiederholt werden muss, wenn man jene Neigung erreichen will, durch welche die grösste Elongation gerade bis $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ steigt. Um nun solche Rechnungen, von denen schliesslich der grösste Theil wieder beseitigt werden müsste, ganz unterlassen zu können, und doch ein Bild über die Sichtbarkeitsverhältnisse zu erhalten, habe ich einen anderen Weg eingeschlagen, nämlich für das Maximum der östlichen Elongation nicht mehr an der Erfüllung der Bedingung $\psi = 22^\circ 30'$ festgehalten, sondern gleich von vorneherein mit einem speciellen Werthe von i die Umstände der Sichtbarkeit berechnet und zwar zunächst mit $i = 135^\circ$.

Die Hauptformeln bleiben dieselben (Gleichungen 6), nur b und $(l-L)$ sind jetzt anders zu ermitteln. Da nämlich b nicht

mehr, wie im I. Fall, klein zu sein braucht, lässt sich $\cos b$ nicht sicher aus $\sin b$ bestimmen, wesshalb die Formeln anzuwenden sind:

$$\left. \begin{aligned} \cos(l-\Omega) \cos b &= \cos u \\ \sin(l-\Omega) \cos b &= \sin u \cos i \\ \sin b &= \sin u \sin i \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

aus denen b und $(l-\Omega)$ hervorgeht. Da $\pi-\Omega=0$ gewählt wurde, ist wieder $u=r$; auf Grund dieser Voraussetzung ist ferner

$$\Omega = L_0 \pm 180^\circ$$

somit

$$i = (l-\Omega) + L_0 \pm 180^\circ$$

und da

$$L = L_0 + mt$$

so ist

$$l-L = (l-\Omega) \pm 180^\circ - mt.$$

Es wurde also für $i = 135^\circ$ ein ähnliches Schema (XII) angelegt wie für $i = 180^\circ$ (Tabelle VIII), jedoch in kleinerem Umfange, da es mir jetzt weniger darum zu thun war, eine lange Zahlenreihe abzuleiten, als bloß zu erforschen, wie sich die Sichtbarkeitsverhältnisse von den früheren unterscheiden.

Berechnet ist für jedes q zuerst das Maximum der Elongation, welches aber jetzt nicht genau auf der Ostseite, sondern in dem Quadranten zwischen dem Ost- und Nordpunkte stattfindet, und sodann jene Intensität J , welche der Komet beim Passiren der beiden westlichen Elongationen von 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ besitzt.

Zur Auffindung der letzteren habe ich versuchsweise für eine Reihe von Tagen die Elongationen gerechnet, um vorhersehen, wie sich die Verhältnisse auf der Westseite im Allgemeinen gestalten, und hierauf zwischen diesen Elongationen interpolirt, um zu erkennen, für welches t die gesammte Elongation ψ die Werthe 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ annimmt.

ψ und J für $i = 135^\circ$.

q	Ostseite			Westseite			
	Maximum			$\psi = 15^\circ$		$\psi = 22.5^\circ$	
	t	ψ	J	t	J	t	J
0.20	14 $\frac{1}{2}$	21.7	2.2	—	—	59	0.080
0.18	13 $\frac{1}{2}$	20.4	2.3	—	—	58 $\frac{1}{2}$	0.079
0.16	13	19.1	2.4	—	—	58	0.078
0.14	.	.	.	—	—	57	0.079
0.12	.	.	.	40	0.16	56	0.079
0.10	.	.	.	41	0.15	55	0.080

XII)

Vergleicht man in den Tabellen VIII und XII zuvörderst die Maxima der Elongationen, so sieht man, dass sie für dasselbe q nur um etwa 1° verschieden sind. Würde die Forderung gestellt werden, dass der Maximalwerth von ψ in XII bis 22.5° steigen soll, so würde das zugehörige q , wie der Gang der ψ -Werthe lehrt, bei 0.21 liegen, während für $i = 180^\circ$ der höchste für q zulässige Werth 0.23 beträgt, also ein sehr geringfügiger Unterschied. Da die Maxima für kleinere q stetig abnehmen und daher für die Sichtbarkeit ohnehin weniger Bedeutung haben, ist in XII die Berechnung derselben unterblieben.

Geht man nun auf die Westseite, so fällt zunächst auf, dass die zu $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ gehörende Intensität für alle in der Tabelle enthaltenen Periheldistanzen nahe 0.080 ist. Ginge man mit q noch unter $q = 0.10$ herab, so würden die Helligkeiten wieder langsam ansteigen und sich immer mehr jenen nähern, welche für $i = 180^\circ$ gelten. Die Columnne $\psi = 15^\circ$ musste für grössere q leer bleiben, weil hier das Gestirn, wenn es einmal die grösste östliche Elongation passirt hat und hierauf nach Westen hinüber wandert, sich der Sonne gar nicht mehr bis auf 15° nähert.

Nachdem sich also herausgestellt hatte, dass die Sichtbarkeitsverhältnisse für $i = 135^\circ$ nicht wesentlich von jenen abweichen, welche für $i = 180^\circ$ gelten, stieg ich mit der Neigung

noch weiter herab und zwar bis $i = 120^\circ$, machte hier aber die Rechnung nur für etwas grössere Periheldistanzen (Tabelle XIII).

ψ und J für $i = 120^\circ$.

q	Ostseite			Westseite	
	Maximum			$\psi = 22^\circ 5'$	
	t	ψ	J	t	J
0·20	$17\frac{1}{2}$	$22^\circ 7'$	1·4	41	0·19
0·18	$16\frac{1}{2}$	$21^\circ 4'$	1·5	44	0·16
0·16	16	$20^\circ 1'$	1·5	$45\frac{1}{2}$	0·14

XIII)

Durch Interpolation findet man zunächst, dass zu $\psi = 22^\circ 30'$ die Periheldistanz $q = 0\cdot197$ gehört, die nur wenig kleiner ist, als die Werthe, welche den Neigungen 180° und 135° entsprechen, nämlich 0·23 und 0·21. Auf der Ostseite bleibt also, soweit nur die Elongation in Betracht kommt, für $i = 120^\circ$ alles ziemlich so, wie für $i = 180^\circ$, beziehungsweise 135° ; man braucht, um den Anforderungen gerecht zu werden, bloß eine geringfügige Änderung vorzunehmen, nämlich die obere Grenze von q statt auf 0·23 jetzt auf 0·20 zu setzen. Dagegen wird jetzt auf der Westseite schon $J > 0\cdot12$, und aus diesem Grund darf man für $q = 0\cdot20$ wohl bis $i = 135^\circ$, aber nicht mehr bis $i = 120^\circ$ herabgehen.

Wählt man q kleiner, so nehmen die Maxima immer mehr ab, man gelangt zu einer Stelle, an der sie nicht mehr $22\frac{1}{2}^\circ$, dann nicht einmal mehr 15° erreichen, wenn man auch mit i unter 120° u. s. w. geht, kurz, die Maxima sind mit abnehmendem q immer weniger zu fürchten; gleichzeitig convergiren aber (mit abnehmendem q) auch die Sichtbarkeitsverhältnisse auf der Westseite gegen diejenigen, welche für $q = 0\cdot00$ gelten, ein Umstand, der ohne Weiters klar ist, denn je mehr die Periheldistanz zusammenschrumpft, um so gleichgiltiger wird die Neigung. Es genügt daher, die Verhältnisse nur für etwas grössere Periheldistanzen zu rechnen.

Geht man also mit i etwas unter 120° herab, so nähert man sich einer kritischen Stelle, die vollends erreicht wird, wenn man die Neigung noch weiter verkleinert; für $i = 90^\circ$ endlich wird selbst für die kleinstmögliche Periheldistanz, wie wir schon aus der Einleitung zum II. Fall wissen, auf der Westseite J noch immer etwas grösser als 0.12.

Um das Verhältniss der Neigung zu den Elongationen und Intensitäten noch anschaulicher vorzuführen, habe ich die beiden Periheldistanzen $q = 0.20$ und $q = 0.10$ mit den Neigungen $i = 135^\circ, 120^\circ$ und 105° verbunden, unter jeder dieser Annahmen in 8tägigen Intervallen ψ und J berechnet (Schema XIV und XV) und die Resultate in Fig. 3 und 4 graphisch dargestellt.

Die Katheten ($\lambda - L$) und β sind in die Tabellen nicht aufgenommen, sondern nur die Hypotenusen ψ . Damit sich der Vergleich weiter ausdehnen lässt, enthält jedes Schema auch noch die für $i = 180^\circ$ geltenden Umstände, und da hier ψ mit ($\lambda - L$) identisch ist, also die ganze Bewegung in der Ekliptik vor sich geht, ist dem ψ auch das Vorzeichen (+ östlich, — westlich) beigesetzt. Für $q = 0.10$ ist auch die schon in der Einleitung zum II. Fall erwähnte Specialisirung $i = 90^\circ$ aufgenommen. Der Vollständigkeit halber ist überdies die gemeinsame Columnne $\log r$ beigesetzt.

ψ und J für $q = 0.20$.

t	$\log r$	$i = 180^\circ$		$i = 135^\circ$		$i = 120^\circ$		$i = 105^\circ$	
		ψ	J	ψ	J	ψ	J	ψ	J
8	9.545	+19	7.23	20	7.41	20	7.55	20. 7.72	
16	9.753	20	1.62	22	1.69	23	1.75	24	1.82
24	9.884	16	0.611	20	0.648	22	0.677	25	0.713
32	9.977	11	0.305	18	0.326	22	0.343	26	0.365
40	0.050	+ 6	0.178	17	0.192	22	0.203	27	0.218
48	0.108	0	0.116	18	0.126	24	0.134	30	0.145
56	0.158	— 7	0.0823	21	0.0895	27	0.0955	34	0.1036
64	0.200	—13	0.0618	25	0.0675	31	0.0723	38	0.0787

XIV)

ψ und J für $q = 0.10$.

t	$\log r$	$i = 180^\circ$		$i = 135^\circ$		$i = 120^\circ$		$i = 105^\circ$		$i = 90^\circ$	
		ψ	J	ψ	J	ψ	J	ψ	J	ψ	J
8	9.563	+14°	4.81	14°	4.89	15°	4.95	15°	5.02	16°	5.10
16	9.788	12	1.09	14	1.13	16	1.15	17	1.18	19	1.22
24	9.918	8	0.448	13	0.466	16	0.479	18	0.496	21	0.516
32	0.008	+ 3	0.237	13	0.248	17	0.257	20	0.268	24	0.281
40	0.077	- 3	0.146	15	0.154	19	0.160	23	0.167	27	0.177
48	0.134	9	0.099	18	0.105	23	0.109	27	0.115	32	0.122
56	0.181	15	0.0720	23	0.0765	28	0.0802	32	0.0848	37	0.0905
64	0.222	-22	0.0553	29	0.0590	33	0.0620	38	0.0659	43	0.0706

XV)

Fig. 3.
 $q = 0.20$.

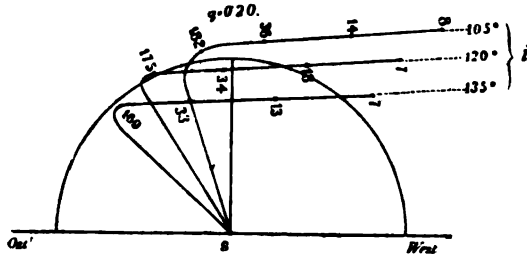
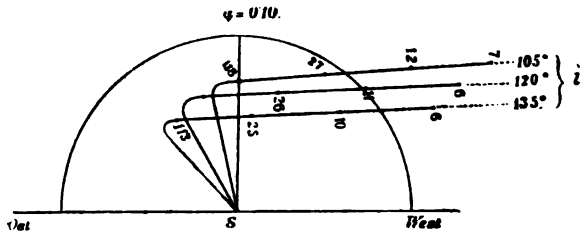


Fig. 4.
 $q = 0.10$.



Figuren 3 und 4 sind nach demselben Massstab entworfen, wie Fig. 1; es sind jedoch bloss die Umstände nach dem Perihel gezeichnet, wesshalb die untere Hälfte des Strahlenkreises wegleiben konnte. Die Intensität J ist nur für $t = 16, 32, 48$ und 64 eingetragen und zwar wieder ihr 100facher Betrag.

Man sieht nun vor allem sowohl in der einen als in der anderen Tabelle, dass die demselben t , aber verschiedenen Neigungen entsprechenden Intensitäten nur wenig differiren. Ganz anders verhält sich dagegen die Sache, wenn man jedes J mit seinem ψ vergleicht. Von $i = 180^\circ$ bis $i = 135^\circ$ ist der Abfall noch nicht stark, von hier an rückt aber die Stelle, an welcher der Komet den Strahlenkreis endgiltig durchschneidet, d. h. wo $\psi > 22\frac{1}{2}^\circ$ wird, mit abnehmender Neigung immer rascher auf ein früheres Datum, also gegen das Perihel zu, wo somit in Folge der kleinen Distanzen J noch einen bedeutenden Werth hat. Diese Stellen sind in jedem Schema durch einen kleinen Horizontalstrich angedeutet.

Für $q = 0.20$ darf man, wie schon gesagt wurde, mit i bis 135° , aber nicht mehr bis 120° herabsteigen, da sonst für $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ schon $J > 0.12$ ist; überdies würde der Komet auch für etwa $t = 16$ mit einer grossen Intensität ($J = 1.75$) einige Zeit hindurch sich ausserhalb des Strahlenkreises befinden, was auch in Fig. 3 zu bemerken ist.

Für $q = 0.10$ sind die Umstände nicht viel anders. Man darf mit der Neigung ohne weiters bis 135° und auch noch bis circa 120° heruntergehen, weiter aber nicht mehr, denn für $i = 105^\circ$ ist an der fraglichen Stelle schon $J > 0.12$.

Der Hauptunterschied zwischen $q = 0.20$ und $q = 0.10$ liegt, wie aus Fig. 3 und 4 ersichtlich ist, darin, dass sich für $q = 0.20$ das Maximum der östlichen Elongation mit einer ansehnlichen Helligkeit bemerkbar machen kann, für $q = 0.10$ jedoch nicht mehr, da es hier noch weit innerhalb der Peripherie des Strahlenkreises bleibt.

Da in der Nähe dieses Maximums, welches sich in der Curve als Wendepunkt manifestirt, die Intensitäten noch gross sind, wenn sie auch rasch kleiner werden, muss man trachten, den Kometen längere Zeit nach Passirung dieses Wendepunktes innerhalb der Peripherie zu erhalten, darf also die Neigung nur

soweit ansteigen lassen, dass die Umkehrstelle sammt ihrer nächsten Umgebung noch ganz in den Kreis hineinfällt. Ist aber diese Stelle so gelegen, dass der Komet gleich nach Passirung derselben hinausgeht (siehe Fig. 3 die Curve für $i = 120^\circ$ und noch mehr für $i = 105^\circ$), so ist wegen zu grosser Intensität ein Sichtbarwerden ermöglicht.

Die beiden Zeichnungen lehren auch, dass der Wendepunkt des Kometenweges mit abnehmender Neigung immer weiter von der Ost- nach der Westseite hinübertückt. Es ergibt sich also wieder dieselbe Folgerung: Je mehr sich die Neigung von 180° entfernt, um so kürzere Zeit verweilt der Komet innerhalb des Strahlenkreises, um so kleiner sind die Distanzen beim Heraus-treten, umso grösser also die Intensitäten, umso leichter kann er gesehen werden.

Die wechselseitigen Verhältnisse der drei eingezeichneten Curven geben schon einen Fingerzeig, wie sich der Lauf für noch kleinere Neigungen gestalten würde. Man sieht, dass die geocentrische Breite nach Passirung des Wendepunktes (wenigstens auf der hier betrachteten Strecke) fast dieselbe bleibt; sie steigt zwar mit abnehmender Neigung, aber immer langsamer, und bald würde man zu einer Stelle kommen, an der sie mit abnehmender Neigung ebenfalls abzunehmen beginnt. Gleichzeitig rückt der Wendepunkt von der Ost- ganz nach der Westseite, und der an dieser Stelle gebildete Winkel (wenn es überhaupt gestattet ist, in erster Annäherung hier von einem Winkel zu sprechen) wird immer mehr stumpf.

Ich setze die geocentrischen Breiten β für die letzten berechneten Punkte ($t = 64$) und zwar für $q = 0.10$ hier an.

i	β	Diff.
135°	13°	°
120	$16\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$
105	19	$2\frac{1}{2}$
90	$20\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

Die abnehmenden Differenzen zeigen also, dass die Breite bald ihr Maximum erreicht. Geht i bis 0° herunter, so wird natürlich auch $\beta = 0$, ganz so wie bei $i = 180^\circ$.

Für jede bestimmte Periheldistanz gibt es eine bestimmte Neigung, bis zu der man heruntergehen kann. Diese dürfte aber nicht mehr so wie im I. Fall (Tabelle VII) ermittelt werden. Dort ist es in dieser Hinsicht viel einfacher, indem man bloß das Maximum der Elongation zu untersuchen braucht und sich um die Intensität, welche der Komet beim definitiven Heraustreten besitzt, nur mehr wenig kümmern darf, da die Distanzen dort schon bedeutend angewachsen sind.

Jetzt aber, im II. Fall, hat man sein Augenmerk auf jede dieser beiden Stellen zu richten, und man sollte eigentlich, um die für eine gegebene Periheldistanz zulässige Neigung zu ermitteln, nebst der Elongation auch eine bestimmte Intensität (etwa 0.06 oder 0.12) der Rechnung zu Grunde legen. Darauf lasse ich mich jedoch nicht ein, denn eine solche Rechnung (die übrigens am Besten wohl empirisch zu führen wäre) könnte nur sehr vage Resultate liefern, und ich habe überhaupt immer daran festgehalten, in erster Linie die Elongationen und nur in zweiter die Helligkeiten in Betracht zu ziehen.

Das Hauptresultat läßt sich also dahin aussprechen, daß für den II. Fall ($q < 0.23$) directe Bewegung ausgeschlossen ist und nur bei minimalen Periheldistanzen gerade noch für zulässig erklärt werden kann.

Drehung der Bahnaxe aus der Ekliptik.

Die Drehung soll wieder um den Parameter als Drehungsaxe geschehen, so daß also der zwischen $v = \pm 90^\circ$ befindliche Bahntheil auf der einen und der zu $v < -90^\circ$ und $v > +90^\circ$ gehörende Theil auf der anderen Seite der Ekliptik liegt. Unter dieser Annahme liegen die beiden Äste der Parabel gegen die Ekliptik symmetrisch. Fände eine solche Symmetrie nicht statt, so würde der Komet zwar auf dem einen Ast noch leichter, dafür aber auf dem anderen noch weniger verborgen bleiben, denn was man auf der einen Seite gewinnt, geht auf der anderen verloren, wie wir schon bei der Variation der Perihellänge gesehen haben.

Es ist also $\pi - \Omega = \pm 90^\circ$, daher $b_0 = i$, oder, da hier nur retrograde Bewegungen untersucht werden, b_0 identisch mit $180^\circ - i$.

Wie weit darf nun b_0 ansteigen, ohne dass der Komet sichtbar wird? Tabelle VIII lehrt, dass die Abweichung von der Bedingung $\sin b_0 = 0$ für $q < 0.23$ eintreten darf, falls ψ auf der Ostseite höchstens $22\frac{1}{2}^\circ$ betragen soll, die Abweichung darf aber dann wieder um so bedeutender sein, je kleiner q ist, doch werden dann die Intensitäten, welche der Komet beim definitiven Heraus-treten besitzt, zu gross.

Da also, wenn die Bahnaxe aus der Ekliptik gedreht wird, für grössere Periheldistanzen (etwa 0.20) die beim Maximum der Elongationen stattfindenden Helligkeiten zu bedeutend werden, für kleinere (etwa $q < 0.10$) die vom Perihel weiter abliegenden Helligkeiten zwar nicht sehr gross, aber immerhin doch grösser als 0.12 werden, so liegt jenes q , für welches die Drehung am stärksten sein darf, zwischen den extremen Werthen.

Ich habe die Rechnung nur für $q = 0.10$ gemacht und der Reihe nach $b_0 = 15^\circ, 30^\circ$ und 45° gesetzt. Da hier hauptsächlich solche Breiten von Interesse sind, welche weiter vom Perihel entfernt liegen und somit zu $v > 90^\circ$ (also auch $v < -90^\circ$) gehören, wurde, damit dieselben positiv ausfallen, $\pi - \Omega = -90^\circ$, demnach $u = v - 90^\circ$ gewählt; es liegt also der aufsteigende Knoten bei $v = +90^\circ$, und zwar ist

$$\Omega = L_0 + 90^\circ$$

somit

$$l = (l - \Omega) + L_0 + 90^\circ,$$

wobei $(l - \Omega)$ wieder aus den Formeln 14) zu bestimmen ist.

Tabelle XVI enthält die zur Entscheidung nöthigen Resultate und ist ähnlich wie die beiden Tabellen XIV und XV angelegt.

ψ und J für $q = 0.10$.

t	$b_0 = 0^\circ$ $i = 180$		$b_0 = 15^\circ$ $i = 165$		$b_0 = 30^\circ$ $i = 150$		$b_0 = 45^\circ$ $i = 135$	
	ψ	J	ψ	J	ψ	J	ψ	J
40	-3°	0.1457	7°	0.1473	13°	0.1523	20°	0.1608
48	-9	0.0988	11	0.0998	16	0.1028	22	0.1080
56	-15	0.0720	17	0.0726	20	0.0744	25	0.0776
64	-22	0.0553	23	0.0557	25	0.0568	28	0.0588

XVI)

Die Discussion dieser Zahlen kann in derselben Weise geschehen, wie bei der Neigung (Tabelle XIV und XV) und braucht daher nur kurz zu sein. Zieht man bloß die weitere Elongation, $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$, in Betracht, so darf man mit b_0 ohne weiters bis 30° steigen, indem dann J erst 0.06 beträgt; dreht man die Axe bis 45° heraus, so ist an der fraglichen Stelle etwa $J = 0.10$.

Da mit gleichmässig wachsendem b_0 , wie die Vergleichung der Zahlen lehrt, sowohl die Elongationen als die Intensitäten immer rascher zunehmen, wird man die Axe nur mehr wenig über 45° drehen dürfen, bis für $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ endlich $J = 0.12$ wird, und das ist noch der weiteste von uns zugelassene Spielraum.

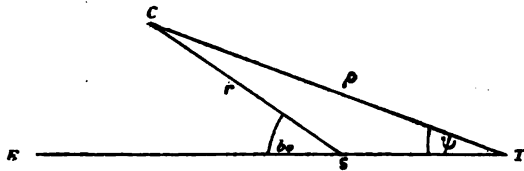
Da jetzt nur die Umstände betrachtet wurden, welche der vom Perihel weiter entlegenen Partie angehören, könnte noch gefragt werden, ob nicht etwa durch das Herausdrehen der Bahnaxe das in der Nähe des Perihels eintretende Maximum zu gross wird. Das ist jedoch, wenn nur q kleiner als etwa 0.20 und b_0 mässig gewählt wird, nicht der Fall. Es sei zur Bestätigung nur angeführt, dass für $q = 0.16$ und $b_0 = 30^\circ$ dieses Maximum berechnet und dafür $18^\circ 52'$ gefunden wurde, während es für $b_0 = 0$ (siehe Tabelle VIII) den Werth $18^\circ 10'$ hat, so dass also die Differenz kaum in Betracht kommt. Für noch kleinere Periheldistanzen ist natürlich auf dieser Seite noch weniger zu besorgen, weil das Maximum weit innerhalb des Strahlenkreises bleibt, und nur jene Partie zu untersuchen ist, wo der Komet endgiltig austritt; und das ist eben in Tabelle XVI für ein specielles q geschehen.

Da die Drehung der Bahnaxe in der Weise stattgefunden hat, dass beide Äste der Parabel an den Sichtbarkeitsverhältnissen ganz denselben Antheil haben, können die für b_0 erhaltenen Zahlen nur als obere Grenzen gelten. Will man eine Durchschnittsgrenze, die für alle Periheldistanzen nahe richtig ist, so wird man $b_0 = 30^\circ$ wählen können, und somit lautet die Bedingung für die Lage der Bahnaxe gegen die Ebene der Ekliptik:

$$\sin \omega \sin i < \frac{1}{2}.$$

Ausgedehntere Rechnungen habe ich unterlassen hauptsächlich darum, weil b_0 kein übliches Bahnelement ist. Ich will nur noch einen idealen Fall behandeln, nämlich die Frage, wie gross r sein muss, damit der Komet beim Passiren der Elongation ψ eine bestimmte Intensität J besitzt; von der Bewegung der Erde soll dabei abgesehen werden. Wir haben zu diesem Zwecke das Dreieck zwischen Erde, Sonne und Komet, welches schon zweimal, zuerst für eine bestimmte Intensität, dann für eine bestimmte Elongation betrachtet wurde, abermals aufzulösen, aber unter der Bedingung, dass jetzt sowohl die Intensität als die Elongation vorgeschrieben ist.

Fig. 5.



Sei in T die Erde, in S die Sonne und in C der Komet, so ist ψ die gegebene Elongation. In dem Dreieck ist also die Seite $ST = R$, der anliegende Winkel ψ und das Product der beiden anderen Seiten $r\rho$ bekannt und es soll r , ρ und der Winkel b_0 gefunden werden. Es besteht nun die Relation

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi$$

oder, wenn $r\rho = p$ und, wie immer, $R = 1$ gesetzt wird:

$$r^4 - r^2 + 2pr \cos \psi - p^2 = 0.$$

Stellen wir nun die Forderung, dass $J = \frac{1}{16}$, somit $p = 4$ sein soll, so ist aus der Gleichung

$$r^4 - r^2 + 8r \cos \psi - 16 = 0$$

r zu ermitteln; hierauf ergibt sich $\rho = \frac{4}{r}$, und der Winkel b_0 durch eine der bekannten Relationen. Ich habe die Gleichung für $\psi = 15^\circ$ und $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ aufgelöst und gefunden:

ψ	r	ρ	b_0
15°	1·5827	2·5273	24° 25'
22 $\frac{1}{2}$ °	1·6087	2·4864	36 16

Die zweite Wurzel der Gleichung ist negativ, die beiden anderen sind imaginär.

Die Werthe von b_0 beantworten unter anderen die Frage, welchen Winkel die Bahn eines geradlinig zum oder vom Sonnenmittelpunkt wandernden Gestirns mit der Ekliptik bilden muss, damit beim Passiren der vorgeschriebenen Elongation ψ die Helligkeit $J = 0.0625$ ist. Das Gestirn muss dabei, wie die Werthe von r und ρ lehren, weit jenseits der Sonne sich befinden, denn sonst könnte eine so geringe Helligkeit nicht zu Stande kommen. ρ ist fast um die Einheit grösser als r , und dieses Verhältniss findet mehr oder minder genau bei sämmtlichen in dieser Abhandlung vorgeführten Beispielen statt, was von selbst einleuchtet, da sich der Komet von der Geraden ES nie sehr weit entfernen darf.

Als dieses Dreieck in der Einleitung betrachtet wurde, war die Elongation ψ willkürlich und darum resultirte als Durchschnitt der Geraden r und ρ kein fixer Punkt, sondern eine Curve.

Ich betrachte nun auch den II. Fall als erledigt. Er hat das Eigenthümliche, dass es hier nicht mehr möglich ist, so geringe Helligkeiten zu erzielen wie im I., weil jetzt der Komet sehr nahe zur Sonne hereinkommt. Geht man dort unter das zu $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ gehörige q herab, so ist $J = 0.16$, hier dagegen schon $J = 2.8$. Im II. Falle ist also besonders darauf zu achten, dass die kritische Grenze für q (nämlich 0.23) nicht überschritten wird, während im I. ein Herabgehen unter $q = 0.59$, also ein Vergrössern von ψ über $22\frac{1}{2}^\circ$ hinaus minder gefährlich ist, da ja hier J erst 0.16 beträgt. Dies gilt für das in der Nähe des Perihels eintretende Maximum der Elongation. Für die andere Elongation, welche einem viel weiter vom Perihel entlegenen Wegstücke angehört, können zwar auch im II. Falle sehr kleine Intensitäten zu Stande kommen ($J = 0.04$ in Tabelle VIII), doch sind sie im I. Falle an dieser Stelle noch geringer ($J = 0.013$ in Tabelle II). Dass man in Folge dessen nebst dem Maximum der Elongation im II. Falle auch noch die Intensität für die vom

Perihel weiter entfernte Passage des Strahlenkreises zu beachten hat, im I. jedoch fast gar nicht mehr, wurde schon früher hervorgehoben.

Für die Lage des Knotens braucht, wie bereits zum Schlusse des I. Falles gesagt wurde, eine eigene Bedingung nicht aufgestellt zu werden, indem durch die Forderung, dass $\sin(\pi - \Omega) \sin i$ eine kleine Grösse sein soll, über die Knotenlänge ohnehin schon verfügt ist. Für Neigungen, die schon gegen 180° liegen, wird die Länge des Knotens gleichgiltig, es kann sogar $\pi - \Omega = 90^\circ$, also $\left. \begin{matrix} \Omega \\ \varphi \end{matrix} \right\} = L_0 + 90^\circ$ werden, während sonst im

Allgemeinen stets $\left. \begin{matrix} \Omega \\ \varphi \end{matrix} \right\} = L_0$ sein soll.

Wenn ich auch die Resultate dieser hypothetischen Rechnungen nicht nach jeder Richtung hin als erschöpfend bezeichnen darf, schon darum nicht, weil ich mich in manchen Theilen mit kurzen Andeutungen begnügt habe, werden sie doch hinreichen zu einer allgemeinen Beurtheilung des in Rede stehenden Problems, das in voller Strenge überhaupt gar nicht behandelt werden kann, nämlich zur Beantwortung der Frage, ob und unter welchen Umständen ein zur Sonne hereinkommender Komet für uns unsichtbar bleiben kann oder sogar muss.

Es hat sich also herausgestellt, dass ein Verborgenbleiben in der That möglich ist, freilich unter sehr eigenartigen Verhältnissen, und diese stelle ich hier in Kürze zusammen.

Allgemeine Bedingungen. Die Bahnaxe soll nahe in der Ekliptik liegen, d. h. es soll $\sin b_0 = \sin(\pi - \Omega) \sin i = 0$ oder doch nur mässig sein. Der Komet soll zur Zeit des Perihels ganz oder nahezu in Conjunction mit der Sonne und zugleich in der Ekliptik sein. Diese Bedingung zerfällt in zwei, je nachdem er sich jenseits oder diesseits der Sonne befindet.

Ist er jenseits (I. Fall), so muss die Periheldistanz q gegen 1 und darüberhinaus liegen, die Bewegung direct und die Neigung gering sein. Bezeichnet man mit L_0 die am Tage des Perihels stattfindende geocentrische Länge der Sonne, so muss, um der Forderung der Conjunction zu genügen, die heliocentrische Länge des

Perihels $l_0 = L_0$ sein, wofür auch, da hier die Neigung nicht gross ist, das Bahnelement π substituirt werden kann, und die Bedingung lautet: $\pi = L_0$.

Befindet sich der Komet zur Zeit des Perihels diesseits der Sonne (II. Fall), d. h. ist $l_0 = L_0 + 180^\circ$, so muss vor Allem q klein sein. Was die Neigung betrifft, so ist sie zwar, so lange q einen der kleinsten, überhaupt möglichen Werthe hat, ziemlich gleichgiltig, muss jedoch, sobald q etwas grösser wird, schon mehr als 90° betragen. Je mehr sie gegen 180° steigt, um so leichter kann der Komet verborgen bleiben.

Specielle Bedingungen. Diese ergaben sich dann, wenn über die kleinste Elongation ψ , in zweiter Linie auch über die kleinste Intensität J , bei welcher ein Komet noch zu erkennen ist, eine bestimmte Annahme gemacht wird. Soll $\psi \begin{cases} 15^\circ \\ 22\frac{1}{2}^\circ \end{cases}$ betragen,

so muss q entweder grösser als $\begin{cases} 0.74 \\ 0.59 \end{cases}$ (I. Fall) oder kleiner als

$\begin{cases} 0.11 \\ 0.23 \end{cases}$ (II. Fall) sein; die zwischenliegenden Periheldistanzen sind ausgeschlossen.

Nur für diese Grenzwerte von q muss den drei Forderungen $o = L_0$ (bez. $= L_0 + 180^\circ$), $i = 0^\circ$ (bez. $= 180^\circ$), $b_0 = 0^\circ$ strenge genügt werden. Hat dagegen q noch grössere Werthe als die für den I. Fall, oder noch kleinere als die für den II. Fall angeführten, so sind Abweichungen von der strengen Forderung zulässig, die sodann um so grösser sein dürfen, je mehr sich q von dieser kritischen Grenze entfernt. Dieser Spielraum ist für l_0 , i und b_0 , und zwar für jeden der beiden Hauptfälle, ermittelt worden. Dabei wurde die Aufgabe meist nur für die eine von den beiden Annahmen $\psi = 15^\circ$ oder $\psi = 22\frac{1}{2}^\circ$ vollständig gelöst, während die andere blos kurz behandelt wurde. Der Spielraum ist fast durchgehends nicht sonderlich gross; ausgenommen ist nur die für kleine Periheldistanzen (II. Fall) zulässige Neigung, welche alle Werthe zwischen 180° und 120° , für ganz kleine q noch etwas weiter herab annehmen kann, ohne dass die Sichtbarkeitsverhältnisse wesentlich von einander verschieden werden.

Ich deute hier die Resultate nochmals in aller Kürze an und begnüge mich dabei mit etwas abgerundeten Zahlen; genauere

Angaben, sowohl über nothwendige Beschränkungen, als zulässige Erweiterungen sind in den früheren Ausführungen selbst zu finden. Für ψ ist die weitere Grenze, $22\frac{1}{2}^\circ$, gewählt.

I. Fall.

$$q > 0.6$$

$$i < 35^\circ$$

$$\pi(=l_0) = L_0 \pm 30^\circ$$

II. Fall.

$$q < 0.2$$

$$i > 90^\circ$$

$$l_0 = (L_0 + 180^\circ) \pm 25^\circ$$

für beide Fälle gemeinschaftlich: $\sin(\pi - \Omega) \sin i < \frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Omega}{\varphi} \end{array} \right\} \text{nahe} = L_0.$$

XVII

Da bei der Bestimmung des Spielraumes immer nur eines der drei Stücke i , l_0 und b_0 variirt wurde, die anderen zwei dagegen so gelassen wurden, dass sie das Verborgenbleiben am meisten begünstigen, können die erhaltenen Zahlenwerthe nur als obere Grenzen gelten. Trotzdem wird, wenn wir nun auf die Praxis übergehen, ein Komet gewiss auch dann manchmal übersehen werden, wenn die abgeleiteten Bedingungen nicht strenge zutreffen und die aufgestellten Grenzen noch etwas weiter gezogen werden, einfach darum, weil es zeitweilig wegen andauernder und weit ausgehnter trüber Witterung auch beim Zusammenwirken zahlreicher Kometenjäger nicht möglich ist, Tag für Tag die ganze Peripherie des Strahlenkreises, oder vielleicht richtiger die Fläche des zwischen 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ befindlichen Kreisringes abzusuchen.

Noch ein anderer Umstand nimmt den gefundenen Resultaten etwas von ihrer Strenge, nämlich der, dass bedeutend von einander verschiedene Helligkeiten, wenn nur die zugehörige Elongation kleiner als 15° oder $22\frac{1}{2}^\circ$ ist, als gleichwerthig betrachtet werden. Es ist z. B. angenommen worden, dass ein Komet, so lange er sich zwischen den Elongationen 15° und $22\frac{1}{2}^\circ$ befindet, bei einer Helligkeit von $J = 3.0$ (siehe Tabelle VIII) ebenso wenig gesehen wird, wie bei $J = 0.16$ (Tabelle I). Das ist aber nicht der Fall, indem zwischen diesen beiden Intensitäten eine ansehnliche Differenz besteht, die in Grössenklassen ausgedrückt schon 3.2 Mg. beträgt.

Man sollte also eigentlich für grössere Elongationen eine kleinere Intensität und für kleinere Elongationen eine grössere Intensität als untere Grenze wählen. Um jedoch auf einer sicheren Basis operiren zu können, brauchte man verlässliche Angaben über das photometrische Verhältniss zwischen Elongation und Intensität, giltig für sehr geringe Abstände von der Sonne.

Man kann jedoch, ohne eine neue Untersuchung anstellen zu müssen, der angeregten Forderung zum Theil dadurch gerecht werden, dass man die Grenzen für die Bahnelemente im I. Fall weiter, im II. aber enger zieht, als in der vorliegenden Arbeit geschehen ist, in welcher hauptsächlich die Elongationen und nur im untergeordneten Masse die Intensitäten ausschlaggebend waren. Man wird daher zum Beispiel mit den Periheldistanzen im I. Fall auch noch unter 0.6 herabgehen, im II. aber nicht einmal bis 0.2 hinaufgehen dürfen.

Mit Hilfe der in XVII gegebenen kurzen Übersicht lassen sich aus dem Verzeichniss der berechneten Kometen rasch diejenigen herausfinden, welche den Bedingungen des Verborgenseins genügen können. Vollständig, namentlich in Bezug auf den zwischen Perihelzeit und Perihellänge aufgestellten Zusammenhang, genügt, abgesehen von den periodischen, kein einziger Komet und kann es auch nicht, denn sonst hätte er ja, ausgenommen den Fall besonderer Helligkeit, überhaupt gar nicht beobachtet werden können.

I. Fall. (Directe Bewegung, mässige Neigung, $(\pi - \Omega)$ mit wachsender Neigung immer mehr einem der Werthe 0° oder 180° sich nähernd, Periheldistanz gegen 1 und dartüber hinaus, und zwar $\log q$ etwa zwischen 9.7 und 0.2). Für diesen Fall haben wir eine lange Reihe von Kometen, die somit, wenn zur Zeit des Perihels ungefähr $L = \pi$ gewesen wäre, unsichtbar geblieben wären. In Wirklichkeit wird jedoch dieser Bedingung von den meisten Kometen nicht einmal in einem entfernten Grade genügt, was der Hauptsache nach gewiss daher rührt, dass unter solchen Verhältnissen die theoretische Helligkeit eben der bedeutenden Distanzen wegen nur gering ist ($J = 0.16$ oder nur wenig grösser). Ausserdem mag aber in diesem Umstande vielleicht auch angedeutet sein, dass in der Nähe der Morgen- und Abenddämmerung

mit besseren Instrumenten noch wenig nach Kometen gesucht wurde.

Bei einigen Kometen waren die Verhältnisse geradezu entgegengesetzt, d. h. zur Zeit des Perihels war beinahe $L = \pi \pm 180^\circ$, somit der Komet im Perihel zugleich in Opposition mit der Sonne, bot uns also die möglichst günstigen Sichtbarkeitsverhältnisse dar. Ein solcher war de Vico's periodischer Komet vom Jahre 1844, der am 2. September sein Perihel in der Länge 342° passirte, während die geocentrische Länge der Sonne 160° betrug, somit die heliocentrische Differenz nur 2° . Geht jedoch dieser Komet in der entgegengesetzten Jahreszeit durch sein Perihel, also Februar oder März, so bleibt er unsichtbar, ein Umstand, der allgemein bekannt ist; so geschah es gleich im Jahre 1850, als, die Umlaufszeit zu $5\frac{1}{2}$ Jahren vorausgesetzt, nahezu $L_0 = \pi$ war.

Hieher sind auch zwei interessante periodische Kometen aus den letzten Jahren zu zählen, nämlich 1869 III = 1880 IV, und 1881 V (Denning). Für den ersteren ist $\pi = 43^\circ$, für den letzteren $\pi = 18^\circ$; beide können daher unsichtbar bleiben, wenn sie im Frühling durch das Perihel gehen.

Überhaupt gehören in diese Classe auch die meisten jener Kometen, welche, obwohl sie der Rechnung zufolge eine kurze Umlaufszeit besitzen, später nicht mehr zu finden waren oder erst nach mehreren Umläufen ganz neu entdeckt wurden; solche sind: 1819 III = 1858 II (Winnecke), 1819 IV (Blanpain), 1846 III (Brorsen), 1846 VI (C. H. F. Peters), ferner 1873 VII, der vermuthlich mit 1818 I identisch ist.

Es sind nun freilich die Bahnen der hier speciell genannten Kometen streng ausgesprochene Ellipsen und daher können unsere Betrachtungen, da sie auf eine parabolische Kometenbahn gegründet sind, hier keine directe Anwendung finden; dennoch geben sie einen richtigen Fingerzeig, weil in der dem Perihel zunächst liegenden Strecke der Charakter der Ellipse noch nicht stark hervortritt.

Andererseits ist damit aber auch der Grund angedeutet, warum Kometen mit $q > 1$, welche hinsichtlich der Excentricität von der Parabel gegen die Ellipse hin schon sehr bedeutend

abweichen (wie zum Beispiel der Komet von Faye), bei jeder bisher eingetretenen Wiederkehr gefunden wurden. Sie sind nämlich auch in einem vom Perihel schon weitab liegenden Bahnstück der Erde hinreichend nahe, was bei grösserer Excentricität nicht jedesmal stattfinden könnte. Auch der periodische Komet von d'Arrest wäre wohl nicht so oft gesehen worden, wenn die Excentricität seiner Bahn grösser wäre. Nur im Jahre 1864, als die Bedingung der Unsichtbarkeit ganz erfüllt war ($L_0 = \pi + 20^\circ$), blieb der Komet trotz der geringeren Excentricität unsichtbar. Auch bei der jetzigen Rückkehr kommt diese Bedingung zur Geltung, indem (13. Jänner 1884) die Sonnenlänge $L_0 = \pi - 26^\circ$ ist.

Der II. Fall (kleine Periheldistanz, retrograde Bewegung) bietet darum ein besonderes Interesse, weil es sich hier um Kometen handelt, die unsichtbar bleiben, obwohl sie sehr nahe zur Sonne hereinkommen. Die Ausbeute an bekannten Kometen ist hier weniger reichhaltig als im I. Fall, hauptsächlich darum, weil q grösseren Beschränkungen unterliegt. Um nun jene Gestirne zu finden, die bei geeigneter Wahl der Perihelzeit die Bedingungen der Unsichtbarkeit erfüllen, hat man die Bahnen mit $q < 0.23$ und $i > 90^\circ$ ins Auge zu fassen und darauf zu achten, dass $\sin(\pi - \Omega) \sin i < \frac{1}{2}$ ist, dass somit, je weiter man sich von $i = 180^\circ$ entfernt, der Bedingung $\pi - \Omega = 0^\circ$ oder $= 180^\circ$ immer näher entsprochen wird.

Man wird dadurch, wenn man mit $i = 180^\circ$ beginnt, zunächst auf den Kometen 1826 III geführt, dessen Bahn jedoch sehr unsicher ist, ferner auf den Kometen von 1689 (aber nur bei Zugrundelegung der von Ed. Vogel gerechneten Elemente) und den von 1821. Diese Gestirne wären also, wenn sie zur Zeit des Perihels nahe zwischen Erde und Sonne gestanden hätten, höchst wahrscheinlich gar nicht entdeckt worden. Auch der berühmte Komet von 1680 könnte, abgesehen von seiner Grösse, hieher gerechnet werden ($b_0 = -8^\circ$), aber nur in einem entfernten Grade, da die Neigung nur mehr 61° beträgt; doch ist dafür die Periheldistanz ausserordentlich klein ($q = 0.006$). In Wirklichkeit waren jedoch bei diesem Kometen, da er bei sehr kleiner Periheldistanz sein Perihel jenseits der Sonne passirte, die Sichtbarkeitsverhältnisse besonders günstig.

In diese zweite Classe wird man nun vielleicht auch den zu Sohag gesehenen Kometen einreihen dürfen, insbesondere dann, wenn es gestattet ist, aus dem Vorhandensein des hübschen Schweifes auf eine kleine Periheldistanz und ausserdem von seiner ansehnlichen Helligkeit, welche die der äusseren Partie der Sonnen-Corona übertraf, auf einen kleinen Radius vector, also gleichfalls auf eine geringe Periheldistanz zu schliessen.

Der Komet 418 II kann nur zum Theil als Seitenstück zum Sohag-Kometen gelten. Er wurde zwar auch während einer totalen Sonnenfinsterniss (19. Juli 418) gesehen, doch können die hier abgeleiteten Beziehungen auf ihn keine Anwendung finden, da er noch mehrere Monate später beobachtet wurde.

XXVII. SITZUNG VOM 13. DECEMBER 1883.

Das w. M. Herr Prof. Dr. Al. Rollett übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. Otto Drasch, Docent und Assistent an der physiologischen Lehrkanzel der Universität in Graz, betitelt: „Histologische und physiologische Studien über das Geschmacksorgan“.

Der Secretär legt eine Abhandlung von Herrn Dr. Gustav Kohn in Wien: „Über die Satellitcurven und Satellitflächen“ vor.

Herr Jos. Schlesinger, Professor an der k. k. Hochschule für Bodencultur, überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Kampf um physikalische Axiome.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin, 2^{me} série, 47^e année, tome XII. Nos. 45—48. Paris, 1883; 8^o.

Accademia, R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XVIII, Disp. 7^a (Giugno 1883). Torino; 8^o.

Central-Commission, k. k. statistische: Waaren-Einfuhr in das allgemeine österreichisch-ungarische Zollgebiet im Jahre 1882. IV. Band, 2. Heft. Wien, 1883; Folio.

— — Nachrichten über Industrie, Handel und Verkehr. XXVI. Band. II. & III. Heft. Wien, 1883; 4^o.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVII. Nro. 22. Paris, 1883; 4^o.

Gesellschaft, österreichische für Meteorologie: Zeitschrift XVIII. Band, December-Heft 1883. Wien, 1883; 4^o.

— geographische zu Greifswald: I. Jahresbericht 1882—83. Greifswald, 1883; 8^o.

Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. XI, Nr. XI. Jahrgang 1883. Pola; 8^o.

- Institute, the North of England of Mining and mechanical Engineers. Transactions. Vol. XXXII, parts I—V. Newcastle-upon-Tyne, 1882—83; 8°.
- Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando: Anales. Seccion 2ª: Observaciones meteorologicas. Año. 1882. San Fernando. 1883; Folio.
- Instituut, het koninklijk voor de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indie: Geschiedenis van Tanette door G. K. Niemann. Feestgave ter Gelegenheid van het zesde Internationale Congres der Orientalisten te Leiden. 's Gravenhage, 1883; 8°. — Eenige Proeven van boegineesche en makassarsche Poëzie door Dr. B. F. Matthes. 's Gravenhage, 1883; 8°.
- — Bijdragen. 's Gravenhage, 1883; 8°.
- Kriegsmarine, k. k.: Kundmachung für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1883. Heft 7, Pola. 1883; 8°.
- Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrgang 1883. IX, und X. Heft. Wien, 1883; 8°.
- Militär-geographisches Institut, k. k.: Mittheilungen. III. Band 1883. Wien, 1883; 8°.
- Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. XXVII^e année. 3^e série, tome XIII. 504^e livraison. Décembre 1883. Paris; 4°.
- Moore, F., F. Z. S.: The Lepidoptera of Ceylon. Part VII. London, 1823; gr. 4°.
- Nature. Vol. XXIX. Nr. 736. London, 1883; 8°.
- Nederlandsch Gasthuis voor Ooglijders: XXIV. jaarlijksch Verslag. Utrecht, 1883; 8°.
- Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal: Bulletin mensuel. Vol. XIV. Année 1882 par Dr. H. Hildebrand Hildebrandsson. Upsal, 1882—83; gr. 4°.
- Observatory, the: a monthly Review of Astronomy. Nr. 80. 1883, December 1. London; 8°.
- Osservatorio della regia Università di Torino: Bollettino. Anno XVII. (1882). Torino, 1883; quer 4°.

- Radcliffe Observatory: Results of astronomical Observations made at Oxford in the year 1880. Vol. XXXVIII. Oxford, 1883; 8°.
- Societas regia Scientiarum Upsaliensis. Nova acta: Seriei tertiae Vol. XI. Fasc. II. 1883. Upsaliae, 1883; gr. 4°.
- Society, the Linnean of London: The Journal. Botany. Vol. XIX, Nr. 122. London, 1882; 8°. — Vol. XX. Nos. 123—129. London, 1882—83; 8°.
- — Zoology. Vol. XVI. Nos. 95 & 96. London, 1882; 8°. — Vol. XVII, Nos. 97—100. London, 1883; 8°.
- — Proceedings. From November 1880 to June 1882. London; 8°.
- — The Transactions. 2nd Ser. Botany. Vol. II, parts 2.—5. London, 1882—83; 4°.
- — The Transactions. 2nd Ser. Zoology. Vol. II, parts 6.—8. London, 1883; 4°.
- — Lists of the Linnean Society of London. October 1881 & 1882. London; 8°.
- Utrecht'sche Hoogeschool: Onderzoekingen, gedaan in het Physiologisch Laboratorium. Derde Reeks VIII. Utrecht, 1883; 8°.
- Verein, militär-wissenschaftlicher in Wien: Organ. XXVII. Band, 2. & 3. Heft. 1883. Wien; 8°.
- für vaterländische Naturkunde in Württemberg: Jahreshefte. XXXIX. Jahrgang. Stuttgart, 1883; 8°.
- Zeitschrift für physiologische Chemie. VIII. Band. 1. & 2. Heft. Strassburg, 1883; 8°.
- Zoologische Station zu Neapel: Mittheilungen. IV. Band. 3. Heft. Leipzig, 1883; 8°.
- Zürich, Universität: Akademische Schriften pro 1882—83. 40 Stücke. 4° & 8°.
-

1166

Bestimmung des Planeten $\text{\textcircled{232}}$ Russia.

von Dr. Robert Herz.

Vorlesung an der Sitzung am 6. December 1883.

wurde am 31. Januar 1883 von Herrn J. J.
 entdeckt von Herrn v. Engelhardt
 der Name Russia. Die erste Bahabestimmung wurde
 am 1ten später anführenden Beobachtungen
 Circular zum Berliner
 auf diese ersten Elemente
 eine so beträcht-
 dass sich die Noth-
 mit Be-
 abzuleiten. Aus

app 3

232

232

232

System I

Die hieraus folgende Ephemeride, die sich im Circulare Nr. 201 findet, führe ich nicht an, da sie zur weiteren Berechnung nicht verwendet werden konnte; denn auch sie stellte die Beobachtungen von Mitte April bereits so ungenügend dar, dass für die Möglichkeit weiterer Beobachtungen eine neue Bahn bestimmt werden musste. Ich gründete dieselbe auf die drei Orte

	1883	Mittl. Ortszeit	app α	app δ
Wien	Jan. 31	11 ^h 41 ^m 43 ^s	10 ^h 5 ^m 40 ^s 85	+ 9 ^o 42' 23.9
Rom	März 8	9 57 16	9 36 59.00	+14 22 3.5
Dresden.....	April 13	9 3 59	9 33 45.49	+16 26 43.9

und erhielt als zweites, auf die mittlere Ekliptik 1883.0 bezogenes System:

(232) Russia.

Epoche: 1883, April 15.5 mittl. Berl. Zeit.

$$\begin{aligned}
 L &= 175^{\circ} 56' 17.02 \\
 M &= 335 \quad 32 \quad 39.56 \\
 \omega &= 47 \quad 53 \quad 14.66 \\
 \Omega &= 152 \quad 30 \quad 22.80 \\
 i &= 6 \quad 3 \quad 33.91 \\
 \varphi &= 10 \quad 6 \quad 21.74 \\
 \mu &= 870^{\circ} 2296 \\
 \log a &= 0.4069152
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{Mittl. Äq.} \\ 1883.0. \end{array}$$

und damit für die rechtwinkligen Äquatorcoordinaten

$$\begin{aligned}
 x &= \overline{9.999 \ 4837} \ r \sin (290^{\circ} 31' 29.95 + v) \\
 y &= \overline{9.978 \ 0757} \ r \sin (201 \quad 26 \quad 10.21 + v) \\
 z &= \overline{9.496 \ 5192} \ r \sin (192 \quad 1 \quad 57.48 + v),
 \end{aligned}$$

wobei r und v Radiusvector und wahre Anomalie bedeuten, und die überstrichenen Zahlencoëfficienten logarithmisch angesetzt sind.

Dieses Elementensystem stellte die Beobachtungen in recht befriedigender Weise dar. Es fand sich für die mittlere Beobachtung ein Fehler in Länge und Breite im Sinne „Beobachtung—Rechnung“

$$d\lambda = -4.43, \quad d\beta = +0.15.$$

Aber auch andere, zur Bahnbestimmung nicht verwendete Beobachtungen wurden ziemlich gut dargestellt; die probeweise

Berechnung der beiden Beobachtungen von Dresden Februar 18 und Rom März 17 ergab die Fehler in Länge und Breite im selben Sinne:

$$d\lambda = +1^{\circ}24 \quad d\beta = +6'00 \\ -4.56 \quad -1.27.$$

Es war also zu erwarten, dass die hieraus folgende Ephemeride den geocentrischen Lauf des Planeten schon sehr nahe richtig geben werde. Obzwar nun, wie aus der Zusammenstellung p. 1182 ersichtlich ist, die Beobachtungen von Ende April und Anfang Mai eine etwas grössere namentlich in AR unregelmässige Abweichung zeigten, so konnte die erhaltene Ephemeride doch als Grundlage für die weitere Rechnung dienen, weshalb ich dieselbe hier vollständig mittheile, während sie im Circulare Nr. 205 nur auszugsweise enthalten ist.

12 ^a mittl. Berl. Zeit	app α	app δ	log ρ	Abrzt.
Jan. 31	10 ^a 5 ^m 39.52	+ 9 ^o 42'39.9	0.1165	10 ^m 52 ^s
Febr. 1	10 4 57.61	+ 9 49 35.7	0.1146	10 49
2	10 4 14.50	+ 9 56 40.4	0.1129	10 47
3	10 3 30.26	+10 3 53.7	0.1113	10 44
4	10 2 44.95	+10 11 15.3	0.1097	10 42
5	10 1 58.64	+10 18 44.3	0.1082	10 40
6	10 1 11.40	+10 26 20.6	0.1067	10 37
7	10 0 23.30	+10 34 3.4	0.1053	10 36
8	9 59 34.41	+10 41 52.2	0.1041	10 34
9	9 58 44.82	+10 49 46.5	0.1029	10 32
10	9 57 54.60	+10 57 45.6	0.1018	10 30
11	9 57 3.85	+11 5 49.1	0.1008	10 29
12	9 56 12.63	+11 13 56.3	0.1000	10 28
13	9 55 21.03	+11 22 6.6	0.0992	10 26
14	9 54 29.13	+11 30 19.4	0.0985	10 25
15	9 53 37.04	+11 38 34.1	0.0979	10 25
16	9 52 44.79	+11 46 50.2	0.0973	10 24
17	9 51 52.50	+11 55 7.0	0.0968	10 23
18	9 51 0.25	+12 3 24.1	0.0965	10 23
19	9 50 8.11	+12 11 40.8	0.0963	10 22
20	9 49 16.16	+12 19 56.5	0.0961	10 22
21	9 48 24.49	+12 28 10.7	0.0961	10 22
22	9 47 33.18	+12 36 22.9	0.0961	10 22
23	9 46 42.30	+12 44 32.4	0.0962	10 22
24	9 45 51.95	+12 52 38.7	0.0964	10 22

12 ^h mittl. Berl. Zeit		app α		app δ		log ρ	Abzt.
Febr.	25	9 ^h 45 ^m	2 ^s 19	+13°	0' 41'' 3	0.0967	10 ^h 23 ^m
	26	9 44	13.10	+13	8 39.7	0.0970	10 23
	27	9 43	24.76	+13	16 33.3	0.0975	10 24
	28	9 42	37.25	+13	24 21.6	0.0981	10 25
März	1	9 41	50.65	+13	32 4.3	0.0987	10 26
	2	9 41	5.02	+13	39 40.7	0.0994	10 27
	3	9 40	20.44	+13	47 10.3	0.1002	10 28
	4	9 39	36.99	+13	54 32.7	0.1011	10 29
	5	9 38	54.73	+14	1 47.6	0.1021	10 31
	6	9 38	13.73	+14	8 54.6	0.1031	10 32
	7	9 37	34.06	+14	15 53.1	0.1042	10 34
	8	9 36	55.77	+14	22 42.9	0.1054	10 36
	9	9 36	18.94	+14	29 23.5	0.1067	10 38
	10	9 35	43.62	+14	35 54.7	0.1081	10 39
	11	9 35	9.86	+14	42 16.0	0.1095	10 42
	12	9 34	37.72	+14	48 27.4	0.1110	10 44
	13	9 34	7.24	+14	54 28.5	0.1125	10 46
	14	9 33	38.45	+15	0 19.1	0.1141	10 48
	15	9 33	11.41	+15	5 58.9	0.1158	10 51
	16	9 32	46.13	+15	11 27.9	0.1175	10 54
	17	9 32	22.65	+15	16 45.9	0.1193	10 56
	18	9 32	1.00	+15	21 52.7	0.1211	10 59
	19	9 31	41.20	+15	26 48.2	0.1230	11 2
	20	9 31	23.26	+15	31 32.3	0.1249	11 5
	21	9 31	7.21	+15	36 4.9	0.1269	11 8
	22	9 30	53.06	+15	40 26.0	0.1289	11 11
	23	9 30	40.82	+15	44 35.5	0.1310	11 14
	24	9 30	30.50	+15	48 33.3	0.1331	11 17
	25	9 30	22.11	+15	52 19.4	0.1353	11 21
	26	9 30	15.66	+15	55 53.7	0.1375	11 24
	27	9 30	11.15	+15	59 16.2	0.1397	11 28
	28	9 30	8.59	+16	2 26.9	0.1420	11 31
	29	9 30	7.97	+16	5 26.0	0.1443	11 35
	30	9 30	9.29	+16	8 13.3	0.1466	11 39
	31	9 30	12.58	+16	10 48.7	0.1489	11 43
April	1	9 30	17.80	+16	13 12.3	0.1513	11 46
	2	9 30	24.94	+16	15 24.0	0.1537	11 50
	3	9 30	34.01	+16	17 24.0	0.1561	11 54
	4	9 30	45.04	+16	19 12.3	0.1586	11 58
	5	9 30	57.99	+16	20 49.0	0.1611	12 2

12 ^a mittl. Berl. Zeit	app α		app δ		log ρ	Abrzt.	
April	6	9 ^a 31 ^m	12 ^s 84	+16 ^o 22' 13" 9	0.1636	12 7 ^a	
	7	9 31	29.60	+16 23 27.2	0.1661	12 11	
	8	9 31	48.25	+16 24 29.0	0.1686	12 15	
	9	9 32	8.77	+16 25 19.3	0.1711	12 19	
	10	9 32	31.14	+16 25 58.1	0.1736	12 24	
	11	9 32	55.36	+16 26 25.6	0.1762	12 28	
	12	9 33	21.40	+16 26 41.9	0.1788	12 33	
	13	9 33	49.22	+16 26 47.2	0.1814	12 37	
	14	9 34	18.81	+16 26 41.4	0.1840	12 42	
	15	9 34	50.14	+16 26 24.6	0.1866	12 46	
	16	9 35	23.20	+16 25 57.1	0.1892	12 51	
	17	9 35	57.95	+16 25 18.8	0.1918	12 55	
	18	9 36	34.37	+16 24 29.9	0.1944	13 0	
	19	9 37	12.43	+16 23 30.6	0.1970	13 5	
	20	9 37	52.11	+16 22 20.6	0.1996	13 9	
	21	9 38	33.37	+16 21 0.4	0.2022	13 14	
	22	9 39	16.20	+16 19 30.0	0.2048	13 19	
	23	9 40	0.57	+16 17 49.5	0.2074	13 24	
	24	9 40	46.46	+16 15 58.9	0.2100	13 29	
	25	9 41	33.84	+16 13 58.3	0.2126	13 34	
	26	9 42	22.68	+16 11 47.9	0.2152	13 38	
	27	9 43	12.96	+16 9 27.7	0.2178	13 43	
	28	9 44	4.66	+16 6 57.8	0.2204	13 48	
	29	9 44	57.76	+16 4 18.2	0.2230	13 53	
	30	9 45	52.22	+16 1 29.2	0.2256	13 58	
	Mai	1	9 46	48.04	+15 58 30.4	0.2281	14 3
		2	9 47	45.19	+15 55 22.4	0.2307	14 8
		3	9 48	43.65	+15 52 5.1	0.2333	14 13
		4	9 49	43.40	+15 48 38.5	0.2359	14 18
		5	9 50	44.41	+15 45 2.7	0.2384	14 23
6		9 51	46.66	+15 41 17.9	0.2410	14 28	
7		9 52	50.14	+15 37 24.0	0.2435	14 33	
8		9 53	54.81	+15 33 21.2	0.2460	14 39	
9		9 55	0.65	+15 29 9.6	0.2485	14 44	
10		9 56	7.64	+15 24 49.4	0.2510	14 49	

Bevor ich an die Vergleichung der Beobachtungen mit dieser Ephemeride gieng, habe ich die für die ersteren angegebenen Vergleichssterne durch Benutzung der mir zugänglichen Stern-cataloge möglichst sicher zu bestimmen gesucht. Aus dem von jedem Beobachter für den betreffenden Stern angegebenen mittleren Ort für 1883.0 und dem aus jedem einzelnen Catalog ent-

nommenen erhält man den für die Mitte der beiden Epochen (1883·0 und Epoche des Cataloges) geltenden Ort, mit welchen sich diejenigen Präcessionswerthe ergeben, die zur Übertragung der Catalogposition auf 1883·0 dienen, wodurch schon die Reductionen bis auf Grössen zweiter Ordnung richtig sind.

Die Reduction der Sternposition vom mittleren Äquinoctium des Jahresanfanges auf das wahre Äquinoctium des Beobachtungsdatums habe ich nicht neu gerechnet, sondern, da die Beobachtungen des Planeten sämmtlich aus dem Circulare zum Berliner Astronomischen Jahrbuch entnommen sind, welches die Positionsdifferenzen zwischen Planet und Vergleichssterne nicht gibt, die Differenz des Mittels der aus den verschiedenen Catalogen sich ergebenden mittleren Örter für 1883·0 und des im Circulare angegebenen mittleren Ortes direct als die Differenz der scheinbaren Örter für das Beobachtungsdatum angesehen und habe demgemäss die Planetenbeobachtungen um diese Differenzen corrigirt.

An die Declinationen habe ich ausserdem die von Auwers angegebenen Reductionen auf ein mittleres System (Astr. Nachr. Nr. 1536) angebracht. In der folgenden Tabelle sind nun die „Reductionen auf 1883·0“ ohne Rücksicht auf Eigenbewegung gerechnet, und mit Hilfe derselben und der nebenstehenden oben angeführten Auwers'schen Correction die „mittleren Örter für 1883·0“ erhalten worden, an welche demnach noch die kleine Correction wegen Eigenbewegung der Sterne anzubringen ist.

Nr.	Circulär- Nummer	Epoche des Cataloges	Angabe des Cataloges		Reduction auf 1883·0		Cor- rection	Mittlerer Ort für 1883·0	
			α	δ	α	δ		α	δ
1	203 c	1825 Weisse II. 9 ^a 526 1860 Wiener Zonen. Z. 166. N. 23.	9 ^h 23·26·92	+16° 30' 39"·5	+3·12·36	-15' 7"·18	+0·52	9 ^h 26·39·28	+16° 15' 32"·8
2	203 b	1836 Rümker Nachtrag 9 ^a 1860 Wiener Zonen. Z. 168. N. 36.	9 25 23·83 9 28 8·33	+16 21 33·6 +16 12 50·3	+1 16·23 +2 35·41	- 6 0·9 -12 26·22	+0·72	40·06 9 30 43·74	32·7 +16 0 24·8
3	201 i	1800 Lalande 18945. 1825 Weisse II. 9 ^a 669·7 1865 Schjellerup 3545 1880 Astr. Nachr. Band 88, pag. 21.	9 29 27·42 9 28 7·08 9 29 29·52 9 31 41·07	+16 6 30·8 +15 19 2·0 +15 12 20·6 +15 1 44·9	+1 16·02 +4 33·07 +3 10·64 +0 59·15	- 6 5·9 -22 2·19 -15 25·97 - 4 48·4	-3·12 +0·52	43·44 9 32 40·15 40·16 40·22	24·9 +14 56 56·7 55·2 56·5
4	203 d	1860 Wiener Zonen Z. 70.N.16.	9 34 4·97 9 32 58·95	+16 34 13·6 +16 39 34·8	+0 9·93 +1 16·10	- 0 48·4 - 6 10·2		9 34 14·90 15·05	+16 33 25·2 24·6
5	202 f	1800 Lalande 19039. 1825 Weisse II. 9 ^a 746.	9 31 21·36 9 32 42·62	+15 40 8·8 +15 33 23·6	+4 33·17 +3 10·80	-22 16·30 -15 35·77	-3·11 +0·52	9 35 54·53 53·42	+14 17 49·4 48·4
6	201 h	1825 Weisse I. 9 ^a 784.	9 34 14·17	+14 35 55·5	+3 9·87	-15 40·30	+0·52	9 37 24·04	+14 20 15·7
7	204 d	1800 Lalande 19178. 1825 Weisse II. 9 ^a 832.	9 36 10·69 9 37 32·89	+16 26 44·9 +16 19 56·6	+4 33·58 +3 11·09	-22 36·88 -15 50·16	-3·15 +0·51	9 40 44·27 43·98	+16 4 4·9 7·0
	205 d	1836 Rümker 9 ^a 2944 1850 Yarnall 4066.	9 38 9·391 9 39 28·66	+16 16 57·24 +16 10 24·4	+2 34·82 +1 15·73	-12 50·66 - 6 17·9	+0·70	44·21 44·39	7·2 6·5

Nr.	Circulär- Nummer u. Name	Epoche des Cataloges	Angabe des Cataloges		Reduction auf 1883·0		Cor- rection		Mittlerer Ort für 1883·0	
			α	δ	α	δ	δ	δ	α	δ
7	205 d	1862 Astr. Nachr. Band 58, pag. 231.	9 39 35·42	+16° 9' 53·7	+ 1 9·14	- 5' 45·1			9 40 44·56	+16° 4' 8·6
8	201 g	1800 Lalande 19293.	9 40 11·30	+13 59 42·4	+ 4 30·25	-22 53·48	-3·20		9 44 41·55	+13 36 45·7
		1800 Piazzi IX. 188.	9 40 11·40	+13 59 42·2	+ 4 30·25	-22 53·48	-3·20		41·65	45·5
		1825 Weisse I. 9·937.	9 41 33 21	+13 52 47·6	+ 3 8·77	-16 1·64	+0·51		41·98	46·5
		1835 Taylor 4341.	9 42 5·88	+13 50 2·53	+ 2 36 19	-13 16·46	-0·52		42·07	45·6
		1886 Rümker 9·2966.	9 42 9·059	+13 49 46·19	+ 2 32·94	-12 59 96	+0·77		42·00	47·0
		1840 Armagh 2156.	9 42 23·..	+13 48 38·71	+ 2 19·91	-11 53·80	-0·36		42·91	44·5
		1850 B. A. C. 3361.	9 42 55·91	+13 45 53·2	+ 1 47·36	- 9 8·2			43·27	45·0
		1850 Newcomb 489.	9 42 51·637	+13 45 54·24	+ 1 47·36	- 9 8·23			42·00	46·0
		1860 Yarnall 4108.	9 43 27·20	+13 43 7·4	+ 1 14·81	- 6 22·4			42·01	45·0
		1860 Radcliffe II. 985.	9 43 27·19	+13 43 7·3	+ 1 14·81	- 6 22·40	-0·34		42·00	44·6
		1864 New-Seven-Year-Cat. 1207.	9 43 40·25	+13 42 1·71	+ 1 1·80	- 5 15·99			42·05	45·7
9	201 f	1825 Weisse I. 9·949.	9 42 6·22	+13 28 8·7	+ 3 8·40	-16 3·21	+0·51		9 45 14·62	+13 12 6·0
		1865 Schjellrup 3624.	9 44 16·02	+13 17 4·5	+ 0 58·43	- 4 59·9			14·45	4·6
10	205 e	1855 Bonn VI. +16° 2047. 1862 Astr. Nachr. Band 58, pag. 231.	9 46 0·77	+16 8 25·1	+ 1 31·91	- 7 49·19	-0·16		9 47 32·68	+16 0 35·5
11	200 c	1862 Astr. Nachr. Band 58, pag. 231.	9 46 24·31	+16 6 28·5	+ 1 8·92	- 5 52·1			33·23	36·4
		1855 Bonn VI. +11° 2125.	9 47 32·68	+11 55 2·5	+ 1 30·26	- 7 51·21	-0·49		9 49 2·94	+11 47 10·8

Nr.	Circulär- Nummer u. Name	Epoche des Cataloges		Angabe des Cataloges		Reduction auf 1883.0		Cor- rection	Mittlerer Ort für 1883.0							
		Epoche des Cataloges		α	δ	α	δ		α	δ						
15	200 d	1825	Weisse I. 9. 1112.	9 50	17.60	+12.26	126.75	+ 3	7.07	-16.25	183	+0.51	9 59	24.67	+11.10'	1.2
16	201 c	1825	Weisse I. 9. 1137.	9 51	43.83	+11 36	22.4	+ 3	6.36	-16 29.71	+0.51	9 54	50.19	+11 19	53.2	
17	199 g	1825	Weisse I. 9. 1168.	9 53	1.24	+10 56	30.4	+ 3	5.91	-16 33.08	+0.51	9 56	7.15	+10 39	57.8	
18	199 f	1690	Flamsteed 1432.	9 51	24.00	+11 29	25.0	+10	18.20	-55 22.9		10	1 42.20	+10 34	2.1	
		1755	Bradley-Bessel.	9 54	52.81	+11 11	15.1	+ 6	49.62	-36 53.4		42.43	21.7			
		1800	Piazzi IX. 248.	9 57	16.60	+10 58	20.5	+ 4	25.42	-23 59.47	-2.97	42.04	18.1			
		1800	Lalande 1974 $\frac{1}{6}$.	9 57	16.77	+10 58	22.3	+ 4	25.42	-23 59.47	-2.97	42.19	19.9			
		1825	Weisse I. 9. 1290.	9 58	46.32	+10 51	7.1	+ 3	5.43	-16 47.51	+0.51	51.75	20.1			
		1825	Brisbane 2836.	9 58	35.21	+10 51	4.5	+ 3	5.43	-16 47.5		40.64	17.0			
		1835	Taylor 4501.	9 59	8.70	+10 48	12.57	+ 2	33.43	-13 54.38	-0.55	42.13	17.6			
		1840	Catalog v. 1439 St. 527.	9 59	24.38	—	—	+ 2	17.44	—	—	41.77	—			
		1840	Armagh 2202.	9 59	24.49	+10 46	44.09	+ 2	17.44	-12 27.68	-0.42	41.93	16.0			
		1845	Twelf-Year-Cat. 864.	—	—	+10 45	17.56	—	—	-11 0.97	+0.27	—	16.9			
		1850	B. A. C. 3457.	9 59	56.47	+10 43	52.2	+ 1	45.46	-9 34.2		41.93	18.0			
		1850	Newcomb. 499.	9 59	56.391	+10 43	50.26	+ 1	45.46	-9 34.2		41.85	16.1			
		1850	Münchner Ann. XX. 408.	9 59	56.42	+10 43	52.3	+ 1	45.46	-9 34.2		41.88	18.1			
		1860	Seven-Year-Cat. 772.	10 0	28.29	+10 40	55.78	+ 1	13.50	-6 40.45	+1.66	41.79	17.0			
		1860	Yarnall 4218.	10 0	28.26	+10 40	55.5	+ 1	13.50	-6 40.4		41.76	15.1			
		1864	N.-Seven-Year-Cat. 1229.	10 0	41.08	+10 39	45.80	+ 1	0.71	-5 30.9		41.79	14.9			
		1872	Nine-Year-Cat. 956.	10 1	6.570	+10 37	26.86	+ 0	35.14	-3 11.7		41.71	15.2			

Nr.	Circulär- Nummer	Epoche des Cataloges	Angabe des Cataloges		Reduction auf 1883.0		Cor- rection		Mittlerer Ort für 1883.0	
			α	δ	α	δ	δ	δ	α	δ
19	199 <i>d</i>	1800 Piazzì IX. 255.	9 ^h 58 ^m 54 ^s .40	+10° 34' 5.5	+ 4 ^m 24 ^s .91	-24' 5.36	-2° 32' 10 ^s	10 ^h 3 ^m 19 ^s .31	+10° 9' 57 ^s .2	
	201 <i>a</i>	1800 Lalande 1977 ^b / ₉ .	9 58 54.30	+10 34 2.6	+ 4 24.91	-24 5.36	-2.92	19 21	54.3	
		1800 Gould 2028.	—	+10 34 0.8	—	-24 5.4	—	—	55.4	
		1825 Weissé I. 10 ^b 5.	10 0 14.16	+10 26 49.3	+ 3 5.04	-16 51.63	+0.51	19.20	58.2	
		1835 Taylor 4509.	10 0 46.37	+10 23 54.95	+ 2 33.13	-13 57.74	-0.62	19.50	56.6	
		1850 B. A. C. 3464.	10 1 34.24	+10 19 30.7	+ 1 45.25	- 9 36.7	—	19.49	54.0	
20	199 <i>c</i>	Anschl. an A. N. 98, p. 135.	—	—	—	—	—	10 5 6.86	+ 9 42 43.0	
21	199 <i>c</i>	1800 Lalande 1987 ^b / ₈ .	10 2 54.08	+10 10 14.1	+ 4 24.22	-24 19.56	-2.89	10 7 18.30	+ 9 45 51.6	
		1825 Weissé I. 10 ^b 81.	10 4 13.65	+10 2 56.6	+ 3 4.57	-17 1.50	+0.51	18.22	55.6	
		1840 Santini 719.	10 5 1.59	+ 9 58 29.9	+ 2 16.81	-12 38.00	+1.63	18.40	53.5	
		Anschl. an A. N. 98, p. 135.	—	—	—	—	—	18.34	51.2	

Ad 1. Nimmt man in AR das Mittel aus den beiden ziemlich stark differirenden Werthen, so ergeben sich für die Beobachtungen April 5 und 7 Abweichungen von der Ephemeride von -0.53 und -0.94 ; nimmt man aber an, dass diese Abweichung der Angaben der beiden Cataloge von einer eigenen Bewegung des Sternes herrührt, so ergibt sich dieselbe aus den beiden angeführten Positionen zu $+0.022$, durch welche Annahme jene Ephemeridenfehler auf -0.13 respective -0.54 vermindert werden.

Ad 5. Auch hier ist wohl eine noch stärkere Abweichung in AR, allein eine daraus folgende EB von -0.0444 würde einen sehr bedeutenden Ephemeridenfehler ergeben, der nach der Grösse der übrigen Fehler

nicht vorhanden sein kann. Demzufolge wurde das arithmetische Mittel der beiden gefundenen Werthe als mittlere Position für 1883·0 angenommen. Gegenüber 1) ist hierin allerdings eine gewisse Willkürlichkeit gelegen, die aber mit Rücksicht auf die angeführten Umstände wenigstens zum Theile gerechtfertigt zu sein scheint.

Ad 7. Die Discussion der sämtlichen angegebenen Positionen ergab eine EB in AR von $+0^{\circ}0050$ und in Declination von $+0^{\circ}0396$ und für den mittleren Ort 1883·0 $\alpha = 9^{\circ}40'44''\cdot52$, $\delta = +16^{\circ}4'8''\cdot7$; die einzelnen Cataloge geben mit dieser EB die Positionen für 1883·0 in AR: $9^{\circ}40'44''\cdot69$, $44''\cdot28$, $44''\cdot45$, $44''\cdot51$, $44''\cdot67$ in Declination $+16^{\circ}4'8''\cdot2$, $9''\cdot3$, $9''\cdot1$, $7''\cdot4$, $9''\cdot4$.

Ad 8. In AR ergibt sich mit Ausschluss des British Associations Cataloges die EB $+0^{\circ}0071$; aus Lalande-Piazzi einerseits, und Yarnall-Radeliffe andererseits folgt dieselbe zu $+0^{\circ}0067$ die wegen EB corrigirten Positionen für 1883·0 werden daher $9^{\circ}44'42''\cdot10$, $42''\cdot20$, $42''\cdot37$, $42''\cdot39$, $42''\cdot31$, $43''\cdot20$,¹ $43''\cdot49$, $42''\cdot22$, $42''\cdot16$, $42''\cdot15$, $42''\cdot18$; in Declination ergibt sich keine merkbare EB, und wurde direct das Mittel aus den angeführten mittleren Orten für 1883·0 genommen.

Ad 12 und 13. Eine merkbare EB. zeigt sich nicht; es wurde das Mittel aus den obigen Resultaten gezogen.

Ad 18. Die bedeutenden Abweichungen in AR bei Weisse und Brisbane können wohl nur von Druckfehlern herrühren, u. z. bei Weisse um $10''$, bei Brisbane um $1''$; ich nahm daher im ersten Falle als AR an $\alpha = 10^{\circ}1'41''\cdot75$, während ich die Angabe von Brisbane ausschliessen zu müssen glaubte. Es ergab sich dann für EB in AR $-0^{\circ}0036$ und für die wahrscheinlichste mittlere AR selbst $10^{\circ}1'41''\cdot74$. In Declination musste die Flamsteed'sche Position angeschlossen werden; die übrigen ergaben für die EB. in Declination $-0^{\circ}0541$ und die wahrscheinlichste Declination selbst $+10^{\circ}34'14''\cdot82$.

Ad 19. Aus Lalande-Piazzi einerseits und Taylor andererseits folgt die EB in AR zu $+0^{\circ}0068$; mit derselben werden die corrigirten Positionen $10^{\circ}3'19''\cdot87$, $19''\cdot77$, $19''\cdot60$, $19''\cdot83$,

¹ Die genäherte Position aus Armagh wurde durch ein Versehen, das ich erst am Ende der Rechnung bemerkte, mit benutzt. Doch schien es mir nicht nöthig deshalb die ganze Rechnung zu wiederholen.

19°71, das Mittel $10^{\circ} 3' 19.76$; für die Declination folgte aus der Discussion aller Catalogangaben eine EB von $-0^{\circ} 0079$ und als wahrscheinlichste mittlere Declination $1883.0 : +10^{\circ} 9' 55.3$.

Hiernach wird die folgende Zusammenstellung keiner weiteren Erläuterung bedürfen, und es ist nur zu erwähnen, dass die in den letzten Columnen angeführten Correctionen mit ihren Zeichen zu den beobachteten Planetenpositionen hinzuzulegen sind.

Circ.- Nr.	Angegebenes		Angenommenes		Correction		
	α	δ	α	δ	α	δ	
1	203 <i>c</i>	9 ^h 26 ^m 40 ^s .02	+16° 15' 32".6	9 ^h 26 ^m 40 ^s .57	+16° 15' 32".7	+0.55	+0.1
2	203 <i>b</i>	9 30 43.61	+16 0 24.5	9 30 43.59	+16 0 24.8	-0.02	+0.3
3	201 <i>i</i>	9 32 40.28	+14 56 54.6	9 32 40.18	+14 56 56.1	-0.10	+1.5
4	203 <i>d</i>	9 34 14.90	+16 33 25.2	9 34 14.97	+16 33 24.9	+0.07	-0.3
5	202 <i>f</i>	9 35 53.38	+15 17 47.7	9 35 53.97	+14 17 48.9	+0.59	+1.2
6	201 <i>h</i>	9 37 24.05	+14 20 14.4	9 37 24.04	+14 20 15.7	-0.01	+1.3
7	204 <i>d</i>	9 40 44.48	+16 4 7.6	9 40 44.52	+16 4 8.7	+0.04	+1.1
	205 <i>d</i>	9 40 44.48	+16 4 7.6	9 40 44.52	+16 4 8.7	+0.04	+1.1
8	201 <i>g</i>	9 44 42.04	+13 36 44.0	9 44 42.43	+13 36 45.5	+0.39	+1.5
9	201 <i>f</i>	9 45 14.69	+13 12 5.4	9 45 14.53	+13 12 5.3	-0.16	-0.1
10	205 <i>e</i>	9 47 32.96	+16 0 35.9	9 47 32.96	+16 0 35.9	0.00	0.0
11	200 <i>c</i>	9 49 2.94	+11 47 10.8	9 49 2.94	+11 47 10.8	0.00	0.0
12	205 <i>f</i>	9 51 50.20	+15 46 44.4	9 51 50.06	+15 46 44.9	-0.14	+0.5
13	199 <i>h</i>	9 52 23.60	+11 31 3.1	9 52 23.56	+11 31 0.8	-0.04	-2.3
14	201 <i>d</i>	9 53 2.67	+11 46 13.1	9 53 2.66	+11 46 12.6	-0.01	-0.5
15	200 <i>d</i>	9 53 24.66	+12 10 1.0	9 53 24.63	+11 10 0.8	-0.03	-0.2
16	201 <i>c</i>	9 54 50.20	+11 19 52.6	9 54 50.19	+11 19 53.2	-0.01	+0.6
17	199 <i>g</i>	9 56 7.03	+10 39 57.0	9 56 7.15	+10 39 57.8	+0.12	+0.8
18	199 <i>f</i>	10 1 41.73	+10 34 15.2	10 1 41.74	+10 34 14.8	+0.01	-0.4
19 _I	199 <i>d</i>	10 3 19.55	+10 9 52.0	10 3 19.76	+10 9 55.3	+0.21	+3.3
19 _{II}	199 <i>e</i>	10 3 19.18	+10 9 57.6	10 3 19.76	+10 9 55.3	+0.58	-2.3
19 _{III}	201 <i>a</i>	10 3 19.21	+10 9 58.0	10 3 19.76	+10 9 55.3	+0.55	-2.7
20	199 <i>c</i> ₁	10 5 6.86	+ 9 42 43.0	10 5 6.86	+ 9 42 43.0	0.00	0.0
21	199 <i>c</i> ₂	10 7 18.34	+ 9 45 51.2	10 7 18.31	+ 9 45 53.0	-0.03	+1.8

Die Sterne *b* und *e*, Circular-Nr. 201, Bonner Durchmusterung 2102 und 2122 habe ich in den Sternencatalogen nicht gefunden. Die Positionen selbst sind nur genähert, und zwar:

$$201 e \ 9^h 51^m 25^s.00 \ +12^{\circ} 4' 6''.0$$

$$201 b \ 9 \ 58 \ 42.00 \ +10 \ 23 \ 20.0$$

In der folgenden Zusammenstellung sind nun die einzelnen Beobachtungen in der Reihenfolge, wie sie in Circularen erschienen sind, nebst den an dieselben anzubringenden Reductionen aufgenommen.

Datum 1883	Beobachtungs-		Vgl. *	Angegebenes		Reductionen		Circ.- Nr	Gr.		
	Ort	Zeit		α	δ	Wegen Vgl. *	Wegen Parall.				
Jänner 31	Wien	11 ^h 41 ^m 43 ^s	20	10 ^h 5 ^m 40 ^s 85	+ 9° 42' 23.9	0.00	0'0	-0.13	+4.3	199	12.3
Februar 1	Wien	10 24 45	21	10 5 0.99	+ 9 49 3.1	-0.03	+1.8	-0.21	+4.4	199	---
3	Rom	12 0 13	19 ⁱ	10 3 30.37	+10 3 46.9	+0.21	+3.3	-0.34	+8.7	199	12.0
5	Rom	10 16 38	19 ⁱ	10 2 2.58	+10 17 58.7	+0.21	+3.3	-0.23	+3.9	199	12.0
5	Palermo	11 59 33	19 ⁱⁱ	10 1 58.99	+10 18 56.2	+0.58	-2.3	-0.10	+8.2	199	12.5
7	Wien	11 3 52	18	10 0 25.81	+10 33 40.1	+0.01	-0.4	-0.14	+4.3	199	---
9	Palermo	11 40 59	17	9 58 45.74	+10 49 51.5	+0.12	+0.8	-0.10	+3.2	199	12.5
14	Wien	11 52 24	13	9 54 30.00	+11 30 10.7	-0.04	-2.3	-0.03	+4.2	199	12.0
16	Dresden	10 56 29	11	9 52 47.31	+11 46 19.9	0.00	0.0	-0.09	+4.5	200	12.0
18	Dresden	11 49 0	15	9 51 1.28	+12 3 17.1	-0.03	-0.2	-0.01	+4.4	200	---
5	Paris	11 59 9	19 ⁱⁱⁱ	10 1 57.46	+10 18 56.1	+0.55	-2.7	-0.08	+4.8	201	---
6	Paris	11 39 17	6	10 1 10.74	+10 24 54.1			-0.10	+4.3	201	---
13	Paris	11 45 30	16	9 55 20.12	+11 22 19.4	-0.01	+0.6	-0.05	+4.2	201	---
16	Paris	11 32 33	14	9 52 44.26	+11 46 52.4	-0.01	-0.5	-0.05	+4.2	201	11.8
18	Paris	12 6 41	e	9 50 56.79	+12 4 11.3			-0.01	+4.2	201	---
28	Rom	11 43 58	9	9 42 38.46	+13 24 21.5	-0.16	-0.1	+0.06	+3.4	201	12.5
2	Rom	9 50 7	8	9 41 9.17	+13 38 56.4	+0.39	+1.5	-0.11	+3.4	201	12.5
8	Rom	9 57 16	6	9 36 59.00	+14 22 3.5	-0.01	+1.3	-0.14	+3.3	201	13.0
13	Rom	9 59 42	3	9 34 10.49	+14 53 56.2	-0.10	+1.5	-0.02	+3.1	201	13.0
17	Rom	9 24 39	5	9 32 24.93	+15 16 7.8	+0.59	+1.2	-0.04	+3.0	202	13.0

Datum 1883	Beobachtungs-		Vgl. #	Angesehens		Reductionen			Circ.- Nr.	Gr.
	Ort	Zeit		α	δ	Wegen Vgl. α	Wegen Vgl. δ	Wegen Parall. δ		
März	28	Dresden	2	9 ^h 30 ^m 9 ^s .52	+16° 1' 57".4	-0 ^m 02 ^s +0 ["] 3	-0 ^m 01 ^s	+3 ["] 6	203	—
	30	Dresden	2	9 30 10.05	+16 7 49.4	-0.02 +0.3	+0.02	+3.6	203	—
	5	Dresden	1	9 30 56.85	+16 20 41.9	+0.55 +0.1	+0.20	+3.8	203	—
April	7	Dresden	1	9 31 26.38	+16 23 15.2	+0.55 +0.1	+0.07	+3.5	203	—
	13	Dresden	4	9 33 45.49	+16 26 43.9	+0.07 -0.3	+0.06	+3.3	203	—
	27	Dresden	7	9 43 5.38	+16 9 44.9	+0.04 +1.1	+0.16	+3.3	204	14.0
Mai	28	Dresden	7	9 43 57.51	+16 7 13.9	+0.04 +1.1	+0.18	+3.4	205	—
	29	Dresden	7	9 44 52.35	+16 4 32.5	+0.04 +1.1	+0.20	+3.5	205	—
	1	Dresden	10	9 46 42.33	+15 58 52.3	0.00 0.0	+0.19	+3.4	205	—
6	Dresden	12	9 51 36.80	+15 41 54.6	-0.14 +0.5	+0.15	+3.2	205	14.3	

Herz.

Hiermit ergeben sich die folgenden corrigirten Werthe von α und δ , welche mit den aus der Ephemeride interpolirten, die in den letzten beiden Columnen angegebenen Fehler im Sinne „Beobachtung“ ergeben.

Datum	Beobachtungs-Ort	Beobachtetes		Aus der Ephemeride berechnetes		B-R	
		α	δ	α	δ	α	δ
Jänner Februar	31 Wien	5 ^h 40 ^m 72	+ 9° 42' 28 ^s .2	10 ^h 5 ^m 40 ^s .70	+ 9° 42' 28 ^s .2	+ 0 ^h 02	0 ^h 0
	1 Wien	5 0 75	+ 9 49 9.3	10 5 1 09	+ 9 49 1.3	- 0 34	+ 8 0
	3 Rom	3 30 24	+ 10 3 53.9	10 3 30.47	+ 10 3 51.6	- 0 23	+ 2 3
	5 Rom	2 2 56	+ 10 18 6.9	10 2 2 22	+ 10 18 9.6	+ 0 34	- 2 7
	5 Palermo	1 59 47	+ 10 18 57.1	10 1 58.99	+ 10 18 40.9	+ 0 48	+ 16 2
	5 Paris	1 57 93	+ 10 18 57.7	10 1 57.48	+ 10 18 54.7	+ 0 35	+ 3 0
	6 Paris	1 10 64	+ 10 24 58.4	10 1 10 97	+ 10 26 24.7	(- 0 33	- 1 26 3)
	7 Wien	0 25 68	+ 10 33 44.0	10 0 25 94	+ 10 33 38.0	- 0 26	+ 6 0
	9 Palermo	9 58 45 76	+ 10 49 55.5	9 58 45 84	+ 10 49 36.8	- 0 08	+ 18 7
	13 Paris	9 55 20 06	+ 11 22 24.2	9 55 20 34	+ 11 22 13.2	- 0 28	+ 11 0
14 Wien	9 54 29 93	+ 11 30 12.6	9 54 30 21	+ 11 30 9.2	- 0 28	+ 3 4	
16 Paris	9 52 44 20	+ 11 46 56.1	9 52 44 56	+ 11 46 52.4	- 0 36	+ 3 7	
16 Dresden	9 52 47 22	+ 11 46 24.4	9 52 47 52	+ 11 46 24.3	- 0 30	+ 0 1	
18 Dresden	9 51 1 24	+ 12 3 21.3	9 51 1 07	+ 12 3 16.3	+ 0 17	+ 5 0	
18 Paris	9 50 56 80	+ 12 4 15.5	9 50 58 78	+ 12 3 38.1	(- 1 98	+ 37 4)	
März	28 Rom	9 42 38 36	+ 13 24 24.8	9 42 37 99	+ 13 24 14.3	+ 0 37	+ 10 5
	2 Rom	9 41 9 45	+ 13 39 1.3	9 41 9 31	+ 13 38 57.7	+ 0 14	+ 3 6
	8 Rom	9 36 58 85	+ 14 22 8.1	9 36 59 16	+ 14 22 6.4	- 0 31	+ 1 7

Datum	Beobachtungs-Ort	Beobachtetes		Aus der Ephemeride berechnetes		B-R	
		α	δ	α	δ	α	δ
März	Rom.....	9 34 10.37	+14°54' 0"8	9 34 9.87	+14° 53' 57"0	+0.50	+ 3"8
	Rom.....	9 32 25.48	+15 16 12.0	9 32 25.21	+15 16 10.6	+0.27	+ 1.4
28	Dresden	9 30 9.49	+16 2 0.7	9 30 8.82	+16 2 1.6	+0.67	- 0.9
	Dresden	9 30 10.05	+16 7 52.7	9 30 9.02	+16 7 53.4	+1.03	- 0.7
April	Dresden	9 30 57.60	+16 20 45.6	9 30 57.73	+16 20 47.5	-0.13	- 1.9
	Dresden	9 31 27.00	+16 23 18.6	9 31 27.54	+16 23 19.2	-0.54	- 0.6
13	Dresden	9 33 45.62	+16 26 46.9	9 33 45.46	+16 26 47.1	+0.16	- 0.2
27	Dresden	9 43 5.58	+16 9 49.3	9 43 8.83	+16 9 39.5	-3.25	+ 9.8
	Dresden	9 43 57.73	+16 7 18.4	9 44 1.07	+16 7 8.4	-3.34	+10.0
29	Dresden	9 44 52.59	+16 4 37.1	9 44 55.85	+16 4 25.5	-2.76	+11.6
	Dresden	9 46 42.52	+15 58 55.7	9 46 44.76	+15 58 41.0	-2.24	+14.7
Mai	1	9 51 36.81	+15 41 58.3	9 51 40.14	+15 41 41.6	-3.33	+16.7

Schliesst man hier die beiden Beobachtungen: Paris Febr. 6 und Febr. 18 aus, deren Unsicherheit davon herrührt, dass die beiden Sterne b und c nicht genügend bestimmt und einfach der Bonner Durchmusterung entnommen sind, so bleibt nur noch eine grössere Abweichung in der Beobachtung von Dresden März 30 in AR,

welche sich auch nach der Ausgleichung der Beobachtungen wieder zeigt. Jedoch darf nicht unerwähnt bleiben, dass eine bedeutendere Abweichung in AR bei der Beobachtung von April 7 ($-0^{\circ}94$) durch die Bestimmung des Vergleichssterne weggeschafft wurde (s. pag. 1176). Auffallend ist auch die bereits erwähnte starke und unregelmässige Abweichung in AR vom 27. April an, während das stetige Anwachsen des Fehlers in Declination in der Natur der Sache begründet erscheint; auf diesen Umstand komme ich später nochmals zurück.

Nachdem die obgenannten beiden Beobachtungen abgeschlossen waren, blieben noch 28 übrig, aus welchen ich 10 Normalorte durch Zusammenfassen der Beobachtungen in der oben durch Trennung derselben angedeuteten Art bildete. Es ergibt sich für dieselben:

- I. NO. Jan. 31 (Wien), Febr. 1 (Wien), 3 (Rom), 5 (Rom), 5 (Palermo), 5 (Paris), 7 (Wien), 9 (Palermo); Correction der Ephemeride $+0^{\circ}03$, $+6^{\circ}4$ für Febr. 4-5.
- II. NO. Febr. 13 (Paris), 14 (Wien) 16 (Paris), 16 (Dresden), 18 (Dresden); Corr. der Ephem. $-0^{\circ}21$, $+4^{\circ}6$ für Febr. 15-5.
- III. NO. Febr. 28 (Rom), März 2 (Rom); Corr. d. Eph. $+0^{\circ}25$, $+6^{\circ}9$ für März 1-5.
- IV. NO. März 8 (Rom); Corr. der Ephem. $-0^{\circ}31$, $+1^{\circ}7$ für März 8-5.
- V. NO. März 13 (Rom), 17 Rom; Corr. d. Eph. $+0^{\circ}38$, $+2^{\circ}7$ für März 15-5.
- VI. NO. März 28 und 30 (Dresden); Corr. d. Ephem. $+0^{\circ}85$, $-0^{\circ}8$ für März 29-5.
- VII. NO. April 5 und 7 (Dresden); Corr. d. Eph. $-0^{\circ}33$, $-1^{\circ}2$ für April 6-5.
- VIII. NO. April 13 (Dresden); Corr. d. Ephem. $+0^{\circ}16$, $-0^{\circ}2$ für April 13-5.
- IX. NO. April 27, 28, 29, Mai 1 (Dresden); Corr. d. Ephem. $-2^{\circ}90$, $+11^{\circ}5$.
- X. NO. Mai 6 (Dresden); Corr. d. Ephem. $-3^{\circ}33$, $+16^{\circ}7$.

Dabei genügt es, wie dies hier geschah, die Correctionen für die dem Mittel der Zeiten nächstgelegene Mitternacht geltend

anzusehen. Es werden dann die 10 Normalorte aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich, in welche gleich die aus dem Berliner Jahrbuch entnommenen Sonnencoordinaten beigefügt und die Anzahl der zusammengesetzten Beobachtungen als Gewichte der Normalorte eingetragen sind.

Nr.	Mittlere Berliner Zeit	Gewicht	app α	app δ	X	Y	Z
1	Febr. 4·5	8	10° 2' 44·98	+10° 11' 21" 7	+0·7076142	-0·6301820	-0·2734116
2	Febr. 15·5	5	9 53 36·83	+11 38 38·7	+0·8285703	-0·4940723	-0·2143618
3	März 1·5	2	9 41 50·90	+13 32 11·2	+0·9377429	-0·2952856	-0·1281125
4	März 8·5	1	9 36 55·46	+14 22 44·6	+0·9718013	-0·1884856	-0·0617738
5	März 15·5	2	9 33 11·79	+15 6 1·6	+0·9914811	-0·0788812	-0·0342246
6	März 29·5	2	9 30 8·82	+16 5 25·2	+0·9870405	+0·1420527	+0·0616348
7	April 6·5	2	9 31 12·51	+16 22 12·7	+0·9587272	+0·2654871	+0·1151891
8	April 13·5	1	9 33 49·38	+16 26 47·0	+0·9190438	+0·3694663	+0·1602377
9	April 29·5	4	9 44 54·86	+16 4 29·7	+0·7803321	+0·5849384	+0·2537895
10	Mai 6·5	1	9 51 43·33	+15 41 34·6	+0·7007697	+0·6665504	+0·2891950

Die Bestimmung der definitiven Elemente führte ich nach der Methode durch, welche Oppolzer in den Monatsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften 1878 publicirte, und die sich in seinem Lehrbuche zur Bahnbestimmung von Kometen und Planeten II. Band, I. Auflage, pag. 428 findet. Für den grössten Kreis und den Anfangspunkt der Zählung in demselben ergab sich

$$J = 39^{\circ} 25' 0''$$

$$II = 343^{\circ} 54' 50''$$

$$A = 156^{\circ} 41' 20''$$

Die auf diesen grössten Kreis bezogenen Ausgangselemente werden

- $M = 335^{\circ} 32' 39''.56$
- $(\omega) = 53 \quad 29 \quad 43''.75$
- $(\Omega) = 4 \quad 12 \quad 58''.89$
- $(i) = 23 \quad 55 \quad 47''.24$
- $\varphi = 10 \quad 6 \quad 21''.74$
- $\mu = 870''.2296$
- $\log a = 0.4069152$

Berechnet man aus denselben und den aus der folgenden Tabelle entnommenen, auf dieselbe Ebene bezogenen Sonnencoordinaten die Längen und Breiten für die Daten der 10 Normalorte und vergleicht sie mit den aus den beobachteten AR und Declinationen sich ergebenden, so erhält man die in der 7. und 8. Columnne angeführten Differenzen im Sinne „Beobachtung—Rechnung“, denen noch die Gewichtszahlen, welche gleich der Anzahl der in einem Normalorte zusammengefassten Beobachtungen sind, hinzugefügt wurden.

Nr.	(X)	(Y)	(Z)	λ	β	$\delta\lambda$	$\delta\beta$	Gewicht
1	-0.9786376	+0.1117713	+0.0487528	+6°40' 8''.62	-0°21' 46''.65	-3''.59	+5''.37	8
2	-0.9856709	-0.0702941	-0.0099484	+4 0 20.49	-0 35 49.35	-5.21	+1.86	5
3	-0.9421099	-0.2972781	-0.0838025	+0 34 31.26	-0 50 6.12	-1.10	+8.13	2
4	-0.8990862	-0.4050408	-0.1191537	-0 53 10.71	-0 52 41.28	-4.66	-1.81	1
5	-0.8427114	-0.5067906	-0.1527421	-2 2 24.97	-0 50 10.62	+2.76	+5.47	2
6	-0.6940047	-0.6865431	-0.2127042	-3 18 7.80	-0 28 28.07	+10.37	+6.57	2
7	-0.5902947	-0.7720519	-0.2416562	-3 10 45.29	-0 5 53.26	-3.31	-3.91	2
8	-0.4903023	-0.8349481	-0.2632630	-2 43 12.20	+0 20 7.24	+1.77	+1.14	1
9	-0.2380864	-0.9327170	-0.2980901	-0 22 4.63	+1 38 8.21	-40.21	-16.08	4
10	-0.1209324	-0.9541569	-0.3065307	+1 9 52.44	+2 19 39.76	-48.42	-16.14	1

Für die sechs Constanten, deren Verbesserungen so bestimmt werden sollen, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler in Länge und Breite ein Minimum werde, werden nach der benützten Methode die rechtwinkligen Coordinaten und Geschwindigkeiten zu einer Epoche gewählt, die ungefähr der Mitte jenes Zeitraumes entspricht, über welchen die Beobachtungen, beziehungsweise Normalorte vertheilt sind. Als Ausgangs epoche wählte ich die Zeit des fünften Normalortes, also März 15.5, für welchen die Ausgangscoordinaten und Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} x_0 &= +2.1472347 & \xi_0 &= -0.2811127 \\ y_0 &= +0.4603001 & \eta_0 &= +0.6199617 \\ z_0 &= +0.1336533 & \zeta_0 &= +0.2819107 \end{aligned}$$

sind. Zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Verbesserungen derselben ergaben sich die folgenden Bedingungengleichungen, wobei die Coëfficienten bereits logarithmisch angesetzt sind:

1. Längen.

1.	$0_n 55508$	$=$	$8_n 93955$	dx_0	$+9.87857$	dy_0	$+5.99708$	dz_0	$+8.77951$	$d\xi_0$	$+9_n 71097$	$d\eta_0$	$+5.70638$	$d\zeta_0$
2.	$0_n 71682$		$8_n 72283$		9.89666		6.04403		8.42315		$9_n 58234$		4.21091	
3.	$0_n 04134$		$7_n 83680$		9.90022		5.76419		7.26542		$9_n 28264$		$4_n 54466$	
4.	$0_n 66834$		8.09481		9.89424		5.27636		$7_n 16773$		$8_n 97502$		$3_n 88852$	
5.	0.44086		8.43587		9.88395	*			*		*		*	
6.	1.01577		8.62169		9.85410		6.08448		7.99289		9.23642		5.02875	
7.	$0_n 51983$		8.62160		9.83348		6.51666		8.17342		9.41300		5.65813	
8.	0.24796		8.57688		9.81419		6.77840		8.22489		9.51484		6.08984	
9.	$1_n 60415$		8.25578		9.76763		7.17359		7.84845		9.66271		6.61017	
10.	$1_n 68466$		7.79587		9.74642		7.29132		$7_n 63900$		9.70637		6.77624	

2. Breiten.

1.	0.72997	=	7.82098	dx_0	+6.94615	dy_0	+9.88138	dz_0	+7.54578	$d\xi_0$	+6.55537	$d\eta_0$	+9.71400
2.	0.26951		7.97614		6.90250		9.89751		7.61652		6.46391		9.58334
3.	0.91009		8.08001		6.29055		9.90010		7.45210		5.52098		9.28258
4.	0.11727		8.08351		6.21287		9.89421		7.16164		5.33294		8.97502
5.	0.73799		8.04905		6.60097		9.88418	*				*	
6.	0.81757		7.80563		6.35152		9.85456		7.16774		5.85198		9.23703
7.	0.59218		7.34680		6.32729		9.83354		6.76875		5.14258		9.41946
8.	0.05690		7.31337		6.81901		9.81354		7.19888		6.24978		9.51490
9.	1.20629		8.12386		7.06527		9.76443		8.08113		6.55933		9.66145
10.	1.20790		8.26874		6.93049		9.74203		8.28117		5.64568		9.70466

Multipliziert man diese Gleichungen mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten und setzt dann

$$\log \text{ Fehlerinheit} = 1.90518$$

$$x = 9.39109 \, dx_0 \quad t = 9.23105 \, d\xi_0$$

$$y = 0.33011 \, dy_0 \quad u = 0.16251 \, d\eta_0$$

$$z = 0.33292 \, dz_0 \quad w = 0.16554 \, d\zeta_0$$

so nehmen diese Gleichungen die Gestalt an

1. Längen.

1.	9.10144	=	0.00000	x	+0.00000	y	+6.11570	z	+0.00000	t	+0.00000	u	+5.99238	w
2.	9.16112		9.68122		9.91603		6.06059		9.54158		9.76931		4.89485	
3.	8.28667		8.59622		9.72062		5.58178		8.18488		9.27064		4.52963	
4.	8.76316		8.70372		9.56413		4.94344		7.93668		8.81251		3.67298	
5.	8.68619		9.19529		9.70435			*		*		*		

6.	9. 26110	9. 38111	9. 67450	5. 90207	8. 91285	9. 22442	5. 00872
7.	8 _n 76516	9. 38102	9. 65388	6. 33425	9. 09286	9. 40100	5. 64310
8.	8. 34278	9. 18579	9. 48408	6. 44548	8. 99384	9. 35283	5. 87430
9.	0 _n 00000	9. 16572	9. 73855	7. 14170	8. 91843	9. 80123	6. 74566
10.	9 _n 77948	8. 40428	9. 41631	6. 95840	8 _n 40795	9. 54886	6. 61070
2. Breiten.							
1.	9. 27633	=	8. 88143 x	+ 7. 06758 y	+ 8. 76627 t	+ 6 _n 84440 z	+ 0 _n 00000 w
2.	8. 71381		8. 93453	6. 32187	8 _n 78495	6 _n 65088	9 _n 76728
3.	9. 15542		8. 83943	6. 11095	8 _n 37156	5 _n 50888	9 _n 26755
4.	8 _n 21209		8. 62242	5 _n 88276	7 _n 93059	5. 17043	8 _n 80948
5.	8. 98332		8. 80847	6 _n 42137	*	*	*
6.	9. 06290		8. 56505	6 _n 17192	8. 06720	5 _n 83998	9. 22200
7.	8 _n 89751		8. 10622	6. 14769	7. 68821	5. 13058	9. 39843
8.	8. 15172		7 _n 92228	6. 48890	7 _n 96783	6. 08727	9. 34886
9.	9 _n 60214		9 _n 03330	7. 08619	9 _n 15111	6. 69785	9. 79694
10.	9 _n 30272		8 _n 87765	6. 60088	9 _n 05012	5 _n 48317	9. 53912
Hieraus folgen die Normalgleichungen:							
	+1.46381 x	-0.96279 y	+0.17600 z	-1.07885 t	+1.52304 u	-0.22871 w	= +0.16853
		+8.23356	+0.00401	+1.45461	-0.90726	-0.00022	-0.89087
			+3.20213	-0.21818	+0.00031	-0.91500	+0.10679
				+1.20054	-1.05636	-0.03114	-0.17108
					+2.04955	-0.00170	-0.60886
						+2.03855	-0.56039

deren Auflösung für die Unbekannten die Werthe gibt:

$$\begin{array}{ll} \log x = 0.32401 & \log t = 9.93341 \\ \log y = 9.68809 & \log u = 0.20913 \\ \log z = 8.53941 & \log w = 8.59698 \end{array}$$

Die Summe der Fehlerquadrate, die ursprünglich 11175'4 betrug, wird hiedurch auf 585'3 herabgedrückt.

Mit Berücksichtigung des log der Fehlereinheit werden nun die Correctionen der Coordinaten und Geschwindigkeiten für März 15.5

$$\begin{array}{ll} \log dx_0 = 2.83810 \text{ in Bogensecund.} = 7.52367 \text{ im Bogenmasse} & \\ \log dy_0 = 1.26316 & 5.94873 \\ \log dz_0 = 0.11167 & 4.79724 \\ \log d\xi_0 = 2.60754 & 7.29311 \\ \log d\eta_0 = 1.95180 & 6.63737 \\ \log d\zeta_0 = 0.33662 & 5.02219 \end{array}$$

Die Einführung dieser Werthe in die Bedingungsgleichungen ergibt die Fehlerquadratsumme 586'2 in genügender Übereinstimmung mit dem aus der Auflösung der Normalgleichungen erhaltenen Werthe.

Mit den hieraus folgenden verbesserten Werthen der Coordinaten und Geschwindigkeiten

$$\begin{array}{ll} x_1 = +2.1505742 & \xi_1 = -0.2291488 \\ y_1 = +0.4602112 & \eta_1 = +0.6195278 \\ z_1 = +0.1336470 & \zeta_1 = +0.2819002 \end{array}$$

erhält man die verbesserten, auf die eingeführte Grundebene bezogenen Elemente

$$\begin{array}{l} M = 328^\circ 8' 42.59 \\ (\omega) = 53 \quad 8 \quad 17.50 \\ (\Omega) = 4 \quad 12 \quad 53.43 \\ (i) = 23 \quad 56 \quad 55.67 \\ \varphi = 9 \quad 57 \quad 56.86 \\ \mu = 870'5890 \\ \log a = 0.4067956 \end{array}$$

und hieraus die verbesserten, auf die mittlere Ekliptik 1883.0 bezogenen Elemente III.

(232) Russia.

Epoche 1883 März 15·5 mittl. Berl. Zeit.

$$\begin{array}{rcl}
 L & = & 168^{\circ} 10' 48\cdot28 \\
 M & = & 328 \quad 8 \quad 42\cdot59 \\
 \omega & = & 47 \quad 33 \quad 6\cdot87 \\
 \Omega & = & 152 \quad 28 \quad 58\cdot82 \\
 i & = & 6 \quad 4 \quad 41\cdot80 \\
 \varphi & = & 9 \quad 57 \quad 56\cdot86 \\
 \mu & = & 870\cdot5890 \\
 \log a & = & 0\cdot4067956
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{Mittl. Äq.} \\ 1883\cdot0 \end{array}$$

und zur Berechnung der Ephemeride die auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinocmium 1883·0 bezogenen rechtwinkligen Coordinaten des Planeten

$$\begin{array}{l}
 x = \overline{9\cdot9994797} r \sin(290^{\circ} 10' 1\cdot38 + v) \\
 y = \overline{9\cdot9781148} r \sin(201 \quad 4 \quad 51\cdot38 + r) \\
 z = \overline{9\cdot4962012} r \sin(191 \quad 38 \quad 3\cdot91 + v)
 \end{array}$$

Die Rückrechnung der Planetenpositionen für die Zeit der zehn Normalorte aus diesen Elementen ergibt die Fehler:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 \text{in AR} & +0\cdot10 & -0\cdot06 & +0\cdot09 & -0\cdot71 & -0\cdot16 & +0\cdot45 & -0\cdot32 & +0\cdot77 \\
 & & & & & & & -0\cdot23 & +0\cdot50 \\
 \text{in Declin.} & +1\cdot7 & -2\cdot8 & +0\cdot7 & -2\cdot9 & -0\cdot2 & -1\cdot8 & -2\cdot5 & -2\cdot8 \\
 & & & & & & & +1\cdot3 & +1\cdot3
 \end{array}$$

und als Summe der Fehlerquadrate 595'6.

Im Allgemeinen ist nun diese Darstellung als eine befriedigende zu bezeichnen; die etwas grösseren übrigbleibenden Fehler beim vierten und achten Normalorte sind aus dem Umstande erklärlich, dass diese beiden Orte nur aus je einer Beobachtung abgeleitet sind. Wesentlich kleiner, doch immer noch ziemlich beträchtlich ist die Abweichung beim sechsten Normalorte, deren Ursache wohl in der schon erwähnten stärkeren Abweichung der Beobachtung des 30. März zu suchen wäre.

Obzwar nun die sehr bedeutenden Fehler in der Darstellung der Beobachtungen vom 27. April angefangen weggefallen sind, welchem Umstande auch die auffallend starke Verminderung in der Fehlerquadratsumme zuzuschreiben ist, so habe ich der Sicher-

heit der Auffindung des Planeten in der nächsten Opposition wegen, ein anderes Elementensystem mit Weglassung der beiden letzten Normalorte abgeleitet. Es ist wohl viel wahrscheinlicher, dass die bereits mitgetheilten Elemente die besseren sind, und die Auffindung des Planeten auf Grund der später anzuführenden Ephemeride gelingen werde, doch halte ich es nicht für überflüssig, auch die anderen Elemente mitzuthellen (wenn auch die Differenzen in den resultirenden Positionen nur gering sind), weil der Planet, für dessen mittlere Oppositionsgrösse sich aus den mitgetheilten Grössenangaben 13.27 ergibt, in der Opposition 1884 ziemlich ungünstig erscheint.

Für die Bestimmung der Elemente gelten natürlich dieselben, bereits angeführten Bedingungsgleichungen, mit Ausschluss der für den 9. u. 10. Normalort angeführten (pag. 1186 und 1187).

Aus den 16 übrigbleibenden, die sich auf die ersten acht Normalorte beziehen, folgen dann die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
 +1.42437x - 1.04948y + 0.25345z - 1.11410t + 1.42155u - 0.13504w &= +0.27191 \\
 +2.86555 &+ 0.00232 + 1.41608 - 1.34506 - 0.00145 &= -0.18569 \\
 +2.84454 &- 0.11298 - 0.00115 - 1.34220 &+ 0.37634 \\
 &+ 1.16037 - 1.13978 + 0.09639 &= -0.18279 \\
 &+ 1.52680 + 0.00091 &+ 0.23961 \\
 &+ 1.52127 &= -0.23944
 \end{aligned}$$

Die Auflösung derselben gibt:

$$\begin{aligned}
 \log x &= 0.09669 & \log t &= 9.78312 \\
 \log y &= 9.45403 & \log u &= 9.90515 \\
 \log z &= 7.93356 & \log w &= 8.88744
 \end{aligned}$$

mit einer Reduction der Fehlerquadratsumme von 1078.1 auf 362.8; diese Werthe der Unbekannten geben wieder mit Rücksicht auf die angenommene Fehlereinheit:

$$\begin{aligned}
 \log dx_0 &= 2.61078 \text{ in Bogensec.} = 7.29635 \text{ im Bogenmasse} \\
 \log dy_0 &= 1.02910 & 5.71467 \\
 \log dz_0 &= 9.50582 & 4.19139 \\
 \log d\zeta_0 &= 2.45725 & 7.14282 \\
 \log dx_0 &= 1.64782 & 6.33339 \\
 \log d\zeta_0 &= 0.62708 & 5.31265
 \end{aligned}$$

Führt man diese Werthe in die Bedingungsgleichungen ein, so bleiben die folgenden Fehler in Länge und Breite:

$$\begin{aligned}
 +0.09, -0.20, -1.15, +5.14, +0.18, -5.77, +5.86, -3.08 \\
 -1.24, +2.68, -2.97, +6.49, -0.65, -4.04, +4.11, -3.63
 \end{aligned}$$

woraus die Fehlerquadratsumme 364'4 folgt. Mit den verbesserten Werthen der Coordinaten und Geschwindigkeiten

$$\begin{array}{ll} x_1 = +2.1492132 & \xi_1 = -0.2297233 \\ y_1 = +0.4602488 & \eta_1 = +0.6197462 \\ z_1 = +0.1336549 & \zeta_1 = +0.2818902 \end{array}$$

findet man die auf die eingeführte Fundamentalebene bezogenen Elemente

$$\begin{array}{l} M = 328^\circ 8' 25.02 \\ (\omega) = 53 \ 12 \ 49.99 \\ (\Omega) = 4 \ 12 \ 52.33 \\ (i) = 23 \ 56 \ 20.55 \\ \varphi = 10 \ 0 \ 20.49 \\ \mu = 870'6486 \\ \log a = 0.4067758 \end{array}$$

und hieraus die auf die mittlere Ekliptik 1883.0 bezogenen Elemente IV.

⊙ Russia.

Epoche 1883; März 15.5 mittl. Berl. Zeit.

$$\begin{array}{l} L = 168^\circ 15' 2.37 \\ M = 328 \ 8 \ 25.02 \\ \omega = 47 \ 37 \ 10.26 \\ \Omega = 152 \ 29 \ 27.09 \\ i = 6 \ 4 \ 6.81 \\ \varphi = 10 \ 0 \ 20.49 \\ \mu = 870'6486 \\ \log a = 0.4067758 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Mittl. Äq.} \\ 1883.0 \end{array}$$

aus denen sich die Äquatorcoordinaten ebenfalls auf den mittleren Äquator 1883.0 bezogen, aus den Formeln ergeben

$$\begin{array}{l} x = \frac{9.9994816}{r} \sin(290^\circ 14' 31.44 + v) \\ y = \frac{9.9780942}{r} \sin(201 \ 9 \ 16.94 + v) \\ z = \frac{9.4963712}{r} \sin(191 \ 43 \ 44.88 + v) \end{array}$$

Wie man sieht, sind die beiden Elementensysteme nur wenig verschieden und auch die beiden Ephemeriden weichen von einander nicht wesentlich ab. Die Jahresephemeride habe ich überhaupt nur mit den Elementen III gerechnet, welche ich, wie schon erwähnt, als die richtigeren ansehe, und nur des schon

erwähnten Umstandes der Sicherheit der Auffindung des Planeten halber theile ich auch die aus den Elementen IV gerechnete Oppositionsephemeride mit. Die Resultate stellen sich demnach wie folgt:

$\textcircled{232}$ Russia.

Elemente III

abgeleitet aus zehn Normalorten

Mittlere Ekliptik und mittleres Äquinæctium 1883·0.

Epoche 1883, März 15·5, mittl. Berl. Zeit.

$L = 168^{\circ} 10' 48\cdot28$

$M = 328 \quad 8 \quad 42\cdot59$

$\omega = 47 \quad 33 \quad 6\cdot87$

$\Omega = 152 \quad 28 \quad 58\cdot82$

$\pi = 200 \quad 2 \quad 5\cdot69$

$i = 6 \quad 4 \quad 41\cdot80$

$\varphi = 9 \quad 57 \quad 56\cdot86$

$\mu = 870\cdot5890$

$\log a = 0\cdot4067956$

Elemente IV

abgeleitet aus acht Normalorten

$168^{\circ} 15' 2\cdot37$

$328 \quad 8 \quad 25\cdot02$

$47 \quad 37 \quad 10\cdot26$

$152 \quad 29 \quad 27\cdot09$

$200 \quad 6 \quad 37\cdot35$

$6 \quad 4 \quad 6\cdot81$

$10 \quad 0 \quad 20\cdot49$

$870\cdot6486$

$0\cdot4067758$

$g = 10\cdot28$

$m_0 = 13\cdot27$

Jahresephemeride für 1884.

12 ^h Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare AR	Scheinbare Declination	$\log r$	$\log \rho$
Januar 8	17 ^h 40 ^m 58 ^s	-19° 6' 8"	0·3531	0·4951
Januar 28	18 23 3	-19 2 2	0·3593	0·4837
Februar 17	19 2 43	-18 16 9	0·3657	0·4666
März 8	19 39 2	-17 0 5	0·3724	0·4436
März 28	20 11 9	-15 24 8	0·3791	0·4144
April 17	20 38 0	-13 44 2	0·3858	0·3792
Mai 7	20 58 25	-12 14 9	0·3925	0·3385
Mai 27	21 10 54	-11 15 4	0·3991	0·2943
Juni 16	21 13 41	-11 3 9	0·4055	0·2514
Juli 6	21 5 58	-11 52 5	0·4118	0·2183
Juli 26	20 50 9	-13 32 2	0·4179	0·2064
August 15	20 32 45	-15 29 0	0·4238	0·2224
Sept. 4	20 21 22	-17 4 5	0·4293	0·2624
Sept. 24	20 19 59	-17 59 6	0·4346	0·3155
October 14	20 28 29	-18 12 0	0·4396	0·3713
Nov. 3	20 44 43	-17 45 2	0·4443	0 4239
Nov. 23	21 6 28	-16 42 6	0·4487	0·4704
Dec. 13	21 31 46	-15 8 4	0·4528	0·5097
Dec. 33	21 59 16	-13 7 3	0·4566	0·5413

Opposition Juli 31, Grösse 13·3 Lichtstärke 0·91

Ephemeride für die Opposition 1884.

Berechnet aus den Elementen III.

12 ^h Mittlere Berliner Zeit	α app	δ app	$\log r$	$\log \rho$	Abzt.
Juli 11	21° 2' 35·62	-12° 13' 31" 3	0·413385	0·212988	13·34
12	21 1 51·62	-12 18 6·4	0·413691	0·212086	13 33
13	21 1 6·61	-12 22 48·4	0·413997	0·211247	13 31
14	21 0 20·60	-12 27 36·9	0·414302	0·210470	13 30
15	20 59 33·63	-12 32 31·9	0·414606	0·209757	13 28
16	20 58 45·70	-12 37 33·1	0·414910	0·209107	13 27
17	20 57 56·91	-12 42 40·1	0·415213	0·208523	13 26
18	20 57 7·33	-12 47 52·5	0·415516	0·208007	13 25
19	20 56 17·00	-12 53 10·2	0·415819	0·207560	13 24
20	20 55 25·97	-12 58 32·9	0·416121	0·207182	13 23
21	20 54 34·32	-13 4 0·2	0·416422	0·206874	13 23
22	20 53 42·10	-13 9 31·7	0·416723	0·206637	13 22
23	20 52 49·37	-13 15 7·2	0·417023	0·206470	13 22
24	20 51 56·20	-13 20 46·3	0·417322	0·206376	13 22
25	20 51 2·64	-13 26 28·6	0·417621	0·206354	13 22
26	20 50 8·78	-13 32 13·8	0·417919	0·206405	13 22
27	20 49 14·67	-13 38 1·6	0·418217	0·206529	13 22
28	20 48 20·39	-13 43 51·6	0·418514	0·206726	13 23
29	20 47 26·01	-13 49 43·5	0·418811	0·206996	13 23
30	20 46 31·57	-13 55 36·9	0·419107	0·207341	13 24
31	20 45 37·15	-14 1 31·5	0·419402	0·207758	13 25
August 1	20 44 42·82	-14 7 26·9	0·419697	0·208245	13 26
2	20 43 48·62	-14 13 22·9	0·419991	0·208805	13 26
3	20 42 54·65	-14 19 19·2	0·420284	0·209438	13 28
4	20 42 0·94	-14 25 15·3	0·420577	0·210143	13 29
5	20 41 7·55	-14 31 10·7	0·420869	0·210919	13 30
6	20 40 14·55	-14 37 5·4	0·421161	0·211765	13 32
7	20 39 22·02	-14 42 59·4	0·421452	0·212682	13 34
8	20 38 30·01	-14 48 52·3	0·421742	0·213667	13 36
9	20 37 38·56	-14 54 43·4	0·422031	0·214720	13 38

12 ^a Mittlere Berliner Zeit	α app	δ app	$\log r$	$\log \rho$	Abrzt.
Aug. 10	20 ^a 36-47 ^a 73	-15° 0' 32" 5	0·422320	0·215841	13-40
11	20 35 57·55	-15 6 19·3	0·422609	0·217030	13 42
12	20 35 8·09	-15 12 3·6	0·422897	0·218286	13 44
13	20 34 19·41	-15 17 45·3	0·423184	0·219605	13 47
14	20 33 31·58	-15 23 24·2	0·423471	0·220988	13 49
15	20 32 44·69	-15 28 59·7	0·423757	0·222435	13 52
16	20 31 58·78	-15 34 31·5	0·424042	0·223946	13 55

Ephemeride für die Opposition 1884.

Berechnet aus den Elementen IV.

12 ^a Mittlere Berliner Zeit	α app	δ app	$\log r$	$\log \rho$
Juli 11	21 ^a 3-35·1	-12° 11' 15"	0·41345	0·21339
12	21 2 51·3	-12 15 50	0·41376	0·21248
13	21 2 6·4	-12 20 32	0·41406	0·21162
14	21 1 20·7	-12 25 21	0·41437	0·21083
15	21 0 33·6	-12 30 15	0·41467	0·21011
16	20 59 54·8	-12 35 17	0·41498	0·20945
17	20 58 57·0	-12 40 24	0·41528	0·20885
18	20 58 7·5	-12 45 37	0·41558	0·20832
19	20 57 17·3	-12 50 54	0·41589	0·20786
20	20 56 26·3	-12 56 17	0·41619	0·20747
21	20 55 34·7	-13 1 45	0·41649	0·20715
22	20 54 42·5	-13 7 16	0·41679	0·20690
23	20 53 49·8	-13 12 52	0·41710	0·20672
24	20 52 56·7	-13 18 32	0·41740	0·20661
25	20 52 3·1	-13 24 14	0·41770	0·20658
26	20 51 9·4	-13 30 0	0·41799	0·20661
27	20 50 15·4	-13 35 48	0 41829	0·20672
28	20 49 21·1	-13 41 38	0·41859	0·20691
29	20 48 26·8	-13 47 31	0·41889	0·20716
30	20 47 32·4	-13 53 25	0·41919	0·20750

12 ^a Mittlere Berliner Zeit	α app	δ app	$\log r$	$\log \rho$
Juli	20 ^h 46 ^m 37 ^s ·9	-13° 59' 20 ["] *	0·41948	0·20790
Aug. 1	20 45 48·6	-14 5 16	0·41978	0·20837
2	20 44 49·4	-14 11 12	0·42007	0·20892
3	20 43 55·4	-14 17 9	0·42037	0·20954
4	20 43 1·6	-14 23 6	0·42066	0·21023
5	20 42 8·2	-14 29 2	0·42096	0·21099
6	20 41 15·1	-14 34 58	0·42125	0·21183
7	20 40 22·5	-14 40 52	0·42154	0·21273
8	20 39 30·4	-14 46 46	0·42183	0·21370
9	20 38 38·9	-14 52 38	0·42212	0·21474
10	20 37 47·8	-14 58 28	0·42241	0·21585
11	20 36 57·5	-15 4 16	0·42270	0·21703
12	20 36 8·0	-15 10 1	0·42299	0·21827
13	20 35 19·1	-15 15 44	0·42328	0·21958
14	20 33 31·1	-15 21 24	0·42357	0·22095
15	20 32 44·0	-15 27 0	0·42385	0·22239
16	20 32 57·9	-15 32 33	0·42414	0·22388

XXVIII. SITZUNG VOM 20. DECEMBER 1883.

Das w. M. Herr Hofrath Dr. F. Ritter v. Stein in Prag übermittelt die dritte Abtheilung seines Infusorienwerkes. II. Hälfte. „Der Organismus der arthrodelen Flagellaten.“

Herr F. Strohmmer, Assistent an der k. k. landw. chem. Versuchsstation in Wien, übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Gehaltsbestimmung reiner wässeriger Glycerinlösungen mittelst ihrer Brechungsexponenten“.

Über Ansuchen des Herrn F. Strohmmer wird das in der Sitzung dieser Classe vom 11. Juli 1878 behufs Wahrung seiner Priorität vorgelegte versiegelte Schreiben eröffnet. Dasselbe enthält eine Mittheilung über Gehaltsbestimmung von reinem Rohrzucker und reinen Glycerinlösungen in Wasser.

Der Secretär legt eine Abhandlung von Herrn Dr. F. v. Höhncl, Docent an der technischen Hochschule in Wien: „Über die Art des Auftretens einiger vegetabilischer Rohstoffe in den Stamppflanzen“ vor.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Prof. Dr. E. Lippmann in Wien vor, welches die Aufschrift trägt: „Über die Einwirkung organischer Hyperoxyde auf organische Verbindungen.“

Das w. M. Herr Hofrath Dr. F. Ritter v. Hauer überreicht den zweiten und letzten Theil der Abhandlung: „Recente und im Löss gefundene Landschnecken aus China“ von Herrn Dr. Vincenz Hilber, Privatdocent an der Universität in Graz.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Dr. C. Auer v. Welsbach: „Über die Erden des Gadolinit von Ytterby. II. Das Spectralverfahren.“

Ferner überreicht Herr Prof. Lieben eine an der technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit von Herrn Dr. A. Arche: „Über den Cerit und dessen Aufarbeitung auf Cer, Lanthan und Didynverbindungen.“

Der Secretär Herr Prof. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die Berechnung der Inductionscoefficienten von Drahtrollen“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

- Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Bulletin. 52^e année, 3^e série, tome 6. Nos 9 & 10. Bruxelles, 1883; 8^o.
- Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XIX. Nr. 21—22, Halle a. S., 1883; 4^o.
- Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3^e période, tome X. Nro. 10. Genève, Lausanne, Paris, 1883; 8^o.
- Bureau des Longitudes: Annales. Tome X. Paris, 1882; 4^o.
- Central-Commission, k. k. zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale. IX. Band 2. & 3. Heft. Wien, 1883; 4^o.
- Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII. Nr. 90—93. Cöthen, 1883; 4^o.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVII, Nro. 23. Paris, 1883; 8^o.
- Gesellschaft, archäologische zu Berlin: Der Goldfund von Vetersfelde. XLIII. Programm zum Winkelmannsfeste. Berlin, 1883; 4^o.
- Deutsche chemische. XVI. Jahrgang, Nr. 17. Berlin, 1883; 8^o.
 - k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVI. Nr. 10, Wien, 1883; 8^o.
 - deutsche geologische: Zeitschrift. XXXV. Band. 3. Heft, Berlin. 1883; 8^o.
 - Oberhessische für Natur- und Heilkunde: XXII. Bericht, zugleich Festschrift zur Feier des fünfzigjährigen Bestehens der Gesellschaft. Giessen, 1883; 8^o.

- Gesellschaft, Oberlausitzische der Wissenschaften: Neues Lausitzisches Magazin. LIX. Bd., 1. Heft. Görlitz, 1883; 8°.
- Senckenbergische naturforschende: Abhandlungen. XIII. Bd. 2. Heft. Frankfurt a. M., 1883; 4°.
- India: Memoirs of the geological Survey. Vol. XXII. Calcutta, 1883; 4°.
- Palaeontologia Indica. Ser. X. Vol. II, Part. 5. Calcutta, London, 1883; gr. 4°.
- Reports on the Meteorology in 1880 & 1881. VI. & VII. years. Calcutta, 1882—83; Fol. Report on the Administration in 1881—82. Calcutta; Fol.
- Account of the Operations of the great trigonometrical Survey. Volumes VII. & VIII. Dehra Dun, 1882; gr. 4°.
- Archaeological Survey: Report of a tour in Bihar and Bengal 1879—80 from Patina to Sunargaon by Alexander Cunningham, C. S. J., C. J. E.; Volume XV. Calcutta, 1882; 8°.
- Jahresberichte über die Fortschritte der Chemie. Für 1881 Viertes Heft. Giessen, 1883; 8°.
- Militär-Comité, k. k. technisches & administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Militär- & Genie-Wesens. Jahrgang 1883. 11. Heft. Wien, 1883; 8°.
- Museum of comparative Zoology at Harvard College: Memoirs. Vol. VIII, Nr. 2. Cambridge, 1883; 4°.
- Nature. Vol. XXIX. Nr. 737. London, 1883; 8°.
- Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux: Mémoires et Bulletins. Année 1881. Paris, Bordeaux, 1882; 8°.
- Society the royal geological of Ireland: Journal. Vol. XVI. Part II. 1881—82. London, Dublin, 1882; 8°.
- Tischner, August: The Sun changes its position in space, therefore it cannot be regarded as being „in a condition of rest“. Leipzig, 1883; 12°.
- United States: Coast and geodetic survey: Report. 1881. Text & Progress Sketches & Illustrations. Washington, 1883; 4°.
- Report of the Commissioner of Agriculture for the years 1881 and 1882. Washington, 1882; 8°.

- United States: Astronomical & meteorological Observations made during the year 1878. Washington, 1882; 4°.
- Verein, entomologischer in Berlin: Berliner entomologische Zeitschrift. XXVII. Band, 2. Heft. Berlin, 1883; 8°.
- Naturwissenschaftlicher in Karlsruhe: Verhandlungen. IX. Heft. Karlsruhe, 1883; 8°.
- Vierteljahresschrift, österr. für wissenschaftliche Veterinärkunde. LX. Band. I. Heft. Wien, 1883; 8°.
- Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. V. Jahrgang, Nr. 1 & 2. Wien, 1883; 4°.
-

Über die Berechnung der Inductionscoëfficienten von Drahtrollen.

Von dem w. M. J. Stefan.

Die Herstellung der Widerstandseinheit (Ohm) nach der vom Comité der British Association angenommenen Methode hat die Veranlassung gegeben, den Coëfficienten der Selbstinduction des angewendeten Erdinductors zu bestimmen. Mit besonderer Sorgfalt ist diese Bestimmung von Lord Rayleigh und A. Schuster, welche die Versuche des Comité's wiederholten, ausgeführt worden.¹ Lord Rayleigh hat später noch einen zweiten Inductor zu dem gleichen Zwecke benützt und auch für diesen den Inductionscoëfficienten bestimmt.²

Nach der Theorie der elektrodynamischen Induction ist der bestimmte Coëfficient gleichbedeutend mit dem doppelten elektrodynamischen Potential der entsprechenden Stromleitung auf sich selbst, eigentlich mit dem speciellen Werthe, welchen dieses doppelte Potential annimmt, wenn die Leitung von der elektromagnetischen Stromeinheit durchflossen wird. Dieses Potential lässt sich in den beiden Fällen auch durch Rechnung finden, da die Form der Stromleitungen geometrisch bestimmt und verhältnissmässig einfach ist. Diese Rechnung wurde auch für den ersten der zwei Inductoren zuerst von Maxwell und für beide von Lord Rayleigh ausgeführt.

Es ist wohl als selbstverständlich betrachtet worden, dass der berechnete Inductionscoëfficient mit dem beobachteten übereinstimmen müsse. Es ist aber doch hervorzuheben, dass durch diese Übereinstimmung, welche sich für die aus Kupferdraht hergestellten Inductoren auch thatsächlich ergeben hat, doch erst der Beweis für die Richtigkeit der angewandten Formeln geliefert

¹ Proceedings of the R. Soc. No. 213, p. 104, 1881.

² Phil. Transactions of the R. Soc. Vol. 173, p. 661, 1882.

wird. Der Begriff des elektrodynamischen Potentials ist aus den Fernwirkungen, welche zwischen Leitern elektrischer Ströme bestehen, abgeleitet worden. Dass diese Fernwirkungen durch den Potentialausdruck richtig wiedergegeben werden, dafür werden die dynamometrischen Versuche von Wilhelm Weber als Beweis angeführt. Man kann nun auch den Bestimmungen der Inductionscoëfficienten die Bedeutung geben, dass durch dieselben die Giltigkeit der Potentialformel nicht nur für die Fernwirkungen, sondern auch für die elektromotorischen Wechselwirkungen von Stromleitern, die sich unmittelbar berühren, geprüft wird.

Die erste experimentelle Bestimmung des Coëfficienten des englischen Inductors ist nicht sehr genau. Auch die erste von Maxwell ausgeführte Berechnung dieses Coëfficienten ist fehlerhaft. Die dazu dienende Formel, welche von Maxwell entwickelt wurde, ist eine Näherungsformel und gibt das Potential einer Drahtrolle auf sich selbst unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt des von den Drahtwindungen erfüllten ringförmigen Raumes ein Rechteck ist und dass die Dimensionen dieses Rechteckes klein sind gegen den mittleren Durchmesser der Rolle. Die Formel besteht aus zwei Theilen, einem ersten Näherungswerthe und aus einer Correction. Die Glieder der letzteren tragen die zweiten Potenzen der Verhältnisse der Breite und Höhe des Rechteckes zu dem Durchmesser der Rolle als Factoren. Von dieser Maxwell'schen Formel ist jedoch nur der erste Näherungswerth exact, in den Correctionsgliedern sind hingegen zwei numerische Coëfficienten unrichtig. Nicht nur diese Unrichtigkeit, sondern ausserdem auch noch ein bei der numerischen Berechnung begangener Fehler hatten eine beträchtlich zu kleine Zahl als Resultat zur Folge.

Lord Rayleigh hat die Maxwell'sche Formel mit einigen speciellen leichter zu behandelnden Fällen verglichen und wurde dadurch veranlasst, ihre Richtigkeit zu bezweifeln. Er machte deshalb bei der Berechnung des Inductionscoëfficienten von den Correctionsgliedern dieser Formeln keinen Gebrauch. Da die Entwicklung und Anwendung der correcten Formel zu umständlich erschien, substituirte er zum Theil der wirklich vorhandenen Aufgabe eine einfachere, zum Theil wandte er ein anderes als das

von Maxwell angegebene Rechnungsverfahren an. Der von ihm gefundene Werth $P = 451448$ Met. stimmt mit dem aus den Beobachtungen von A. Schuster abgeleiteten Werthe $P = 451300$ ausserordentlich nahe überein. Den wahrscheinlichen Fehler des letzteren Werthes gibt Schuster $= \pm 1100$ an.

Ich habe diesen Coefficienten ebenfalls berechnet nach dem in dieser Abhandlung mitzutheilenden Verfahren und $P = 451500$ gefunden. Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung lässt also in diesem Falle nichts zu wünschen übrig.

Der Inductor besteht aus zwei gleichen neben einander gestellten Rollen, deren Axen in eine gerade Linie fallen. Der mittlere Radius einer Rolle beträgt 15.8194 , der Abstand der Mittelebenen der beiden Rollen 3.851 . Der Querschnitt des von den Drahtwindungen ausgefüllten Ringes ist ein Rechteck, dessen Breite (Dimension parallel der Axe) 1.841 , dessen Höhe 1.608 beträgt. Alle diese Grössen sind in Centimetern ausgedrückt. Jede Rolle enthält 156.5 Windungen, nämlich 156 Windungen in 12 Lagen zu 13 Windungen und eine halbe Windung noch ausserhalb. Bei der Berechnung wurde vorausgesetzt, dass die 156.5 Windungen gleichförmig in dem Ringe vertheilt sind. Die Dicke des aufgewundenen Drahtes ist 0.137 .

Der zweite von Lord Rayleigh benützte Inductor besteht aus zwei gleichen Rollen vom mittleren Radius 23.625 in einem Abstände 6.595 . Die Breite des Ringquerschnittes ist 1.99 , die Höhe 1.565 . Jede Rolle enthält 288 Windungen in 16 Lagen zu 18 Windungen eines 0.1104 dicken Drahtes. Aus seinen Beobachtungen leitet Rayleigh für den Inductionscoefficienten dieses Inductors den Werth $P = 2402800$ Met. ab, nach seiner Berechnung ist $P = 2400000$ und nach meiner Berechnung $P = 2401500$. Es ist also auch in diesem Falle die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung eine sehr gute.

Nicht so günstig stellt sich die Sache in einem dritten Falle. Nach einem der englischen Methode analogen Verfahren hat auch Heinrich Weber eine Bestimmung des Ohm ausgeführt und auch den Inductionscoefficienten des von ihm verwendeten Inductors gemessen und berechnet.¹ Die Dimensionen dieses Inductors sind

¹ Der Rotationsinductor, seine Theorie und seine Anwendung zur Bestimmung des Ohm. Leipzig, Teubner, 1882.

folgende: Mittlerer Radius einer Rolle 26·361, Abstand der Mittelebenen der beiden Rollen 11·230, Breite des Ringquerschnittes 4·325, Höhe desselben 1·573. Jede Rolle enthält 87 Windungen. Diese sind in 6 Lagen vertheilt, von welcher die erste, dritte und fünfte je 15, die drei übrigen je 14 Windungen enthalten, so dass die Windungen jeder folgenden Lage in die Vertiefungen, welche die Windungen der vorhergehenden darbieten, eingelegt sind. Der aufgewundene Draht hatte, die Umspinnung eingerechnet, die Dicke 0·2883, ohne Umspinnung 0·253.

Aus seinen Beobachtungen leitet H. Weber für diesen Inductor den Werth $P=225900$ Met. ab, hingegen berechnet er nach der Maxwell'schen Formel den viel grösseren Werth $P=287510$. Diese bedeutende Differenz zwischen den beiden Werthen ist jedoch hauptsächlich durch Fehler in der Rechnung begründet. H. Weber gibt den ersten Näherungswerth von $P=284350$ und die Correction $=3160$ an. Die letztere ist nach der unrichtigen Maxwell'schen Formel berechnet. Der grössere Fehler ist aber schon bei der Berechnung des Hauptgliedes gemacht worden. Ich finde dasselbe $=201490$ und die Correction $=4680$, so dass im Ganzen $P=206200$ nunmehr nicht grösser, sondern kleiner ausfällt, als der aus den Beobachtungen abgeleitete Werth.

Ich finde übrigens auch aus den von H. Weber mitgetheilten Beobachtungen einen kleineren Werth für P , nämlich $P=214900$. Vielleicht ist diese Zahl noch aus folgendem Grunde zu gross. Bei der Bestimmung von P kommt ein Hilfs widerstand Δw zur Anwendung, welchem der Werth von P direct proportional ist. Dieser Hilfs widerstand wurde aus demselben Drahte, welcher zum Inductor verwendet wurde, hergestellt. Das Verhältniss von Δw zum Widerstande w des Inductors setzt H. Weber dem Verhältnisse der Längen der beiden Drähte gleich, es ist aber wahrscheinlich, dass der specifische Widerstand des Inductor-drahtes durch das Aufwickeln eine Vergrösserung erfahren hat.

Die Bemerkungen, welche H. Weber an die von ihm gefundene Differenz zwischen dem beobachteten und berechneten Werthe von P knüpft, haben nicht die Berechtigung, welche er ihnen beimisst. Man erhält auch nach dem gewöhnlichen Rechnungsverfahren für den Inductionscoefficienten dieses Apparates

ein genügend genaues Resultat. Die Genauigkeit ist allerdings geringer als in den beiden früheren Fällen, hauptsächlich wegen der ungleichförmigen Bewickelung des Inductors.

Die Bestimmung eines Inductionscoefficienten im absoluten Masse ist wie jede derartige Messung eine schwierige Aufgabe. In solchen Fällen, wie die hier behandelten, kann man wohl annehmen, dass die Rechnung ein ebenso sicheres Resultat liefert, als eine sorgfältige Messung. Viel leichter als eine absolute Messung ist die genaue Vergleichung zweier solcher Coefficienten auszuführen, und da bietet die Berechenbarkeit der elektrodynamischen Potentiale das Mittel, solche relative Bestimmungen in absolute zu verwandeln, indem man Rollen von zweckmässig gewählten Dimensionen als Maasse von bekannten absoluten Werthen herstellen und bei den Vergleichen verwenden kann.

Ich habe zu diesem Behufe mehrere Formeln abgeleitet und auch einige Tafeln berechnet, welche bei der Berechnung elektrodynamischer Potentiale verwendet werden können. Ich will hier diejenigen mittheilen, welche sich auf den von Maxwell behandelten Fall beziehen, dass die Querdimensionen des Rollenringes klein sind gegen den mittleren Durchmesser desselben und wenn es sich um das Potential einer Rolle auf eine zweite handelt, dass ihr Abstand kleiner ist als der mittlere Durchmesser derselben.

Der mittlere Radius der Rolle sei a , die Anzahl ihrer Drahtwindungen n . Das doppelte Potential der Rolle auf sich selbst oder ihr Coefficient der Selbstinduction ist durch die Formel

$$P = 4\pi an^2 z$$

bestimmt, worin z eine reine Zahl ist. Diese theile ich in zwei Theile z_1 und z_2 , so dass

$$z = z_1 + z_2$$

und z_1 einen ersten Näherungswerth von z bedeutet, z_2 eine hinzuzufügende Correction, welche um so kleiner ausfällt, je kleiner die Dimensionen des Rollenringes gegen den mittleren Radius a sind.

Ist der Querschnitt des von den Drahtwindungen erfüllten Ringes ein Rechteck, von der Breite b und der Höhe c , so ist, wie schon Maxwell berechnet hat,

$$z_1 = \log \frac{8a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c^2}{6b^2} \log \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{c} + \frac{b^2}{6c^2} \log \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b} \\ - \frac{2c}{3b} \operatorname{arctg} \frac{b}{c} - \frac{2b}{3c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b} + \frac{1}{12}.$$

Die Logarithmen in dieser Formel sind natürliche. Zerlegt man z_1 in zwei Theile, indem man setzt

$$z_1 = \log \frac{8a}{\sqrt{b^2+c^2}} - y_1,$$

so ist y_1 nur von dem Verhältnisse der beiden Grössen b und c abhängig und ändert seinen Werth nicht, wenn man b mit c vertauscht. Setzt man $\frac{c}{b} = x$, so wird

$$y_1 = \frac{2x}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{2}{3x} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} \log \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \\ - \frac{1}{6x^2} \log \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{12}.$$

Man braucht y_1 nur für solche Werthe von x , welche kleiner sind als 1, zu kennen, und da die Werthänderungen von y_1 , wenn x von 0 bis 1 wächst, keine grossen sind, so kann schon eine kleine Tafel die umständliche directe Berechnung von y_1 ersetzen. Ich theile hier eine solche Tafel mit:

Tafel I.

x	y_1	x	y_1
0	0.50000	0.50	0.79600
0.05	0.54899	0.55	0.80815
0.10	0.59243	0.60	0.81823
0.15	0.63102	0.65	0.82648
0.20	0.66520	0.70	0.83311
0.25	0.69532	0.75	0.83831
0.30	0.72172	0.80	0.84225
0.35	0.74469	0.85	0.84509
0.40	0.76454	0.90	0.84697
0.45	0.78155	0.95	0.84801
0.50	0.79600	1	0.84834

Für gewöhnlich wird die Bestimmung von y_1 auf drei Stellen genügen, es wird dann P um weniger als den tausendsten Theil seines Werthes fehlerhaft sein. Ich habe die Rechnung auf mehr Stellen ausgedehnt, um eine genauere Interpolation möglich zu machen.

Die mit z_2 bezeichnete Correction, welche zu z_1 hinzuzufügen ist, besteht aus einer Reihe, welche nach den geraden Potenzen der Verhältnisse von b und c zu a ansteigt. Von dieser Reihe ist nur der Theil, welcher die Quadrate dieser Verhältnisse enthält, von Maxwell, jedoch wie schon bemerkt, nicht richtig berechnet worden. Nach meiner Rechnung ist dieser Theil von z_2 , für den ich auch das Zeichen z_2 gebrauchen will, durch folgende Formel bestimmt:

$$z_2 = \frac{3b^2 + c^2}{96a^2} \log \frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} - \frac{c^4}{480a^2b^2} \log \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{c} + \frac{b^4}{96a^2c^2} \log \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b} - \frac{b^3}{30a^2c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b} + \frac{23b^2}{640a^2} + \frac{221c^2}{5760a^2}.$$

Die Breite b des Rollenringes ist parallel der Axe desselben, die Höhe c nach der Richtung des Radius der Rolle gemeint.

Zerlegt man z_2 in zwei Theile, indem man setzt

$$z_2 = \frac{3b^2 + c^2}{96a^2} \log \frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b^2}{16a^2} \cdot y_2,$$

so ist y_2 nur von dem Verhältnisse $\frac{c}{b} = x$ abhängig und durch

$$y_2 = \frac{23}{40} + \frac{221x^2}{360} - \frac{x^4}{30} \log \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1}{6x^2} \log \sqrt{1+x^2} - \frac{8}{15x} \operatorname{arctg} x$$

bestimmt.

Zur Berechnung von y_2 kann man folgende Tafel benützen.

Tafel II.

x	y_2	x	y_2
0	0·1250	0·50	0·3066
0·05	0·1269	0·55	0·3437
0·10	0·1325	0·60	0·3839
0·15	0·1418	0·65	0·4274
0·20	0·1548	0·70	0·4739
0·25	0·1714	0·75	0·5234
0·30	0·1916	0·80	0·5760
0·35	0·2152	0·85	0·6317
0·40	0·2423	0·90	0·6902
0·45	0·2728	0·95	0·7518
0·50	0·3066	1	0·8162

Zum Zwecke der Übersicht über die vorzunehmenden Rechnungen stelle ich noch den Ausdruck für P in folgender Form hieher:

$$P = 4\pi a n^2 \left[\left(1 + \frac{3b^2 + c^2}{96a^2} \right) \log \frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} - y_1 + \frac{b^2}{16a^2} y_2 \right].$$

Da die angewandten Erdinductoren aus zwei Rollen bestehen, so setzt sich der Inductionscoëfficient eines solchen Apparates aus drei Theilen zusammen, aus dem doppelten Potentiale jeder einzelnen Rolle auf sich selbst und aus dem doppelten gegenseitigen Potentiale der beiden Rollen. Zur Berechnung der letzteren wendet Maxwell dieselbe Formel an, wie zur Berechnung des Potentials einer Rolle auf sich selbst und zwar in folgender Weise. Er denkt sich auch den Zwischenraum der beiden Rollen mit Drahtwindungen ausgefüllt in derselben Art, wie sie in den Rollen vertheilt sind. Der Zwischenraum mit den beiden Rollen zusammen bildet nun eine grosse Rolle, deren Potentiale auf sich selbst gerechnet werden. Ebenso bildet der Zwischenraum mit jeder der Rollen zusammen eine Rolle, deren Potential wieder gerechnet werden kann. Aus diesen Potentialen und aus denen der einzelnen gegebenen Rollen auf sich selbst lässt sich das Potential der einen Rolle auf die zweite gegebene Rolle ableiten. Die dazu nöthigen Rechnungen sind, wie leicht zu ersehen, sehr weit-

läufig, namentlich wenn sie ohne Zuhilfenahme einer Tafel ausgeführt werden müssen.

Stehen die beiden Rollen einander sehr nahe, so ist bis jetzt kein anderer Weg zur Berechnung des gegenseitigen Potentials derselben gegeben. Für den Fall, dass sie weit von einander abstehen, kann man eine von Niven berechnete Tafel benutzen, welche der zweiten Auflage von Maxwell's Treatise on Electricity und auch der deutschen Übersetzung dieses Werkes beigegeben ist. Die unmittelbare Anwendung dieser Tafel beruht jedoch auf der Voraussetzung, dass man alle Windungen einer Rolle in ihrer mittleren Windung concentrirt annehmen darf, eine Voraussetzung, die bei einem rechteckigen Querschnitte der Ringe um so weniger zulässig ist, je näher die beiden Rollen einander stehen.

Wenn die Mittelpunkte der Querschnitte der beiden Rollen in einem Abstände sich befinden, welcher grösser ist als die Diagonale eines Querschnittes, wie dies bei den bisher angewandten Inductoren der Fall war, dann kann die Berechnung noch auf eine andere rasch zum Ziele führende Weise geschehen. Es lässt sich dann das Potential der beiden Rollen in eine Reihe entwickeln, welche nach den Potenzen der Verhältnisse der Breite und Höhe der Querschnitte zum Abstände ihrer Mittelpunkte fortschreitet und rasch convergirt.

Das gegenseitige Potential Q zweier Rollen von gleichem Radius a und gleicher Windungszahl n ist durch

$$Q = 4\pi a n^2 \cdot z$$

bestimmt, worin z eine reine Zahl bedeutet. Bezeichnet man wieder mit b die Breite und mit c die Höhe des rechteckigen Ringquerschnittes und mit d den Abstand der beiden Mittelpunkte der Rollen, so gibt die Formel

$$z_1 = \log \frac{8a}{d} - 2 + \frac{b^2 - c^2}{12d^2} + \frac{2b^4 + 2c^4 - 5b^2c^2}{120d^4} + \frac{3b^6 - 7b^4c^2 + 7b^2c^4 - 3c^6}{504d^6}$$

einen ersten Näherungswerth von z , bei dessen Ableitung die Quadrate der Verhältnisse von b , c und d zu a so wie die höheren

Potenzen derselben weggelassen wurden. Werden die Quadrate von $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ und von $\frac{d}{a}$ auch noch die vierten Potenzen bei der Entwicklung beibehalten, so geben diese Glieder eine zu z_1 hinzukommende Ergänzung z_2 , von folgender Form:

$$z_2 = \left(\log \frac{8a}{d} - 2 \right) \left(\frac{3b^2 + c^2 + 18d^2}{96a^2} - \frac{15d^4}{1024a^4} \right) + \frac{7b^2 + 23c^2 + 60d^2}{192a^2} - \frac{29d^4}{2048a^4}.$$

Das gegenseitige Potential zweier Rollen ist die Summe der gegenseitigen Potentiale ihrer einzelnen Windungen, das Potential einer Rolle auf sich selbst ist die Summe der Potentiale der einzelnen Windungen auf sich selbst und der gegenseitigen Potentiale dieser Windungen. Bei der Ableitung der mitgetheilten Formeln sind die vorzunehmenden Summirungen durch Integrationen über die Querschnitte der von den Windungen erfüllten Räume ersetzt worden. Bei dieser Art der Rechnung ist also eigentlich vorausgesetzt, dass die Windungen diese Räume continuirlich erfüllen, dass keine nichtleitenden Zwischenräume vorhanden sind. Letzteres ist nicht der Fall, wenn, wie gewöhnlich, die Drähte einen kreisförmigen Querschnitt haben und ausserdem von einer isolirenden Hülle umgeben sind. Die nach den mitgetheilten Formeln berechneten Werthe der Potentiale bedürfen daher noch einer Correction wegen der discontinuirlichen Vertheilung der Windungen. Diese Correction ist sehr klein, wenn es sich um gegenseitige Potentiale zweier Rollen handelt, sie ist beträchtlicher für das Potential einer Rolle auf sich selbst. Wie diese Correction für den Fall, dass die Windungen in der Rolle gleichförmig vertheilt sind, näherungsweise berechnet werden kann, ist schon von Maxwell angegeben worden, nur ist das von ihm gefundene Resultat nicht richtig. Hat die Rolle n Windungen, ist ihr mittlerer Radius a , Δ der Durchmesser des umsponnenen, δ der Durchmesser des nackten Drahtes, so ist der Inductionscoëfficient P der Rolle grösser als der nach der oben mitgetheilten Formel berechnete, und zwar um den Betrag

$$4 \pi a n \left(\log \frac{\Delta}{\delta} + 0 \cdot 15494 \right).$$

Maxwell gibt statt 0·15494 die Zahl 0·11835 an.

Diese Correction wird um so grösser, je dicker die isolirende Schichte ist. Sie wächst mit der Anzahl der Windungen im geraden Verhältniss. Da aber der Hauptwerth des Inductionscoefficienten mit dieser Anzahl im quadratischen Verhältniss zunimmt, so wird der relative Einfluss dieser Correction mit wachsender Zahl der Windungen immer kleiner. Für die angeführten Inductoren ist ihr Werth so klein, dass sie bei der Vergleichung von Beobachtung und Rechnung ausser Betracht bleiben kann.

Auf den von H. Weber construirten Inductor ist diese Formel jedoch nicht anwendbar. Die Correction, welche an dem für diesen Inductor berechneten Werthe von P angebracht werden muss, ist viel grösser, als sie nach dieser Formel gefunden wird. Der Grund davon liegt in der ungleichförmigen Vertheilung der Windungen. Man erhält bei einer solchen Anordnung der Windungen einen genaueren Werth von P , wenn man die Breite des Ringquerschnittes um die halbe Dicke des Windungsdrahtes kleiner annimmt. Dadurch wird annähernd der Einfluss der leeren Räume, welche die um eine Windung weniger enthaltenden Lagen übrig lassen, eliminirt. Auf diese Weise erhält man zu dem oben als berechnet angegebenen Werthe $P=206200$ eine Correction von 1500, so dass der Werth von P auf 207700 erhöht und dadurch dem beobachteten Werthe noch etwas näher gertückt wird.

Über den Mechanismus der Fernwirkung elektrischer Kräfte.

Von Dr. J. Odstrčil.

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. December 1883.)

1. Innerhalb eines sich ins Unendliche ausdehnenden elastischen festen Mediums (wie etwa Kautschuk) sei eine kugelförmige Höhlung vom Radius ρ . Auf die inneren Wandungen derselben werde (etwa durch ein Gas) ein Druck ausgeübt, der auf die Flächeneinheit bezogen, gleich p sei. Die Wandung wird dem Drucke nachgeben und in radialer Richtung um eine Strecke Δ , die dem auf die Flächeneinheit ausgeübten Drucke p proportional ist, verschoben werden, so dass $\Delta = kp$. Der Druck wird sich von Schichte zu Schichte fortpflanzen und ähnliche Verschiebungen in den folgenden Schichten bewirken. Bei dem Halbmesser r wird der Druck auf die Flächeneinheit $\frac{\rho^2}{r^2} p$ und die Verschiebung eines Elementes der concentrischen Kugelschichte

$$\delta = kp \frac{\rho^2}{r^2} = \Delta \frac{\rho^2}{r^2}$$

betragen. Die Verschiebungen nehmen also bei wachsendem r ab und werden in grosser Entfernung vom Mittelpunkte der Höhlung unmerklich werden.

Um in dem elastischen Medium diese Verschiebungen hervorzubringen, ist ein Aufwand von Arbeit nothwendig, die in Form von potentieller Energie in dem deformirten Medium verbleibt, so lange derselbe Druck in unveränderter Stärke fortbesteht, die aber gewonnen wird, wenn der Druck verschwindet.

Um die Grösse dieser Energie W aus den Verschiebungen zu berechnen, beachten wir, dass das verschobene Flächenelement während der Verschiebung einen seiner Grösse proportionalen

Widerstand leistete, der überdies dem jedesmaligen Abstand desselben von der Gleichgewichtslage proportional war, so dass das arithmetische Mittel aus dem Werthe des Widerstandes am Anfang und jenem am Ende, sobald die Verschiebung stationär geworden war, als mittlerer Widerstand genommen werden kann. Dieser Widerstand ist aber auch gleich dem jedesmaligen Druck.

Dieser Druck war anfänglich 0 am Ende $\frac{\rho^2}{r^2} p$, das arithmetische Mittel ist $\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r^2} p$ auf die Flächeneinheit, auf das Flächenelement entfällt daher $\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r^2} p d\sigma$ oder $\frac{1}{2} \frac{\delta}{k} d\sigma$, der Druck wurde überwunden auf die Strecke δ , so dass also die Arbeit zur Verschiebung des Flächenelementes beträgt $\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{k} d\sigma$.¹

Auf der kleinen Strecke des Radius dr liegen einige solcher Flächenelemente, die merklich dieselben Verschiebungen erlitten haben, ihre Anzahl ist proportional dr und somit gleich $k' dr$, wo k' eine neue von der Dichte des Mediums abhängige Constante bedeutet. Die Arbeit, die zur Verschiebung eines Volumenelementes nothwendig ist, beträgt also

$$dW = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{k} d\sigma \cdot k' dr$$

oder

$$dW = \frac{k' k}{2} \cdot p^2 \frac{\rho^4}{r^4} d\sigma dr,$$

somit ist die gesammte Energie des deformirten Mediums

$$W = \frac{k' k}{2} \cdot p^2 \rho^4 \iiint \frac{d\sigma dr}{r^4},$$

wobei das Integral über den ganzen die Höhlung umgebenden Raum auszudehnen ist.

¹ Zwar wurden die Theilchen des Flächenelementes auch in Richtungen senkrecht auf den Radius verschoben, da sie aus einem engeren Querschnitte in einen weiteren gelangten, der Betrag dieser Verschiebung ist aber jenem der Verschiebungen im radialen Sinne proportional und es kann der Proportionalitätsfactor, wenn es sich nicht um absolute Berechnungen handelt, in k aufgenommen werden.

Nun ist aber

$$\iiint \frac{d\sigma dr}{r^4} = \int \frac{dr}{r^4} \iint d\sigma = 4\pi \int_p^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi}{\rho}$$

und daher

$$W = \frac{k'k}{2} \cdot \frac{4\pi p^2 \rho^4}{\rho} = \frac{k'k}{2} \cdot \frac{(4\pi \rho^2 p)^2}{4\pi \rho}$$

2. Nehmen wir nun an, in demselben Medium seien zwei solche Höhlungen vom Radius ρ vorhanden, die Entfernung ihrer Mittelpunkte sei f . Wird nun auf die Wandungen der einen der Druck p , auf die der anderen der Druck p_1 per Flächeneinheit ausgeübt, so wird das umgebende Medium in Folge des einen und des andern Druckes Deformationen erleiden, die sich übereinander lagern werden. Offenbar wird die Gestalt jeder Höhlung durch den von der anderen ausgehenden Druck verändert werden, nehmen wir aber an, dass die Radien derselben so klein und die Entfernung der Mittelpunkte derselben so beträchtlich seien, dass wir von den Deformationen derselben und von der Wirkung, welche die letzteren auf das Medium äussern würden, absehen können.

Betrachten wir nun ein Theilchen M in dem umgebenden Raume, das von dem Mittelpunkte der Höhlung A die Entfernung r und von jenem der Höhlung B die Entfernung r_1 hat, so wird dasselbe in der Richtung AM und BM bezüglich die Verschiebungen $\delta = kp \frac{\rho^2}{r^2}$ und $\delta_1 = kp_1 \frac{\rho^2}{r_1^2}$ erfahren, welche sich zu einer einzigen nach dem Parallelogramm zusammensetzen lassen.

Um uns zunächst über die Richtung der resultirenden Verschiebung in einem beliebigen Punkte des Raumes zu orientiren, legen wir durch diesen Punkt und durch AB eine Ebene und durch den Punkt A als Ursprung ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Abscissenaxe durch B geht, der Punkt M habe dann die Coordinaten x, y . Die von A ausgegangene Verschiebung des Theilchens M zerlegen wir in zwei zur Abscissen- und Ordinatenaxe parallele Componenten ξ und η , ebenso die von B ausgegangene in ξ_1, η_1 .

Es ist dann

$$\xi = k\rho^2 \frac{p}{r^2} \cos MAB = k\rho^2 \frac{p}{r^3} x$$

$$\eta = k\rho^2 \frac{p}{r^2} \cos MAY = k\rho^2 \frac{p}{r^3} y$$

ebenso

$$\xi_1 = k\rho^2 \frac{p_1}{r_1^3} (x-f), \quad \eta_1 = k\rho^2 \frac{p_1}{r_1^3} y.$$

Die Summe der Verschiebungen in der Richtung X ist

$$\xi + \xi_1 = k\rho^2 \left[\left(\frac{p}{r^3} + \frac{p_1}{r_1^3} \right) x - \frac{p_1 f}{r_1^3} \right],$$

jene in der Richtung Y

$$\eta + \eta_1 = k\rho^2 \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p_1}{r_1^3} \right] y.$$

Heisst nun der Winkel, den die Richtung der Resultirenden mit der Abscissenaxe einschliesst ν , so ist

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\eta + \eta_1}{\xi + \xi_1}.$$

Sehen wir nun die Richtung der resultirenden Verschiebung als die Normale einer Curve $F(x, y) = 0$ an, so ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die im Punkte x, y an die Curve gezogene Tangente mit der Abscissenaxe bildet

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \nu} = -\frac{\xi + \xi_1}{\eta + \eta_1}$$

oder nach Einsetzung der Werthe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \frac{p_1 f}{r_1^3 \left(\frac{p}{r^3} + \frac{p_1}{r_1^3} \right) y}.$$

Eine solche Curve, die dieser Bedingung entspricht, ist diejenige, welche die Gleichung hat

$$\frac{p}{r} + \frac{p_1}{r_1} = \text{const.},$$

denn differentiirt man diese Gleichung, so erhält man

$$-\frac{pdr}{r^2} - \frac{p_1 dr_1}{r_1^2} = 0.$$

Da nun

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad r_1 = [(x-f)^2 + y^2]^{1/2}$$

ist, so hat man

$$dr = \frac{xdx}{r} + \frac{ydy}{r} \quad \text{und} \quad dr_1 = \frac{(x-f)dx}{r_1} + \frac{ydy}{r_1},$$

so dass die Differentialgleichung durch Substitution übergeht in

$$-\frac{px dx}{r^3} - \frac{py dy}{r^3} - \frac{p_1(x-f) dx}{r_1^3} - \frac{p_1 y dy}{r_1^3} = 0,$$

aus welcher folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \frac{p_1 f}{r_1^3 \left(\frac{p}{r^3} + \frac{p_1}{r_1^3} \right)},$$

wie gefordert wurde.

Indem man der Constanten in der Curvengleichung verschiedene Werthe ertheilt, erhält man eine Schar von Curven, durch deren Umdrehung um die Abscissenaxe eine Schar von Flächen erzeugt wird, die alle die Eigenschaft haben, dass die resultirenden der von *A* und von *B* ausgehenden Verschiebungen auf ihnen überall senkrecht stehen. Diese Flächen entsprechen den, im Falle einer einzigen Höhlung, um ihren Mittelpunkt construirten concentrischen Kugelflächen.

Die Grösse der resultirenden Verschiebung als der Diagonale eines Parallelogrammes, dessen Seiten δ und δ_1 den Winkel *AMB* einschliessen, sei *D*, so ist

$$D^2 = k^2 \rho^4 \left[\frac{p^2}{r^4} + \frac{p_1^2}{r_1^4} + \frac{2pp_1}{r^2 r_1^2} \cos AMB \right],$$

da aber

$$\cos AMB = \frac{r^2 + r_1^2 - f^2}{2rr_1}$$

ist, so ist auch

$$D^2 = k^2 \rho^4 \left[\frac{p^2}{r^4} + \frac{p_1^2}{r_1^4} + \frac{pp_1(r^2 - f^2)}{r^3 r_1^3} + \frac{pp_1}{r^3 r_1} \right].$$

Um die Arbeit, die zur Verschiebung eines Flächenelementes nöthig ist, zu finden, hat man das Element jener Fläche, auf der die Verschiebung senkrecht steht, mit D^2 zu multipliciren und durch $2k$ zu dividiren; sie ist also

$$\frac{D^2 ds}{2k}.$$

Bezeichnet man mit dn eine kurze Strecke der auf diese Fläche errichteten Normalen, so liegen auf dieser kleinen Strecke übereinander die Elemente der durch die Gleichung

$$\frac{p}{r} + \frac{p_1}{r_1} = \text{const.}$$

characterisirten Flächen, in denen allen die Verschiebungen merklich gleich sind. Die Anzahl dieser Flächen ist mit dn proportional und also gleich $k' dn$, wo k' wieder die von der Dichte des Mediums abhängige Constante bedeutet. Die zur Verschiebung dieser Flächenelemente nothwendige Arbeit ist

$$\frac{k'}{2k} D^2 ds dn.$$

Statt $ds \cdot dn$ kann aber ein Volumelement dv gesetzt werden, das auf beliebige Art berechnet werden mag. Es ist also die zur Verschiebung eines Volumelementes benöthigte Arbeit

$$dW = \frac{k'}{2k} D^2 dv.$$

Die gesammte Arbeit, die zur Deformation des Mediums unter den angenommenen Bedingungen aufgewendet werden muss, ist das Integral des vorhergehenden Ausdrucks genommen über den ganzen umgebenden Raum, also, wenn wir D^2 ersetzen

$$W = \frac{k' k \rho^2}{2} \iiint \left[\frac{p^2}{r^3} + \frac{p_1^2}{r_1^3} + \frac{pp_1(r^2 - r_1^2)}{r^3 r_1^3} + \frac{pp_1}{r^3 r_1} \right] dv.$$

Dies Integral zerlegen wir in seine Bestandtheile und bezeichnen

$$M = \iiint \frac{p^2}{r^4} dv, \quad N = \iiint \frac{p_1^2}{r_1^4} dv$$

$$P = \iiint \frac{pp_1(r^2 - f^2)}{r^3 r_1^3} dv, \quad Q = \iiint \frac{pp_1}{r^3 r_1} dv.$$

Um M zu erhalten, denken wir uns den ganzen Raum um den Punkt A in unendlich nahe liegende concentrische Kugelschalen zerlegt. Bezeichnet $d\sigma$ ein Flächenelement einer Kugel­fläche, so ist $d\sigma dr = dv$ ein Raumelement, daher

$$M = \iiint \frac{p^2}{r^4} d\sigma dr = p^2 \int \frac{dr}{r^4} \iint d\sigma = p^2 \int \frac{dr}{r^4} \cdot 4r^2 \pi$$

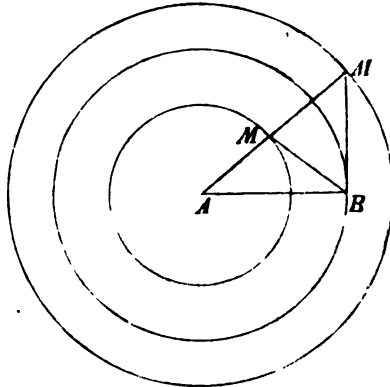
oder

$$M = 4\pi p^2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi p^2}{\rho}.$$

Ebenso ist

$$N = \frac{4\pi p_1^2}{\rho}.$$

Behufs der Ermittlung des Werthes von Q zeichnen wir zunächst unter den um A construirten concentrischen Kugelflächen jene aus, die durch B geht (s. Fig.).



Dann liegt B bezüglich jener Kugelschalen, deren Halbmesser kleiner als f ist, ausserhalb derselben, bezüglich jener dagegen, deren Radius grösser als f ist, innerhalb.

Wir zerlegen nun das Integral in eins des inneren und das des äusseren Raumes in Q , und $Q_{,,}$.

Es ist also

$$Q, = pp_1 \iiint \frac{dv}{r^3 r_1} = pp_1 \int \frac{dr}{r^2} \iint \frac{d\sigma}{r_1},$$

weil bei der Integration nach $d\sigma$ r constant bleibt. Wir wählen die Polarcordinaten $\vartheta = MAB$ und den Winkel φ zwischen der Ebene MAB und einer durch AB gehenden festen Ebene. Dann ist

$$d\sigma = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

durch Integration von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ ergibt sich

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1} = 2\pi r^2 \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{r_1}.$$

Es ist aber

$$r_1^2 = r^2 + f^2 - 2rf \cos \vartheta,$$

folglich

$$2r_1 dr_1 = 2rf \sin \vartheta d\vartheta,$$

woraus

$$\sin \vartheta d\vartheta = \frac{r_1 dr_1}{rf},$$

folgt. Demnach ist

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1} = 2\pi r^2 \int \frac{dr_1}{rf};$$

da, wenn

$$\vartheta = 0, r_1 = f - r$$

$$\vartheta = \pi, r_1 = f + r,$$

so ist

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1} = \frac{2\pi r^2}{rf} [f+r - f+r] = \frac{4\pi r^2}{f}.$$

Es ist nun

$$Q, = pp_1 \int_p^f \frac{4\pi r^2}{f} \cdot \frac{dr}{r^3} = \frac{4\pi pp_1}{f} \int_p^f \frac{dr}{r}.$$

Das Integral im äusseren Raume

$$Q,, = pp_1 \int \frac{dr}{r^3} \iint \frac{d\sigma}{r_1}.$$

kann ebenso gefunden werden. Es ist nämlich wie früher

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1} = \frac{2\pi r}{f} \int dr_1,$$

aber diesmal entspricht der Grenze

$$\begin{aligned} \vartheta &= 0, & r_1 &= r - f \\ \vartheta &= \pi, & r_1 &= r + f, \end{aligned}$$

woraus sich

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1} = \frac{2\pi r}{f} [r + f - r + f] = 4\pi r$$

ergibt. Es ist demnach

$$Q_{,,} = 4\pi p p_1 \int_f^\infty \frac{dr}{r^2} = 4\pi p p_1 \cdot \frac{1}{f}.$$

Um das Integral

$$P = \iiint \frac{p p_1 (r^2 - f^2)}{r^3 r_1^3} dv$$

auszuwerthen, werden wir wieder das Integral in dem inneren und äusseren Raum für sich rechnen, die wir bezüglich mit P und $P_{,,}$ bezeichnen.

Es ist also

$$P_{,,} = p p_1 \int_p^f \frac{(r^2 - f^2) dr}{r^3} \iint \frac{d\sigma}{r_1^3}.$$

Auf einem Wege, der ganz analog ist jenem, den wir bei Auswerthung von Q , eingeschlagen haben, findet man

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1^3} = \frac{r}{f} \cdot \frac{4\pi r}{f^2 - r^2},$$

wenn $f > r$.

Es ist demnach

$$P_{,,} = -\frac{4\pi p p_1}{f} \int_p^f \frac{dr}{r}$$

Andererseits ist

$$P_{,,} = pp_1 \int_f^{\infty} \frac{(r^2 - f^2)}{r^3} dr \iint \frac{d\sigma}{r_1^3}$$

und zwar für $f < r$; man findet leicht

$$\iint \frac{d\sigma}{r_1^3} = \frac{4\pi r}{r^2 - f^2},$$

daher

$$P_{,,} = 4\pi pp_1 \int_f^{\infty} \frac{dr}{r^2} = 4\pi pp_1 \cdot \frac{1}{f}.$$

Es ist somit der gesammte Aufwand an Arbeit, der zur Deformation des Mediums nothwendig war, oder die gesammte potentielle Energie des Mediums

$$W = \frac{k_1 k \rho^4}{2} [M + N + P_{,+} + P_{,,} + Q_{,+} + Q_{,,}]$$

oder, wenn man für M , N , $P_{,,}$ und $Q_{,,}$ die Werthe einsetzt und berücksichtigt, dass $P_{,+} = -Q_{,+}$ und $P_{,,} = Q_{,,}$ ist,

$$W = \frac{k' k \rho^4}{2} \cdot 4\pi \left[\frac{p^2}{\rho} + \frac{p_1^2}{\rho} + \frac{2pp_1}{f} \right].$$

3. Nimmt man an, dass auf die Wandungen der Höhlung nicht ein Druck, sondern auf irgend eine Art ein Zug ausgeübt wird, so haben die Verschiebungen nur die entgegengesetzte Richtung, das Gesetz ihrer Abnahme bleibt dasselbe und in den Formeln für die durch die Deformation geweckte potentielle Energie ist einfach p mit negativem Zeichen zu nehmen.

4. Die Optik fordert, dass der Äther als Träger einer transversalen Wellenbewegung die Gesetze der Elasticität fester Körper befolge. Wir machen ferner die Annahme, ohne auf das Wesen der Elektrizität einzugehen, dass

- a) ein positiv elektrischer Körper auf den umgebenden Äther einen Druck,
- b) ein negativ elektrischer dagegen einen Zug ausübe, dessen Grösse auf die Flächeneinheit bezogen gleich (oder wenigstens proportional) der Dichte der Elektrizität sei.

Setzen wir nun in der Entwicklung (1) an die Stelle des angenommenen Mediums den Äther, an Stelle der Höhlung eine elektrisirte Kugel vom Radius ρ , auf deren Oberfläche positive oder negative Elektrizität von der Dichte p sich befindet, so ist der Arbeitsaufwand, der zur Elektrisirung der Kugel benöthigt wird:

$$W = \frac{k' k}{2 \cdot 4\pi} \frac{(4\pi\rho^2 p)^2}{\rho} = C \cdot \frac{E^2}{\rho},$$

wo C eine Constante und E die gesammte Ladung bedeutet; es ist also der Arbeitsaufwand und zugleich die durch die Deformation des Äthers geweckte potentielle Energie proportional dem Quadrate der Ladung und umgekehrt proportional dem Radius der Kugel, wie es die Elektrizitätslehre fordert.

Nehmen wir zwei elektrische Kugeln vom Radius ρ an, auf denen die Elektrizitäten die Dichten p und p_1 haben, so ist der Arbeitsaufwand

$$\begin{aligned} W &= \frac{k' k}{2 \cdot 4\pi} \left[\frac{(4\pi\rho^2 p)^2}{\rho} + \frac{(4\pi\rho^2 p_1)^2}{\rho} \pm \frac{2(4\pi\rho^2 p)(4\pi\rho^2 p_1)}{f} \right] \\ &= C \left[\frac{E^2}{\rho} + \frac{E_1^2}{\rho} \pm \frac{2EE_1}{f} \right], \end{aligned}$$

dieser Arbeitsaufwand hängt also auch von f ab.

Die Elasticität des deformirten Äthers sucht zu bewirken, dass die Verschiebungen seiner Theilchen geringer werden, entweder dadurch, dass die elektrischen Körper ihre gegenseitige Entfernung ändern, was, wenn sie in ihren Lagen nicht festgehalten werden, geschehen kann, da der Äther der Bewegung keinen Widerstand entgegensetzt, oder dadurch, dass die Elektrizitäten an der Oberfläche der Körper sich ausbreiten, oder in den Körpern sich ausgleichen, kurz, dass jene Erscheinungen eintreten, die man aus der Abstossung und Anziehung der Elektrizitäten abzuleiten pflegt.

Das Gesetz der Abstossung und Anziehung erhält man, wenn man überlegt, dass wenn die gegenseitige Entfernung der elektrischen Körper eine Zu- oder Abnahme df erfährt, auch die Energie eine solche dW erleidet. Dieses dW kann man sich

vorstellen als das Product aus einer Kraft P , welche auf der Strecke df gewirkt hat, also

$$P = \frac{dW}{df} = \pm 2C \cdot \frac{EE_1}{f^2},$$

je nachdem E und E' gleich oder entgegengesetzt bezeichnet sind. Dieses ist aber das Coulomb'sche Gesetz, auf dem die gesammte Potentialtheorie aufgebaut ist, welches aber nur gilt, wenn die elektrischen Körper klein und in so beträchtlicher Entfernung angenommen werden, dass in der Vertheilung der Electricitäten durch gegenseitige Einwirkung keine Änderung eintritt; dieselbe Bedingung machten wir aber in (2), dass nämlich durch gegenseitige Einwirkung die Höhlungen nicht deformirt werden dürfen.

Die Kraftlinien haben die physikalische Bedeutung, dass sie überall die Richtung des Druckes und der Hauptverschiebung der Theilchen angeben, während die Flächen gleichen Potentials als Flächen, auf denen der Druck überall senkrecht steht, Niveauflächen sind.

Über den Cerit und dessen Aufarbeitung auf Cer, Lanthan und Didymverbindungen.

(Arbeit aus dem Laboratorium der techn. Hochschule in Wien.)

Von Dr. A. Arche.

Das von mir in Arbeit genommene Material (Cerit von Tromsdorff bezogen) kam in zwei Partien zu je $1\frac{1}{2}$ Kilo in meine Hände und wurde von mir zuerst einer qualitativen und quantitativen Analyse unterworfen. Das Mineral hatte in gepulvertem Zustande eine graubraune Farbe, die Stücke zeigten eine Härte von 5·5 und ein specifisches Gewicht von 4·11—4·19. Nach dem Reiben in einer Achatschale wurde eine Schlämmprobe gemacht, welche kleine graue und braune Körner hinterliess. Diese stellten sich als kleine Spaltungsindividuen mit spiegelnden Flächen dar, und ergaben bei der qualitativen Analyse: Kupfer, schwefel, Wismuth und geringe Mengen von Blei und Molybdän.

Der vorliegende Cerit war demnach mit einer geringen Menge eines Fahlerzes durchsetzt.

Die von jeder Partie Cerit genommene Durchschnittsprobe wurde fein gerieben und ein Theil (A) zur directen Wasser- und Kohlensäurebestimmung verwendet, der Rest hingegen geschlämmt, die jeweiligen Schlämmtückstände neuerdings gerieben und geschlämmt und dies Verfahren so lange fortgesetzt, bis die ganze Probe in ein zwischen den Zähnen unfühlbare Pulver verwandelt war. (B.)

Dieses Schlämmpulver (B) wurde so, wie es nach einem scharfen Trocknen erhalten wurde, zur qualitativen und quantitativen Analyse benützt.

Die Prüfung auf die Körper wurde sowohl durch Aufschliessen mit Na_2CO_3 , K_2CO_3 , sowie auch in derselben Art in

jener Flüssigkeit vorgenommen, welche sich durch Aufschliessen des Ceritpulvers mit KHSO_4 , HF, KF (1:9) ergab.

Beide qualitativen Analysen lieferten dasselbe Resultat. Die Aufschliessungen gingen im Ganzen mässig gut von statten, indem zwar bei jener mit Na_2CO_3 , K_2CO_3 der gebliebene Rückstand nach dem Filtriren und Waschen sammt dem eingäscherten Filter neuerdings aufgeschlossen werden musste, und diese Reihenfolge von Operationen mit den nun gebliebenen Rückständen selbst ein drittes Mal nothwendig war, dann aber eine vollständige Lösung erzielt wurde, die Aufschliessung mit KHSO_4 , KF, HF hingegen schon nach dem zweiten Male keinen Rückstand hinterliess.

In beiden Flüssigkeiten wurden Bi, Cu, Mo, Al, Fe, Co, Ce, La, Dy, Ca, Mg, S, SiO_2 , CO_2 , H_2O (Pb, Zn, Mn, Sr) nachgewiesen, wobei für die in der Klammer sich befindlichen Elemente bemerkt werden muss, dass sie in Spuren vorhanden waren. Im Pulver A wurde eine directe Wasser- und Kohlensäurebestimmung vorgenommen. Bei 110° ging kein Wasser weg, bei dunkler Rothgluth im Luftstrome wurde eine Wasserabgabe nachgewiesen und bestimmt, während bei noch höherer Temperatur durch Glühen der Substanz im Porzellanrohre vor dem Gebläse keine weitere erfolgte. Das zur quantitativen Analyse verwendete Pulver B wurde bei 110° C. getrocknet und analysirt. Es wurde zuerst mit Na_2CO_3 , K_2CO_3 behandelt und die SiO_2 abgeschieden. Die übrigen Körper wurden in einer Lösung bestimmt, die durch Aufschliessen einer dritten Partie mit HF, KF, KHSO_4 (1:9) erhalten wurde. Bei der quantitativen Bestimmung der SiO_2 wurde nicht wie bei der qualitativen Analyse so lange behandelt, bis alles aufgeschlossen war, sondern die erste wässrige Lösung von dem unaufgeschlossenen Rückstand abfiltrirt und dieser Rückstand mit Flussäure behandelt. Da keine Gewichtsabnahme stattgefunden hatte, so war durch die erste Aufschliessung die ganze SiO_2 in Lösung gegangen, doch daraus den Schluss zu ziehen, dass die erhaltene Menge SiO_2 die richtige sei, ist falsch, und werde ich auf diesen Punkt noch später zurückzukommen haben.

Das Ergebniss der Analysen stellt sich nun folgendermassen:

1. Partie.

Verwendete Substanz in Grammen	erhalten in Grammen	Procent
1.4166 A.	0.0397 H ₂ O	2.40 H ₂ O
"	0.0276 CO ₂	1.95 CO ₂
0.6756 B.	0.0546 BaSO ₄	1.11 S
0.961 "	0.2468 SiO ₂	25.68 SiO ₂
1.853 "	0.0039 Cu ₂ S	0.16 Cu
"	0.0026 Bi	0.14 Bi
"	0.0528 MoS ₂	1.71 Mo
"	1.1707 Oxyde	63.18 Oxyde
"	1.0276 Ce ₂ O ₃	(55.46 Ce ₂ O ₃)
"	Differenz	(7.72 La ₂ O ₃) (Di ₂ O ₃)
"	0.0397 Oxyde	2.14 Oxyde
"	0.0231 Fe ₂ O ₃	(1.24 Fe ₂ O ₃)
"	Differenz	(0.90 AlO ₃)
"	0.0012 CoO	0.06 CoO
"	0.0571 CaO	3.08 CaO
"	0.1366 Mg ₂ O ₂ O ₇	2.65 MgO
		104.26

2. Partie.

Verwendete Substanz in Grammen	erhalten in Grammen	Procent
1·6516 A ₁	0·0365 H ₂ O	2·21 H ₂ O
"	0·0279 CO ₂	1·69 CO ₂
0·7500 B ₁	0·0589 BaSO ₄	1·08 S
1·1974 "	0·2911 SiO ₂	24·31 SiO ₂
1·6252 "	0·0039 Cu ₂ S	0·19 Cu
"	0·002 Bi	0·12 Bi
"	0·0506 MoS ₂	1·86 Mo
"	1·0409 Oxyde	64·04 Oxyde
"	0·9394 Ce ₂ O ₃	(57·80 Ce ₂ O ₃)
"	Differenz	(6·24 La ₂ O ₃ Dy ₂ O ₃)
"	0·032 Oxyde	1·96 Oxyde
"	0·019 Fe ₂ O ₃	(1·16 Fe ₂ O ₃)
"	Differenz	(0·80 Al ₂ O ₃)
"	0·0014 CoO	0·08 CoO
"	0·0467 CaO	2·87 CaO
"	0·1299 Mg ₂ P ₂ O ₇	2·88 MgO
		103·29

Betrachtet man die zusammengestellten Resultate vorliegender Analysen, wobei ich noch bemerke, dass jede Bestimmung doppelt ausgeführt, aber wegen guter Übereinstimmung nur eine Reihe angeführt wurde, so kann man bei beiden wegen der zu hoch ausgefallenen Gesamtprocentsumme einen Zweifel an die Richtigkeit irgend einer Bestimmung kaum unterdrücken.

Am meisten differiren die Zahlen für die Kieselsäurebestimmungen I = 25·68 % II = 24·31 %, was bei dem Umstande, dass Kieselsäurebestimmungen auf 0·8—0·4 % genau ausgeführt werden können, mich zuerst hier den Fehlersuchen liess.

Rechnet man nämlich in der Voraussetzung, dass Cerit kieselsaures Cer, Lanthan und Didym sei, jene Menge von Kieselsäure, welche den gefundenen Mengen dieser drei Metalle entspricht, so erhält man, das Durchschnittsatomgewicht 142·4 annehmend, = 19·31 % Kieselsäure.

Die Zahlen für die Kieselsäure sind zu hoch, und es war nun meine Aufgabe, an deren Stelle die richtigen zu setzen und den Grund aufzufinden, warum ich zu hohe Zahlen erhielt. Kierulf¹ welcher ebenfalls schwedischen Cerit analysirte, machte die Beobachtung, dass Cerit mittelst Salzsäure oder kohlensaurem Natron, dem kein Salpeter zugesetzt wird, aufgeschlossen immer einen zu hohen Percentsatz der Kieselsäure liefert. Dies wird, wie er auch nachweist, durch mitgegangene Ceritoxide bedingt.

Da ich nun dieselbe Beobachtung gemacht, liess ich mir nicht die Gelegenheit entgehen auf analytischem Wege deren Richtigkeit zu beweisen.

Da die bei der Aufarbeitung des Cerits später zu beschreibende Methode so schöne Resultate ergab, versuchte ich nun eine Probe zur erneuerten Kieselsäurebestimmung ebenfalls nach dieser Methode mit Vitriolöl aufzuschliessen, um so neuerdings die Kieselsäure abzuscheiden.

Eine Partie des Minerals (Probe B) wurde in einer Platinschale mit Vitriolöl angerührt, der Überschuss des Vitriolöles abgeraucht, und der Rückstand mit kaltem Wasser ausgelaugt. Nach dem Auslaugen wurde der Rückstand mit K_2CO_3 , Na_2CO_3 auf-

¹ Ann. 87, p. 12 u. f.

geschlossen und wie gewöhnlich die Kieselsäure abgeschieden und gewogen.

Diese Methode ergab nach einmaliger Behandlung mit K_2CO_3, Na_2CO_3 eine vollständige Lösung und wie die mitgetheilten Zahlen beweisen, die richtige Menge Kieselsäure.

I. verwend. Grammen	in Grammen	Procent	II. verwend. Grammen	in Grammen	Procent
SiO ₂ 0·8053	0·1622	20·14	0·7635	0·1557	20·39

Zum Überflusse wurde noch nach der Bestimmung ein Theil der Kieselsäure mit Flusssäure behandelt, wobei kein Rückstand blieb, während die Kieselsäure nach der ersten Bestimmung mit Flusssäure behandelt, Rückstände hinterliess, welche cer-, lanthan- und didymhaltig waren und auch in der Menge mit den Zahlen übereinstimmt.

I. vorhandene Grammen	erhalten in Grammen	Procent	Nach Behandlung mit HF	Procent mitgeg. Ce Verbind.	Differenz reine SiO ₂
SiO ₂ 0·502	0·1271	25·31	0·0239 Grm.	4·76	20·55
SiO ₂ 0·8335	0·2072	24·85	0·0386 Grm.	4·63	20·22

Man kann daher als Norm aufstellen, dass zur Bestimmung der Kieselsäure in einem Cerit, die Aufschliessung mit Vitriolöl jeder anderen Aufschliessungsmethode vorzuziehen sei, dass man in der so erhaltenen Lösung auch die Metalloxyde bestimmen, oder zur Trennung und Bestimmung letzterer auch mit HF. KF, KHSO₄ operiren kann.

Die Aufschliessung mit Na_2CO_3, K_2CO_3 liefert für Kieselsäure zu hohe Zahlen.

Stellt man nun aus diesen Analysen sich ein Bild zusammen, wie die einzelnen Körper mit einander verbunden sind, so berechnen sich die Sulfide wie folgt:

I. 0·0039 Grm. Cu_2S	entsprech.	0·0008 Grm. S	u.	0·21 ⁰ / ₁₀₀ Cu_2S .
0·0026 " Bi	"	0·0006 " "	"	0·17 ⁰ / ₁₀₀ Bi_2S_3 .
0·0528 " MoS_2	"	<u>0·0211</u> " "	"	2·85 ⁰ / ₁₀₀ MoS_2 .
				0·0225

Gibt auf 1·853 Grm. Substanz berechnet = 1·21⁰/₁₀₀ S.
 gefunden = 1·11⁰/₁₀₀ S.

II. 0·0039 Grm. Cu_2S	entsprech.	0·0008 Grm. S	u.	0·24 ⁰ / ₁₀₀ Cu_2S .
0·0020 " Bi	"	0·0005 " " "	"	0·12 ⁰ / ₁₀₀ Bi_2S_3 .
0·0506 " MoS_2	"	<u>0·0203</u> " " "	"	3·11 ⁰ / ₁₀₀ MoS_2 .
				0·0216

Gibt auf 1·6252 Grm. Substanz berechnet = 1·23⁰/₁₀₀ S.
 gefunden = 1·08⁰/₁₀₀ S.

Die Carbonate wie folgt:

I. 0·0571 Grm. CaO	entsprech.	0·0448 Grm. CO_2	u.	2·94 ⁰ / ₁₀₀ CaCO_3 .
--------------------	------------	---------------------------	----	--

Gibt auf 1·853 Grm. Substanz berechnet = 2·41⁰/₁₀₀ CO_2 .
 gefunden = 1·95⁰/₁₀₀ CO_2 .

II. 0·0467 Grm. CaO	entsprech.	0·0367 Grm. CO_2	u.	5·12 ⁰ / ₁₀₀ CaCO_3 .
---------------------	------------	---------------------------	----	--

Gibt auf 1·6252 Grm. Substanz berechnet = 2·25⁰/₁₀₀ CO_2 .
 gefunden = 1·69⁰/₁₀₀ CO_2

Berechnet man ferner die in der Kieselsäure enthaltene Menge Silicium, sowie die Metalle der Metalloxyde, den Wasserstoff und die Gesamtmenge Sauerstoff, und stellt eine Formel auf, so erhält man eine, welche von denen, die Kierulf¹ und Rammelsberg² angegeben, dadurch differirt, dass Eisenoxyd, Thonerde und Cobalt mit einbezogen werden können, und für Cer, Lanthan nebst Didym substituierend auftreten, sowie dass die Wassermenge eine andere ist als dort.

Nach Weltzien könnte man eine Pentasiliciumsäure als Grundlage dieser Formel ansehen.

¹ a. a. O.

² Pogg. Ann. 107. 631.

	Verhältniss- zahlen	gefunden	berechnet
H ₂ O = 2.40%	H = 0.267%	H = 0.29	0.29
SiO ₂ = 20.14 "	Si = 9.399%	Si = 10.37	10.39
Ceritoxycide = 63.18 "	Metall 57.142%	Ce = 63.28	63.09
Ce, La, Dy = 54.007 Fe, Al = 1.498 Mg = 1.590 Co = 0.047			
CaCO ₃ = 5.94 "	O = 23.762%	O = 26.06	26.23
Cu ₂ S = 0.21 "	90.57%	100.00	100.00
Bi ₂ S ₃ = 0.17 "			
MoS ₂ = 2.85 "			
99.74%			

Diese Analyse würde der Formel (Ce, La, Dy)₆Si₅O₂₀ · 2H₂O entsprechen, wobei Ce, La, Dy = 14.24 angenommen ist und die ich natürlich nur als vorläufigen Ausdruck der Resultate ansehe. Dieses Material wurde nun einer weiteren Aufarbeitung und Abscheidung der darin enthaltenen Cer-, Lanthan- und Didymverbindungen unterworfen, welcher Arbeiten im Folgenden gedacht werden möge.

Als bis jetzt in Verwendung gekommene Aufschliessung von Ceriten und Anfarbeitung des aufgeschlossenen Materials auf Ce, La, u. Dy sind die Methoden von Marignac (Ann. 68, p. 212), Bunsen (Ann. 105, p. 40), Holzmann (J. f. p. C. 79 p. 257), Stapf (J. f. p. C. 75, 321) und wieder Bunsen (P. Ann. 155, p. 230—366) zu nennen, welche sich mit mehr oder weniger beeinflussenden Änderungen des ursprünglich von Mosander angegebenen und von Marignac angewendeten Verfahrens bedienten. Es wird nämlich der Cerit fein gepulvert, mit concentrirter H_2SO_4 zu einem Brei angerührt, sodann erhitzt, bis die überschüssige Säure entweicht und der trockene Rückstand je nach der Art der Methode weiter verarbeitet. Doch ergab sich in Folge der schweren Aufschliessbarkeit des Materials blos ein mittelgutes Resultat oder war wegen Zeitaufwand die Aufschliessung überhaupt nur schwer auszuführen, was aber das Unangenehmste war, schwer zu überblicken und zu leiten. Indem man alle über die Aufschliessung angegebenen Daten durchliest, kann man sich nicht der Meinung entschlagen, dass die von Bunsen in seiner Arbeit „Über die Flammenspektren“ (P. Ann. 155, p. 230—366) angegebenen Winke und Merkmale die bei der Aufschliessung des Cerites zu beobachten seien, um ein gutes Resultat zu erzielen, noch die am leichtesten zu erkennenden seien, obgleich es ohne Übung auch hier schwer ist, in einem grösseren hessischen Tiegel jene Temperatur einzuhalten, welche einerseits die überschüssige Säure zu vertreiben im Stande ist, anderseits die gebildeten Sulfate vor weiteren Umwandlungen in unlösliche basische Salze zu schützen.

Bei versuchsweiser Anwendung der wie es schien am leichtesten zu handhabenden Methoden ergaben sich namentlich bei nur feingestossenem Materiale vielfache Übelstände, welche in einem Springen der hessischen Tiegel, ungleicher Zersetzung, zu starkem Schwefelsäuregehalt oder endlich in einem steinharten Zusammenbacken der Reactionsproducte ihren Ausdruck fanden. Nach einigen Versuchen kam ich nun auf eine einfache Methode der Aufschliessung, welche alle jene Übelstände beseitigt.

Der Cerit wurde durch wiederholtes Stossen und Schlämmen zu einem zwischen den Zähnen kaum fühlbaren Pulver verkleinert

und das so erhaltene, vom Schlammwasser gut getrocknete Materiale mit Vitriolöl aufgeschlossen.

Es können 500—1000 Grm. auf einmal verarbeitet werden. 500 Grm. des Cerites werden in einer Porzellanschale mit 200 bis 220 CC. Vitriolöl zu einem steifen Brei angerührt und durch fortwährendes Rühren mit einem Spatel noch 50 CC. Vitriolöl eingerührt.

Die Farbe dieses Breies ist dunkelbraun. Wenn Flüssigkeit und Mineral gut gemischt erscheinen, so rührt man gleichmässig weiter, wobei man allmählig ein Fester- und Steiferwerden des Breies, ein Treiben und Aufblähen und schliesslich ein Steigen der Temperatur beobachtet.

Der Brei wird immer fester, das Rühren geht nur mit grosser Kraftanwendung vor sich, die Temperatur steigt und unter Entweichen von grossen Massen dicker weisser Dämpfe, von verdampfendem übersättigtem Vitriolöl herrührend, geht die Aufschliessung vor sich. In diesem Momente unterbricht man das Rühren, die Masse, welche anfangs dunkelbraun gefärbt war, färbt sich licht und wird trocken, so dass sie bei weiterer Behandlung mit dem Spatel zu stauben beginnt. Sie ist noch heiss, raucht aber nicht mehr und besteht aus einem Gemisch von schwefelsauren Salzen wohl aller Metalle, welche in dem Cerite enthalten sind, aus unaufgeschlossenem Cerit, sowie freier Kieselsäure. Nachdem der Inhalt der Schale erkaltet ist, trägt man die Masse, welche sich dann ohne Mühe mit dem Spatel in derselben Schale zu einem Pulver verwandeln lässt, direct in ein mit 6—8 Liter Brunnenwasser gefülltes Gefäss. Dieses Wasser erhält man durch eingetragenes Eis auf einer Temperatur von 0—2° C. und trachtet so langsam dabei vorzugehen, dass keine Erhöhung der Temperatur platzgreifen kann, unter fortwährendem Umrühren geht die Lösung der schwefelsauren Salze vor sich, während der unaufgeschlossene Cerit, sowie die Kieselsäure sich zu Boden setzen.

Man lässt gut absitzen und hebt die Flüssigkeit mittelst eines Hebers ab, wobei ein continuirlicher Filterzufluss sehr erleichternd wirkt. Durch erneuerten Aufguss von 6—8 Liter Wasser wäscht man aus, lässt nochmals absitzen, hebert ab und verwendet dieses Waschwasser zu ferneren Lösungen. Ein drittes

Waschen und Dekantiren ergab so geringe Mengen von in Lösung gegangenen Salzen, dass man dies, ohne um Verluste besorgt zu sein, unterlassen kann.

Nach der zweiten Dekantation wird das unaufgeschlossene Material auf einem Filter gesammelt und durch continuirlichen Wasserzfluss aus der Wasserleitung so lange ausgewaschen, bis das Waschwasser nicht mehr sauer reagirt, sodann im Filter getrocknet und nach Ablösung von demselben als eben so feines Pulver wiedergewonnen, welches man sofort einer zweiten und dritten Operation des Aufschliessens unterwerfen kann. Die so erhaltenen Lösungen der Sulfate werden nun nach Bunsen weiter verarbeitet, indem man zuerst durch Einleiten von H_2S alle Metalle der zwei ersten Gruppen entfernt.

Nach Filtration der Sulfide wird die Flüssigkeit mit Cl oxydirt und mit Oxalsäure, Cer, Lanthan und Didym als Oxalate gefällt. Sie wurden in Form eines schwach rosenrothen Niederschlages erhalten.

Diese Art der Aufschliessung und Verarbeitung gestattet gegenüber der oben citirten eine grosse Sicherheit und Reinlichkeit des Verfahrens, sowie auch eine genaue Erkennung der Beendigung der jeweiligen Reactionen und geringeren Aufwand an Zeit und Mühe. Die Verluste berechnen sich bei der ersten Partie (1557 Grm.) auf 59 Grm. Rückstand = 3.9% , 144 Grm. Verlust durch Schlämmen = 9.2% . Bei der zweiten Partie (1539 Grm.) auf 55 Grm. Rückstand = 3.5% , 158 Grm. Verlust durch Schlämmen = 10.3% der in Verwendung gezogenen Ceritmenge.

Nachfolgende Tabelle zeigt die Daten, welche bei der Aufarbeitung von 2680 Grm. geschlämtem Cerit (entsprechend den ursprünglich vorhandenen 3096 Grm.) gewonnen wurden.

Rechnet man nun auf die ursprüngliche Menge von 3096 Grm. Cerit die unaufgeschlossenen 862 Grm. Rückstand und die 3856 Grm. Oxalate percentual, so erhält man:

$$\begin{array}{r} 862 \text{ Grm. unaufgeschlossener Rückstand} = 27.9\% \\ 3856 \text{ „ Oxalate} = 124.6\% \end{array}$$

Um nun die Menge der in den Oxalaten enthaltenen Oxyde zu bestimmen, wurden 0.735 Grm. bei $110^\circ C.$ scharf getrocknet und bis zum constanten Gewichte geglüht.

Tabelle über die Aufschliessung.

	Geschlamm- ter Cerit	Lieferten an Oxalaten	Unaufgeschl. blieben	Lieferten an Oxalaten	Unaufgeschl. blieben	Lieferten an Oxalaten	Rückstand	Summe der Oxalate
I	890	666	554	481	357	190	309	1337
II	890	635	585	427	394	143	257	1205
III	900	689	630	508	379	117	296	1914
	2680	1990	1769	1416	1130	450	862	3856

0·735 Grm. Oxalate gaben 0·3618 Grm. Oxyde, folglich
 3856 " " " 1898 " " und
 1898 " Oxyde " 61·3% der ursprünglichen Ceritmenge.

Fasst man nun alle diese Zahlen zusammen, so erhält man ein sehr übersichtliches Bild für eventuelle Aufarbeitung von Ceriten.

Die Oxyde	61·3%
Der unaufgeschlossene Rest...	27·9
Verlust beim Schlämmen	9·7
Unabgeschlammtes (Fahlerz) ..	3·8
	102·7

Die gewonnenen Oxalate wurden durch Glühen in die Oxyde umgewandelt, welche durch schwaches Erhitzen derselben auf dem gewöhnlichen Brenner als ein zimtbraunes Pulver erhalten wurden.

Das Glühen nimmt man vortheilhaft in einem grösseren Porzellantiegel vor mit je 20—30 Grm. auf einmal, da einerseits grössere Mengen der Oxyde, in hessischen Tiegeln geglüht, zu festen Klumpen zusammenbacken und durch die rauhen Wände der Tiegel Verluste bedingt werden, und anderseits ein Glühen von grösseren Mengen Oxalaten in Platingefässen, selbe ein brüchiges Gefüge erhalten, der Boden des Tiegels aufgebläht wird und schliesslich in grossen Rissen auseinanderklafft.

Die so dargestellten Oxyde sind stets eisen- und calciumhaltig und mussten, bevor an eine Trennung der Ceritoxycide geschritten werden konnte, von diesen beiden Metallen befreit werden.

Über die bei diesen Trennungsversuchen angestellten Beobachtungen, sowie über die Versuche, eine einfache Trennungsmethode der Ceritmetalle selbst zu eruiren, werde ich mir in einer der nächsten Abhandlung zu berichten erlauben.

Über die Erden des Gadolinites von Ytterby.

Von Dr. Carl Auer v. Welsbach.

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. Dr. A. Lieben.)

II. Abhandlung.

(Mit 2 Tafeln.)

Das Spectralverfahren.

Wegen des leichteren Verständnisses dieser Untersuchungen erscheint es zweckmässig, diesen Theil dem mehr chemischen voranzustellen, und wegen des noch grösseren Umfanges des letzteren beide getrennt zu publiciren.

Das wesentlich Neue, das diese Arbeit bietet, ist eine bisher nicht zur Anwendung gebrachte Methode der Lichtgewinnung für Spectralzwecke, bei welcher es möglich ist, ohne irgendwie grössere experimentelle Hilfsmittel, die Empfindlichkeit der spectralanalytischen Prüfung bis zu einer weiten Grenze zu steigern.

Es ist dies nothwendig, wenn einerseits ein endgiltiger Aufschluss über die Reinheit vieler bisher dargestellten Präparate, andererseits ein klarer Einblick in die Zusammensetzung der verschiedenen Fractionen erhalten werden soll, da das Funkenspectrum für diese Untersuchungen in den meisten Fällen ausschliesslich zur Entscheidung heranzuziehen ist, um so mehr, wenn manche bisher als charakteristisch bezeichnete Reactionen sich als trügerisch herausstellen, wie ich in der späteren Publication nachweisen werde.

Eine der Schwierigkeiten, einen derartigen Aufschluss zu erhalten, liegt in dem an und für sich so ausserordentlichen Glanze und der überaus grossen Empfindlichkeit des Yttriumspectrumes.

Da nun das Yttrium der überwiegende Bestandtheil der Ytterit-Erden des Gadolinitis ist und die Trennung, wie bekannt, keine leichte ist, ferner von den übrigen nicht alle helle Spectren besitzen, so fällt dieses Moment so schwer in's Gewicht.

Ähnlich verhält es sich bei allen das Ytterbium als Hauptbestandtheil enthaltenden Fractionen.

Es ist selbstverständlich, dass unter solchen Umständen die Anwendung von Strömen so geringer Intensität wie der durch eine Leydnerflasche condensirte Strom eines mittleren Ruhmkorff-Inductionsapparates ist, in Bezug auf die Untersuchung jener „Yttererde-Fractionen“ auf die bestimmt vorhandenen Beimengungen anderer Körper kein Resultat ergab.¹

Das Yttriumspectrum schien überall allein zu bestehen.

Die experimentellen Hilfsmittel müssten also um Bedeutendes erhöht werden.

Die Ströme grosser Ruhmkorff-Apparate, durch mehrere Flaschen geladen, geben unter Umständen allerdings glänzende Spectra.

Ich unterlasse es schon an dieser Stelle näher darauf einzugehen, weil ich weiter unten auf den Vergleich dieser Untersuchungsmethode mit der neuen eingehen werde.

Bekanntlich ist der Intensität der Ströme einer Inductions-Rolle eine nahe Grenze gesetzt.

Ohne Gefahr für das Instrument kann die Intensität des Primärstromes nicht so hoch genommen werden, als es unter Umständen die Untersuchungen verlangen.

Da der nun zu den Versuchen zu verwendende Strom nothwendigerweise eine solche Spannungsdifferenz haben müsste, um eine mehrere Millimeter betragende Luftschichte zu durchbrechen, so würde die Polsubstanz mit Heftigkeit zerstäubt

¹ Wie gering die Empfindlichkeit ist, mag sich aus folgendem Falle ergeben; man folgerte nicht mit Unrecht daraus, dass die Spectralanalyse nicht das beste Untersuchungsmittel wäre, sondern auf diesem Gebiete vorerst der Wage die Entscheidung zufiele. Als Nilson während seiner Untersuchungen über das Ytterbium und Scandium Thalén ein Präparat zur Spectralprüfung übergab, erklärte letzterer dasselbe als reines Ytterbin; indess das Äquivalentgewicht ergab unzweifelhaft, dass dasselbe etwa drei Procente Scandium enthielt.

werden und es würde sich nicht aus den entwickelten Dämpfen eine genügend lange und gutleitende Brücke herstellen lassen, ohne die vom übergehenden Strome dann umhüllten Pole nicht bis zum Glühen zu erhitzen.

Um die störenden Umstände zu beseitigen, die der Anwendung von intensiven Strömen in den Weg stehen, gibt es indess ein Mittel; nämlich eine Brücke metallischer Dämpfe, die von Pol zu Pol reicht, vom Anbeginne der Entladung herzustellen, das heisst dem Strome die Aufgabe nicht mehr selbst zu überlassen, sich Bahn zu brechen.

Man kann dann die Potentialdifferenz des Stromes um Enormes erniedrigen, um doch die ganz gleichen, wenn nicht noch besseren Resultate zu erzielen.

Das grösste Licht strahlt dann die Brücke aus; ähnlich dem Verglühen eines dünnen Drahtes zwischen den Polen einer Batterie.

Die directe Herstellung metallischer Dämpfe zwischen fixen Polen stiesse wenigstens in den meisten Fällen auf unüberwindliche experimentelle Schwierigkeiten.

Dass es verschiedene Wege gibt, diese Versuchsbedingungen zu verwirklichen, unterliegt keinem Zweifel. Es handelt sich nur darum, dies in möglichst einfacher Weise zu thun.

Die Menge Dampf, die genügt, die Brücke herzustellen, ist, wie man sehen wird, überaus klein.

Ich supponire zwei aus Drahtstücken, etwa Kupferdraht gebildete Pole.

Man schalte sie nun ein in einen Strom von bedeutender Intensität, vielleicht dem von vier Bunsen'schen Elementen.

Werden nun die Drähte unter Reibung übereinander hinweg geführt, so wird eine Spur der Substanz abgerieben, die von dem Drahte vor sich her geschoben wird. Der Strom ist vollständig geschlossen. Im letzten Augenblicke der Berührung der beiden Pole concentrirt sich die Intensität des Stromes auf diese kleinen Theilchen, sie sofort zum Verdampfen erheizend. In diesem Momente der Dampfbildung soll ein Strom von gleichfalls bedeutender Intensität und solcher Spannungsdifferenz, dass er in der gebildeten Dampfschicht seine Brücke findet, übergehen.

Die Bewegung der Pole ist vorgeschritten und rasch, bevor der secundäre Strom zu Ende, hat sich die Dampfschicht ver-

längert. Nun findet auch der zweite Strom jenen Widerstand, um die gebildete Brücke in starkes Glühen zu versetzen.

Der unmittelbar dem galvanischen Strome nacheilende Strom ist leicht gefunden: der Extrastrom.

Die Extrastromspirale, in der die günstigste Form für die Erzeugung intensiver Inductionsströme gegeben ist, ersetzt hier den Ruhmkorff-Apparat sammt den Flaschen.

Die Energie des galvanischen Stromes ist so in geeigneter Weise umgestaltet.

Folgendes einfache Experiment, das leicht anzustellen ist und wohl oft genug angestellt worden ist, lässt das Princip instructiv darstellen.

Es sei eine aus etwa 1000 Windungen eines $2\frac{1}{2}$ Mm. dicken Drahtes erzeugte Magnetisirungsspirale mit ungefähr 3 Cm. starkem und 20 Cm. langem Eisenkerne gegeben. Man schalte dieselbe in eine 4zellige Bunsen'sche Batterie ein.

Beim Öffnen zeigt sich, falls es ohne besondere Reibung geschah, ein kleiner, aber heller Funke. Ungleich glänzender wird die Erscheinung, sobald das Öffnen unter Reibung der Pole geschieht. Ein 3—4 Mm. langer helleuchtender Funke zeigt den Weg, den der nacheilende Extrastrom genommen. Untersucht man das Spectrum dieses Funkens, so zeigt sich ein überaus glänzendes Spectralphänomen.

Befeuchtet man die Pole mit Substanz, so tritt die Erscheinung noch blendender auf; dabei leuchtet der Funke nur in dem Lichte, das von der in Dampf verwandelten Polsubstanz ausgestrahlt werden kann.

Mit abnehmender Reibung bei sonst gleichen Verhältnissen nimmt auch hier die Erscheinung successive an Glanz ab.

Aus dem bisher Gesagten geht es wohl a priori hervor, dass das so erzeugte Spectrum die besonders angenehme Eigenthümlichkeit besitzt, keine Luftlinien erkennen zu lassen.

Um mich später keiner Wiederholung schuldig zu machen, wende ich mich ohne weitere Darlegung des Allgemeinen zur Besprechung des Speciellen, des Apparates selbst, woraus sich

bei der Erörterung seines Functionirens die letzten allgemeinen Momente des Verfahrens zur Geringe erkennen lassen werden.

Der wichtigste Theil des Instrumentes¹ sind die Pole. Von ihrer Gestalt, Substanz hängt im Wesentlichen der Effect ab.

Der eine Pol besteht aus einem etwa 2 Cm. langen, scharf abgebrochenen cylinderförmigen Kohlestäbchen von etwa 5 Mm. Durchmesser; es ist bestimmt, die zu untersuchenden Körper aufzunehmen. Da entsprechende Kohlestäbe jetzt zur Erzeugung des elektrischen Lichtes im Grossen hergestellt werden, so sind sie leicht zugänglich gemacht.

Der Gegenpol ist aus Platindraht gebildet; ein etwa 3 Cm. langes, 0.6 Mm. im Durchmesser haltendes Drahtstück, das auf einem rechtwinkelig gebogenen Kupferdrahtstück angelöthet ist. Man kann sich solche Pole leicht zu Dutzenden in kurzer Zeit machen.

Der Kohlepol ist in einer Messinghülse befestigt, deren Durchbohrung so gross gewählt ist, dass die Kohle nach ein paar Feilstrichen etwa 1 Mm. tief eingesetzt werden kann; sie hält vollkommen fest und kann leicht ausgewechselt werden.

Der so vorgerichtete Pol wird nun in dem während des Ganges fix bleibenden Träger befestigt; durch mehrere Präcisionsvorrichtungen lässt sich der Pol sowohl in horizontaler als auch in verticaler Richtung verschieben. Er ist in den Apparat eingesetzt, unter einem Winkel von etwa 70° zum Horizont geneigt und wie schon gesagt, nimmt er an keiner Schwingung Theil.

Der aus Platindraht hergestellte Pol soll die Bewegung ausführen, die dem oben erwähnten Experiment nachgeahmt ist, er ist also an dem schwingenden Theile des Apparates befestigt; so zwar, dass das Instrument, kurz vor dem Ingangsetzen gedacht, an der oberen Seite des Kohlestäbchens, wenige Millimeter vom unteren Rande entfernt, sich im senkrechten Abstände von ungefähr 1 Mm. befindet.

Der Platinpol kommt dabei horizontal zu stehen und berührt die Kohle kurz vor seinem Ende.

¹ Siehe Abbildung. Taf. I. Die Ausführung des Apparates besorgte die Firma F. W. Hauck, Hofmechaniker in Wien.

Um die Bewegung auszuführen, ist der Platindraht an einer schwächeren Feder von quadratischem Querschnitte befestigt und diese je nach Bedürfniss der Höhe des Funkens verstellbare schwächere wird von der entsprechend stärkeren getragen.

Die stärkere Feder hält an ihrem Ende den Anker und die daneben befindliche Contactfeder Taf. I *a*, sie ist verschiebbar an dem zweiten Ständer Taf. I. *A* befestigt.

Diese beiden Stative sind neben der Extrastromspirale, welche unter dem Anker steht, auf einem gemeinschaftlichen, massiven Fussbrette befestigt.¹

Man wird aus diesen Angaben die Anordnung der einzelnen Theile entnehmen können, zugleich daraus ersehen, dass die Triebkraft der Strom selbst liefern soll; die nöthige Reibung erzeugt er spielend, sich die Brücke zum Theil auf mechanischem Wege vorbauend. Zum exacten Gange des Apparates ist es aber nöthig, vorerst nicht an jener Stelle des Kohlestäbchens, wo während der Untersuchung die Salzschichte des zu prüfenden Körpers sich befindet, Contact herzustellen, und damit das Instrument durch die in den Strom eingeschaltene Extrastromspirale in Bewegung zu setzen.

Es müsste so der Gang, den ich unten in seiner richtigen Art beschreiben werde, ein unregelmässiger werden, weil eben der Stromschluss von der schlecht leitenden Salzschichte abhängig gemacht würde und er dadurch nicht zu voller Intensität gelangen könnte. Um dies demnach zu erreichen, muss der erste Stromschluss unter günstigeren Bedingungen hergestellt werden. Dazu dient eine über der schon erwähnten Contactfeder angebrachte Schraube, die natürlich isolirt, am Stativ der Feder von einem Träger gehalten wird (Taf. I. *b*).

Die Bewegung beginnt mit der Herstellung des Contactes zwischen den Platintheilen der Schraube und Feder. Der Strom durchläuft in diesem Augenblicke den Apparat in folgender Weise. Er tritt durch die eine Klemmschraube ein, durchläuft dann die Extrastromspirale, geht von da zum Ständer des Kohlepoles,

¹ Der Apparat befindet sich, um den Spectralapparat durch seine Schwingungen nicht zu stören, auf einem eigenen kleinen, aber massiv gebauten Tischchen.

von wo ihn eine Zweigleitung zur Contactschraube führt, tritt in die Contactfeder über und kehrt durch die grosse Feder und den Ständer derselben durch die zweite Klemmschraube zur Batterie zurück.

Durch die Construction dieser Theile wird es erreicht, dass der hergestellte Stromschluss nicht sofort wieder aufgehoben wird, sondern, natürlich den Apparat in voller Bewegung gedacht, einige Zeit geschlossen bleibt.

Dadurch ist dem Strome die Möglichkeit geboten, die entstehenden ihm entgegengesetzt gerichteten Inductionsströme zu überwinden, und so in voller Kraft aufzutreten.

Der kräftig erregte Elektromagnet zieht den Anker an und lässt dadurch den Platinpol mit bedeutender Kraft auf den Kohlepol auftreffen. Der momentan zu kräftige Impuls wird durch den federnden Theil zu einem schwächeren noch genügend starken, aber stetigen gemacht.

Nach dem Anschlagen des Platinpoles auf die Kohle hebt sich der erste Contact auf, und es darf dabei — ein Zeichen, dass voller Stromschluss am Kohlepol eingetreten ist — nur ein kaum sichtbares Fünkehen sich bilden. Durch Regulirung der Stellung mittelst der Schrauben ist dies späterhin leicht zu erreichen.

Der Platinpol gleitet nun an dem Kohlestäbchen nach abwärts, zerreibt oder besser gesagt zerstäubt ein wenig die imprägnirte Schichte und verlässt dasselbe in vollster Bewegung begriffen. Die Entladung des Extrastromes erfolgt und ruft die schon erwähnte glänzende Erscheinung hervor.

Mit dem Auftreffen des Ankers an der Kautschukplatte, mit der der Elektromagnet umzogen ist, ist die Bewegung begrenzt.

Aus der Construction des Apparates ist nach diesen Erörterungen ersichtlich, dass der Platinpol auf seinem Rückwege die Kohle nicht mehr berühren wird; er kehrt in elliptischer Schwingung zur Anfangsstellung zurück. Mit der abermaligen Bildung des Contactes an der Schraube wird die Bewegung begrenzt und die Schwingung erfolgt von Neuem.

Die Zahl der in einer Secunde sich bildenden Funken ist genügend gross, um das Licht nicht stark intermittirend werden zu lassen.

Durch Verstellung des Kohlepoles wird der Funke auf das Maximum der Helligkeit gebracht. Meist muss der Pol gehoben

werden. Für Beobachtungen von kurzer Dauer genügt es, vor oder nach dem Ingangsetzen etwas Substanz mittelst eines Capillarröhrchens auf den Pol zu bringen.

In den meisten Fällen ist es am besten, die Chlorverbindungen zu nehmen.

Handelt es sich darum, das Spectrum lang andauernd zu machen, so muss für eine automatische Befeuchtung des Poles gesorgt werden.

Zu diesem Zwecke nähert man dem schwingenden Platinpol ein mit etwas Substanz-Lösung befeuchtetes elastisches Plättchen, etwa aus Kautschuk, Glimmer oder dergleichen.

Man kann den Pol auch direct in den Spiegel eines auf einem flachen Uhrglase vertheilten Tropfens eintauchen lassen.

Ein kleines Stativ neben der Stromspirale trägt diesen „Befeuchter“.

Wenn das Kohlestäbchen nach Verlauf einer halben Stunde etwa sich am unteren Ende abrundet, so muss die dasselbe tragende Messinghülse ein wenig gedreht werden.

Welcher Pol als der positive zu schalten ist, richtet sich nach den Bedingungen.

Ist Kohle der positive, so ist das Spectrum heller, ist es der Platinpol, so sind die Linien etwas schwächer, der Hintergrund aber dunkler. In letzterem Falle treten einige Platinlinien mit auf.

Die Bewegung des Platinpoles kann je nach den Versuchsbedingungen variirt werden.

So empfiehlt es sich bei schwachen Strömen, den Pol nur an der Unterseite des Kohlestäbchens, also ohne grosse Bahn schwingen zu lassen. Die Contactschraube dient in diesem Falle nur bis zum Entstehen des Funkens, fernerhin ist sie unnöthig. Wird nämlich die zu untersuchende Substanz aufgetragen, so kann es vorkommen, dass in Folge des Widerstandes dieser Schichte der Strom nicht entstehen könnte; es genügt dann, natürlich bei Berührung der beiden Pole, den Contact auf kurze Zeit herzustellen, wodurch Schwingung eintritt und dem Strom am Kohlepol nach einiger Zeit Bahn gebrochen wird.

Das Licht erscheint bei dieser Anordnung fast ganz ruhig.

Ausschliesslich auf diese Bewegung sich stützend, kann man dem Apparate eine ausserordentlich compendiöse Form geben.

Ein Mitschwingen der Stative, das bei der erst beschriebenen Anordnung unter keiner Bedingung stattfinden darf, hat hier keinen weiteren Nachtheil. Man hat dabei vornehmlich nur darauf zu achten, auch hier die Doppelfedern anzubringen, die einerseits den ersten Anstoss mildern — im anderen Falle würde ein unerträgliches Flackern eintreten — und andererseits die volle Stromentfaltung möglich machen.

Ein einziger Trieb genügt, um das Maximum der Helligkeit zu erreichen und das Licht ruhig werden zu lassen.

Alles Übrige bleibt unverändert.

Noch ist zu erwähnen, dass man die bisher angeführten Pole auch durch entsprechende Drahtstückchen aus den meisten Metallen ersetzen kann. Natürlich treten dann die charakteristischen Metalllinien hinzu.

Drahtstücke von 1—1·5 Mm. Durchmesser eignen sich statt des Kohlepoles am besten.

Besitzt das zur Anwendung kommende Metall in Drähten von der Dicke des Platinpoles genügende Elasticität, so kann auch dieser Theil daraus gemacht werden.

Was ich in Bezug auf die Art der Schwingung oben erwähnte, gilt auch hier.

Ich will nun die verschiedenen Spectralerscheinungen im Allgemeinen beschreiben.

Schon bei einer Stromstärke von nur drei Bunsen'schen Elementen und der Anwendung von Chlorverbindungen von nicht zu schwer flüchtigen Metallen, etwa von Yttrium oder Zink und dergleichen, bietet das Spectrum einen prachtvollen Anblick dar. Die charakteristischen Spectrallinien leuchten in ausserordentlichem Glanze, der dadurch noch erhöht wird, dass die Metalllinien auf fast schwarzem Grunde auftreten. Jede, selbst die schwächste hebt sich deutlich ab. Dabei fehlt jedwede Luftlinie.

Bei Anwendung von Kohlepolen ist das Licht weitaus glänzender, als bei blossen Metallpolen, aber im letzteren Falle erscheint das Spectrum noch ruhiger.

Die Linien sind in diesem Falle auch in ihrer Begrenzung nach oben und unten vollkommen fix. Das ganze Spectrum erscheint unbeweglich.

Ich habe dieser Arbeit die Zeichnungen einiger Spectren zur Beurtheilung beigegeben und bemerke hiezu, dass keine mit der hellerleuchteten Scala noch feststellbare Linie fehlt. Drei Bunsen'sche Elemente lieferten den Strom.

Fig. 1 zeigt das Yttriumspectrum,

Fig. 2 das Ytterbiumspectrum,

Fig. 3 das Calciumspectrum.

Alle drei sind unter Anwendung der Chlorverbindungen erzeugt; der positive Pol war Kohle.

Fig. 4 stellt das Kupferspectrum und Fig. 5 und 6 das Silber- und Platinspectrum dar. In diesen letzteren Fällen diente das blanke Metall als Pol.

Man kann aus diesen Abbildungen entnehmen, dass namentlich bei den zum Schlusse angeführten Körpern, das Spectrum nicht völlig identisch ist mit dem des Funkens des Inductions-Apparates. Im Allgemeinen scheint eine Zunahme der Linien des brechbareren und Abnahme des weniger brechbaren Theiles zu bestehen.

Die Fixirung der Spectralerscheinung geschah nach der Bunsen'schen Methode, welche ich bei meinen Arbeiten mit grossem Vortheile anwandte.

Man entnimmt aus den Spectralzeichnungen, dass die zur Anwendung gebrachte Dispersion keine grosse war. So lange es sich nicht darum handelt ein Spectrum mikrometrisch festzustellen, also bloss für Zwecke der chemischen Untersuchung, reicht sie vollständig aus; hier handelt es sich weniger um die absolute Lage der Linien, als um die Zahl derselben im Bereich eines Theilstriches. Diese kann mit genügender Genauigkeit festgestellt werden.

Die Einzeichnung erfolgt nöthigenfalls mit der Loupe.

Zur Herstellung der Normalzeichnung eines Spectrums für meinen Apparat, welche die Grundlage für die späteren Vergleiche abgibt, — im äussersten Falle werden die Spectren

direct verglichen — wende ich einen Strom an, der dem bei den späteren Untersuchungen der Fractionen angewandten möglichst gleich ist.

Da die Beurtheilung irgend eines Präparates einer „Reihe“ in kurzer Zeit geschehen ist, so bediene ich mich zu derartigen Prüfungen einer Bunsen'schen Tauchbatterie von 8—12 Elementen.

Die gefundenen neuen Linien werden gleichfalls mit der Scala festgestellt.

In diesen Fällen hatte es nie Schwierigkeiten, aus dem blossen Anblick des Spectrums die Natur der Hauptmenge der zu untersuchenden Substanz festzustellen, meist war sie übrigens schon von vorneherein bekannt.

In einer späteren Untersuchung werde ich zeigen, dass eine Orientirung auch dann leicht und in kurzer Zeit durchzuführen ist, wenn die Zahl der Linien in die Tausend geht.

Der zu allen Untersuchungen über das Funkenspectrum benützte vorzügliche Apparat ist von Steinheil in München gebaut worden.

Er besitzt zwei Prismen aus schwerstem Flintglase im Winkel von 60° , die so gross sind, dass das Ablese-Fernrohr von 41 Mm. Öffnung und 32 Ctm. Brennweite, mit 8maliger Vergrösserung voll beleuchtet werden kann.

Er ist mit einem vortrefflich gearbeiteten Krüss'schen Mikrometerspalt Schlitten versehen. Mit Ausnahme einiger anderen Vorrichtungen ist er im übrigen den bekannten Instrumenten dieser Art analog construirt.

Die Empfindlichkeitsproben.

Das Resultat derselben ist befriedigend.

Die Empfindlichkeit ist in vielen Fällen so gross, dass sie sich nur mit der der Flammenreactionen vergleichen lässt. — Bietet dabei noch den Vortheil einer anhaltenden Erscheinung.

Einige Daten mögen in dieser Beziehung hier Platz finden.

Der als Pol in Anwendung kommende Platindraht kann zu fünf und noch mehr Versuchen verwendet werden, um, von allen leicht abtrennbaren Theilchen gereinigt, mit Hülfe der geringen Menge Legirung, die an ihm haftet, noch alle Spectren erkennen zu lassen.

Aus diesem Grunde muss man den Pol mit einem Messer blank schaben, um ihn zu einem empfindlichen Versuche verwenden zu können.

Untersucht man den Funken, der sich zwischen dem Platinpol und dem reinen Kohlepol bildet, so sieht man vorerst ein deutliches Platinspectrum, daneben aber ganz schwach die Linien vieler anderen Elemente, wie Calcium Magnesium, Natrium, Aluminium u. s. w.

Das Spectrum ist, die Platinlinien ausgenommen, kein ruhiges.

Von Zeit zu Zeit blitzen in grossem Glanze die Spectren der übrigen erwähnten Elemente auf. Offenbar sind dem ursprünglichen Kohlepulver discrete kleine Theilchen dieser Körper als Verunreinigung beigemischt.

Bei der geringsten Menge von Verbindung der leichter flüchtigen Elemente, mit der man den Kohlepol befeuchtet, sind alle diese Spectra verschwunden. Die Kohle wird jetzt weniger angegriffen und das Spectrum der Salzschicht erscheint frei von Platinlinien. Der letzte Umstand erklärt sich aus der Härte der gebildeten, dünnen Schicht der Legirung.

Löst man ein halbes Gramm Yttererde in Salzsäure auf, verdünnt diese Lösung auf 100 Cc., entnimmt derselben 1 Cc. und gibt abermals auf 100 Cc. Wasser hinzu, so ist in einer Flüssigkeitsmenge von mehreren Cubikmillimetern das Yttrium noch auffindbar. Die Empfindlichkeit geht also über das Millionstel eines Grammes.

Das gilt natürlich nur, wenn keine anderen Substanzen in viel grösserer Menge vorhanden sind.

Man braucht zu all diesen Erscheinungen keinen stärkeren Strom, als den von 2—3 Bunsen'schen Elementen.

Wichtiger als diese Resultate, die nur theoretisches Interesse besitzen, sind die Proben, die angestellt wurden, um nachzuweisen, wie viel eines Körpers neben einem anderen, ein glänzendes Spectrum von grosser Empfindlichkeit gebenden Elemente zu erkennen ist.

Ich verbinde diese Versuche mit einigen Bemerkungen über die Vergleichung der älteren und neueren Methode.

Eine Substanz, die

	99.9	Yt_2O_3
und	0.1	Yb_2O_3
	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 100.00	

enthielt, liess bei einer Stromstärke von drei Bunsen-Elementen das Ytterbium nicht mehr erkennen.

Dieselben Pole, die bei dieser Prüfung in Anwendung gewesen waren, wurden nun in den durch zwei Flaschen von grosser Oberfläche verstärkten Inductions-Strom eines grossen Ruhmkorff-Apparates eingesetzt, wobei ich bemerke, dass der Platindraht mit der Hand immer an jene Stellen geführt wurde, wo die reichste Imprägnirung sich vorfand. Es war dies unter diesen Umständen nöthig, wenn das Licht auf den grössten Glanz gebracht werden sollte, da die Polsubstanz mit Mächtigkeit zerstäubt wurde. Liess man nämlich den Draht am ursprünglichen Orte stehen, so war das Spectrum in ganz kurzer Zeit verblasst.

Die Stromstärke war die gleiche wie zuerst.

Das so erzeugte Spectrum war überaus schön.

Die Metalllinien traten mit grossem Glanze auf; das Luft-spectrum war bis auf ein paar Streifen verschwunden. Auch darin war von den gesuchten Linien nichts zu finden.

Trotzdem schien es mir unzweifelhaft, dass das mit Hilfe des neuen Apparates erzeugte Spectrum glänzender als das eben besprochene war; auch treten die Linien auf dunklerem Hintergrunde auf und viele sehr schwache liessen sich viel leichter erkennen und bestimmen.

Dabei war das Spectrum des neuen Apparates unter allen Umständen anhaltender.

Ich schritt nun zur Einschaltung von sechs grossen Bunsen'schen Elementen.

Der Glanz der Spectrallinien war nun so erhöht, dass das Auge ein schwaches Intermittiren des Spectrums nicht für die Dauer hätte ertragen können.

Demungeachtet war auch jetzt ein sicheres Resultat nicht zu erhalten.

Für diese Stromstärke zeigte sich, wie aus weiteren Versuchen hervorging, erst eine Menge von 0.2% bestimmt an, bei

3 Elementen etwa bei 0.5^o/_o; in diesem letzteren Falle liess auch der Inductionsfunken einen Schluss zu.

Ich betrachte diese Angaben als vorläufige.

Mit der weiterschreitenden Stromstärke nimmt die Empfindlichkeit zu, aber das Auge wird bei länger dauernden Versuchen unangenehm irritirt.

Da die Experimente, die ich anstelle, um zu erreichen, dass selbst bei grösserer Intensität, ohne irgend welche Störung für das Auge, das vollständige Spectrum beobachtbar bleibt, das heisst die schwächsten Linien noch gefunden werden können, noch nicht abgeschlossen sind, so muss ich verzichten, näher auf diese Verhältnisse einzugehen.

Die entsprechenden Versuche für Yttrium bei der Hauptmenge von Ytterbium fielen etwas günstiger aus. Vorausgesetzt, dass das Ytterbium ganz rein war, liegt die noch darin nachweisbare Menge von Yttrium bei 0.1^o/_o.

Man entnimmt aus diesen Daten, dass gegenwärtig die Empfindlichkeit durch Verbesserung der Construction des Apparates weit grösser geworden ist, als ich in meiner ersten Publication angab. Wie gesagt, dürfte sich dieselbe noch um Bedeutendes erhöhen lassen.

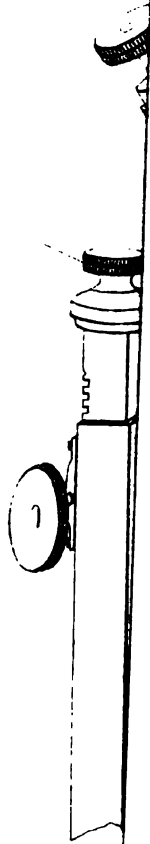
Noch sei mir gestattet, einige Versuche flüchtig zu berühren, die, obwohl nicht unbedingt zur Beurtheilung dieses Verfahrens nöthig, doch für die Art dieser Methode charakteristisch sind.

Es ist nicht nöthig Lösungen anzuwenden, es ist nur zweckmässiger, weil dies eine länger dauernde Imprägnirung möglich macht. Man kann schwerlösliche Verbindungen, Silicate, geglühte in allen Lösungsmitteln unlösliche Oxyde u. dgl. m., mit ein bisschen Graphit gemengt, in eine eigens an der Längsseite des Kohlestäbchens mit ein paar Feilstrichen hergestellte Rinne eingepresst, direct untersuchen.

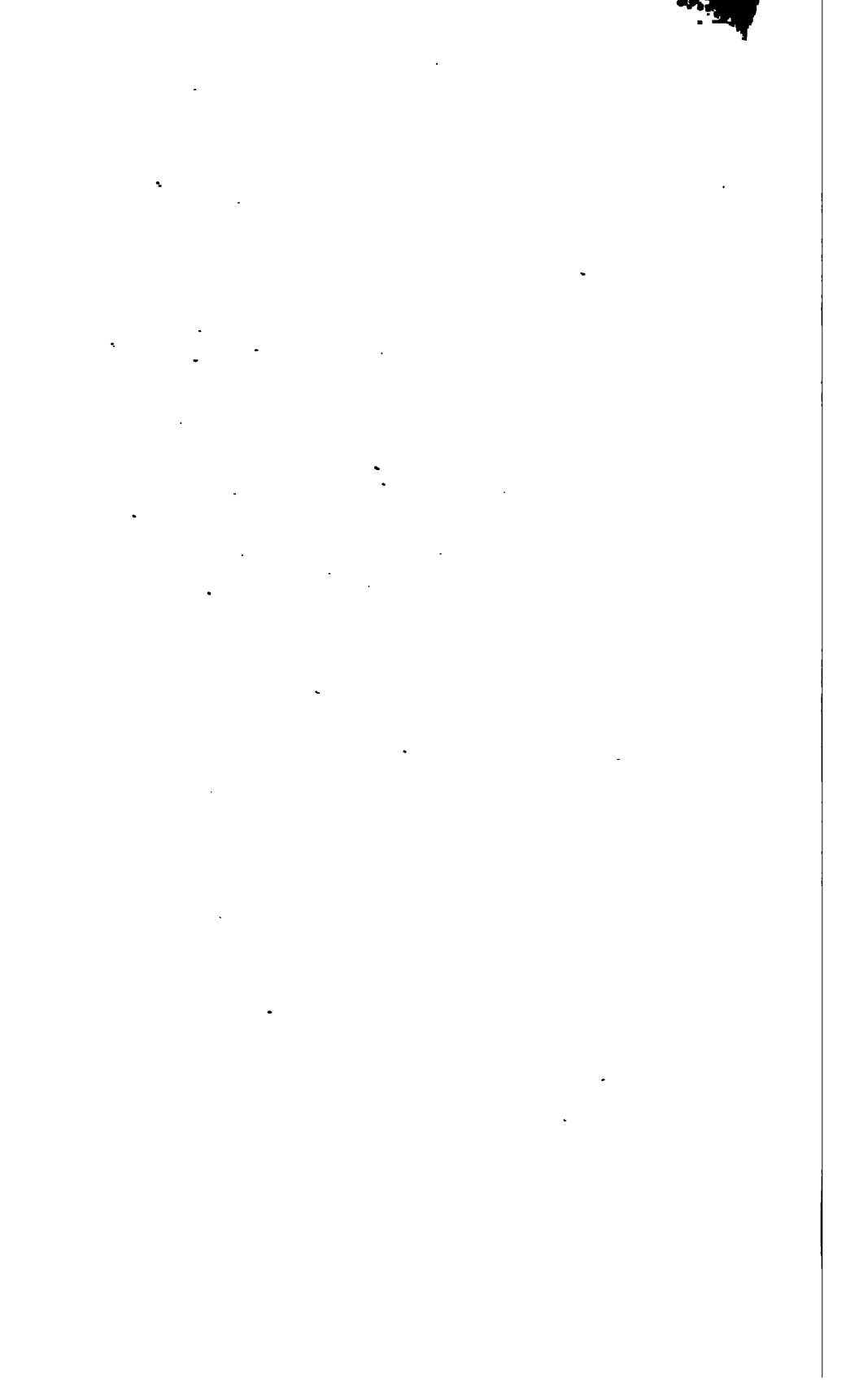
Sie geben deutlich die den in denselben enthaltenen Metalle entsprechenden Reactionen.

Allem Anscheine nach hat diese Methode für die chemische Analyse, ihrer leichten Handlichkeit, Empfindlichkeit und des geringen Preises ihrer Apparate wegen eine weitere Zukunft.

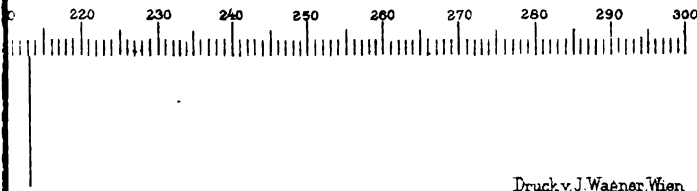
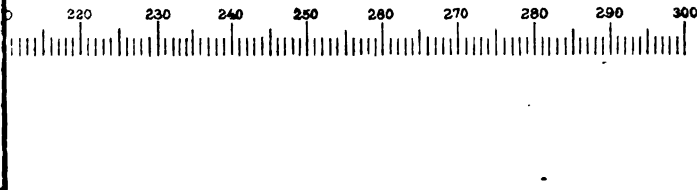
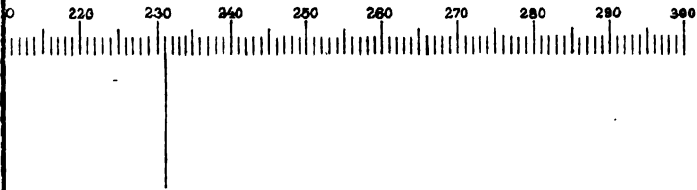
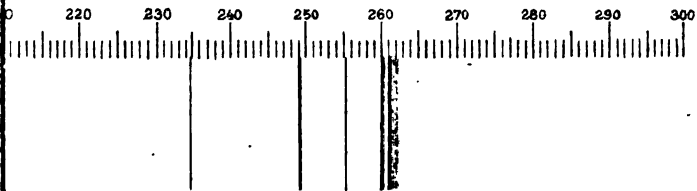
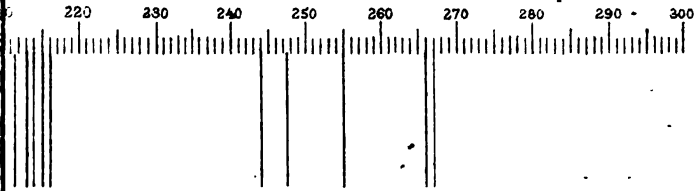
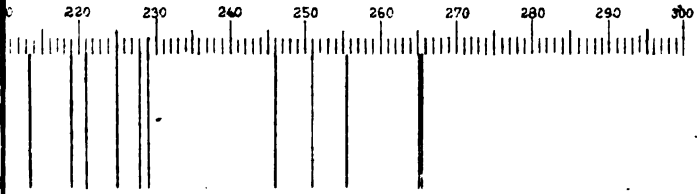
Aner v. Welsch

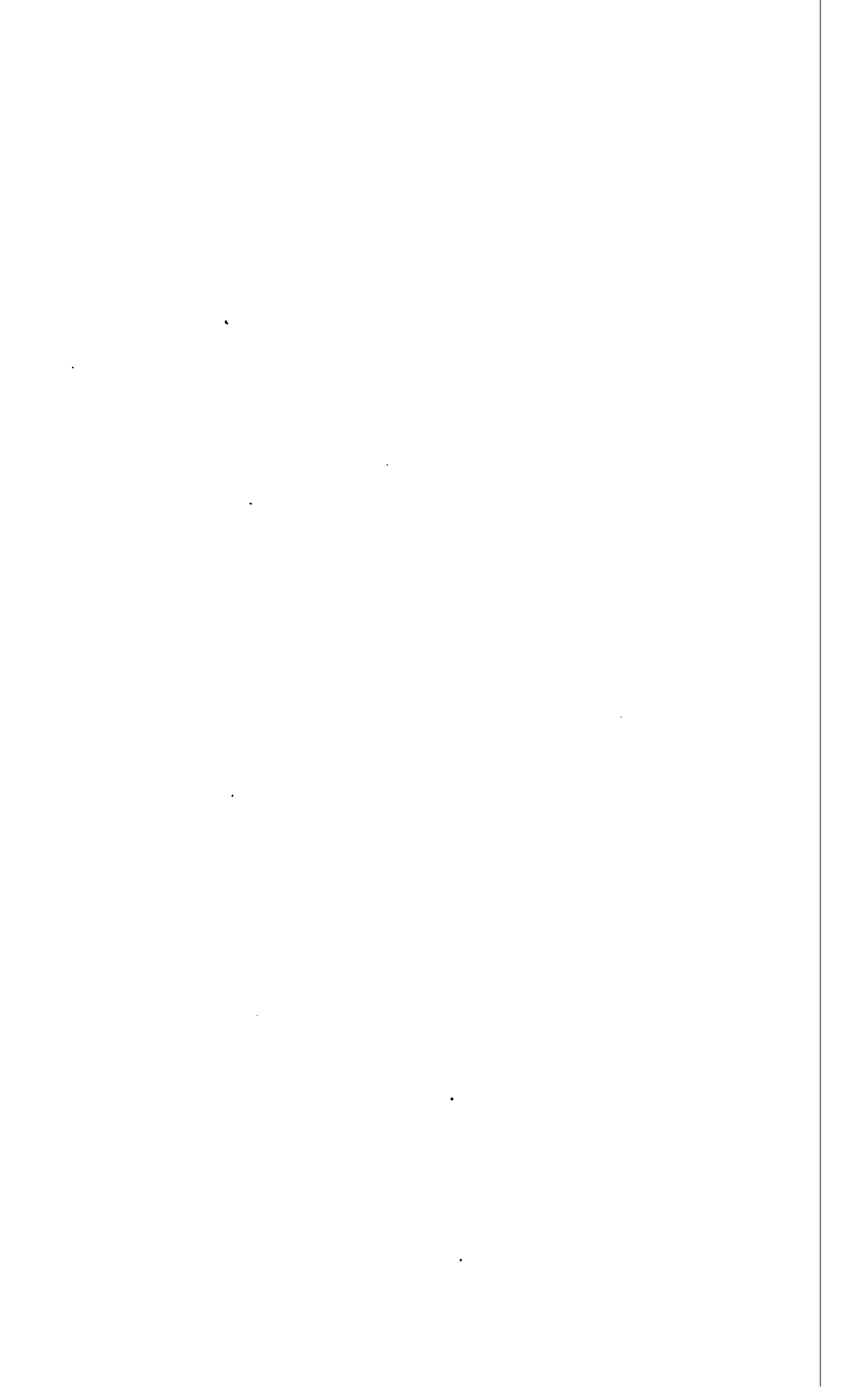


Autor del. P. Sch



Taf. II





Nebenbei gesagt kosten dieselben etwa den zehnten Theil der bisherigen Apparate, sind dem Versagen nicht ausgesetzt und können so zu sagen, durch galvanische Ströme nicht unbrauchbar gemacht werden.

Einer speciellen Anwendung möchte ich noch gedenken und das ist zu Demonstrationszwecken in Vorlesungen.

Es ist in dieser Beziehung bereits der Anfang gemacht und zwar von auf diesem Gebiete selten berufener Seite.

Alle Vortheile, die gerade dieses Instrument besitzt, dürften demselben vor allen anderen den Vorzug geben.

Bei dem Glanze dieser Spectren kann man noch einen Schritt weiter machen.

Werden die Strahlen des Bogens durch eine Objectivlinse parallel gemacht und dann durch eine Cylinderlinse zur Brennpunktlinie vereinigt, so steigt schon bei 5—6 Elementen die Leuchtkraft des Spectrums bis zur Unerträglichkeit für das Auge.

Der Objectivdarstellung dürften sonach keine grossen Schwierigkeiten in dem Wege stehen. Wenigstens sieht man in dem sonst dunklen Zimmer das auf einen Schirm geworfene Spectrum bis auf ein halbes Meter vom Ocular deutlich.

Bei dem Umstande, dass es gelingt, die Spectrallinien auf ganz dunklem Hintergrunde zu entwerfen, lassen sich aus dieser Verstärkung des Lichtes neue Beziehungen ableiten, worüber ich nächstens berichten werde.

Notiz über die Lemniscate.

Von Dr. P. H. Schoute,

Professor an der Universität in Gröningen.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. December 1883.)

In der Arbeit: „Die Lemniscate in rationaler Behandlung“ (Abhandlungen der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften 1873) entwickelte Herr Prof. Emil Weyr unter anderen, die in dem folgenden Satze zusammengefassten Resultate:

„Die Lemniscate $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2) \dots (L)$ wird von jeder Tangente U der gleichseitigen Hyperbel $x^2-y^2 = \frac{1}{2} a^2 \dots (H)$ in vier Punkten geschnitten, deren Tangenten durch einen Punkt u von (L) hindurchgehen; den Punkt u erhält man, wenn die doppelte Entfernung des Mittelpunktes O von der Tangente U von O aus auf die Senkrechte von O auf U nach der von U abgewandten Seite aufgetragen wird.“

Die vorliegende Mittheilung enthält einige Erweiterungen dieses Satzes.

1. „Die Berührungspunkte der sechs durch irgend einen Punkt P der Ebene an die (L) gelegten Tangenten liegen in einem Kegelschnitte K_P .“

Mittelst des Kreisbüschels $x^2+y^2 = u(x+y)\sqrt{2}$, dessen Elemente die gegebene Lemniscate (L) nur in einem mit u veränderlichen Punkte treffen, hat Herr Weyr die Coordinaten dieses Lemniscatenpunktes als rationale Functionen des Radius u dargestellt. Aus den Gleichungen

$$x = \frac{(a^2 + u^2)u\sqrt{2}}{a^4 + u^4}, \quad y = \frac{(a^2 - u^2)u\sqrt{2}}{a^4 + u^4} \quad 1),$$

welche diese Parameterdarstellung angeben, fand er dann für die Gleichung der Tangente im Punkte u von (L) :

$$(a^2 + u^2)(a^4 - 4a^2u^2 + u^4)x - (a^2 - u^2)(a^4 + 4a^2u^2 + u^4)y + 4a^4u^2\sqrt{2} = 0,$$

woraus er ableitete, dass die Gleichung

$$u^6 - 3a^2 \frac{x-y}{x+y} u^4 + \frac{4a^4 \sqrt{2}}{x+y} u^3 - 3a^4 u^2 + a^6 \frac{x-y}{x+y} = 0 \quad 2)$$

die Parameterwerthe der sechs Lemniscatenpunkte bestimmt, deren Tangenten durch einen gegebenen Punkt P der Ebene gehen der x, y zu Coordinaten hat. Weiter zeigte er, dass die Parameter v der acht Schnittpunkte von (L) mit dem Kegelschnitte

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad 3)$$

der Gleichung

$$Fv^8 + 2a^2(D-E)v^7\sqrt{2} + 2a^4(A-2B+C)v^6 + 2a^4(D+E)v^5\sqrt{2} + 2a^4\{F+2a^2(A-C)\}v^4 + 2a^6(D-E)v^3\sqrt{2} + 2a^8(A+2B+C)v^2 + 2a^8(D+E)v\sqrt{2} + Fa^8 = 0 \quad 4)$$

Genüge leisten und dass unabhängig von den Coefficienten der Kegelschnittsgleichung 3) zwischen ihnen die Relationen

$$(v)_5 = a^4(v)_1, \quad (v)_7 = a^4(v)_3, \quad (v)_8 = a^8 \quad 5)$$

bestehen, worin das Symbol $(v)_k$ die Summe aller Producte von je k -Factoren der acht Parameterwerthe v bedeutet.

Bilden nun die sechs Punkte u von 2) mit den zwei Punkten P_1 und P_2 von (L) , die den Parameterwerthen π_1, π_2 entsprechen mögen, die acht Schnittpunkte v von (L) mit irgend einem Kegelschnitte 3), so hat man mittelst der sich auf ganz analoge Weise auf die sechs Punkte u von 2) beziehenden Bezeichnung $(u)_k$

$$\begin{aligned} (v)_1 &= (u)_1 + \pi_1 + \pi_2 = \pi_1 + \pi_2 \\ (v)_2 &= (u)_2 + (\pi_1 + \pi_2)(u)_1 + \pi_1 \pi_2 = -3a^2 \frac{x-y}{x+y} + \pi_1 \pi_2 \\ (v)_3 &= (u)_3 + (\pi_1 + \pi_2)(u)_2 + \pi_1 \pi_2 (u)_1 = -\frac{4a^4 \sqrt{2}}{x+y} \\ &\quad - 3a^2 \frac{x-y}{x+y} (\pi_1 + \pi_2) \\ (v)_4 &= (u)_4 + (\pi_1 + \pi_2)(u)_3 + \pi_1 \pi_2 (u)_2 = -3a^4 - \frac{4a^4 \sqrt{2}}{x+y} (\pi_1 + \pi_2) \\ &\quad - 3a^2 \frac{x-y}{x+y} \pi_1 \pi_2 \end{aligned} \quad 6)$$

$$\begin{aligned}
 (v)_5 &= (u)_5 + (\pi_1 + \pi_2)(u)_4 + \pi_1 \pi_2 (u)_3 = -3a^3(\pi_1 + \pi_2) \\
 &\quad - \frac{4a^3\sqrt{2}}{x+y} \pi_1 \pi_2 \\
 (v)_6 &= (u)_6 + (\pi_1 + \pi_2)(u)_5 + \pi_1 \pi_2 (u)_4 = a^6 \frac{x-y}{x+y} - 3a^4 \pi_1 \pi_2 \\
 (v)_7 &= (\pi_1 + \pi_2)(u)_6 + \pi_1 \pi_2 (u)_5 = a^6 \frac{x-y}{x+y} (\pi_1 + \pi_2) \\
 (v)_8 &= \pi_1 \pi_2 (u)_6 = a^6 \frac{x-y}{x+y} \pi_1 \pi_2,
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (v)_5 \\ (v)_6 \\ (v)_7 \\ (v)_8 \end{aligned}} \right\} 6)$$

wodurch die Gleichungen 5) übergehen in

$$\begin{aligned}
 (x+y)(\pi_1 + \pi_2) + \pi_1 \pi_2 \sqrt{2} &= 0 \\
 (x-y)(\pi_1 + \pi_2) + a^2 \sqrt{2} &= 0 \\
 (x+y)a^2 - (x-y)\pi_1 \pi_2 &= 0
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x+y)(\pi_1 + \pi_2) + \pi_1 \pi_2 \sqrt{2} \\ (x-y)(\pi_1 + \pi_2) + a^2 \sqrt{2} \\ (x+y)a^2 - (x-y)\pi_1 \pi_2 \end{aligned}} \right\} 7).$$

Diese drei Gleichungen sind — unabhängig von der Lage des Punktes P — den zwei Gleichungen

$$\pi_1 + \pi_2 = -\frac{a^2\sqrt{2}}{x-y}, \quad \pi_1 \pi_2 = \frac{x+y}{x-y} a^2 \quad 8)$$

äquivalent; so dass man bei gegebenen x, y zu den sechs Punkten u von 2) immer ein Punktepaar P_1, P_2 fügen kann, dass die hierdurch erhaltenen acht Punkte den Gleichungen 5) Genüge leisten. Also ist der obige Satz bewiesen.

Wir nennen die beiden weiteren Schnittpunkte P_1 und P_2 von K_p^2 mit (L) die Restpunkte von K_p^2 oder kürzer die Restpunkte von P .

2. „Der geometrische Ort der Punkte P , deren Restpunkte zusammenfallen, ist die gleichseitige Hyperbel (H) .“¹

Wenn der Punkt P eine willkürliche Gerade g durchläuft, so bilden seine Restpunkte auf (L) eine quadratische Involution, welche degenerirt sobald g eine Tangente von (H) wird.“

Für $\pi_1 = \pi_2 = \pi$ gehen die Gleichungen 7) über in

$$\begin{aligned}
 (x+y)\sqrt{2} + \pi &= 0 \\
 \pi(x-y)\sqrt{2} + a^2 &= 0
 \end{aligned}$$

und man erhält durch Elimination von π die Curve $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}a^2$.

¹ Dieser Theil des Satzes wird erst später in seiner wahren Bedeutung hervortreten (vergleiche Art. 7).

Weiter erhält man durch Auflösung der Gleichungen 8) nach x und y unmittelbar

$$x = -\frac{a^2 + \pi_1 \pi_2}{(\pi_1 + \pi_2)\sqrt{2}}, \quad y = \frac{a^2 - \pi_1 \pi_2}{(\pi_1 + \pi_2)\sqrt{2}} \quad 9).$$

Durchläuft der Punkt x, y nun die Gerade $Ax + By + C = 0$, so besteht zwischen den Parametern π_1 und π_2 der Punkte P_1, P_2 die Relation

$$(A+B)\pi_1 \pi_2 - C(\pi_1 + \pi_2)\sqrt{2} + (A-B)a^2 = 0$$

und dies ist die allgemeinste Verwandtschaftsgleichung der quadratischen Involution.

Aus den beiden nun bewiesenen Theilen des Satzes folgt, dass die Doppelpunkte der den Punkten P der Geraden g entsprechenden Involution die Restpunkte der beiden Schnittpunkte von g und (H) sind. Desshalb fallen diese Doppelpunkte in einen Punkt zusammen, wenn g die (H) berührt und wird die Involution dann eine uneigentliche, indem jedes ihrer Paare den Doppelpunkt enthält.

3. „Die Lemniscate (L) bestimmt in ihrer Ebene eine einfache quadratische Transformation. Auch liefert sie eine doppelt unendliche Anzahl von Vierseiten, die der gleichseitigen Hyperbel (H) umschrieben sind, und von welchen jedes durch einen seiner sechs Eckpunkte individualisirt wird.“

Nimmt man in der Ebene von (L) den Punkt P willkürlich an und bestimmt man die Gerade $P_1 P_2$, welche die Restpunkte P_1 und P_2 von P verbindet, so wird diese Gerade die (L) noch in zwei Punkten P'_1 und P'_2 scheiden, die umgekehrt wieder einen Punkt P' der Ebene bestimmen, dessen Restpunkte sie sind. Es leuchtet ein, dass die Verwandtschaft der Punkte P und P' eine involutorische ist.

Sind nun $\pi_1, \pi_2, \pi'_1, \pi'_2$ die Parameterwerthe der Punkte P_1, P_2, P'_1, P'_2 , so ist, wie Herr Weyr in Art. 6 zeigt

$$\pi'_1 + \pi'_2 = -\frac{a^4 + \pi_1^2 \pi_2^2}{\pi_1 \pi_2 (\pi_1 + \pi_2)}$$

$$\pi'_1 \pi'_2 = \frac{a^4}{\pi_1 \pi_2}$$

Wendet man hierauf die Formeln 8) sowohl in Bezug auf π_1' und π_2' als auf π_1 und π_2 an, so findet man zwischen den Coordinaten der Punkte P und P' die Relationen

$$-x_1 + y_1 = \frac{a^2(x+y)}{x^2+y^2},$$

$$x_1 y + x y_1 = 0$$

oder nach Auflösung nach x_1 und y_1

$$x_1 = -\frac{a^2 x}{x^2 + y^2},$$

$$y_1 = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Diese Formeln characterisiren die Verwandtschaft der Punkte P und P' als eine um die y -Axe umgelegte Transformation durch reciproke Radien, welche 0 zum Centrum und a^2 zur Potenz hat.

Die vier Schnittpunkte von (L) mit einer willkürlichen Geraden g lassen sich sechsmal zu je zweien zu Punktepaaren P_1, P_2 combiniren und erzeugen also sechs Punkte P der Ebene, die so mit einander verknüpft sind, dass einer von ihnen die übrigen bestimmt. Da es unter den sechs Paaren P_1, P_2 viermal vorkommt, dass drei Paare einen Punkt gemein haben, liegen die sechs Punkte P dem zweiten Theile des vorhergehenden Satzes zufolge viermal zu je dreien auf einer Tangente von (H) . Und die Sextupel P , deren wahre Bedeutung erst weiterhin einleuchten wird, sind zweifach unendlicher Anzahl, da die Geraden g in der Ebene es sind, u. s. w.

4. „Geht der Kegelschnitt K_2^2 von P durch Q , so geht auch der Kegelschnitt K_2^2 von Q durch P .“

Wir suchen die Gleichung des Kegelschnittes K_2^2 . Substituiren wir die Werthe für $\pi_1 + \pi_2$ und $\pi_1 \pi_2$ aus 8) in die Formeln 6), so ergibt sich

$$(v)_1 = -\frac{a^2 \sqrt{2}}{x-y},$$

$$(v)_3 = -\frac{a^2 \sqrt{2}}{x+y},$$

$$(v)_2 = -\frac{2a^2(x^2+y^2-4xy)}{x^2-y^2},$$

$$(v)_4 = \frac{8a^6}{x^2-y^2} - 6a^4.$$

$$(v)_5 = -\frac{a^6\sqrt{2}}{x-y}, \quad (v)_7 = -\frac{a^8\sqrt{2}}{x+y},$$

$$(v)_6 = -\frac{2a^6(x^2+y^2+4xy)}{x^2-y^2}, \quad (v)_8 = a^8.$$

Deshalb ist die Gleichung in v , welche diese acht Punkte bestimmt

$$r_8 + \frac{a^2\sqrt{2}}{x-y} v^7 - 2a^2 \frac{x^2+y^2-4xy}{x^2-y^2} v^6 + \frac{a^4\sqrt{2}}{x+y} v^5 +$$

$$+ \left(\frac{8a^6}{x^2-y^2} - 6a^4 \right) v^4 + \frac{a^6\sqrt{2}}{x-y} v^3 - 2a^6 \frac{x^2+y^2+4xy}{x^2-y^2} v^2 +$$

$$+ \frac{a^8\sqrt{2}}{x+y} v + a^8 = 0.$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit 4) giebt weiter

$$A = \frac{2a^2-3x^2+y^2}{2a^2(x^2-y^2)}, \quad B = \frac{-2xy}{a^2(x^2-y^2)}, \quad C = \frac{-2a^2+x^2-3y^2}{2a^2(x^2-y^2)},$$

$$D = \frac{x}{2(x^2-y^2)}, \quad E = \frac{-y}{2(x^2-y^2)}, \quad F = 1.$$

Somit ist der dem Punkte $P(x, y)$ der Ebene zugeordnete Kegelschnitt

$$(2a^2-3x^2+y^2)X^2 - 8xyXIJ + (-2a^2+x^2-3y^2)IJ^2$$

$$+ 2a^2xX - 2a^2yIJ + 2a^2(x^2-y^2) = 0 \quad 10).$$

Aber diese Gleichung ändert sich nicht, wenn man x, y mit X, IJ vertauscht, u. s. w.

5. „Der Ort der Punkte P , deren Restpunkte P_1, P_2 mit einem gegebenen Punkte Q in einer Geraden liegen, ist eine cyclische Curve dritten Grades C_3^3 , deren reelle Asymptote auf OQ senkrecht steht; diese Curve geht durch O und berührt in diesem Punkte die in Beziehung auf die Axen zu OQ symmetrische Gerade.“

Wie Herr Weyr angegeben hat, lautet die Gleichung der Geraden P_1P_2

$$(a^2 + \pi_1\pi_2)\{a^4 - a^2(\pi_1 + \pi_2)^2 + \pi_1^2\pi_2^2\}X -$$

$$-(a^2 - \pi_1\pi_2)\{a^4 + a^2(\pi_1 + \pi_2)^2 + \pi_1^2\pi_2^2\}IJ + 2a^4\pi_1\pi_2(\pi_1 + \pi_2)\sqrt{2} = 0.$$

Die Bedingung, dass diese Gerade durch den Punkt $Q(x_q, y_q)$ hindurchgeht, ist in Verbindung mit 8):

$$x(x^2+y^2-a^2)x_q+y(x^2+y^2+a^2)y_q=(x^2-y^2)a^2 \quad 11),$$

was den ganzen Satz beweist.

6. „Die Curve C_q^3 ist die erste Polare von Q in Bezug auf (L) . Die sechs Punkte P der Ebene, deren Restpunktepaare auf einer Geraden g liegen, sind die beweglichen Pole von g in Bezug auf (L) . Die Gerade P_1P_2 ist die gerade Polare von P in Bezug auf (L) . Aus der Polarentheorie folgt dann noch, dass je zwei Polsextupel auf einer durch O gehenden cyclischen Curve C^3 liegen, nämlich auf der C_q^3 , welche dem Schnittpunkte Q der den Sextupeln zugeordneten Geraden entspricht.

In Bezug auf (L) hat jede Gerade g also sechs bewegliche Pole, welche viermal zu je dreien auf einer Tangente von (H) gelegen sind. Die auf einer C_q^3 gelegenen Polsextupel bilden auf dieser Curve eine Involution sechster Ordnung, die mit dem Büschel der zugeordneten Geraden durch Q projectivisch ist. Wenn Q ein Punkt u von (L) ist, so zerfällt C_q^3 in eine bestimmte Tangente U von (H) und einen Kegelschnitt C_u^2 ; dabei theilt sich jedes Sextupel in zwei Tripel, so dass die Tripel auf U eine cubische Involution auf dieser Geraden, und die Tripel auf C_u^2 eine cubische Involution auf diesem Kegelschnitte bilden. Die letztere Involution hat (H) zum Involutionskegelschnitt.“

Die homogene Gleichung der (L) ist

$$(x^2+y^2)^2-2a^2z^2(x^2-y^2)=0;$$

also ist die erste Polare

$$x_q \frac{\partial f}{\partial x} + y_q \frac{\partial f}{\partial y} + z_q \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

von Q die Curve

$$x(x^2+y^2-a^2z^2)x_q+y(x^2+y^2+a^2z^2)y_q-a^2z(x^2-y^2)z_q=0$$

und diese Gleichung wird mit 11) identisch, wenn man z und z_q durch die Einheit ersetzt.

Dieses Resultat findet man auch, ohne sich der Differentialrechnung zu bedienen, mittelst des Hauptsatzes von Herrn Weyr. Wenn P ein Punkt von (L) ist, so zerfällt die K^2 in zwei Geraden,

die Tangente von (L) in P und eine nicht durch P gehende Tangente von (H) ; dabei sind die zwei übrigen Schnittpunkte der ersten Geraden mit (L) die Restpunkte von P . Aber hieraus folgt nach Artikel 4, dass die C_q^2 die Berührungspunkte der von Q an die (L) gelegten Tangenten enthalten muss. Also hat C_q^3 schon neun Punkte mit der ersten Polare von Q in Bezug auf (L) gemein, diese sechs Berührungspunkte und die drei Doppelpunkte von (L) . Diese neun Punkte lassen aber nur eine durch sie hindurchgehende Curve dritter Ordnung zu; denn während die sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte K_q^2 liegen, liegen die drei Doppelpunkte von (L) nicht in einer Geraden. Deshalb ist C_q^3 mit der ersten Polare von Q in Bezug auf (L) identisch.

Von dieser Seite beleuchtet sind die sechs Punkte P der Ebene, deren Restpunktepaare auf einer Geraden g liegen, offenbar die beweglichen Pole dieser Geraden in Bezug auf (L) . Denn die Curven C_q^2 , die den verschiedenen Punkten Q von g entsprechen, haben nach ihrer ersten Definition ausser den Doppelpunkten von (L) die sechs erwähnten Punkte P gemein; nach der Polarentheorie sind die gemeinschaftlichen Punkte der ersten Polaren der Punkte einer Geraden gerade die Pole dieser Geraden, u. s. w. Aber dann ist auch $P_1 P_2$ die gerade Polare von P .

Am Schlusse von Artikel 3) ist gezeigt worden, dass die sechs Punkte P , welche wir weiterhin als Polsextupel bezeichnen wollen, viermal zu je dreien auf Tangenten U von (H) liegen. Und die weiter im Satze angeführten Relationen sind unmittelbar der allgemeinen Polarentheorie zu entnehmen. Es soll nur noch Einiges erwähnt werden in Beziehung auf die Verzweigungsgruppen der beschriebenen Involutionen, zu deren Aufsuchung wir die Lage der sechs Punkte eines Polsextupels ein wenig näher ins Auge fassen.

Die vier Schnittpunkte u_1, u_2, u_3, u_4 einer Geraden g mit (L) kann man auf drei Arten in zwei Paare theilen, nämlich als $u_1 u_2$ und $u_3 u_4$, als $u_1 u_3$ und $u_2 u_4$, als $u_1 u_4$ und $u_2 u_3$; diesen drei Paaren von Punktepaaren entsprechen selbstverständlich die drei Paare von gegenüberliegenden Eckpunkten des Vierseits der Tangenten an die (H) , dessen Eckpunkte das Polsextupel bilden.

Legt man also vom Punkte P , welcher der Combination $u_1 u_2$ entspricht, die Tangenten an (H) , so enthält die eine die den Combinationen $u_1 u_3$ und $u_1 u_4$ entsprechenden Punkte P , die andere die den Combinationen $u_2 u_3$ und $u_2 u_4$ entsprechenden Punkte P und es entspricht der übriggebliebenen Combination $u_3 u_4$ der Gegenpunkt des Ausgangspunktes P . Nun ist einleuchtend, dass zwei Punkte eines Polsextupels nur dann zusammenfallen können, wenn die zugeordnete Gerade g die (L) berührt (nicht jedoch, wenn z. B. g durch einen Doppelpunkt von (L) hindurchgeht, da doch die beiden in diesem Punkte von (L) zusammenfallenden Punkte verschiedenen Parameterwerthen angehören). Und in diesem Falle reducirt sich das im Allgemeinen aus drei Paaren von Gegenpunkten bestehende Sextupel auf ein Paar von Doppелеlementen und ein Paar Verzweigungselemente. Fallen nämlich u_3 und u_4 zusammen, so coincidiren sowohl die Pole, welche den Combinationen $u_1 u_3$ und $u_1 u_4$ als die gegenüberliegende Pole, welche den Combinationen $u_2 u_4$ und $u_2 u_3$ entsprechen. Dabei fällt der Pol der Combination $u_1 u_2$ in den Punkt $u_3 u_4$ auf (L) , zufolge des Hauptsatzes von Herrn Weyr, der im nächsten Artikel nochmals ausgesprochen wird, und der Pol der Combination $u_3 u_4$ fällt nach Artikel 2 auf (H) in einen Punkt, dessen Abhängigkeit vom Lemniscatenpunkte $u_3 u_4$ ebenfalls im nächsten Artikel näher betrachtet werden soll. Alles zusammengenommen, erhält man also das Verzweigungssextupel, welches der Tangente in P an (L) entspricht, wenn man den Punkt P und den diesem Punkte zugeordneten Punkt u von (H) als Verzweigungspaar und die Schnittpunkte der Tangente in u an (H) mit den Tangenten aus P an (H) als Doppelpaar annimmt.

Hieraus folgt nun unmittelbar, dass die Involution sechster Ordnung auf jeder C_2^3 sechs Verzweigungsgruppen aufweist, die den Tangenten aus Q an (L) entsprechen, und dass eine jede dieser Gruppen aus einem Verzweigungspaar und einem Doppelpaar besteht. Überdies sind die sechs Verzweigungspare die sechs freien Schnittpunkte von C_2^3 mit (L) und die sechs Schnittpunkte von C_2^3 mit (H) .

Liegt Q auf (L) , so zerfällt C_2^3 in eine Tangente U von (H) und eine Kreislinie C_u^2 durch o , welche, jede für sich Träger einer cubischen Involution sind. Man findet leicht, dass jede dieser

Involutionen vier Verzweigungsgruppen hat, dass die vier Schnittpunkte von U mit (L) die Verzweigungspunkte der Involution auf U , die vier Schnittpunkte von C_u^2 mit (H) die Verzweigungspunkte der Involution auf C_u^2 sind und endlich (H) die Involutioncurve der Involution auf C_u^2 ist, u. s. w. ¹

Endlich bemerke ich in aller Kürze, dass auf jeder C_q^3 die drei Paare von Gegenpunkten eines Polsextupels drei Paare conjugirter Punkte desselben Systems sind; woraus dann ohne Mühe folgt, dass die Involutioncurve der Involution sechsten Grades auf der C_q^3 zusammengesetzt ist aus der dreimal gezählten (H) und aus einer Curve C_3^6 sechster Ordnung dritter Classe, nämlich der Cayley'schen Curve einer der Curven dritter Ordnung, für welche C_q^3 Hesse'sche Curve ist.

7. „Der Kegelschnitt K_p^2 von P zerfällt in zwei Gerade, erstens wenn P ein Punkt der (L) , zweitens wenn P ein Punkt von (H) ist. Im ersten Falle besteht der Kegelschnitt K_p^2 aus der Tangente U von (H) und aus der Tangente von (L) im Punkte P , welche letztere hier zugleich die Gerade P_1P_2 ist. Im zweiten Falle schneiden sich die beiden Geraden, aus denen K_p^2 besteht und von welchen jede drei der sechs Berührungspunkte enthält, in einem Punkte u von (L) und bilden mit dem Leitstrahle Ou Winkel von 30° ; dabei wird der Winkel POu von der y -Axe halbirt und ist die gerade Polare P_1P_2 von P die Tangente von (L) in u “. ²

¹ Man vergleiche die Abhandlung des Herrn Weyr: „Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen“ (Abhandlungen der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1874).

² Der letzte Theil dieses und des folgenden Satzes findet sich in den Aufgaben 314 und 315 der Aufgabensammlung von Ralph A. Roberts (A collection of examples and problems on conics and some of the higher plane curves, London 1882), welche mir jedoch erst zur Hand kam, als ich meine Notiz schon eingeliert hatte. Ausgehend von der Lemniscatengleichung $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 0$ findet dieser Mathematiker, dass die Discriminante des Kegelschnittes K_p^2 der Form $(x^2 + y^2 + z^2)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$ proportional ist und nun betrachtet er wohl den Fall $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ der gleichseitigen Hyperbel aber nicht die (L) selbst, so dass der Satz von Herrn Weyr nicht hervortritt.

Ich bemerke nur noch, dass seine Aufgabe 311 zeigt, wie die Ellipse von Cassini die analoge Eigenschaft hat, dass die Berührungspunkte der sechs von einem Curvenpunkte an die Curve gelegten Tangenten auf einem Kegelschnitte liegen.

Bekanntlich ist die Bedingung, welche aussagt, dass der Kegelschnitt 10) in zwei Geraden zerfallen soll

$$\begin{vmatrix} 2a^2 - 3x^2 + y^2 & -4xy & a^2x \\ -4xy & -2a^2 + x^2 - 3y^2 & -a^2y \\ a^2x & -a^2y & 2(x^2 - y^2) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$2(x^2 + y^2)^2(x^2 - y^2) - (5x^4 - 6x^2y^2 + 5y^4)a^2 + 2(x^2 - y^2)a^4 = 0,$$

was sich in die Form

$$2(x^2 + y^2)^2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2a^2 - 4(x^2 - y^2)^2a^2 + 2(x^2 - y^2)a^4 = 0$$

oder

$$\{(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)\} \{2(x^2 - y^2) - a^2\} = 0$$

bringen lässt. Also ist der erste Theil des Satzes bewiesen.

Ich übergehe den ersten Fall der Zerlegung von K_p^2 , weil dieser von Herrn Weyr eingehend untersucht worden ist und wende mich sogleich zum zweiten. Da hier die Bedingung $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}a^2$ obwaltet, so kann die Gleichung 10) von K_p^2 auch in der Form

$$\begin{aligned} (3a^2 - 4x^2)X^2 - 16xyXIJ - (3a^2 + 4y^2)IJ^2 \\ + 4a^2xX - 4a^2yIJ + 2a^4 = 0 \end{aligned}$$

geschrieben werden. Sind nun

$$m_1X + n_1IJ + a^2 = 0, \quad m_2X + n_2IJ + a^2 = 0$$

die beiden Theile von K_p^2 , so hat man die Relationen

$$\left. \begin{aligned} m_1 + m_2 &= 2x \\ m_1m_2 &= \frac{3}{2}a^2 - 2x^2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} n_1 + n_2 &= -2y \\ n_1n_2 &= -\frac{3}{2}a^2 - 2y^2 \end{aligned} \right\} m_1n_2 + m_2n_1 = -8xy$$

und erhält also

$$\begin{aligned} m_1 &= x - y\sqrt{3}, & n_1 &= -y - x\sqrt{3}, \\ m_2 &= x + y\sqrt{3}, & n_2 &= -y + x\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Desshalb sind die beiden Geraden von K_p^2 gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} (x-y\sqrt{3})X-(x\sqrt{3}+y)IJ+a^2=0 \\ (x+y\sqrt{3})X+(x\sqrt{3}-y)IJ+a^2=0 \end{cases} \quad 12)$$

und die Coordinaten ihres Schnittpunktes durch

$$X = -\frac{a^2x}{x^2+y^2}, \quad IJ = \frac{a^2y}{x^2+y^2} \quad 13).$$

Eliminirt man nun x und y zwischen den Gleichungen 12) und der Bedingung $x^2-y^2 = \frac{1}{2} a^2$, so findet man die Gleichung der (L); also schneiden sich die beiden Geraden von K_p^2 in einem Punkte u von (L).

Die durch die Bedingung $x^2-y^2 = \frac{1}{2} a^2$ gegebenen Relationen sind den Gleichungen 12) und 13) unmittelbar zu entnehmen.

Mit Rücksicht auf den ersten Theil des zweiten Satzes gibt es offenbar keine eigentliche K_p^2 , die (L) in den zusammenfallenden Restpunkten von P berührt; denn die Punkte P , deren Restpunkte zusammenfallen, liegen auf (H) und den Punkten P von (H) entsprechen zerfallende Kegelschnitte K_p^2 .

Aus den Gleichungen 13) leitet man ab, dass die Curven (L) und (H) einander punktweise entsprechen in der um die y -Axe umgelegten Transformation durch reciproke Radien mit dem Centrum O und der Potenz a^2 , welche in Art. 3 schon gefunden ist. In Verbindung mit den schon erhaltenen Resultaten ergibt sich hieraus, dass die sechs Pole einer willkürlichen Geraden g sich einfach definiren lassen als die sechs Schnittpunkte der vier Tangenten von (H), welche diese Curve berühren in den vier Punkten, die in obenstehender quadratischer Transformation den vier Schnittpunkten von g mit (L) entsprechen. Ein Resultat, welches die Reduction des Polsextupels einer Tangente von (L) sehr übersichtlich macht und die weitere Reduction der den Doppeltangenten von (L) entsprechenden Sextupel auf einfache Weise angibt.

Die die sechs Punkte eines Polsextupels tragenden vier Tangenten von (H) berühren somit diese Curve in vier Punkten eines durch O gehenden Kreises, u. s. w.

8 „Die beiden Geraden, welche im zweiten Falle den K_p^2 bilden, sind die Polaren von P in Beziehung auf die zwei gleichseitigen Hyperbeln (\simeq) und (\oslash), die man erhält wenn (H) in

positivem und negativem Sinne um O um den Winkel von 60° gedreht wird; überdies berühren diese beiden Geraden (\diamond), respective (\boxplus)⁴.

Nach den Regeln der Differentialrechnung ist die Umbüllende der Geraden $(x-y\sqrt{3})X-(x\sqrt{3}+y)IJ+a^2=0$ unter der Bedingung $x^2-y^2=\frac{1}{2}a^2$ die gleichseitige Hyperbel $IJ^2-2XIJ\sqrt{3}-X^2=a^2$,

ebenso jene der Geraden $(x+y\sqrt{3})X+(x\sqrt{3}-y)IJ+a^2=0$ die gleichseitige Hyperbel $IJ^2+2XIJ\sqrt{3}-X^2=a^2$; die erste ist (\diamond) die zweite (\boxplus). Für die erste ist die Polare von x, y die zweite, für die zweite ist die Polare von x, y die erste der beiden Geraden.

9. „Die drei gleichseitigen Hyperbeln (H), (\boxplus) und (\diamond) stehen zu einander in der besonderen Beziehung, dass jede von ihnen in Bezug auf irgend eine der beiden übrigen die Polarfigur der dritten ist“.

Nach dem vorhergehenden Satze ist (\boxplus) die Polarfigur von (H) in Bezug auf (\diamond) und ebenso (\diamond) die Polarfigur von (H) in Bezug auf (\boxplus). Der regelmässigen Lage der drei Curven wegen ist nun auch die (\boxplus) die Polarfigur von (\diamond) in Bezug auf (H).

Man findet leicht, dass drei Kegelschnitte, welche in dieser Beziehung zu einander stehen, ein gemeinschaftliches Polardreieck haben und man zur Bestimmung eines solchen Systemes einen der Kegelschnitte und das Polardreieck beliebig wählen kann. Dabei ergibt sich dann auch der Satz dieses Artikels unabhängig von der regelmässigen Lage der drei Curven als eine unmittelbare Folge der zwei aus dem vorhergehenden Satze gefolgerten Schlüsse.

Der vorgeführte Fall ist der einzige, wobei die drei Curven des Systemes gleich und concentrisch sind.

10. „Nennt man die Combination der drei gleichseitigen Hyperbel eine Trihyperbel und ebenso die Combination der drei Lemniscaten (L) (\curvearrowright) und (\curvearrowleft), von denen die beiden letzteren aus der ersten ebenfalls durch Drehung um O um den Winkel von 60° entstehen, eine Trilemniscate, so schneidet jede Tangente der Trihyperbel die Trilemniscate in zwölf Punkten, die eine besondere Gruppierung zulassen. Die Trilemniscatentangenten in vier dieser zwölf Punkte gehen durch einen Punkt der Trilemniscate und von den übrigen acht lassen sich zwei Tripel

absondern, deren Tangenten einander auf der Trihyperbel schneiden.

11. „Zum Orte des Scheitels eines Winkels von 60° , von dessen Schenkeln der eine (H) und der andere (D) berührt, gehört die (L)“.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des letzten Theiles des achten Satzes.

12. „Lässt man (H) um O beiderseits um den Winkel α rotiren, so erhält man zwei neue gleichseitige Hyperbeln. Ein Theil des Ortes der Scheitel eines Winkels 2α , von dessen Schenkeln jedes eine dieser beiden Hyperbeln berührt, ist eine Lemniscate mit der Gleichung $(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{2} a^2(x^2-y^2) \sec^2 \alpha$ “.

Die Tangente im Punkte $x = \frac{1}{2} a \sec \varphi \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \varphi \sqrt{2}$

von (H) ist bekanntlich $x \sec \varphi - y \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{2}$. Betrachten wir sie in den verschiedenen Lagen, die sie durch beide Drehungen erhält, so haben wir es offenbar mit zwei Geraden zu thun, deren Schnittpunkt ein Punkt des betrachteten Ortes ist. In Bezug auf die ungeänderten Axen haben diese Geraden aber die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \sec \varphi + (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \operatorname{tg} \varphi &= \frac{1}{2} a \sqrt{2} \\ (x \cos \alpha - y \sin \alpha) \sec \varphi - (x \sin \alpha + y \cos \alpha) \operatorname{tg} \varphi &= \frac{1}{2} a \sqrt{2} \end{aligned} \right\} 14).$$

Und nun liefert die Elimination von φ uns den angegebenen Theil des Ortes als $(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{2} a^2 (x-y^2) \sec^2 \alpha$.

Ich schliesse diese Notiz mit einem anderen Beweise des von Herrn Weyr herrührenden Satzes, der für alle Curven vierter Ordnung gilt, die drei Doppelpunkte mit Inflexionstangenten besitzen.

¹ Man erhält die Lemniscate $(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{2} a^2 (y^2-x^2) \operatorname{cosec}^2 \alpha$ als zweiten Theil, wenn man von den Paaren von vor der Drehung parallelen Tangenten ausgeht. Endlich wird für $\alpha \geq 45^\circ$ ein dritter Theil geliefert von den Paaren der Tangenten, die vor der Drehung mit einander einen Winkel 4α bilden. Wie gestaltet sich dieser dritte Theil?

Gegeben sei ein Kegelschnitt C^2 und eines seiner Polar-
dreiecke ABC . Ist ABC Coordinatendreieck, so kann die Gleichung von C^2 in die Form $x^2 + y^2 = z^2$ gebracht werden und individualisiren also die Relationen $x = z \cos \varphi$, $y = z \sin \varphi$ einen Punkt Q dieser Curve. Dann ist die Gleichung des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kegelschnittes, welcher C^2 in Q berührt

$$\begin{vmatrix} yz & zr & xy \\ \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\frac{\cos^3 \varphi}{x} + \frac{\sin^3 \varphi}{y} = \frac{1}{z}.$$

Soll dieser Kegelschnitt nun überdies noch durch den festen Punkt P ($x = z \cos \alpha$, $y = z \sin \alpha$) von C^2 gehen, so tritt für φ die Bedingungsgleichung

$$\frac{\cos^3 \varphi}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \varphi}{\sin \alpha} = 1$$

auf. Drückt man $\sin \varphi$ durch $\cos \varphi$ aus, so wird sie nach zweimaliger Theilung durch $\cos \varphi - \cos \alpha$ übergehen in:

$$\cos^4 \varphi + 2 \cos \alpha \cos^3 \varphi - 2 \cos \alpha \cos \varphi - \cos^2 \alpha = 0 \quad 1a).$$

Also gehen durch A, B, C und den Punkt P von C^2 vier Kegelschnitte, die C^2 in einem von P verschiedenen Punkt berühren.

Die vier Schnittpunkte eines durch A, B, C gehenden Kegelschnittes $ayz + bzr + cxy = 0$ mit C^2 sind bestimmt durch die Gleichung

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi + c \cos \varphi \sin \varphi = 0$$

oder

$$c^2 \cos^4 \varphi + 2ac \cos^3 \varphi + (a^2 + b^2 - c^2) \cos^2 \varphi - 2ac \cos \varphi - a^2 = 0.$$

Diese Gleichung stimmt mit 1a) überein, wenn

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad a = c \cos \alpha.$$

Da diese zwei Gleichungen die Verhältnisse der Coefficienten a, b, c unzweideutig bestimmen, so liegen die vier Berührungspunkte 1a) auf einem dem Dreiecke ABC umschriebenen Kegelschnitte. Diese Curve hat

$$\frac{\cos \alpha}{x} + \frac{\sin \alpha}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

zur Gleichung und in Bezug auf das Dreieck der Tangenten in A, B, C den Punkt P zum Brianchon'schen Punkte.

Durchläuft nun der Punkt P die gegebene C^2 , so wird der

Kegelschnitt $\frac{\cos \alpha}{x} + \frac{\sin \alpha}{y} + \frac{1}{z} = 0$ von der Curve $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$

umhüllt. Diese Curve vierter Ordnung hat die Punkten A, B, C zu Doppelpunkten und die Tangenten in diesen Punkten zu Inflexionstangenten.

Nimmt man nun endlich das Dreieck ABC als Fundamentaldreieck einer quadratischen Transformation an, so erhält man den Satz:

„Eine Curve C^4 mit drei Doppelpunkten A, B, C und zwei Inflexionstangenten in jedem von diesen, lässt aus jedem ihrer Punkte P vier Tangente zu; die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen in einer Geraden g . Und bei Bewegung von P auf C^4 umhüllt g einen Kegelschnitt, welcher ABC zum Polardreieck hat und auf den Seiten dieses Dreieckes von den dem gegenüberliegenden Eckpunkte angehörenden Inflexionstangenten der C^4 berührt wird“.

Diese Betrachtung der mehr allgemeinen Curve C^4 mit drei Inflexionsdoppelpunkten, die sich ganz leicht durchführen und auf den Kegelschnitt der Berührungspunkte der sechs durch einen beliebig gewählten Punkt P der Ebene gehenden Tangenten ausdehnen lässt, hat mich zu einem rein geometrischen Beweise des schönen Weyr'schen Satzes geführt. Da er schon zur Vorlage gebracht ist (in der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam, Sitzung vom 29. December 1883), so lasse ich ihn hier weg. Ich weise nur noch hin auf die reciproke Eigenschaft der reciproken Curven vierter Classe mit drei Rückkehrdoppeltangenten, wovon die Evolute eines Mittelpunktskegelschnittes ein bekanntes Beispiel darbietet.



	Seite
XXVII. Sitzung vom 13. December 1883: Übersicht	1163
<i>Herz</i> , Bahnbestimmung des Planeten 232 <i>Russia</i> . [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.]	1166
XXVIII. Sitzung vom 20. December 1883: Übersicht	1197
<i>Stefan</i> , Über die Berechnung der Inductionscoefficienten von Drahtrollen. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.]	1201
<i>Odarcil</i> , Über den Mechanismus der Fernwirkung elektrischer Kräfte. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.]	1212
<i>Arche</i> , Über den Cerit und dessen Aufarbeitung auf Cer, Lan- than und Didymverbindungen	1224
<i>Auer v. Welsbach</i> , Über die Erden des Gadolinit von Ytterby. II. Abhandlung. (Mit 2 Tafeln.)	1237
<i>Schoute</i> , Notiz über die Lemniscate	1252

Preis des ganzen Heftes: 4 fl. = 8 RMk.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden drei gesonderten Abtheilungen, welche auch einzeln bezogen werden können:

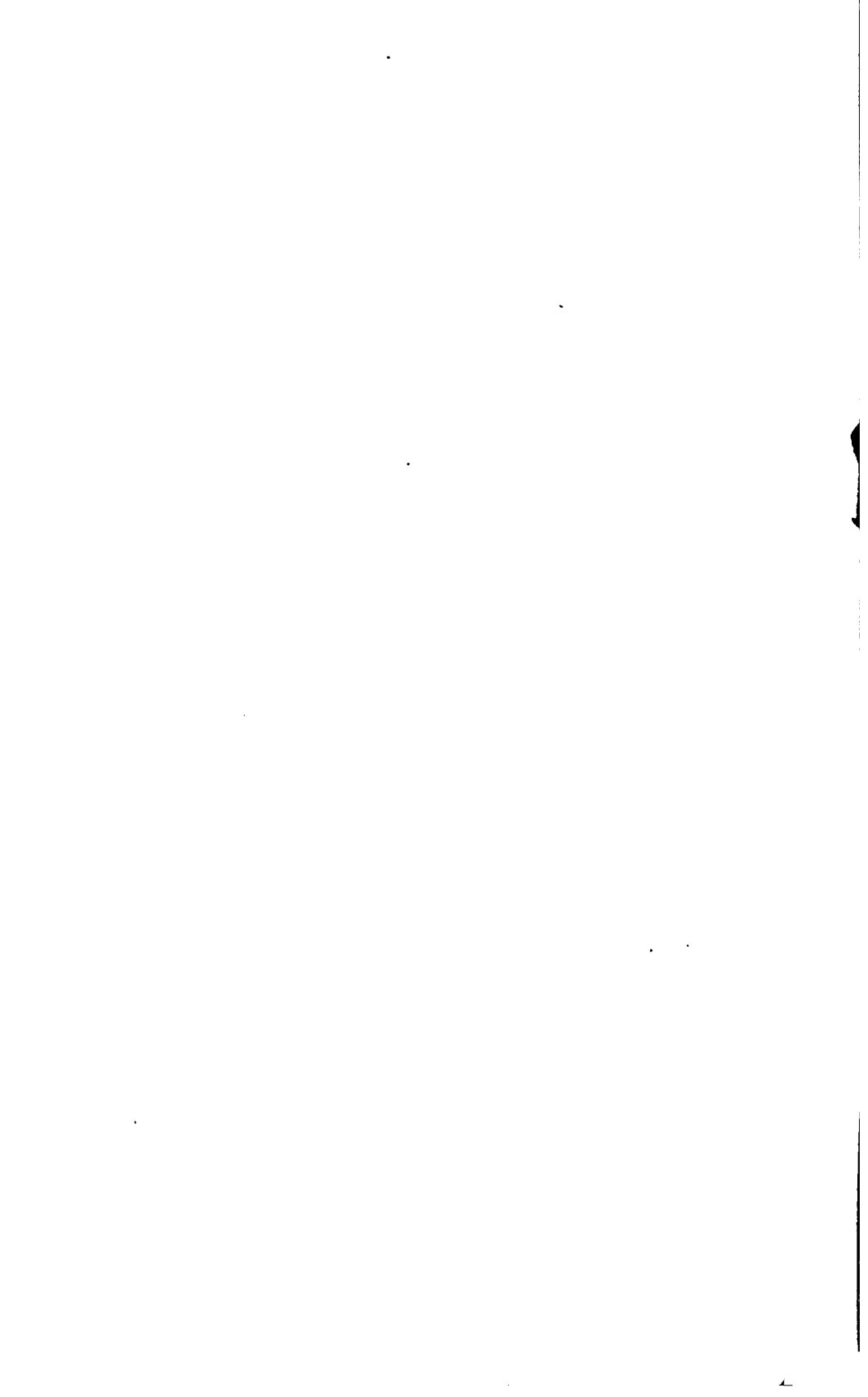
- I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.
- II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.
- III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

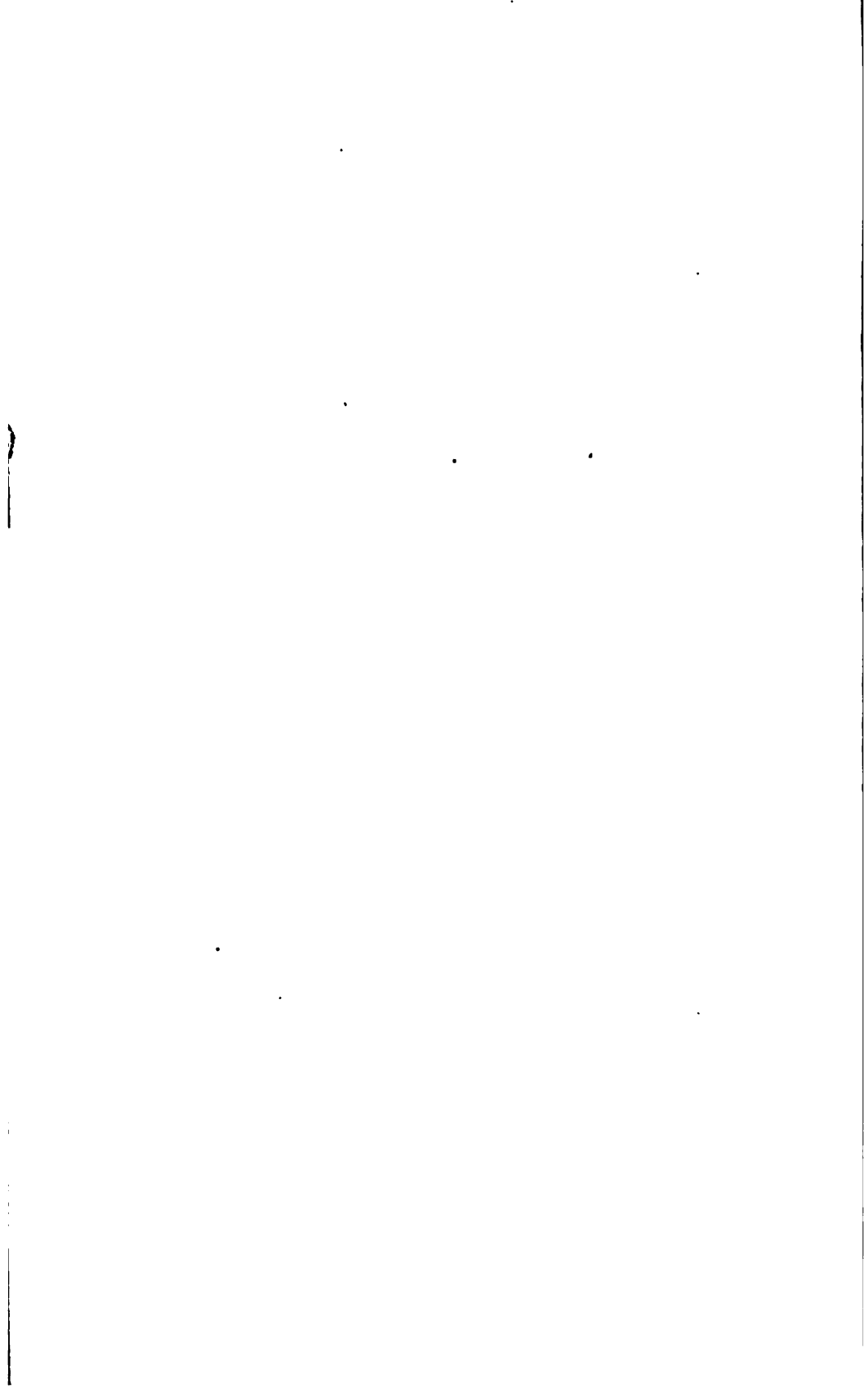
Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

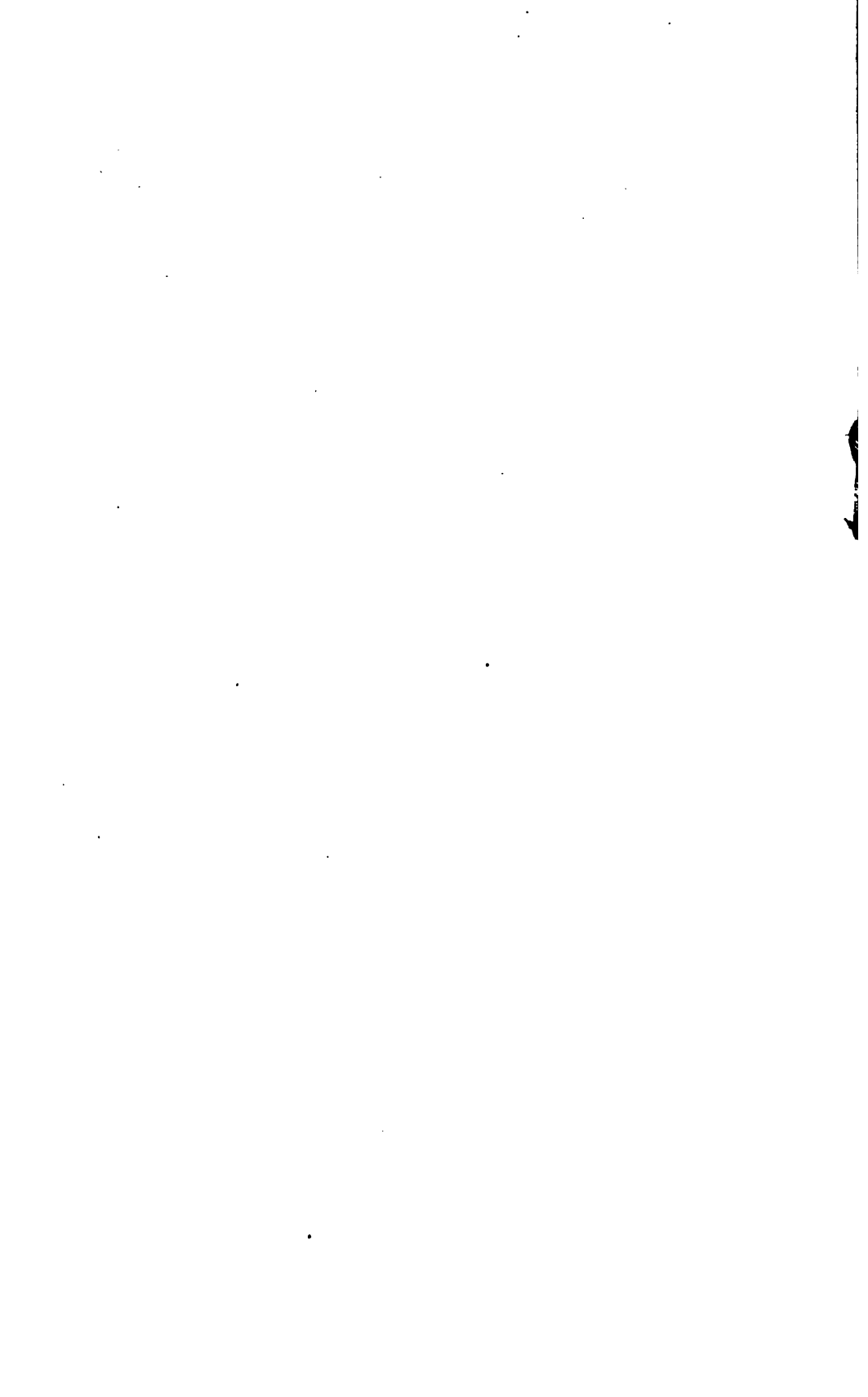
Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften“ herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.









LIBRARY
DUE MAY 27 1958 RR

AUG 2 1970 H

305 1663

CANCELLED
CANCELLED
CANCELLED

2044 090 836 768

